

# DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS MEMORIAS

## XV SEMANA REGIONAL DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA EN MATEMÁTICAS



EL SABER DE MIS HIJOS  
HARÁ MI GRANDEZA

**DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
UNIVERSIDAD DE SONORA**





**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**MEMORIAS DE LA XV SEMANA REGIONAL DE  
INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA EN  
MATEMÁTICAS**

**Editores:**

*Horacio Leyva Castellanos*

*Francisco Armando Carrillo Navarro*

*José Luis Díaz Gómez*

**DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**

**UNIVERSIDAD DE SONORA**



# **Comité Organizador de la XV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas**

---

---

L. M. Arturo Fragozo Robles  
Presidente

M. C. Horacio Leyva Castellanos  
Secretario

M. C. Edelmira Rodríguez Alcantar  
Dra. Dora Julia Borbón González  
M. C. José María Bravo Tapia  
Dr. Fernando Verduzco González



**Departamento de Matemáticas  
Universidad de Sonora  
Hermosillo, Sonora**



## **DIRECTORIO**

---

---

Dr. Pedro Ortega Romero  
Rector de la Universidad de Sonora

Dr. Enrique Velázquez Contreras  
Secretario General Académico

Dr. Daniel Carlos Gutiérrez Rohán  
Vicerrector, Unidad Regional Centro

Dr. Rogelio Monreal Saavedra  
Director de la División de Ciencias Exactas y Naturales

Dra. M. Guadalupe Ávila Godoy  
Jefa del Departamento de Matemáticas



**Departamento de Matemáticas**  
**Universidad de Sonora**  
**Hermosillo, Sonora**





# Memorias de la XV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas

---

## PRESENTACIÓN

La Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, organizada por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, se ha consolidado ya como un importante foro académico en el que se exponen y discuten diversos tópicos relacionados con las matemáticas y sus aplicaciones, la computación y la docencia en matemáticas. Esto se ha logrado con el esfuerzo de la comunidad matemática de nuestro Departamento y el apoyo de instancias universitarias como la División de Ciencias Exactas y Naturales, la Vicerrectoría de la Unidad Regional Centro, la Dirección de Desarrollo Académico y, muy especialmente, la Rectoría.

Han contribuido también significativamente al fortalecimiento de este evento, la Sociedad Matemática Mexicana, la Secretaría de Educación Pública a través del Programa de Apoyo al Desarrollo Universitario de la DGES-SEIC, la Secretaría de Educación y Cultura del Estado de Sonora, y las Universidades Autónomas de Baja California, de Baja California Sur y Chihuahua.

Uno de los principales objetivos de la Semana ha sido el de promover el intercambio de conocimientos, opiniones y experiencias entre estudiantes, profesores e investigadores de la región noroeste de México, con intereses en las matemáticas y sus aplicaciones, la computación y la docencia en matemáticas. Al mismo tiempo, se ha logrado que distinguidos académicos de instituciones nacionales y extranjeras participen como invitados especiales en las actividades de la Semana, lo que ha enriquecido la discusión de ideas entre los interesados en las disciplinas mencionadas.

Para cumplir con los objetivos mencionados, en la Semana se organizan diferentes actividades tales como: conferencias plenarias, conferencias por invitación, mesas redondas, cursos cortos y ponencias por solicitud. Estas últimas pueden ser conferencias, reportes de investigación o reportes de tesis.

La décimo quinta edición de la Semana se llevó a cabo del 28 de Febrero al 4 de Marzo de 2005 en las instalaciones del Departamento de Matemáticas de la Unidad Regional Centro de la Universidad de Sonora y en esta ocasión se contó con invitados especiales de las siguientes instituciones: Facultad de Ciencias, Instituto de Matemáticas e Instituto de Investigación en Matemáticas Aplicadas (IIMAS) de la UNAM. UNAM-Ensenada; Universidad Autónoma de Baja California; Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa; Texas Instruments de México; Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones del Centro de Investigación Científica y de Estudios Superiores de Ensenada; Instituto Mexicano del Petróleo.

Es oportuno recordar que los orígenes de la Licenciatura en Matemáticas, al igual que las de Física y Literatura y Letras Hispánicas, se remontan a la antigua Escuela de Altos Estudios, que nació un 4 de Marzo de 1964. Por tal motivo, ya se ha vuelto una tradición

---

---

en nuestro Departamento celebrar esa fecha con una mesa redonda en la que un profesor de cada una de esas licenciaturas da sus puntos de vista sobre algún tópico de las matemáticas, desde la perspectiva de cada una de esas disciplinas. En esta ocasión el tema de la mesa fue "Cambio y Movimiento" y se tuvo una amena participación de los integrantes de la mesa y del público asistente.

La XV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas reunió, además de los invitados especiales, a un nutrido grupo de participantes provenientes de diversas instituciones educativas del país, quienes participaron como ponentes o asistentes. El programa de actividades incluyó una conferencia inaugural y una conferencia magistral; tres conferencias plenarias y dos conferencias por invitación; ocho cursos cortos, y treinta y una ponencias por solicitud. El Comité Organizador agradece a todos los ponentes su interés por presentar trabajos de calidad en el evento; asimismo, agradece muy especialmente a todos los evaluadores, el cuidadoso y detallado arbitraje de las ponencias por solicitud recibidas.

Finalmente, extendemos un especial reconocimiento a todos los compañeros que aportaron su invaluable colaboración a la organización de esta edición de la Semana: a los profesores y estudiantes del Departamento de Matemáticas, así como a todo el personal administrativo, quienes auxiliaron al Comité Organizador en las diversas tareas que un evento de este tipo requiere.

Esperamos que lo publicado en estas memorias sea de utilidad y contribuya a que un mayor número de personas se acerquen a las matemáticas y se interesen por conocerlas, estudiarlas y aplicarlas en otras disciplinas.

Los Editores  
Marzo de 2005.



**Departamento de Matemáticas**  
**Universidad de Sonora**  
**Hermosillo, Sonora**

# Memorias de la XV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas

---

## CONTENIDO

<b>Topología del conjunto de polinomios Hurwitz.....</b>	<b>1</b>
Baltazar Aguirre	
<b>Aplicaciones y Propiedades de los Polinomios Hurwitz.....</b>	<b>7</b>
Baltazar Aguirre Carlos Loredó	
<b>De la Percepción a la Conjetura: un Viaje a través de la Geometría dinámica.....</b>	<b>13</b>
David Benítez Mojica y Lizet Aime Castañeda Valdez	
<b>Estudio Bioeconómico mediante un Modelo de Parámetros Variables.....</b>	<b>19</b>
Dora Julia Borbón González	
<b>Análisis Matemático del Tiempo de Corrimiento y Aceleración del Algoritmo de Ordenamiento Quicksort en paralelo.....</b>	<b>27</b>
José Antonio Cárdenas Haro, Guillermo Galaviz Yañez, Guillermo López Mariscal	
<b>Proyectos Integrados de Aprendizaje en Matemáticas.....</b>	<b>33</b>
José Luís Díaz Gómez, Paulina Danae López Ceballos	
<b>El Concepto de Variable en los Libros de Texto.....</b>	<b>39</b>
José Luís Díaz Gómez y Lina Morales Peral	
<b>Una Propuesta para el Tratamiento de la Función Cuadrática con Estudiantes de Bachillerato.....</b>	<b>45</b>
Lorena Fernández Sesma.	
<b>El Análisis Consciente de los Componentes de un Problema y sus Relaciones, un Camino en el Razonamiento Matemático.....</b>	<b>51</b>
Mario García Salazar	
<b>Implementación Computacional del Algoritmo Húngaro para la Asignación a profesor-materia un horario-aula para IES.....</b>	<b>57</b>
Mario Gómez Quezada, Joaquín López Borbón.	
<b>Propuesta de Cambios en los Contenidos y Métodos de Enseñanza para un Curso Introductorio de Estadística .....</b>	<b>67</b>
Gudelia Figueroa Preciado, Irma Nancy Larios Rodríguez.	
<b>Reescribiendo la Historia: De Moivre y su Cuadratura.....</b>	<b>75</b>
Enrique Hugues Galindo, Francisco Cándido García Durán	

---

<b>Interacciones Débiles: Ondas Compuestas en un Fluido de dos capas.....</b>	<b>85</b>
Inna Shingareva, Carlos Lizárraga Celaya	
<b>Acoplamiento Máximo y Cubierta Mínima en Gráficas Bipartitas y Problema de Asignación.....</b>	<b>93</b>
Joaquín López Borbón, Mario Gómez Quezada	
<b>Criterios para Determinar si un Polinomio es Hurwitz.....</b>	<b>101</b>
Carlos Loredo, Baltasar Aguirre	
<b>Álgebra y Pensamiento Algebraico: Un binomio conceptual presente en el currículum matemático actual.....</b>	<b>107</b>
Rosalinda Mena Chavarría, Martha Cristina Villalva Gtz.	
<b>Módulo Web para el Aprendizaje de la Modelación Matemática en Ingeniería Química.....</b>	<b>113</b>
Marco Antonio Núñez Esquer	
<b>Presentación de una Herramienta Didáctica Visual para el Estudio del Coeficiente de Fricción.....</b>	<b>119</b>
Juan De Dios Ocampo Díaz, Jesús Eduardo Mora Ramírez, Juan De Dios Ocampo Peña	
<b>Beneficios de una Educación Matemática en Contexto.....</b>	<b>125</b>
Carlos Daniel Prado Pérez	
<b>De la Integral de Riemann al Teorema Fundamental del Cálculo: Un Acercamiento con el Applet Descartes.....</b>	<b>131</b>
Eduardo Tellechea Armenta	
<b>Un Ejemplo de Transformación de Darboux en Mecánica Cuántica.....</b>	<b>137</b>
A. Jáuregui, V. Santana	




---

**Departamento de Matemáticas**  
**Universidad de Sonora**  
**Hermosillo, Sonora**

## Topología del conjunto de polinomios Hurwitz

Baltazar Aguirre

Universidad Autónoma Metropolitana.

### Resumen

*Los polinomios Hurwitz son importantes por que por medio de ellos estudiamos la estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales. La estabilidad global en el caso de sistemas lineales y la estabilidad local en el caso de sistemas no lineales. Por otra parte, un polinomio de grado  $n$  podemos identificarlo con su vector de coeficientes. Con esta identificación podemos pensar al conjunto de los polinomios Hurwitz como un subconjunto del espacio  $n+1$ -dimensional. ¿Que propiedades topologicas tiene este conjunto?, ¿es acotado?, ¿es abierto? Estas propiedades y algunas otras serán discutidas en esta conferencia, comentando cuales son posibles temas por investigar.*

## 1 Importancia de los polinomios Hurwitz

Considerar el sistema

$$\dot{x} = Ax$$

Si todos los valores propios de la matriz  $A$  tienen parte real negativa entonces todas las soluciones del sistema convergen al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Una matriz con la propiedad de que sus valores propios tienen parte real negativa se dice que es una matriz Hurwitz estable. Por otra parte, los valores propios de la matriz  $A$  son las raíces de  $P_A(t)$ , el polinomio característico de la matriz  $A$ . Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 1.1.** Un polinomio con coeficientes reales  $f(t) = b_0t^n + b_1t^{n-1} + \dots + b_{n-1}t + b_n$  es Hurwitz si todas sus raíces tienen parte real negativa.

## 2 El criterio de Routh-Hurwitz y las condiciones de Lienard-Chipart

A continuacion presentamos el criterio quizá más popular para determinar si un polinomio es Hurwitz: el llamado Criterio de Routh-Hurwitz. Posteriormente presentamos las condiciones de Lienard-Chipart, las cuales pueden ser entendidas como una mejora al criterio de Routh-Hurwitz. Finalmente planteamos una pregunta relacionada con estos dos resultados.

**Teorema 2.1** (Criterio de Routh-Hurwitz). *Dado un polinomio con coeficientes reales  $f(t) = b_0t^n + b_1t^{n-1} + \dots + b_{n-1}t + b_n$  definimos la matriz de Hurwitz asociada a este polinomio*

$$\begin{bmatrix} b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{2n-3} & b_{2n-4} & b_{2n-5} & \cdots & b_{n-2} \\ b_{2n-1} & b_{2n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

donde  $b_k = 0$  si  $k > n$ .

Para que tal polinomio tenga todas sus raíces con parte real negativa, es necesario y suficiente que se satisfaga que

$$b_0\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, b_0\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \dots \begin{cases} b_0\Delta_n > 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \Delta_n > 0, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

donde los  $\Delta'_i$ s son los menores principales diagonales de la matriz de Hurwitz.

En caso de que  $b_0 = 1$  la condición simplemente dice que los menores principales deben ser positivos, es decir,  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ .

Notese que si el polinomio es de grado muy grande, para aplicar el criterio de Routh-Hurwitz, también se debe calcular un número grande de menores principales  $\Delta_k$ 's. El siguiente resultado es una mejora en el sentido de que solo se debe conocer el signo de aproximadamente la mitad de menores de los que se necesitan conocer en el criterio de Routh-Hurwitz.

**Teorema 2.2** (Condiciones de Lienard y Chipart). *El polinomio*

$$f(t) = b_0t^n + b_1t^{n-1} + \dots + b_{n-1}t + b_n \quad (b_0 > 0)$$

es Hurwitz si y solo si se satisface alguna de las siguientes condiciones

- 1)  $b_n > 0, b_{n-2} > 0, b_{n-4} > 0, \dots;$   
 $\Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \dots$
- 2)  $b_n > 0, b_{n-2} > 0, b_{n-4} > 0, \dots;$   
 $\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0, \dots$
- 3)  $b_n > 0, b_{n-1} > 0, b_{n-3} > 0, \dots;$   
 $\Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \dots$
- 4)  $b_n > 0, b_{n-1} > 0, b_{n-3} > 0, \dots;$   
 $\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0, \dots$

**Problema.** ¿El criterio de Lienard-Chipart presentará el menor número de menores principales que se necesitan calcular o podrá ser mejorado?.

### 3 Geometría de los polinomios Hurwitz

**Notación.** Denotamos por  $\mathcal{P}_n$  al conjunto de polinomios de coeficientes reales de grado  $\leq n$ .

Identificamos al polinomio  $f(t) = b_0t^n + b_1t^{n-1} + \dots + b_n$  con el vector en  $\mathbb{R}^{n+1}$  :  $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n)$ . De esta manera, podemos hablar de una topología de  $\mathcal{P}_n$ .

Denotamos por  $\mathcal{H}_n$  al conjunto de los polinomios Hurwitz de grado  $n$ .

#### Propiedad 1

**Teorema 3.1.**  $\mathcal{H}_n$  es un conjunto abierto.

La demostración de este resultado puede consultarse en el libro de Bhattacharayya *et al.*

#### Propiedad 2

**Teorema 3.2.**  $\mathcal{H}_n$  es simétrico respecto al origen.

#### Propiedad 3

**Proposición 3.3.** Si el polinomio con coeficientes reales  $p(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_n$  es Hurwitz entonces todos sus coeficientes son diferentes de cero y tienen el mismo signo, o todos son positivos o todos son negativos.

Una demostración de este resultado puede consultarse en el Reporte de los Seminarios de investigación de Carlos Loredó.

**Teorema 3.4.**  $\mathcal{H}_n$  no es conexo.

#### Propiedad 4

Denotamos por  $\mathcal{H}_n^+$  al conjunto de polinomios Hurwitz de grado  $n$  con coeficientes positivos.

**Teorema 3.5.**  $\mathcal{H}_n^+$  es conexo.

**Propiedad 5****Segmentos de polinomios**

**Definición 3.6.** Dados los polinomios  $P_0(t)$  y  $P_1(t)$  decimos que la siguiente familia de polinomios  $\lambda P_0(t) + (1 - \lambda)P_1(t)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , es el segmento de polinomios con extremos  $P_0(t)$  y  $P_1(t)$ .

**Problema.** Dados  $P_0(t)$  y  $P_1(t)$  Hurwitz

$\lambda P_0(t) + (1 - \lambda)P_1(t)$  es Hurwitz  $\forall \lambda \in [0, 1]$ ?

En general, la respuesta es negativa.

**Ejemplo 3.7.**  $P_0(t) = t^3 + 6t^2 + 11t + 6 = (t + 1)(t + 2)(t + 3)$

$P_1(t) = 6t^2 + 5t + 216$  es Hurwitz, sin embargo

$\lambda P_0(t) + (1 - \lambda)P_1(t) =$   
 $= \lambda(t^3 + 6t^2 + 11t + 6) + (1 - \lambda)(6t^2 + 5t + 216)$   
 no es Hurwitz para todo  $\lambda \geq 0$

a) para  $\lambda \in \left[0, \frac{5-\sqrt{2}}{7}\right)$  es Hurwitz

b) para  $\lambda \in \left[\frac{5-\sqrt{2}}{7}, \frac{5+\sqrt{2}}{7}\right]$  no es Hurwitz

c) para  $\lambda \in \left(\frac{5+\sqrt{2}}{7}, 1\right]$  es Hurwitz

**Teorema 3.8.**  $\mathcal{H}_n$  no es convexo

**Propiedad 6****Rayos de polinomios**

**Problema.** Dado  $P_0(t)$  Hurwitz, ¿qué polinomios  $P(t)$  cumplen que  $P_0(t) + \lambda P(t)$  es Hurwitz  $\forall \lambda \geq 0$ ?



**Ejemplo 3.9.**  $P_0(t) = t^3 + 6t^2 + 11t + 6 = (t + 1)(t + 2)(t + 3)$

$P(t) = 6t^2 + 5t + 216$  es Hurwitz, sin embargo

$P_0(t) + \lambda P(t) = t^3 + 6t^2 + 11t + 6t + \lambda(6t^2 + 5t + 216)$  no es Hurwitz para todo  $\lambda \geq 0$

a) para  $\lambda \in [0, 2 - \sqrt{2})$  es Hurwitz

b) para  $\lambda \in [2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$  no es Hurwitz

c) para  $\lambda \in (2 + \sqrt{2}, \infty)$  es Hurwitz

**Ejemplo 3.10.**  $p_0(t) = t^3 + 6t^2 + 11t + 6$  y  $p(t) = 5t^2 + 11t + 6.5$

$p_0(t) + \lambda p(t) = t^3 + 6t^2 + 11t + 6t + \lambda(5t^2 + 11t + 6.5)$  es Hurwitz para todo  $\lambda \geq 0$ .

**Teorema 3.11.** *El conjunto  $\mathcal{H}_n$  es no acotado*

### Problema general

Describir completamente al conjunto  $\mathcal{H}_n$  y  $\partial\mathcal{H}_n$ .

### Bibliografía

- [1] B. Aguirre, C. Ibarra and R. Suarez, *Sufficient algebraic conditions for stability of cones of polynomials*, Systems & Control Letters **46** (2002) 255-263.
- [2] B. R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Co., New York, N. Y., (1994).
- [3] Bhattacharayya, S.P.; Chapellat, H.; & Keel, L.H. [1995] *Robust Control. The Parametric Approach* (Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ).
- [4] S. Bialas, A necessary and sufficient condition for the stability of convex combinations of stable polynomials or matrices, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, **33**, (1985) 473-480.
- [5] B.S. Bollepalli and L.R. Pujara, *On the stability of a segment of polynomials*, IEEE Trans. on Circuits & Systems I, **41**, No. 12 (1994) 898-901.
- [6] N. K. Bose, *Tests for Hurwitz and Schur properties of convex combination of polynomials*, IEEE Trans. on Circuits & Systems **36**, 9 (1989) 1245-1247.
- [7] H. Bouguerra, B.C. Chang, H.H. Yeh and S.S. Banda, *Fast stability checking for the convex combination of stable polynomials*, IEEE Trans. on Automatic Control, **35**, no. 5 (1990) 586-588.

- [8] H. Chapellat and S. P. Bhattacharyya, *An alternative proof of Kharitonov's theorem*, IEEE Trans. on Automatic Control, **34**, No. 4, (1989) 448-450.
- [9] M. Fu and B. R. Barmish. *Maximal unidirectional perturbation bounds for stability of polynomials and matrices*. Systems and Control Letters, **11**, (1988) 173-179.
- [10] Gantmacher, F. R. [1959] *The Theory of Matrices*. Chelsea Publ. Co., New York.
- [11] Hinrichsen, D. & Kharitonov, V. L. [1995] *Stability of polynomials with conic uncertainty*. Math. Control Signal Systems **8**, 97-117.
- [12] M.-T. Ho, A. Datta and S.P. Bhattacharyya, *An elementary derivation of the Routh-Hurwitz criterion*. IEEE Transactions on Automatic Control, **43**, No. 3, (1998) 405-409.
- [13] Ch. Hwang and S.-F. Yang, *The use of Routh array for testing the Hurwitz property of a segment of polynomials*, Automatica, **37**, (2001) 291-296.
- [14] Lancaster, P. and Tismenetsky [1985] *The Theory of Matrices with applications, second edition*, Academic Press, Orlando.
- [15] Lienard and Chipart [1914]. *Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algèbraïque*, J. Math. Pures Appl. (**6**), Vol. 10, 291-346.
- [16] Uspensky, J. V. [1990] *Teoría de Ecuaciones*. Limusa. México, D. F.

## APLICACIONES Y PROPIEDADES DE LOS POLINOMIOS HURWITZ

Baltazar Aguirre      Carlos Loreda  
 Universidad Autónoma Metropolitana  
 Unidad Iztapalapa

### Resumen

*La importancia de los polinomios Hurwitz radica en que muchos fenómenos físicos resultan estables cuando un polinomio asociado a ellos es Hurwitz. En este trabajo presentamos varios sistemas físicos para resaltar dicha importancia y también presentamos algunas propiedades de estos polinomios.*

## 1 Polinomios Hurwitz de grado menor que 5 y aplicaciones

Para poder presentar nuestras aplicaciones comenzamos esta sección obteniendo criterios para determinar si un polinomio es Hurwitz para los casos más sencillos, cuando los polinomios son de grado pequeño. El problema de determinar si un polinomio de grado arbitrario es Hurwitz fue planteado por James Maxwell en 1868. Las demostraciones de los teoremas presentados pueden consultarse en [5].

**Definición 1.1.** Decimos que un polinomio de coeficientes reales es Hurwitz si todas sus raíces tienen parte real negativa, i.e., están en  $\mathbb{C}^- = \{a + ib : a < 0\}$ .

### Ejemplo 1.2.

1.  $p(t) = t^2 + 3t + 2$  es Hurwitz pues  $p(t) = (t + 2)(t + 1)$  y  $t = -2$  y  $t = -1$  son sus raíces.
2.  $s(t) = t^3 + t^2 + t + 1$  no es Hurwitz, ya que

$$s(t) = t^2(t + 1) + t + 1 = (t^2 + 1)(t + 1)$$

y sus raíces son  $t = i$ ,  $t = -i$ ,  $t = 1$ .

**Teorema 1.3.** El polinomio  $p(t) = t + a_1$  es Hurwitz si y sólo si  $a_1 > 0$ .

**Teorema 1.4.** El polinomio  $p(t) = t^2 + a_1t + a_2$  es Hurwitz si y sólo si  $a_1 > 0$  y  $a_2 > 0$ .

**Ejemplo 1.5.** Aplicando el Teorema 1.4, podemos decir que

- a)  $p(t) = t^2 + 5t + 7$  es Hurwitz.
- b)  $p(t) = t^2 + 2t - 3$  no es Hurwitz.

c)  $p(t) = t^2 + 1$  no es Hurwitz.

**Corolario 1.6.**

a)  $f(t) = b_0t + b_1$  es Hurwitz si y sólo si  $b_0, b_1$  son del mismo signo.

b)  $p(t) = a_0t^2 + a_1t + a_2$  es Hurwitz si y sólo si  $a_0, a_1, a_2$  son del mismo signo.

**Ejemplo 1.7.**

1.  $p(t) = -2t^2 - 3t - 2$  es Hurwitz.

2.  $p(t) = -t^2 + 5t + 2$  no es Hurwitz.

3.  $p(t) = 3t - 2$  no es Hurwitz.

A continuación mostraremos algunas aplicaciones.

**Aplicación 1.1** (Oscilador armónico amortiguado).

Supóngase que estiramos un resorte una cierta distancia y luego lo soltamos. El movimiento que describe la masa (junto con el resorte) esta descrito por la ecuación

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

donde  $\beta$  es la constante de amortiguamiento y  $k$  es la constante del resorte, además  $\beta > 0$  y  $k > 0$ . La ecuación característica de la ecuación diferencial es

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0$$

Cómo  $m, \beta, k > 0$  entonces  $p(\lambda)$  es Hurwitz. Además

1. si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$  entonces  $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ .

2. si  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  y  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , con  $\alpha < 0$ , entonces  $x(t) = Ae^{\alpha t} \cos \beta t + Be^{\alpha t} \sin \beta t$ .

Luego cualquier solución  $x(t)$  cumple que  $x(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ .

**Aplicación 1.2** (Circuitos eléctricos).

Considere un circuito eléctrico, donde  $E$  es el voltaje (medido en volts),  $R$  la resistencia (medida en Ohms),  $L$  la inductancia (medida en Henrios) y  $C$  la capacitancia (medida en Faradios). La variación del voltaje en un tiempo  $t$  está dada por la ecuación

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{c}i = \frac{dE}{dt}$$

Si  $E$  es constante entonces  $\frac{dE}{dt} = 0$ . Bajo la suposición de que  $E$  es constante, la ecuación característica es

$$p(\lambda) = L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{c} = 0$$

Ya que  $L, R, \frac{1}{c} > 0$  se tiene que  $p(\lambda)$  es Hurwitz. Por lo tanto podemos asegurar que  $i(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Una explicación física de esto es que  $i(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$  debido al consumo de energía de la resistencia.

**Aplicación 1.3** (Modelo Lotka-Volterra de 2 especies).

El modelo está expresado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(2 - 3x + y) \\ \dot{y} &= y(1 + 2x - 3y)\end{aligned}$$

$(0, 0)$  y  $(1, 1)$  son los puntos críticos. La matriz Jacobiana en  $(1, 1)$  es

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

el polinomio característico es  $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 7$  el cual es Hurwitz. Por lo tanto cerca del punto  $(1, 1)$  las soluciones convergen.

**Teorema 1.8.** *El polinomio  $p(t) = t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3$  es Hurwitz si y sólo si  $a_1, a_2, a_3 > 0$  y  $a_1a_2 - a_3 > 0$ .*

**Ejemplo 1.9.**

1. Sea  $p(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 7$ , luego  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 7$ . Entonces  $a_1a_2 - a_3 = -1 < 0$ . Por lo tanto  $p(t)$  no es Hurwitz.
2. Sea  $p(t) = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$ , entonces  $a_1a_2 - a_3 = 8 > 0$ . Por lo tanto  $p(t)$  es Hurwitz.

**Teorema 1.10.** *El polinomio  $p(t) = t^4 + a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t + a_4$  es Hurwitz si y sólo si  $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$  y  $a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 > 0$ .*

**Ejemplo 1.11.**

1. Sea  $p(t) = t^4 + t^3 + 5t^2 + 7t + 2$ , luego  $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 7, a_4 = 2$ . Entonces

$$a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 = (1)(5)(7) - (7)^2 - (1)^2(2) = -16 < 0$$

Por lo tanto  $p(t)$  no es Hurwitz.

2. Sea  $p(t) = t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1$ , entonces

$$a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 = (4)(6)(4) - (4)^2 - (4)^2(1) = 64 > 0$$

Por lo tanto  $p(t)$  es Hurwitz.

**Corolario 1.12.**

- a)  $p(t) = a_0t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3$  es Hurwitz si y sólo si  $a_0, a_1, a_2, a_3$  son del mismo signo y  $a_1a_2 - a_3a_0 > 0$ .
- b)  $p(t) = a_0t^4 + a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t + a_4$  es Hurwitz si y sólo si  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  son del mismo signo y  $\frac{a_1a_2a_3 - a_3^2a_0 - a_1^2a_4}{a_0} > 0$ .

**Aplicación 1.4** (Sistema de Lorenz).

El sistema es el siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

con  $\sigma, r, b > 0$ . El punto  $(0, 0, 0)$  es un punto crítico. La matriz Jacobiana en  $(0, 0, 0)$  es

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 + [b + (1 + \sigma)]\lambda^2 + [\sigma(1 - r) + b(1 + \sigma)]\lambda + b(1 - r)\sigma$$

Si  $r < 1$  entonces

$$b + (1 + \sigma) > 0, \quad \sigma(1 - r) + b(1 + \sigma) > 0, \quad b(1 - r)\sigma > 0$$

además

$$[b + (1 + \sigma)][\sigma(1 - r) + b(1 + \sigma)] - b(1 - r)\sigma = (1 + \sigma)[b^2 + \sigma(1 - r) + b(1 + \sigma)] > 0$$

por lo tanto  $p_A(\lambda)$  es Hurwitz y  $(0, 0, 0)$  es punto estable localmente.

## 2 Propiedades de los polinomios Hurwitz

En esta sección presentamos algunas propiedades que resultan ser condiciones necesarias para que un polinomio sea Hurwitz. Dichas condiciones se establecen para polinomios de grado arbitrario  $n$ .

**Teorema 2.1.** *Si  $p(t)$  es un polinomio Hurwitz de grado  $n$  entonces todos sus coeficientes son del mismo signo (ver [1]).*

**Observación 2.1.** Si los coeficientes de un polinomio  $p(t)$  no tienen el mismo signo entonces  $p(t)$  no es Hurwitz.

**Observación 2.2.** El teorema 2.1 es una condición necesaria, pero no suficiente, para que un polinomio sea Hurwitz. En otras palabras, si un polinomio  $p(t)$  tiene sus coeficientes del mismo signo,  $p(t)$  no necesariamente es Hurwitz, lo cual es ilustrado en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.2.** Sea  $p(t) = t^3 + 2t^2 + 5t + 174$ , entonces

$$p(t) = (t^2 - 4t + 29)(t + 6) = (t - 2 + 5i)(t - 2 - 5i)(t + 6)$$

Por lo tanto  $p(t)$  no es Hurwitz.

**Teorema 2.3.** Si  $p(t)$  es un polinomio Hurwitz de grado  $n$  entonces  $p'(t)$  es Hurwitz.

**Corolario 2.4.** Si  $p'(t)$  no es Hurwitz entonces  $p(t)$  no es Hurwitz.

**Ejemplo 2.5.** Sea  $p(t) = \frac{1}{5}t^5 + t^4 + 2t^3 + 15t^2 + 6t + 5$ , ahora

$$p'(t) = t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 30t + 6$$

luego

$$a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 = (4)(6)(30) - (30)^2 - (4)(6) < 0$$

Entonces  $p'(t)$  no es Hurwitz. Por lo tanto  $p(t)$  no es Hurwitz.

**Observación 2.3.** El teorema 2.3 nos da una condición necesaria, pero no suficiente, es decir, si  $p'(t)$  es Hurwitz  $p(t)$  no necesariamente lo es. Esto lo ilustra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.6.** Sea  $f(t) = 8t^3 + 3t^2 + 8t + \frac{5}{2}$ . Ahora

$$(8)(3) - (8) \left(\frac{5}{2}\right) = (8) \left(3 - \frac{5}{2}\right) = (8) \left(\frac{1}{2}\right) = 4 > 0$$

Por lo tanto  $f(t)$  es Hurwitz. Luego hagamos

$$h_c(t) = \int f(t)dt = 2t^4 + t^3 + 4t^2 + \frac{5}{2}t + c$$

Se tiene que

$$(1)(4) - (2)\left(\frac{5}{2}\right) = 4 - 5 < 0$$

Luego,  $h_c(t)$  no es Hurwitz para ningún valor de  $c$ . Así, al hacer  $f(t) = p'(t)$  que es Hurwitz, se tiene que  $h_c(t) = p(t)$  no es Hurwitz.

**Teorema 2.7.** (ver [6]) Si  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  es Hurwitz y  $\xi \in \mathbb{C}$  se tiene que

- a) si  $\operatorname{Re} \xi > 0$  entonces  $|f(\xi)| > |f(-\xi)|$
- b) si  $\operatorname{Re} \xi = 0$  entonces  $|f(\xi)| = |f(-\xi)|$
- c) si  $\operatorname{Re} \xi < 0$  entonces  $|f(\xi)| < |f(-\xi)|$

**Observación 2.4.** Si  $f(x)$  es un polinomio real tal que no se cumple alguno de los incisos a), b), c) entonces  $f(x)$  no es Hurwitz.

**Ejemplo 2.8.** Sea  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 16x + 130$ , tomar  $\xi = 1 + 5i$ . Entonces

$$f(\xi) = (1 + 5i)^3 + 3(1 + 5i)^2 + 16(1 + 5i) + 130 = 0$$

Luego  $|f(\xi)| = 0$ ; por otro lado

$$f(-\xi) = (-1 - 5i)^3 + 3(-1 - 5i)^2 + 16(-1 - 5i) + 130 = 116 + 60i$$

Luego  $|f(-\xi)| > 0$ . Entonces no se cumple  $|f(\xi)| > |f(-\xi)|$ . Por lo tanto  $f(x)$  no es Hurwitz.

**Observación 2.5.** El teorema 2.7 es una condición necesaria pero no suficiente, es decir, si  $f(x)$  satisface todos los incisos a), b) ó c) entonces  $f(x)$  no necesariamente es Hurwitz. Veamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.9.** Consideremos un polinomio Hurwitz  $h(x)$ . Por lo tanto

- a) si  $\operatorname{Re}(\xi) > 0$  entonces  $|h(\xi)| > |h(-\xi)|$ ;
- b) si  $\operatorname{Re}(\xi) = 0$  entonces  $|h(\xi)| = |h(-\xi)|$ ;
- c) si  $\operatorname{Re}(\xi) < 0$  entonces  $|h(\xi)| < |h(-\xi)|$ .

Sea  $g(x)$  un polinomio que no sea Hurwitz y que cumpla que  $|g(\xi)| = |g(-\xi)|$ . Por ejemplo, consideremos  $g(x) = x^n$  con  $n = 1, 2, \dots$ , entonces:

$$|g(\xi)| = |\xi^n| = |\xi|^n \quad \text{y} \quad |g(-\xi)| = |-\xi^n| = |-\xi|^n = |\xi|^n$$

Supongamos que  $\operatorname{Re}(\xi) > 0$ . Entonces por el inciso a) del teorema 2.7 tenemos que  $|h(\xi)| > |h(-\xi)|$ . Ahora

$$|g(\xi)||h(\xi)| > |g(\xi)||h(-\xi)|$$

la desigualdad se conserva pues  $\operatorname{Re}(\xi) > 0$  y por lo tanto  $|g(\xi)| > 0$ . Entonces

$$|g(\xi)||h(\xi)| > |g(-\xi)||h(-\xi)| \quad \Rightarrow \quad |g(\xi)h(\xi)| > |g(-\xi)h(-\xi)|$$

Similarmente, se tiene que  $|h(\xi)| < |h(-\xi)|$ , si  $\operatorname{Re}(\xi) < 0$ . Tomemos  $f(x) = g(x)h(x)$ . Este polinomio satisface los 3 incisos a), b) y c), pero como  $g(x)$  no es Hurwitz entonces  $f(x)$  tampoco lo es.

Condiciones necesarias y suficientes tales como el Criterio de Routh-Hurwitz o las condiciones de Liénard-Chipart son trabajadas en [2], [4] y [5]. Adolf Hurwitz presentó sus aportaciones al tema en 1895 en el trabajo [3].

## Bibliografía

- [1] Bhattacharyya, S.P., H. Chapellat, L.H. Keel. (1995) *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice-Hall.
- [2] Gantmacher, F.R. (1959) *Matrix Theory (vol. I y II)*, AMS Chelsea Publishing.
- [3] Hurwitz, A. (1895) *Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt*, Math. Ann., vol. 46 pp. 273-84.
- [4] Lancaster, P. and Miron Tismenetsky. (1985) *The Theory of Matrices with applications*, Academic Press.
- [5] Loredo, Carlos. (2004) *Criterios para determinar si un polinomio es polinomio Hurwitz. Reporte de los seminarios de investigación I y II*, UAM-Iztapalapa, México, D.F.
- [6] Uspensky, J.V. (1990) *Teoría de Ecuaciones*, Limusa.



*De la percepción a la conjetura: un viaje a través de la geometría dinámica*

*David Benítez Mojica Lizet Aime Castañeda Valdez*  
[dbenitez@mail.uadec.mx](mailto:dbenitez@mail.uadec.mx) [mar\\_aime@yahoo.com](mailto:mar_aime@yahoo.com)  
*Universidad Autónoma de Coahuila*

**Resumen.** El principal propósito es mostrar algunos resultados de una investigación realizada a alumnos de segundo año de secundaria con temas de geometría. El trabajo esta conformado por dos fases. En la primera se presenta un estudio diagnostico en donde se documenta sobre las creencias que tienen los alumnos sobre el ángulo, sus componentes y propiedades. En la segunda, se diseña e implementan actividades con el apoyo del software educativo Cabri Géomètre para impactar en las creencias que tienen los alumnos y para propiciar un ambiente en la clase donde los alumnos estén en posibilidad de construir y explorar invariantes geométricas.

## **1. Introducción**

La Matemática Moderna ha sufrido reformas desde los 40's buscando nuevas alternativas a la problemática de la enseñanza de las matemáticas, surgiendo en Rusia y después en Estados Unidos de Norteamérica. En México estas reformas iniciaron a principios de los 70's. a la que se le llamo Reforma de las matemáticas modernas; las autoridades federales y estatales no obtuvieron los resultados esperados. Tratando de encontrar solución a los problemas sobre la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, en 1975 se creo un grupo de investigación el cual se llamo Sección Matemática Educativa (SME) por parte del CINVESTAV.

La Secretaria de Educación Pública de México (SEP) solicitó apoyo a centros de investigación sobre la problemática de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas (Departamento de matemática educativo DMM, Centro de investigación de estudios avanzados del politécnico Nacional Cinvestav-IPN) solicitando un proyecto relacionado con la Reforma Educativa. En un principio los investigadores estaban en contra de la Matemática Moderna pero aceptó el reto de elaborar Planes, Programas y libros de texto para la educación primaria y después incorporando secundarias. Los investigadores participantes quedaron inconformes ya que no se prepararon adecuadamente a los docentes y esto produjo que no se dieran los resultados esperados, desfavoreciendo al aprendizaje.

Es evidente que existe la necesidad de proveer condiciones favorables para que los estudiantes de nivel medio básico, aprendan temas relacionados con geometría. Sin embargo, se observa que se requiere de la participación y esfuerzo de docentes para elaborar actividades donde se ilustre claramente la importancia de estudiar y aplicar la geometría y lo que se puede lograr al aprenderla.

“La formación de los maestros, el currículo, la infraestructura de la escuela, los materiales de apoyo, (libros, software, etc) y ciertos aspectos del ambiente familiar son algunos componentes que influyen en la educación de los estudiantes”<sup>1</sup>

Esta situación nos obliga a prestar una especial atención al análisis de las formas de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la secundaria. Destacamos con más fuerza las

---

<sup>1</sup> Manuel Santos Trigo y Cristóbal Vargas. Más allá del uso de exámenes estandarizados. Avance y Perspectiva vol. 22. Pag. 11

dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la Geometría, donde deben trabajar con propiedades y demostraciones de teoremas.

Cuando se introducen las herramientas tecnológicas en la clase de matemáticas, se reconoce que no es esa tecnología en sí misma el objeto central de interés, sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los estudiantes con la ayuda de ella. En este sentido, uno de los propósitos del presente trabajo, es documentar sobre los elementos que puedan ayudar a propiciar en el aula un ambiente que permita contribuir al desarrollo de algunas de las habilidades del pensamiento matemático de los alumnos de secundaria. Para ello, se diseñan e implementan un conjunto de actividades sobre el tema de “Ángulos entre paralelas cortadas por una secante” utilizando la tecnología y específicamente el software educativo Cabri-Géomètre.

La tecnología puede ayudar a mejorar la actitud de los estudiantes hacia las diferentes ramas de la matemática; ya que nos permite trabajar con cantidades grandes y pequeñas, generar patrones, explorar propiedades, formular y probar hipótesis, desarrollo de conceptos y resolución de problemas con datos reales.

La tecnología es mucho más que un sustituto para efectuar cálculos en lápiz y papel; es una ayuda didáctica para desarrollar conceptos y explorar. A esto nos hace referencia Manuel Santos, Cristóbal Vargas en su artículo “Más allá del uso de exámenes estandarizados”

...Es importante que el propio estudiante identifique, explore, pruebe y comunique distintas relaciones matemáticas. Con la ayuda de la tecnología, ... los mismos estudiantes participan en el proceso de formulación o descubrimiento de relaciones matemáticas..<sup>2</sup>

## 2. Sujetos Procedimientos y Técnicas

El programa EMAT-Coahuila (Enseñanza de las Matemática Asistida con Tecnología) se creó para educación secundaria pública, con el fin de que “profesores y estudiantes discutan aspectos de la matemática apoyados por la tecnología computacional (Calculadoras y Computadoras) y con Hojas de Trabajo diseñadas para favorecer el autoaprendizaje”<sup>3</sup>.

El estudio que se reporta en el presente escrito, se divide en tres fases: La diagnóstica general, la fase diagnóstica local y la implementación didáctica.

**2.1 Fase diagnóstica general.** En esta fase se aplicó un examen a 26000 alumnos de las secundarias públicas del Estado de Coahuila. El examen se subió a un servidor y desde el laboratorio de cómputo de la escuela, cada alumno contestó preguntas de aritmética, pre-álgebra y geometría.

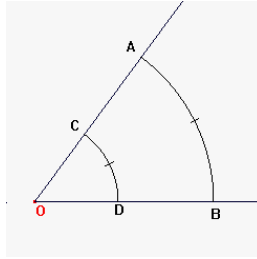
Los temas que evaluó la prueba son contenidos del programa oficial de secundaria y el tiempo de aplicación fue de una hora. La prueba tenía 32 preguntas, 12 de las cuales eran de geometría. Una de las preguntas relacionada con geometría es la siguiente:

En la siguiente figura se han dibujado los ángulos AOB y COD.

---

<sup>2</sup> Manuel Santos Trigo y Cristóbal Vargas. Más allá del uso de exámenes estandarizados. Avance y Perspectiva vol. 22

<sup>3</sup> Programa de Enseñanza de las Matemáticas Asistidas con Tecnología. EMAT. David Benítez Mojica. Facultad de Matemáticas y CIMA. Universidad Autónoma de Coahuila



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- A. La medida del ángulo AOB es MAYOR que la medida del ángulo COD.
- B. La medida del ángulo AOB es IGUAL que la medida del ángulo COD.
- C. La medida del ángulo AOB es MENOR que la medida del ángulo COD.
- D. No sé.

La respuesta correcta es la opción 'b' y solo el 43% de los alumnos contestaron correctamente y el mayor número de alumnos (57%) contestó incorrectamente.

## 2.2. Fase Diagnóstica Local

Al observar los resultados obtenidos en el diagnóstico, se realizó una investigación, utilizando la misma batería de preguntas a un grupo de segundo año de secundaria de 38 alumnos. Este grupo no participó en la fase diagnóstica general.

Al responde la actividad que se presentó en la sección anterior, los resultados que se obtuvieron son los siguientes:

Incorrecto	Correcto
49%	51%

Al comparar los porcentajes se observó que son muy semejantes. Prestemos atención en algunas de las justificaciones que los alumnos dan sobre su respuesta.

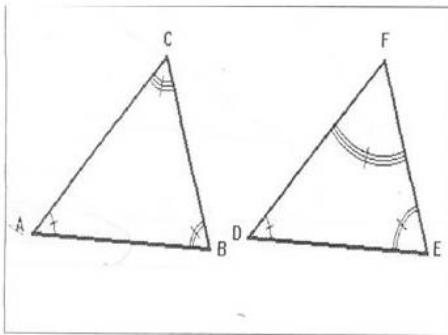
porque entre más abizto está el ángulo  
 medirá más porque tiene más grados. Por eso  
 el ángulo ACE es mayor que el BCD (el ángulo primero  
 está más abizto) el ángulo ACE es más grande que el  
 BCD por lo tanto no es igual y el ACE es más abizto que  
 el BCD por lo tanto el ACE no es menor.

Porque el ángulo ACE a simple vista es  
 menor que el BCD y comprobando  
 también no son iguales

Con las justificaciones que nos dan los alumnos se puede afirmar que un alto porcentaje de alumnos tienen criterios perceptuales (forma, tamaño, posición) para contestar. De acuerdo con el modelo de Van Hiele los alumnos se encuentran en el primer nivel del pensamiento geométrico: visualización.

Hitt Espinosa (1997) señala, con respecto a las representaciones, "La manipulación, por parte del estudiante, de representaciones matemáticas les proporciona los medios para construir imágenes mentales de un objeto o concepto matemático, y la riqueza de la imagen conceptual construida dependerá de las representaciones que el estudiante haya utilizado. De ahí la importancia que debe darse al uso de diversas representaciones matemáticas en la enseñanza de las matemáticas y en los libros de texto."

En otra pregunta, se le presentan a los estudiantes dos triángulos congruentes, uno con marcas de ángulos pequeñas y otro con marcas grandes y se les pide que comparen la suma de las medidas de los ángulos internos. Se encontró que el 52.6% de los alumnos contestan de manera incorrecta. Nuevamente, hay una influencia de la percepción para tomar la decisión. Por ejemplo, un alumno contesta de la siguiente manera:



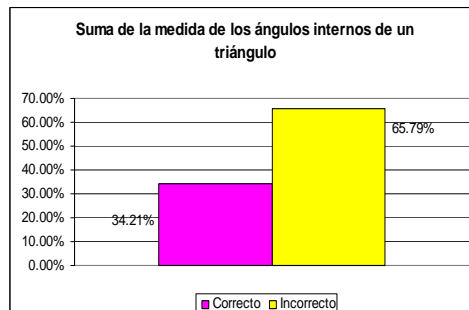
a) En el triángulo ABC la suma de las medidas de los ángulos internos es **MAYOR QUE** la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo DEF.

b) En el triángulo ABC la suma de las medidas de los ángulos internos es **IGUAL QUE** la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo DEF.

c) En el triángulo ABC la suma de las medidas de los ángulos internos es **MENOR QUE** la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo DEF.

Explicación La marca de los ángulos del triángulo DEF están más grandes que las del ABC

Observemos algunas de las explicaciones de los siguientes alumnos, las cuales nos permite observar que la percepción visual es muy fuerte.



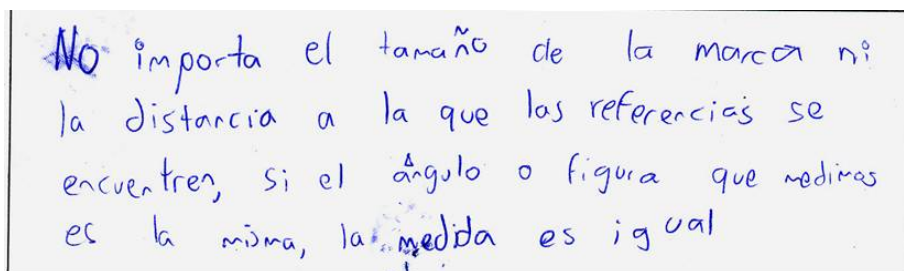
### 2.3 Fase didáctica

Al ver la gran influencia perceptual que tienen los alumnos con respecto al tema, se realizó exploración dinámica cuyo principal objetivo es que los alumnos conozcan algunas propiedades del ángulo.

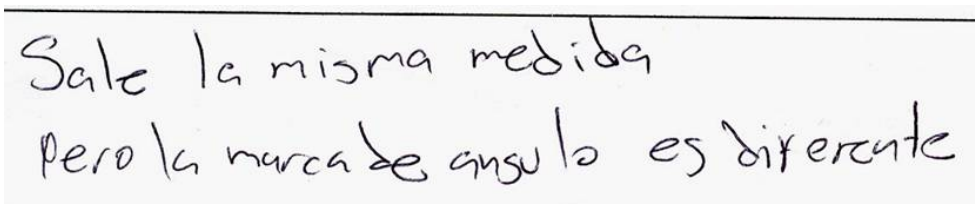
Para lograr el objetivo, la hoja de trabajo contiene una serie de actividades apoyadas con el software Cabri. Los alumnos buscaron patrones, hicieron conjeturas, generalizaron, revisaron la solución y formularon contraejemplos, entre otras actividades.

A los alumnos encuestados se les dio una introducción de aspectos esenciales para el manejo del software Cabri en una clase de 90 min. La aplicación de esta hoja se llevó a cabo en 90 min. en un centro de cómputo el cual contiene 22 computadoras y los alumnos trabajaron en parejas, pero cabe mencionar que cada alumno tenía una hoja de trabajo.

En la actividad los alumnos (84.21%) lograron disminuir sus creencias erróneas sobre la medida de un ángulo. En una de las actividades se les pedía que midieran los ángulos marcados en las semirrectas. A continuación se muestran algunas respuestas:



No importa el tamaño de la marca ni la distancia a la que las referencias se encuentren, si el ángulo o figura que medimos es la misma, la medida es igual



Salen la misma medida pero la marca de ángulo es diferente

Con las respuestas anteriores se demuestra que la interacción de las hojas de trabajo y el software Cabri-Géometre se logra que los estudiantes vayan pasando de una fase perceptual a una más teórica. Haciendo exploraciones dinámicas, los alumnos pueden superar los errores, conflictos y obstáculos heredados de la percepción, para construir un conocimiento matemático más sólido.

Las generalizaciones a las que llegan los alumnos, son el resultado de la observación y el razonamiento inductivo.

Se realizaron varias actividades; el alumno construirá con sus propias palabras una regla para la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo. A continuación, algunas conjeturas que redactan los alumnos:

La suma de sus ángulos siempre es igual  
a  $180^\circ$ .

Otro alumno conjetura lo siguiente:

Si un triángulo es en realidad  
un triángulo al sumar sus  
ángulos debe dar  $180,00^\circ$

Según se observó en las anteriores figuras donde se muestran las conclusiones de los alumnos, los objetivos fueron logrados pero el 11.11% de los alumnos no pudieron llegar a la conjetura correcta.

### 3. Conclusiones

Se encontraron evidencias para afirmar que un alto porcentaje de alumnos (aproximadamente 50%) tiene criterios perceptuales (forma, tamaño, posición). Tomando en cuenta las respuestas del diagnóstico y las hojas de trabajo se concluye que es notable la dificultad que tienen los alumnos de segundo año de secundaria para comunicar sus ideas matemáticas

Las hojas de trabajo y las entrevistas realizadas a los alumnos son la evidencia que existe para concluir que la utilización de entornos de geometría dinámica ayuda significativamente a erradicar las creencias erróneas que tienen los alumnos.

La interacción con las hojas de trabajo y con los aspectos notables del software -tales como el arrastre, la medida, la animación, entre otras- permite ver que los estudiantes que participaron en el estudio están en capacidad de encontrar invariantes geométricas y construir conjeturas.

De esta manera se puede construir un puente para que los alumnos de secundaria viajen de lo perceptual a lo teórico.

### Bibliografía

Hitt, F. (1998). *Investigaciones en matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.  
NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Santos, T.L. y Vargas, C. (2002). *Más allá del uso de exámenes*. Avances y Perspectivas vol. 22

SEP (1997). *Libro para el maestro de matemáticas*. México.

## ESTUDIO BIOECONÓMICO MEDIANTE UN MODELO DE PARÁMETROS VARIABLES

**Dora Julia Borbón González**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

### Resumen

*Se realizó un estudio bioeconómico en la pesquería de anchoveta norteña de la costa oeste de Baja California utilizando un modelo de producción en el cual dos de sus parámetros varían en el tiempo simultáneamente. Se usó una generalización de la ecuación Gompertz-Fox para modelar la tasa de variación de la biomasa respecto al tiempo; en ésta se expresa la tasa intrínseca de crecimiento de la población y la capacidad de carga del sistema como funciones del tiempo. Se consideró como objetivo del presente estudio la maximización del valor presente de los ingresos netos totales derivados de la explotación del recurso y como variable de control al esfuerzo pesquero. La utilización de un modelo de producción de parámetros que varían en el tiempo, así como de variables económicas dependientes del tiempo, en el análisis bioeconómico de la pesquería permitió observar el efecto del esfuerzo pesquero ejercido sobre el nivel óptimo del stock y la posible influencia de variables ambientales.*

### INTRODUCCIÓN

#### *Antecedentes de Bioeconomía en pesquerías*

La teoría económica de una pesquería de acceso abierto o de propiedad común fue desarrollada por H. S. Gordon (1954). El modelo de Gordon, es un modelo de equilibrio estático basado en la curva de esfuerzo pesquero-producción, construida a partir de la ecuación logística. El resultado principal de este modelo bioeconómico establece que en la pesquería de acceso abierto el esfuerzo tiende a alcanzar un equilibrio (equilibrio bionómico) a un nivel de esfuerzo pesquero en el cual el ingreso total se iguala al costo total, lo cual significa arribar a un punto en el cual se disipa la utilidad.

Otro enfoque al problema se debe a C. Clark (1990), quien establece que la conservación de recursos productivos es grandemente un problema de uso óptimo de éstos en el tiempo y que la teoría de la conservación debe establecerse sobre modelos matemáticos explícitos de los procesos biológicos involucrados y tratarse como un problema de optimización dinámica. Bajo este enfoque, en pesquerías el problema de control óptimo a tiempo continuo se define especificando inicialmente un sistema dinámico que expresa la tasa de cambio de la biomasa explotada  $x(t)$  mediante el balance de los factores que determinan su crecimiento natural y el efecto asociado a los procesos de extracción (Clark, 1990; Cohen, 1987). La explotación se lleva a cabo en un intervalo de tiempo, horizonte temporal, finito o infinito. Se incluyen generalmente una condición inicial  $x(0) = x_0$  y una final  $x(T) = x_T$  sobre el nivel de biomasa  $x(t)$ , respectivamente, en los extremos del intervalo. El sistema dinámico incluye una función de control  $u(t)$  perteneciente a un conjunto de admisibilidad  $U$ , con una restricción sobre la variación de la función de control  $U(u(t), t) = 0$ ; se puede incluir una restricción sobre variación de estado  $B(x(t), t) = 0$ . Finalmente, se desea resolver el problema de obtener el máximo (o mínimo) valor posible de una funcional definida en términos de la función de control  $u(t)$ , la respuesta  $x(t)$  y la condición terminal para la biomasa del recurso (Clark, 1989, 1990). Las condiciones necesarias de optimalidad para el problema de control planteado en este trabajo

fueron derivadas por Pontryagin, Boltyanskii y Gamkrelidze; éstas son conocidas comunmente como “Principio de Pontryagin” (Fleming y Rishel, 1975).

### ***El valor del recurso en el tiempo***

El concepto económico estándar para reflejar el valor del tiempo es el llamado descuento. De acuerdo a la teoría económica, el propietario de un stock de un recurso natural debería estar motivado para seleccionar una estrategia de producción que maximizara su *valor presente*, esto es, *el valor del stock descontado* (Clark, 1989; Hannesson, 1993). Por lo anterior, la funcional objetivo en el problema de control planteado para una pesquería equivale al valor presente de los ingresos netos descontados derivados de la explotación del recurso (Clark, 1989; McKelvey, 1989). En este trabajo se designó como variable de control al esfuerzo pesquero; la caracterización de la estrategia de control que permite obtener el mayor beneficio social derivado de la explotación de un recurso pesquero se obtuvo mediante la aplicación del principio del máximo de Pontryagin.

### **METODOLOGÍA**

La información de la pesquería utilizada en este estudio, capturas comerciales, esfuerzo pesquero ejercido y la información económica (series históricas de precio de harina de pescado cotizada a nivel internacional, costo por viaje de pesca realizado y tasa de descuento) se reporta en Borbón-González y Cota-Villavicencio (1999).

La tasa de crecimiento de la biomasa se modeló con la ecuación  $dx/dt = f(x(t), t, u(t))$ , esto es, el modelo para la dinámica poblacional es de la forma  $dx/dt = F(x(t)) - qE(t)x(t)$ , particularmente:

$$\frac{dx}{dt} = r(t)x(t) \ln\left(\frac{x(t)}{K(t)}\right) - qE(t)x(t) \quad (1)$$

sujeta a la condición inicial  $x(0) = x_0$ , donde  $dx/dt$  es la razón de cambio de la biomasa respecto al tiempo,  $u(t) = E(t)$  la tasa de esfuerzo pesquero,  $r(t)$  es la tasa de crecimiento específica de la población,  $K(t)$  es la capacidad de carga del sistema y  $q$  es el coeficiente de capturabilidad.

El modelo dado por la ecuación (1) es una generalización de la ecuación de crecimiento de Gompertz que además incluye el término de extracción de biomasa, por esa razón nos referimos al mismo como modelo de producción de Gompertz-Fox generalizado (Fox, 1970).

La identificación de los parámetros del modelo (1) se realizó previamente al presente trabajo (Borbón González, 2002), estos valores se usaron junto con la información económica en la aplicación de elementos de teoría de control óptimo en el estudio de la bioeconomía de la pesquería. La variable de control, el esfuerzo pesquero  $E(t)$ , se sujetó a las restricciones

$$0 \leq E(t) \leq E_{max} \quad (2)$$

La funcional objetivo  $J\{x(t), t, E(t)\} = \int_0^T g[x(t), t, u(t)] dt$  es la expresión para los ingresos netos totales descontados derivados de la explotación del recurso durante todo el horizonte temporal:

$$J\{x(t), t, E(t)\} = \int_0^T e^{-\delta t} \{q x(t) p(t) - q x(t) C(x)\} E(t) dt \quad (3)$$

donde  $p(t)$  es el precio de una unidad del recurso cosechado,  $C(x)$  es igual a el costo de cosecha unitario cuando el nivel de la población es  $x$ , es dado por la expresión  $C(x) = \frac{c}{qx(t)}$  donde  $c$  es el



costo por unidad de esfuerzo, el cual se estimó en base al consumo de diesel marino de un barco estándar para esta pesquería;  $\delta > 0$  es una constante que denota la tasa de descuento, la cual en el caso general se consideró una función del tiempo,  $\delta(t)$ . Precio se expresó como una función del tiempo,  $p(t)$ ; se utilizó una serie histórica de precio de la harina de pescado cotizada a nivel internacional para la identificación de parámetros de esta función (Borbón-González y Cota-Villavicencio, 1999).

Para efectuar la maximización de la funcional objetivo sobre el espacio de variación de la variable de control, se aplicaron las condiciones de optimalidad expresadas en el “*principio del máximo de Pontryagin*” (Pontryagin *et al.*, 1962). El principio del máximo es más convenientemente formulado en términos de la siguiente expresión llamada el Hamiltoniano (Clark, 1990),

$$H[x(t), t, u(t); \lambda(t)] = g[x(t), t, u(t)] + \lambda(t) f[x(t), t, u(t)], \quad (4)$$

en términos de las variables económicas y pesqueras:

$$H[x(t), E(t); \lambda(t)] = [\alpha(t)[qP(t)x(t) - \mu(x(t))] - q\lambda(t)x(t)]E(t) + \lambda(t)F(x(t))$$

Aquí  $\lambda(t)$  es una función adicional desconocida llamada la variable adjunta. La función  $F(x(t))$  es dada por la función de crecimiento de Gompertz, definida en la ecuación (1) y

$$\alpha(t) = \exp\left(-\int_0^t \delta(z)dz\right)$$

Si  $u(t)$  es un control óptimo y  $x(t)$  es la correspondiente respuesta, el principio del máximo afirma la existencia de la variable adjunta  $\lambda(t)$  tal que se satisfacen las siguientes ecuaciones, para todo  $t$  en  $0 \leq t \leq T$ :

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (5)$$

$$H[x(t), t, u(t); \lambda(t)] \equiv \max_{u \in U_t} H[x(t), t, u; \lambda(t)] \quad (6)$$

La ecuación diferencial (5) es llamada la ecuación adjunta y la ecuación (6) es referida ella misma como el principio del máximo (Clark, 1990); ésta afirma que para cada tiempo dado  $t$ , el valor  $u(t)$  del control óptimo debe maximizar el valor de la expresión hamiltoniana sobre todos los valores  $u(t)$  admisibles, satisfaciendo las restricciones de control.

Aplicando (5) y (6) se obtuvo la expresión implícita para la variable respuesta que define la senda óptima  $x_s$ , la cual viene dada por la expresión:

$$F'(x_s(t)) = \delta(t) + \frac{F(x_s(t))C'(x_s(t)) - \frac{dp}{dt}}{(p(t) - C(x_s(t)))} \quad (7)$$

donde  $F'(x_s(t))$  es la derivada de  $F(x(t))$  en  $x_s$ ,  $C'(x_s(t))$  es la derivada del costo por unidad de biomasa y  $dp/dt$  es la derivada de la función precio.

La función implícita para el nivel de biomasa óptimo  $x_s(t)$ , obtenida a partir de la ecuación (7), es la siguiente

$$\ln\left(\frac{x_s}{K(t)}\right) + \frac{c \ln\left(\frac{x_s}{K(t)}\right)}{q x_s p(t) - c} + \frac{q x_s \frac{dp}{dt}}{r(t)(q x_s p(t) - c)} - \frac{\delta(t)}{r(t)} + 1 = 0, \quad (8)$$

donde la tasa intrínseca de crecimiento de la población  $r(t)$  y la capacidad de carga del sistema  $K(t)$  están dadas por las siguientes ecuaciones, respectivamente:

$$r(t) = -0.324 \text{ Sen}(0.625 t) + 0.206 \text{ Cos}(0.625 t) \quad (9)$$

$$K(t) = K e^{0.168 \text{ Cos}(0.625 t)} \quad (10)$$

A partir la ecuación (8) se calcularon los valores de biomasa óptima  $x_s(t)$  utilizando el paquete de cómputo MAPLE.

## RESULTADOS

En la Figura 1 se muestra la variación de la biomasa estimada a partir de la solución de la ecuación (1), cuando la tasa intrínseca de la población y la capacidad de carga del sistema son dados por las ecuaciones (9) y (10), cuando se incluye el término de extracción de biomasa como cuando éste no se incluye en (1).

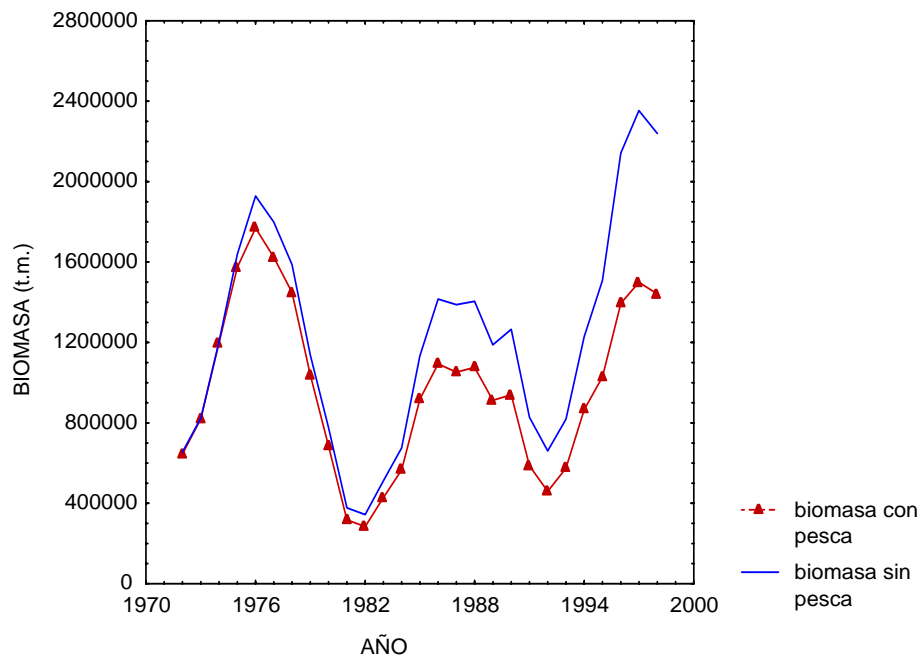


Figura 1. Biomasa calculada para anchoveta nortea a partir de la generalización del modelo de Gompertz-Fox, incluyendo y sin incluir el proceso de extracción por pesca.

En la Figura 2 se muestra la variación de la biomasa óptima en el tiempo, calculada a partir de la ecuación (8), esto es, la senda óptima. Se incluye en esta figura la gráfica de la biomasa estimada del recurso con datos de captura por unidad de esfuerzo (CPUE), para fines de comparación. En

la Figura 3 se muestra la variación del esfuerzo óptimo, el cual mantendría a la biomasa del recurso sobre la senda óptima, también se muestra el esfuerzo real aplicado en la pesquería.

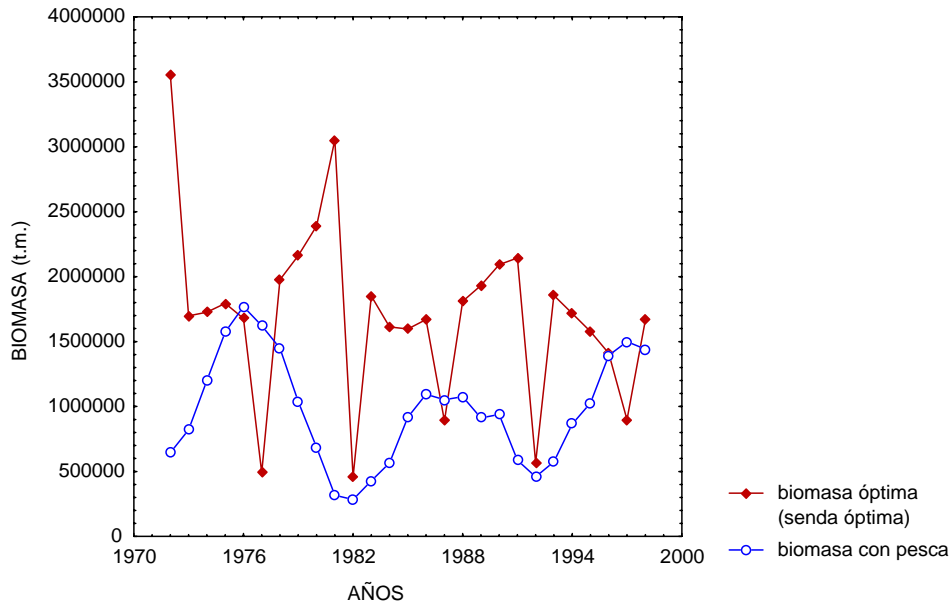


Figura 2. Biomasa óptima (cuando el costo por unidad de esfuerzo  $c= 3,000$  dólares/viaje y precio y tasa de descuento varían en el tiempo) y biomasa calculada bajo el modelo de Gompertz-Fox generalizado (ecuación 1).

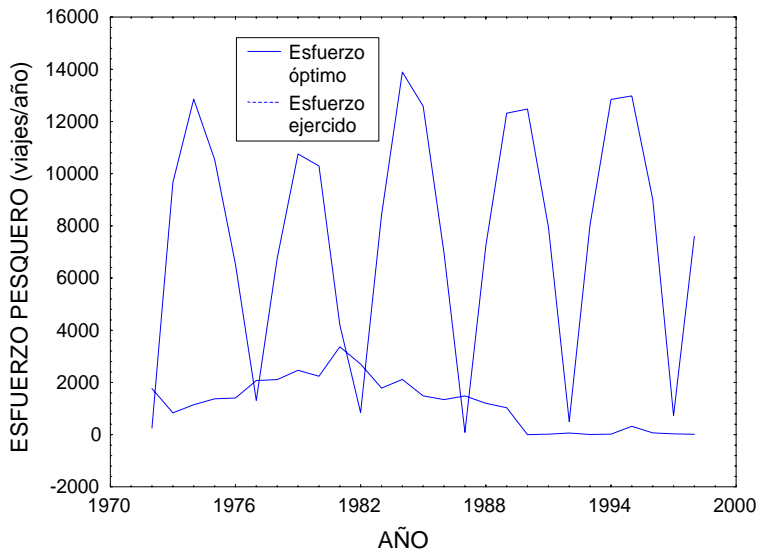


Figura 3. Esfuerzo real ejercido en la pesquería y esfuerzo óptimo  $E_s$  bajo el modelo de Gompertz-Fox generalizado con  $r(t)$  y  $K(t)$ .

En la Figura 4 se muestra la estrategia de control óptimo que se construyó en el intervalo  $[t_0, T]$ ; se considera que al inicio la biomasa del recurso es menor que la biomasa óptima.

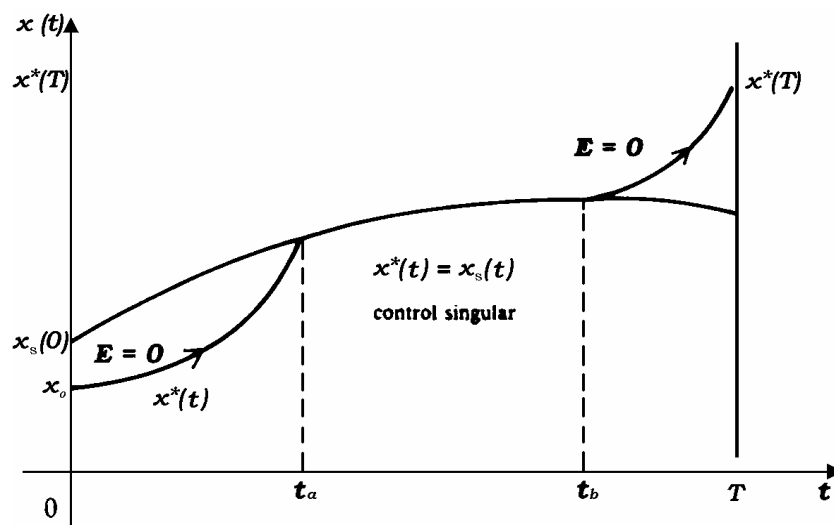


Figura 4. Estrategia de control óptimo para el caso  $x_0 < x_s(0)$ . Cuando el valor inicial  $x_0$  de la respuesta es menor que  $x_s(0)$  suspendemos la explotación para permitir que la biomasa se incremente hasta alcanzar en un tiempo  $t_a$  la senda óptima  $x_s(t)$ . A partir de  $t_a$  la explotación continuará en el modo de control singular hasta un tiempo  $t_b$ , a partir del cual suspendemos nuevamente la explotación para permitir que la condición final  $x_T$  se satisfaga a un tiempo  $T$ .

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

De la solución de la ecuación (1) se generaron las gráficas para la biomasa de anchoveta, al considerar la extracción de biomasa por la pesca y sin considerar ésta. En la Figura (1) se observa que las variaciones en el tiempo de la biomasa, con y sin pesca, prácticamente se superponen en gran parte del horizonte de explotación de la pesquería, lo cual podría indicar que las oscilaciones en los valores de biomasa no son atribuibles al efecto de la pesca y que las variaciones podrían deberse a efectos ambientales. Al analizar la variación en el tiempo de la biomasa óptima, obtenida a partir del análisis bioeconómico, se observan valores mínimos en los años 1977, 1982, 1987, 1992 y 1997 (Figura 2). Algunos de estos valores mínimos coinciden, en el tiempo, con los valores mínimos que se observan en la gráfica de la biomasa del recurso calculada con la solución de la ecuación (1), particularmente en los años 1982 y 1992. Por otra parte, en la literatura científica se han reportado eventos climáticos importantes para el Pacífico Este, tales como El Niño Oscilación del Sur (eventos ENSO, por sus siglas en inglés), para todos estos años. Uno de los más intensos que se han reportado ha sido el de 1982 (Kerr, 1998; McPhaden, 1999). Se ha reconocido a El Niño como una fuente primaria de variabilidad interanual que tiene grandes efectos sobre los ecosistemas marinos, particularmente para el ecosistema pelágico (Lynn *et al.* 1998), así también, se ha reportado que este evento climático puede afectar los parámetros reproductivos de la anchoveta y las condiciones de habitat de las diferentes especies marinas. Por lo anterior, es posible suponer que a través de los parámetros, tasa intrínseca de crecimiento y capacidad de carga del sistema como funciones del tiempo, se logra captar en el modelo la influencia de la variabilidad ambiental sobre la biomasa del recurso, lo cual se refleja

en las fuertes disminuciones de la biomasa del recurso en años El Niño, así también en la biomasa óptima ya que en el cálculo de ésta intervienen  $r(t)$  y  $K(t)$ .

Se ha aceptado que aunque la presión intensa de pesca permanece como la razón principal de que muchas pesquerías se conviertan en improductivas e incosteables y que la pesca no es ni la única ni necesariamente la fuerza primaria detrás de esas grandes fluctuaciones pelágicas de las regiones de surgencia de las corrientes de frontera Este (Schwartzlose *et al.*, 1999), los aparentemente inevitables colapsos poblacionales se aceleran por explotación intensa. En los resultados obtenidos en el estudio bioeconómico, en relación al esfuerzo óptimo calculado, se observa (Figura 3) que aunque éste presenta valores superiores al esfuerzo real ejercido en la pesquería en la mayor parte del horizonte de explotación, en algunos años, 1972, 1977, 1982, 1987, el esfuerzo real excede al esfuerzo óptimo, por lo que es posible suponer que en esos años de fuerte estrés ambiental la explotación intensa pudo agudizar la baja en los niveles de abundancia de anchoveta ocasionando la caída de la pesquería en años posteriores. Lo anterior parece confirmarse al analizar las gráficas de biomasa (Figura 2) a la luz de la estrategia de control óptimo construida (Figura 4); se observa que para gran parte del periodo de explotación, particularmente en los años El Niño 1972, 1982 y 1992, la biomasa del recurso tiene prácticamente valores menores que la biomasa óptima por lo que de acuerdo a la estrategia mencionada no debió haberse pescado durante esos años. De lo anterior se puede concluir que el estudio bioeconómico, bajo un modelo de producción de parámetros variables, permitió el análisis retrospectivo de la optimalidad del esfuerzo pesquero ejercido en la pesquería y su posible influencia en el declinamiento en las capturas de anchoveta.

## Bibliografía

- Borbón-González, D. J. y Cota-Villavicencio, A. 1999. Indicadores básicos de la pesquería de la anchoveta norteña (*Engraulis mordax*) en la costa occidental de Baja California, México. Informe Técnico. *Comunicaciones Académicas, Serie Ecológica*, CICESE 17 p. CITECT9908.
- Clark, C.W. 1989. Bioeconomic modeling and resource management. pp: 11-57. En: Simon A. Levin, Thomas G. Hallam y Louis J. Gross (eds.). *Applied Mathematical Ecology*. Springer-Verlag, New York.
- Clark, C.W. 1990. *Mathematical Bioeconomics: The optimal management of renewable resources*. Second Edition. John Wiley & Sons, New York. 386 pp.
- Cohen, Y. 1987. A review of harvest theory and applications of optimal control theory in fisheries management. *Canadian Journal of Fisheries Aquatic Science*, 44: 75-83
- Fleming, W.H. y R.W. Rishel. 1975. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer-Verlag. New York.
- Fox, W. 1970. An exponential surplus-yield model for optimizing exploited fish populations, *Trans. Amer. Fish. Soc.* 1: 80-88.
- Gordon, H.S. 1954. The theory of a common property resource: the fishery. *J. of Political Economy* 62, 124-142.
- Hannesson, R. 1993. *Bioeconomics Analysis of Fisheries*. Halsted Press, New York. 138 pp.
- Kerr, R.A. 1998. Models win big in forecasting El Niño. *Science* 280(5363): 522-523.
- Lynn, R.J., T. Baumgartner, J. García, C.A. Collins, T.L. Hayward, K.D. Hyrebach, A.W. Mantyla, T. Murphree, A. Shankle, F.B. Schiwing, K.M. Sakuma y M.J. Tegner. 1998. The state of the California Current, 1997-1998: transition to El Niño conditions. *CalCOFI Rep.*, 39, 25-49.
- McKelvey, R. 1989. Common property and the conservation of natural resources. En: Simon A. Levin, Thomas G. Hallam y Louis J. Gross (eds.). *Applied Mathematical Ecology*. Springer-Verlag, New York.
- McPhaden, M.J. 1999. Genesis and evolution of the 1997-98 El Niño. *Science* 283: 950-954.
- Pontryagin, L.S., V.G. Boltyanskii, R.S. Gamkrelidze y E.F. Mishchenko. 1962. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience. New York.
- Schwartzlose *et al.*, 1999. Worldwide large-scale fluctuations of sardine and anchovy populations. *S. Afr. J. mar. Sci.* 21:289-347.



## Análisis Matemático del Tiempo de Corrimiento y Aceleración del Algoritmo de Ordenamiento Quicksort en Paralelo

M.C. José Antonio Cárdenas Haro      M.C. Guillermo Galaviz Yañez  
Universidad Autónoma de Baja California  
Ph.D. Gilberto López Mariscal  
CICESE

### Resumen

*En este artículo se analiza el tiempo de corrimiento promedio y peor caso del algoritmo Quicksort en paralelo. Similarmente se hace un análisis de la máxima aceleración teórica posible en paralelo para dicho algoritmo de ordenamiento.*

## 1. Introducción

Según estimaciones hechas en 1973 el 25 % del poder de cómputo en el mundo se utiliza para hacer algún tipo de ordenamiento [4]. Aunque este porcentaje puede haber cambiado en la actualidad, el ordenamiento de datos no ha dejado ni dejará nunca de ser parte importante en la solución de muchos problemas cotidianos. Por ello cantidad de algoritmos de ordenamiento han sido desarrollados buscando siempre la mayor eficiencia posible.

## 2. El Quicksort

Uno de los algoritmos de ordenamiento más rápidos e importantes es sin duda el Quicksort desarrollado en 1962 [2].

### 2.1. Metodología de Ordenamiento del Quicksort

Este algoritmo utiliza la técnica de “divide y vencerás”. Como primer paso se selecciona un elemento de la lista a ordenar y se toma a este como referencia, conocido también como pivote. Los datos menores a este elemento pivote son colocados a su izquierda y los mayores a su derecha. Se tienen después de este primer proceso, dos sublistas, una con elementos menores al pivote y la otra con elementos mayores a este. Ahora en cada sublista se escoge un pivote y se repite el proceso anterior. Así sucesivamente hasta tener toda la lista ordenada.

En cada iteración o recursión, según sea la técnica empleada en la implementación de este algoritmo, se realizan  $\Theta(n)$  comparaciones. Teniéndose una profundidad (cantidad de iteraciones o recursiones) de  $\Theta(\log n)$ , por ello el tiempo total de corrimiento secuencial de este algoritmo es  $\Theta(n \log n)$ .

## 2.2. Metodología de Ordenamiento del Quicksort en Paralelo

Con la suficiente cantidad de procesadores, es decir un procesador por cada elemento de la lista a ordenar ( $p = n$ ), podemos hacer que las  $\Theta(n)$  comparaciones requeridas en cada iteración o recursión para colocar a los elementos a la derecha o izquierda de cierto pivote, se efectúen en un solo paso paralelo o sea en  $\Theta(1)$ . De esta forma el tiempo total queda dependiente solamente de la profundidad requerida para ordenar la lista que son la cantidad de iteraciones o recursiones, y esto es  $\Theta(\log n)$ .

## 3. Análisis del Peor Caso en el Quicksort

### 3.1. Análisis del Peor Caso Secuencial

La probabilidad de que el peor caso ocurra es demasiado baja. El peor caso ocurre cuando el pivote seleccionado siempre es el de un extremo, de esta forma nunca obtendríamos dos sublistas de elementos y la profundidad consecuentemente sería de  $\Theta(n)$  y considerando que en cada iteración o recursión se siguen realizando  $\Theta(n)$  comparaciones, el tiempo total para terminar el ordenamiento sería entonces de  $\Theta(n^2)$ .

$$T(n) = n + T(n - 1) = n + (n - 1) + \dots + 1 \quad \implies \quad T(n) = \Theta(n^2)$$

### 3.2. Análisis del Peor Caso en Paralelo

En paralelo tenemos la ventaja de que las comparaciones requeridas, con la suficiente cantidad de procesadores ( $p = n$ ), podemos efectuarlas en un solo paso o sea  $\Theta(1)$ , pero como en el peor caso la profundidad es  $\Theta(n)$  como se explica en la subsección 3.1, el tiempo total para acabar el ordenamiento sería también  $\Theta(n)$ .

## 4. Análisis Matemático del Tiempo Promedio

Para analizar matemáticamente el tiempo promedio requerido por el Quicksort para ordenar una lista de  $n$  elementos debemos considerar que cada pivote seleccionado divide a la lista o sublista en dos partes iguales o casi iguales. De esta manera el tiempo total requerido para ordenar los  $n$  elementos será menor o igual a las  $n$  comparaciones requeridas en cada iteración o recursión mas el tiempo requerido en ordenar cada sublista, esto es:

$$T(n) \leq 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Para hacer el análisis mas detallado consideremos que cada pivote seleccionado divide a la lista o sublista en dos partes iguales, es decir con exactamente la misma cantidad de elementos. Esto es:

$$T(n) = n + T(i - 1) + T(n - i)$$



El tiempo promedio sería entonces de:

$$T_a(n) = n + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_a(i-1) + T_a(n-i))$$

Considerando que  $T_a(i-1) = T_a(n-i)$  entonces tenemos:

$$T_a(n) = n + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n T_a(i-1)$$

Multiplicamos por  $n$  a la ecuación anterior y le llamamos ecuación 1.

$$nT_a(n) = n^2 + 2 \sum_{i=1}^n T_a(i-1) \quad (1)$$

Sustituimos  $(n-1)$  por  $n$  y le llamamos ecuación 2.

$$(n-1)T_a(n-1) = (n-1)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} T_a(i-1) \quad (2)$$

A la ecuación 1 le sustraemos la ecuación 2, esto con el fin de obtener el tiempo promedio requerido para ordenar un elemento  $x$  de la lista, dicho elemento  $x$  representa a cualquier elemento, y el tiempo promedio de ordenación de cualquier elemento nos representa el tiempo promedio de ordenación de toda la lista. Prosiguiendo tenemos:

$$nT_a(n) - (n-1)T_a(n-1) = n^2 - (n-1)^2 + 2 \sum_{i=1}^n T_a(i-1) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} T_a(i-1)$$

$$nT_a(n) - (n-1)T_a(n-1) = n^2 - (n^2 - 2n + 1) + 2T_a(n-1)$$

$$nT_a(n) - (n-1)T_a(n-1) = 2n - 1 + 2T_a(n-1)$$

$$nT_a(n) - (n-1)T_a(n-1) = 2T_a(n-1) + 2n - 1$$

$$nT_a(n) = (n+1)T_a(n-1) + 2n - 1$$

Sumamos 1 al lado derecho de la ecuación y tenemos:

$$nT_a(n) \leq (n+1)T_a(n-1) + 2n$$

Dividimos a la ecuación anterior entre  $n(n+1)$  y obtenemos la ecuación 3:

$$\frac{T_a(n)}{n+1} \leq \frac{T_a(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \quad (3)$$

Definiendo

$$F(n) = \frac{T_a(n)}{n+1}$$

y sustituyendo en la ecuación 3 tenemos:

$$F(n) \leq F(n-1) + \frac{2}{n} \implies F(n-1) \leq F(n-2) + \frac{2}{n-1}$$

Lo cual equivale a:

$$F(n) \leq F(n-2) + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n}$$

Expandiendo la recurrencia tenemos:

$$F(n) \leq 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

Esta recurrencia podemos expresarla como:

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \implies 2 \int_1^n \frac{1}{x} dx = 2 \ln(n) + c \approx \Theta(\log n)$$

Si

$$F(n) \approx \Theta(\log n)$$

y además

$$F(n) = \frac{T_a(n)}{n+1}$$

entonces:

$$T_a(n) = (n+1)F(n) \implies T_a(n) \approx \Theta(n \log n) \quad (4)$$

que es el tiempo promedio de corrimiento secuencial del algoritmo de ordenamiento Quick-sort.

#### 4.1. Análisis del Tiempo Promedio en Paralelo

El tiempo promedio de ordenamiento secuencial del Quicksort es  $\Theta(n \log n)$  como se concluye en la ecuación 4. En el caso del corrimiento del Quicksort en paralelo, como se explica brevemente en la sección 2.2, es de  $\Theta(\log n)$ . Analizando a mas detalle se requieren inicialmente  $p = n - 1$  procesadores en la primer iteración,  $p = n - 3$  en la segunda,  $p = n - 7$  en la tercera,  $\dots$ ,  $p = n - (2^i - 1)$  en la  $i$ -ésima iteración, hasta que todos los elementos han quedado ordenados.  $2^i - 1$  son la cantidad de pivotes que se tienen en la iteración  $i$ , contra los cuales se van comparando los demás elementos. Los pivotes no solo sirven de referencia sino que además son elementos que van quedando ordenados. Como las comparaciones a cada iteración se resuelven en  $\Theta(1)$  el tiempo de terminación en paralelo depende de la profundidad de corrimiento de este algoritmo que en promedio es  $\Theta(\log n)$ .

#### 5. Análisis de la Aceleración Ideal

El tiempo paralelo para ordenar  $n$  elementos con  $p$  procesadores considerando  $p = n$  como ya vimos en la sección 4.1 es  $\Theta(\log n)$ .

Pero cuando la cantidad de procesadores con los que contamos es menor a la cantidad de datos a ordenar (esto es  $p < n$ ) el tiempo requerido será obviamente mayor y dependerá de la relación  $p$  a  $n$  [3]. Dicho tiempo paralelo está dado por:

$$T_{par}(n, p) = \sum_{i=1}^{\lceil \log p \rceil} \frac{n}{2^{i-1}} + \sum_{i=\lceil \log p \rceil+1}^{\log n} \frac{n}{p} = 2n(1 - \frac{1}{2^{\lceil \log p \rceil}}) + \frac{n}{p}(\log n - \lceil \log p \rceil) \quad (5)$$

La aceleración (speedup) está dada por la relación del tiempo de ejecución secuencial (es decir con un procesador) entre el tiempo de ejecución en paralelo (esto es con  $p$  procesadores), para el cálculo de la aceleración ideal no se considera el tiempo requerido para la comunicación y transferencia de datos entre los procesadores (también conocida como “overhead” en el argot computacional). Por lo tanto, la aceleración ideal esta dada por:

$$S_{ideal}(n, p) = \frac{T_{seq}(n)}{T_{par}(n, p)} = \frac{n \cdot \log n}{T_{par}(n, p)} \quad (6)$$

#### 6. Conclusiones

En el presente trabajo se hace un análisis matemático del corrimiento secuencial del Quicksort en condiciones ideales, considerando que los pivotes seleccionados en cada iteración parten a cada subgrupo de elementos exactamente por la mitad. Esto en la práctica es poco probable que ocurra, sin embargo sirve como base para llegar a una buena aproximación. De manera similar para el análisis del corrimiento en paralelo y de la aceleración ideal no se toma en consideración el tiempo de comunicación entre los procesadores, el cual es variable dependiendo de varios factores. Si bien es cierto que la aceleración ideal en la práctica es inalcanzable, sirve como base o parámetro de medición.

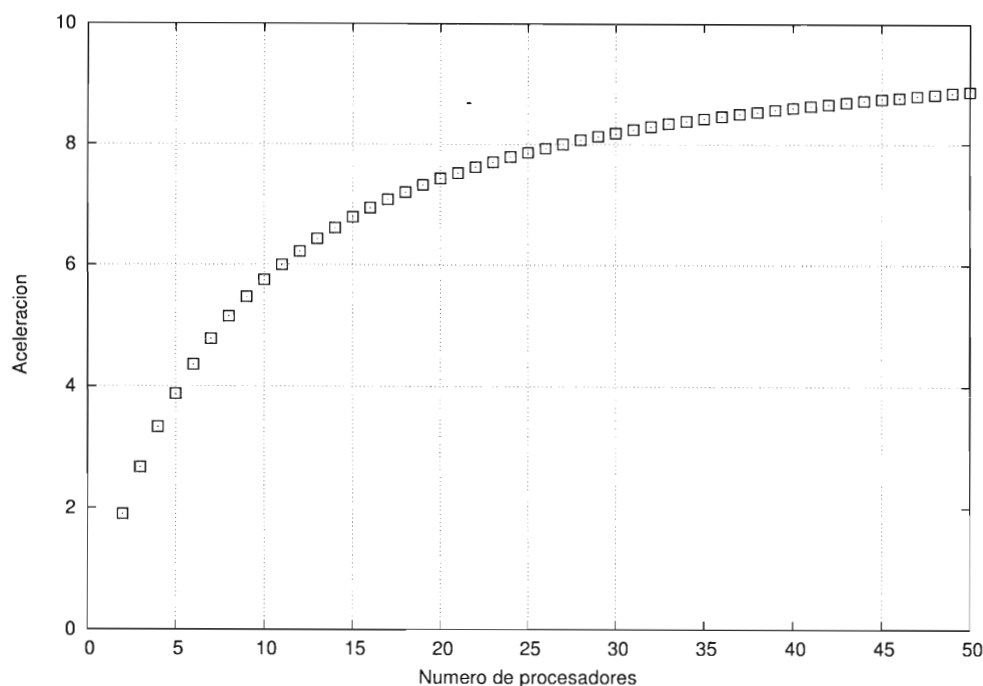


Figura 1: Tabla que muestra la aceleración ideal del Quicksort en paralelo considerando una  $n=1000000$ .

## Referencias

- [1] Granat Robert (2004) *Implementing the Parallel Quick-sort algorithm in parallel distributed memory environment*, technical report; Uppsala University
- [2] Hoare, C.A.R.(1962) *Quicksort.*, The Computer Journal 5, 1 (April), 1016.
- [3] Hoffmann Ralf, Korch Matthias, Rauber Thomas (2004). *Performance evaluation of task pools based on hardware synchronization*, IEEE
- [4] Knuth, D.E. (1973) *Sorting and Searching. The Art of Computer Programming*, 3. Addison-Wesley, Reading MA USA
- [5] Powers David M.W. *Parallelized QuickSort with Optimal Speedup*, Universität Kaiserslautern
- [6] Tsigas Philippos, Zhang Yi. *A Simple, Fast Parallel Implementation of Quicksort and its Performance Evaluation on SUN Enterprise 10000* , Department of Computing Science, Chalmers University of Technology

## Proyectos Integrados de Aprendizaje para Matemáticas

Dr. José Luis Díaz Gómez y L. M. Paulina Danae López Ceballos.

Universidad de Sonora

### **Resumen**

*En esta ponencia planteamos lo que denominamos Proyectos Integrados de Aprendizaje (PIA) para las Matemáticas. Estos se definen como una estrategia metodológica cuyo eje central es la resolución de problemas vinculados a la profesión elegida y que suscitan la intervención conjunta de otras áreas. Los proyectos integrados de aprendizaje se definen como proyectos en los que se plantean una serie de problemas para cuya resolución es necesario dar una serie de pasos, realizar un proceso. Los PIA además inciden directamente en la comprensión por parte del alumno de la necesidad de estudiar y aprender matemáticas, puesto que le ven la utilidad de manera inmediata.*

### **I. Introducción.**

En el nuevo Marco Curricular de la Reforma Educativa de la Universidad de Sonora destaca entre los principios de intervención educativa, el aprendizaje integrado e interdisciplinario, partiendo de la base que lo que motiva principalmente a los jóvenes a cursar una carrera es el aprendizaje de una profesión, entendiendo en muchas ocasiones ésta, en un sentido reduccionista, como el aprendizaje puramente técnico-profesional.

Desde nuestro punto de vista, en un aprendizaje integrado, se propone que la intervención de los educadores debe facilitar que el aprendizaje de los contenidos formativos se lleve a cabo de una forma global, integrando unos y otros, tal como se encuentran en la vida diaria y en la práctica profesional. Por lo tanto, se propone que las propuestas educativas presenten de una forma clara la relación entre los aprendizajes que interesan más directamente a los estudiantes, y todos los demás necesarios para facilitar una formación adecuada, así como la relación entre unos y otros para llegar a conseguir los objetivos que se pretenden: la inserción laboral y participación en la vida activa.

Surge así la integración como una propuesta metodológica que da respuesta a la necesidad de presentar los contenidos de aprendizaje de forma interrelacionada, donde la funcionalidad se alcance necesariamente a través del trabajo sobre los diferentes aspectos formativos. Los contenidos más instrumentales (como la expresión matemática) cobran sentido en cuanto son útiles para el trabajo de otros más técnicos. Para que este enfoque integrador sea eficaz es necesario que la tarea esté bien organizada, que las partes que la componen y las interrelaciones entre ellas sean claras.

En esta ponencia planteamos lo que denominamos Proyectos Integrados de Aprendizaje (PIA), estos se definen como una estrategia metodológica cuyo eje central es la resolución de problemas vinculados a la profesión elegida y que suscitan la intervención conjunta de otras áreas.

En los PIA se parte de situaciones de aprendizaje reales, definidos como proyectos en los que se plantean una serie de problemas para cuya resolución es necesario dar una serie de pasos, realizar un proceso. En ese proceso será necesario recurrir a contenidos de otras áreas distintas a la matemática (química, física, biología, ecología, informática, etc.), así como realizar acciones para la resolución de los problemas, por ejemplo: recoger información necesaria de forma oral o

por escrito y asesorarse adecuadamente con otros profesores. Además tendrán que comunicar al resto del grupo sus ideas e informaciones y cómo las han obtenido, qué procedimientos han realizado, qué materiales han utilizado, etc.

Para lograr lo anterior y optimizar los procesos de enseñanza aprendizaje será necesario tener en cuenta una serie de principios metodológicos que se derivan de la concepción constructivista del aprendizaje. Mencionamos algunos de los que conforman nuestra propuesta.

## ***II. Principios Metodológicos.***

### **1.- El aprendizaje es un proceso individual que se produce en interacción con el medio, pero que no está totalmente condicionado por éste.**

El aprendizaje de conocimientos es el resultado de un proceso de construcción personal. Para que en el entorno educativo se produzcan aprendizajes es necesario partir de las experiencias de acontecimientos cotidianos y de los datos de la realidad a que tienen acceso los alumnos y alumnas. Es necesario que el saber y el saber hacer estén integrados, que tengan una intencionalidad clara, conocida y motivadora, de forma que permita a los alumnos y alumnas implicarse en la acción, y que todo ello se produzca en situaciones de interacción social, en las cuales se desarrollan numerosos intercambios y comunicaciones.

### **2.- No todos aprendemos de la misma manera.**

Las diferencias individuales a la hora de aprender son una condición inherente al ser humano; todos los alumnos son distintos en aspectos como su capacidad y ritmo de aprendizaje, sus preferencias, intereses, motivaciones y expectativas ante el aprendizaje escolar, sus estilos de aprendizaje e incluso sus ideas, experiencias y actitudes previas.

### **3.- Lo que el individuo puede llegar a aprender está condicionado por sus conocimientos previos.**

Los posibles efectos de las experiencias educativas escolares sobre el desarrollo personal del alumno están igualmente condicionados en gran medida por los conocimientos previos pertinentes con los que inicia su participación en las mismas. Estos conocimientos pueden ser a su vez el resultado de experiencias educativas anteriores (escolares o no escolares) o de aprendizajes espontáneos; también pueden estar más o menos ajustados a las exigencias de las nuevas tareas de aprendizaje y ser más o menos correctos.

### **4.- El aprendizaje debe ser significativo, para lo que es necesario: que el material tenga una *significatividad lógica*, que lo presentado tenga *significatividad psicológica* y que haya una *actitud positiva* por parte de los que van a realizar el aprendizaje.**

Hablamos de aprendizaje significativo cuando el nuevo material de aprendizaje se relaciona de una forma sustantiva y no arbitraria con lo que el alumno ya sabe, es decir, cuando es asimilado en su estructura cognitiva y lo puede *enlazar* o *encadenar* a conocimientos previos; por el contrario, cuando se establece una relación arbitraria nos referimos al aprendizaje memorístico.

### **5.- El profesorado tiene una función mediadora en el aprendizaje.**

La explicación constructivista del aprendizaje que asumimos es una posición distinta a las propuestas que toman como eje la actividad mental constructivista del alumno y donde el proceso de construcción del conocimiento se identifica como un proceso de interacción *exclusivo* entre el sujeto que aprende y el objeto de aprendizaje, como si fuera un fenómeno básicamente individual, impermeable a la influencia del profesor.

En la concepción anterior el profesor debe asumir unas ambiguas funciones de guía o facilitador, sin interferir en el proceso de aprendizaje del alumno, que se centra en su exploración autónoma del objeto de conocimiento.

### ***III. Proyecto Integrado de Aprendizaje.***

Cuando se enseña se acostumbra pasar directamente de los objetivos y/o contenidos a las actividades sin que medie ninguna consideración sobre el papel de las distintas actividades utilizadas, los criterios que se utilizaron para seleccionarlas, las relaciones de unas actividades con otras y la forma en que éstas permitirán la adquisición de los conocimientos planteados.

En la práctica, la aplicación de este tipo de programación, donde no se ha analizado ni reflexionado sobre el porqué y el para qué se hacen las cosas, queda reducida a un activismo que no favorece la maduración intelectual del alumno, la comprensión de los conocimientos, ni la vinculación entre los conocimientos adquiridos durante la etapa educativa y la práctica profesional real. Todo ello conlleva a una desvinculación en el proceso de aprendizaje, tanto del alumno que pasa de una actividad a otra sin saber por qué y cómo se relacionan, como del profesor que no encuentra un hilo conductor que le permita vincular de manera asertiva contenidos y actividades.

Resulta muy difícil valorar la eficacia de una práctica educativa de este tipo, en la que con frecuencia existe un gran abismo entre lo que el profesor cree estar potenciando (objetivos y contenidos) y los resultados reales (conocimientos aislados y desvinculados).

Para potenciar los aprendizajes significativos es necesario desarrollar una práctica alternativa de enseñanza y aprendizaje donde se disponga de un método de trabajo que permita la consecución y vinculación de las finalidades educativas y los objetivos de aprendizaje, proponemos para lograrlo la metodología de los Proyectos Integrados de Aprendizaje (PIA). La elección de esta metodología no implica que sea la única posible, sino que desde el punto de vista de una formación básica, de la diversidad de aprendizajes previos de los jóvenes, así como de los objetivos académicos que se deben cumplir, se considera que es una de las estrategias metodológicas que más posibilidades formativas ofrece.

Esta metodología es opuesta a los tratamientos académicos clásicos del currículo, donde la estructuración de los tiempos, de los espacios y de los contenidos se ven como compartimentos fijos y aislados. Entre las características de un proyecto integrado de aprendizaje destacan las siguientes:

- Se parte de una motivación ligada al entorno, a la problemática real en los campos de trabajo o a las necesidades e intereses del alumnado
- El alumno realiza un aprendizaje activo
- La acción es constante
- El profesor es impulsor, coordinador y mediador de los aprendizajes.

Los PIA son una estrategia metodológica, que tienen como base la resolución de problemas, estos problemas están vinculados al desarrollo personal y profesional y son los que van a generar las intervenciones desde todas las áreas. En este sentido lo que se potencia es una estructura de trabajo con los estudiantes, de forma que a la vez que aprende diferentes técnicas, habilidades, conceptos etc., incorpora estrategias para afrontar y resolver problemas que pueden surgir, tanto en su vida profesional como en su vida personal.

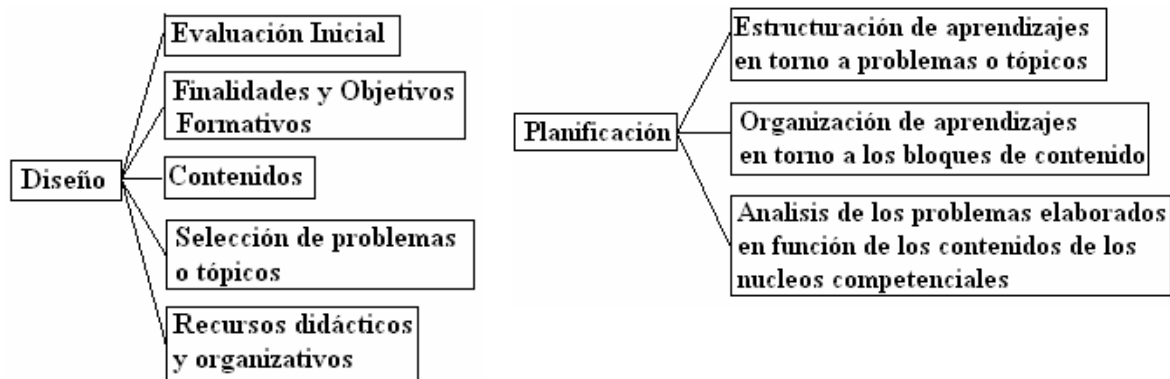
El proceso de elaboración de un PIA requiere desarrollar una serie de pasos de planificación con la perspectiva de un curso como horizonte inmediato que puedan irse adaptando y

perfeccionando sucesivamente en la práctica cotidiana del trabajo educativo en la escuela, y en los tiempos de revisión de la propuesta curricular que configuran los planes de estudio. En todo caso éstos no son algo cerrado estático e inmutable sino que son propuestas abiertas, hipótesis de trabajo o formas estructuradas de organizar la practica educativa.

Esta propuesta curricular, basada en un planteamiento integrador a través de los planes de estudio y de otras estructuras integradoras de aprendizaje, tiene como finalidad cubrir los contenidos de una determinada área de aprendizaje (carrera), durante un período de tiempo determinado, siendo necesario que esté de tal forma planificado que no genere lagunas importantes en los contenidos que deben asimilar los alumnos y alumnas.

Atender a estos requisitos precisa reflexionar sobre la filosofía del proyecto, las estrategias didácticas, las tareas que ofertar, los recursos didácticos, las modalidades de evaluación y experimentar las propuestas que se vayan construyendo, antes de su implementación definitiva.

En la elaboración de un PIA en matemáticas, se utilizan problemas reales obtenidos de una ciencia y la matemática como herramienta para el planteamiento, análisis y resolución de los mismos. Una propuesta de esquema de los pasos a seguir para la elaboración de Proyectos Integrados de Aprendizaje para la matemática es el siguiente.



Para ilustrar el uso de un PIA en matemáticas veremos un ejemplo adaptado de un problema de Sanderfur y Dance, donde sólo se presentará la guía para el profesor, omitimos intencionalmente la del estudiante por limitaciones del espacio.

#### ***IV. Un Ejemplo para el tema de Funciones.***

##### **Un Estudio de la Anemia Falciforme:**

La anemia falciforme es una enfermedad hereditaria de los glóbulos rojos. Se caracteriza por episodios de dolor, anemia (falta de glóbulos rojos), infecciones serias y daño en órganos vitales.

#### **Introducción** (Matemáticas tratadas en el proyecto).

Esta investigación de la genética de células falciforme a través de un modelo matemático utiliza: probabilidad, propiedades de las funciones cuadráticas y el concepto de optimización de una función.

Las propiedades de las funciones cuadráticas que surgen en esta investigación son:

- La relación entre los ceros de una función y sus factores.
- La relación entre los ceros y la localización de su vértice.



- La simetría de su gráfica y la localización de sus puntos extremos.
- Y factores cuadráticos de la forma  $ax^2 + bx$ .

Al incluir el uso de la fórmula cuadrática para modelar a una población con riesgo de malaria y el efecto que tiene cambiar los coeficientes de una función sobre la localización del máximo valor, los estudiantes obtienen mucha experiencia en:

- Desarrollar un modelo matemático a partir de una información dada.
- Utilizar las funciones.

Cuando se estudia por qué los alelos de células falciformes o normales se estabilizan en la proporción óptima, se explora el sistema dinámico que representa un proceso genético y los estudiantes podrán observar que el valor de equilibrio del sistema es el mismo valor  $n$  que maximiza el número de personas que sobreviven a la madurez y ayudará a clarificar el proceso biológico detrás de los resultados algebraicos.

### **Preparación del proyecto.**

Para realizar la simulación cada grupo de tres o cuatro estudiantes requieren: una taza, 7 fichas de un color y 6 fichas de otro color, estas fichas deben de ser idénticas excepto por el color, deben ser más o menos cuadradas más que redondas para que no rueden fuera de las mesas de trabajo de los estudiantes. Si no es posible tener fichas, se podría por ejemplo utilizar monedas de una misma denominación, por ejemplo monedas de a un peso pintadas con un marcador. En la simulación suponemos que dos tercios de las células normales (N) mueren de malaria.

### **Organización.**

La primera actividad para el estudiante son lecturas que se dejan como tarea antes de iniciar la modelación. Estas lecturas proporcionan información acerca del Carácter de las Células Falciformes y sobre la Malaria.

La segunda actividad para el estudiante es una simulación del proceso genético descrito en la introducción. El propósito de la simulación es ayudar a comprender el problema, no se intenta enseñar matemáticas y parecería que puede prescindirse de ella, pero creemos que se debe hacer porque la experiencia práctica ayuda a los estudiantes a visualizar el proceso para el cual posteriormente desarrollarán un modelo matemático. Cuando hayan completado la simulación asegúrese de que los estudiantes saben lo siguiente:

- Cada persona nace con dos genes, uno de cada padre, que determinan si tienen células de hemoglobina falciformes o células de hemoglobina normal.
- El alelo normal se etiqueta con N, y la célula falciforme se etiqueta con S.
- La probabilidad de que un alelo sea normal, N, es la fracción de N alelos de la información genética total de los padres; y la denotamos con  $n$ .
- La probabilidad de que un alelo sea “defectuoso”, S, es la fracción de S de alelos de la información genética total de los padres; y la denotamos con  $s$
- Todos los alelos son N, o, S, así que,  $n + s = 1$ .
- Toda persona es NN, NS, o SS. (No distinguiremos entre NS y SN).
- En nuestro ejemplo,  $\frac{2}{3}$  de los niños NN mueren de malaria antes de tener la edad para reproducirse. Todos los niños SS mueren de Anemia Falciforme antes de tener edad para reproducirse. Todos los niños NS viven hasta una edad como para reproducirse.

- Una única célula falciforme no resulta en una anemia falciforme y un único alelo crea una condición que permite la protección contra la malaria.

La tercera actividad, **Modelación Matemática de la Población**, conduce a los estudiantes a desarrollar funciones para el número esperado de sobrevivientes adultos de una cierta población de nacimientos. La función que desarrollan es una cuadrática, con una raíz en el origen. Los estudiantes encuentran las raíces y utilizan la simetría para encontrar el vértice.

En la cuarta actividad, **Un Modelo Matemático de Células Falciformes con una Tasa de Supervivencia Variable**, los estudiantes resuelven un problema utilizando lo que han aprendido. Desarrollan una ecuación cuadrática sin raíces y utilizan la simetría para encontrar el vértice. Esta cuadrática puede factorizarse con facilidad, pero pueden darse variaciones en las que se requiera utilizar la fórmula general para encontrar las raíces.

En la quinta actividad, **Una Familia de Funciones para Modelar la Tasa de Variación de la Malaria**, los estudiantes resuelven problemas en los cuales las funciones cuadráticas incluyen parámetros. Los estudiantes exploran como afectan los parámetros a la forma y posición de la parábola.

La última actividad, **Porqué las Células Falciformes y las Normales se Estabilizan en la Proporción Óptima**, proporciona una oportunidad de observar la situación desde una perspectiva matemática diferente.

### ***V. Conclusiones.***

Este ejemplo muestra cómo los contenidos matemáticos pueden estudiarse y aprenderse utilizando didácticas que inciden directamente en la comprensión por parte del alumno de la necesidad de estudiar y aprender matemáticas, puesto que le ven la utilidad de manera inmediata, al resolver problemas reales con los que se pueden enfrentar en el futuro. Además se favorece el gusto por el aprendizaje de las matemáticas y a su vez se desarrollan habilidades y destrezas diversas, tanto técnicas como sociales.

### ***Bibliografía.***

1. Jurjo Torres. *Globalización e interdisciplinariedad: el currículum integrado*. Ediciones Morata. Madrid 1994.
2. Ángel de Carlos y colegas, *Guía para la elaboración de proyectos integrados de aprendizaje en los programas de garantía social*. Eusco Jaularitz, Gobierno Vasco.
3. James Sandefur y Rosalie Dance. Hands on Activities for Algebra at College.  
<http://www.georgetown.edu/projects/handsonmath/>.

## **El concepto de variable en los libros de texto**

Dr. José Luís Díaz Gómez y P. M. C. Lina Morales Peral.

Universidad de Sonora

### ***Resumen.***

*Se han encontrado evidencias de que estudiantes, tanto de primaria como de universidad, tienen dificultades para resolver ciertos tipos de problemas de álgebra. Los errores que manifiestan subyacen en parte, en una tenue y mal definida concepción de lo que son las variables y del papel que juegan en la resolución de problemas. Parte de esta problemática tiene que ver con el hecho de que los libros de texto dedican muy poco espacio y tiempo a la discusión y definición del concepto de variable, así como a la forma en que se define. Con el propósito de buscar respuestas a estas dificultades se realizó un análisis de libros de texto. Se examinó la forma en la que la definición de variable se presenta en diferentes textos, sus características y elementos que se utilizan para definirla. En este artículo presentamos resultados de este análisis.*

### **1. Introducción.**

En los cursos de Matemáticas de todos los niveles educativos, los libros de texto y los materiales escritos son los principales, y clásicos, materiales de apoyo para la enseñanza. La producción abundante de estos materiales, y su función como transmisores de contenidos socialmente aceptados, hace que resulte interesante estudiar la contribución que han tenido en el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Así pues, podemos considerar a los textos como importantes recursos instruccionales, que caracterizan de alguna manera la enseñanza y el aprendizaje. La forma en que los libros de texto reflejan determinados aspectos de los conceptos puede influir en lo que los alumnos aprenden (qué y cómo), si admitimos que proporcionan la mayor parte del contenido matemático que los estudiantes deben aprender.

Desde un punto de vista superficial, puede observarse el gran esfuerzo realizado por las editoriales en actualizar el formato y la presentación de los textos. En cambio, resulta difícil determinar si en ellos se ha incorporado, y de qué manera, los resultados obtenidos en investigaciones sobre la forma en que se aprenden algunas nociones matemáticas, realizadas en el campo de la Matemática Educativa.

Con el propósito de observar hasta que punto se ha dado esta incorporación en relación con el concepto de variable efectuamos una somera revisión de algunos libros de álgebra. Esta revisión nos muestra que algunos libros le dedican a lo más una página para explicar el concepto de variable, pero otros generalmente mucho menos, e incluso algunos no definen el concepto. Esto a pesar del hecho de que la matemática contenida en ellos se basa en la existencia de variables, y que estas predominan virtualmente en cada página de los textos, sin contar, que las definiciones que se encuentran en ellos son distintas y utilizan diferentes formas para definirlas.

### **2. Problema.**

Varios investigadores como Matz (1975), Kieran. (1980), Trigueros y Ursini (1999) entre otros han encontrado evidencia convincente de que muchos estudiantes, tanto de primaria, como de universidad tienen dificultades para resolver ciertos tipos de problemas elementales de álgebra. La evidencia muestra que los errores manifestados por los estudiantes subyacen, en parte, en una

tenue y mal definida concepción de lo que son las variables y qué papel juegan en la resolución de problemas. En particular, de acuerdo con nuestra revisión preliminar, creemos que parte de esta problemática tiene que ver con el hecho de que los libros de texto dedican muy poco espacio y tiempo a la discusión y definición del concepto de variable, así como a la forma en que se define este concepto.

Así pues, con el propósito de buscar respuestas a estas dificultades realizamos una revisión más profunda de algunos libros de texto en el ámbito en el que trabajamos. Creemos que aunque la revisión de la bibliografía no es exhaustiva, presenta una amplia gama de estilos de la presentación y del contenido.

El análisis de libros de texto se ha llevado a cabo en diferentes ámbitos de investigación. En este artículo se presentan los resultados de una revisión de libros de texto de matemáticas. Dicha revisión se centró en un aspecto del currículo: la presentación del concepto de variable. Pero para hacer esta revisión nos documentamos acerca de cómo se ha venido realizando este tipo de trabajo, encontrando que hay varias maneras de revisar textos.

### ***3. Diferentes formas de analizar los textos.***

Centrándonos en el campo de la educación matemática, Howson (1995) distingue entre investigaciones realizadas sobre textos a posteriori, es decir, la forma en que se ha usado un libro de texto, cómo ha contribuido al proceso de aprendizaje y qué obstáculos se han presentado; y las realizadas a priori. Entre estas últimas se menciona el trabajo de Chevallard (1985), en los que aparece la noción de transposición didáctica, es decir, la transformación de la matemática en el contenido escolar, que se refleja fundamentalmente en los libros de texto.

Por otro lado, se han desarrollado dos líneas de actuación en relación al análisis de los libros de texto, las cuales comentaremos brevemente (García y Llinares, 1995). Podemos considerar:

I. Estudios centrados en el análisis de la forma en que se reflejan en ellos los contenidos, adoptándose dos puntos de vista:

1. Los que se han ocupado del propio instrumento de análisis que se aplica al texto. Entre ellos mencionamos:

Van Dormolen (1986) y Otte (1986) ponen énfasis en lo que transmite el texto, las relaciones entre el conocimiento y su representación textual y las variaciones en las interpretaciones. Sanz (1990) se centra en la necesidad de considerar los modos de representación utilizados, para realizar inferencias relativas al significado de las ideas matemáticas que los textos transmiten.

2. Los que eligen un tópico concreto y examinan la forma en que este contenido particular se contempla en diferentes textos. Como Küchemann (1987), que intenta ver cómo un mismo tópico (razón y proporción) se caracteriza en diferentes libros de texto.

II. Estudios centrados en el uso que se hace de los textos en las situaciones de enseñanza.

Freeman y Porter (1989) describen diferentes estilos en el uso de los libros de texto de matemáticas por los profesores, en el nivel de enseñanza primaria, y examinan el solapamiento entre el contenido enseñado y el contenido que aparecía en los textos.

El trabajo que aquí presentamos se encuadra dentro de aquellos que eligen un tópico y examinan las diferentes formas en que éste se presenta. Examinamos la forma en la que la definición de variable se presenta en diferentes textos, sus características y elementos que se utilizan para definirla. Sin duda que el análisis pudiera ser mucho más completo, sin embargo, para nuestro trabajo el que realizamos es suficiente.

#### 4. Metodología.

1. Se recopilaron libros de primaria, secundaria, preparatoria y universidad, además de algunas enciclopedias recomendadas para diversos niveles.
2. Se analizó cada libro buscando la definición de variable que presenta el libro o la página donde aparece por primera vez la palabra variable.
3. Con los datos anteriores se formó una tabla de datos que contiene la información de la definición que contiene el texto y la referencia del texto.
4. Se realizó un análisis de las definiciones buscando regularidades sobre el enfoque con que se presenta y términos matemáticos que intervienen en la definición.
5. Se realizó un análisis de las definiciones para clasificar el uso que se le da en los textos de acuerdo con la clasificación siguiente: como incógnita, como número general, como variable, como relación funcional.

A continuación mostramos algunas definiciones representativas.

*“La letra  $x$  se llama variable y el conjunto  $R$  cuyos elementos la remplazan se llama conjunto satisfactor. Cada vez que se usa una variable, debe uno saber cuál es el conjunto satisfactor”.*  
Lovaglia, F. M. 1972. Álgebra. Harla. Pág. 8 – 9.

*“Una expresión algebraica es una colección de letras llamadas variables y números reales organizados de alguna manera utilizando sumas, restas multiplicaciones divisiones y radicales”.*  
Larson, R, Hostetler R. 1985. College Algebra. D.C. Heath and Co. Pág. 30.

*“Las ecuaciones  $3x - 5 = x + 3$ ;  $x = x + 1$ ;  $b^2 = 4$ . Contienen una letra como variable. Si reemplazamos la letra con un número, obtenemos una expresión que es falsa o verdadera”.*  
Thompson R. 1976. Intermediate Algebra. Prindle, Weber & Schmidt, Inc. Pág. 38.

#### 5. Resultados

El total de libros revisados fue de 99, y la revisión de las definiciones dadas en ellos nos muestra que el concepto de variable se define con diferentes enfoques y para definirla o explicarla se utilizan varios términos que mencionamos abajo, así como el número de libros que los sustentan:

1. **El conjunto de reemplazo.** El conjunto de reemplazo de una variable se compone de todos los elementos que se puedan sustituir por la variable. Este conjunto puede estar compuesto por cosas, por un número o por un conjunto de números. En el álgebra de la secundaria el conjunto de reemplazo es casi siempre el conjunto de los números reales, pero en el Álgebra Lineal el conjunto puede estar formado por vectores, en las Ecuaciones Diferenciales por funciones y en Topología, el conjunto de reemplazo para las variables con frecuencia son conjuntos de conjuntos.

Sin embargo, al introducir el concepto de variable no se presenta una definición que comprenda todas las posibilidades del conjunto de reemplazo, sino que sólo se menciona que la variable representa números, haciendo poco abstracto este concepto. Las siguientes son algunas de las formas comunes en que se describe el conjunto de reemplazo en los textos revisados:

- a) **El conjunto de reemplazo es un conjunto de cosas.** Una definición muy general es la que da Mazani y colegas (p. 34, 1968): “Las letras tales como  $a, b, c, \dots$  que pueden representar cualquier (definido, pero no especificado) elemento de un conjunto (Este conjunto puede estar formado por cualquier tipo de objetos; personas, números, funciones, etc.) se llaman variables. 11 libros.

- b) **El conjunto de reemplazo es un conjunto de números.** Generalmente números reales, pero este hecho se pierde en muchos estudiantes, porque de acuerdo con Kieran (1980) y Matz (1979) los estudiantes ven las variables como etiquetas para simbolizar entidades concretas, en vez de cosas abstractas de números. La definición de Barnett (p. 234,1960), está dentro de esta categoría, define: “Una variable en álgebra es una letra que representa cualquier número de un conjunto de números bajo discusión cuando el conjunto contiene más de un número”. 46 libros.
- c) **La variable se reemplaza por un único número.** En este caso no hay referencia a un conjunto y tampoco hay una referencia a la naturaleza múltiple de la variable. En el libro “Matemáticas Aplicaciones y Conexiones (Glencoe, p. 12, 1999) se menciona; “Algunas ecuaciones además contienen variables. La ecuación  $x + 9 = 17$  no es ni verdadera ni falsa hasta que  $x$  se sustituya con un número que la hace verdadera. Resuelve la ecuación cuando reemplazas la variable con un número que la hace verdadera”. 6 libros.
- d) **Los que utilizan otro tipo de enfoques que no caen en a), b), c).** En algunos textos el autor introduce las variables y utiliza el símbolo de “guardalugar”  $\square$  para representar la variable. En el libro Graficas y Relaciones y Funciones, de la NCTM (p. 13, 14, 1979), se utilizan además del símbolo  $\square$ , los símbolos  $\Delta$ ,  $n$ ,  $x$  para representar la variable. 6 libros.

“¿Qué aspecto tiene en matemáticas una proposición abierta?”. He aquí algunas:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 2 + \square = 7 & \text{En estos casos, no podemos decir si las afirmaciones son verdaderas o} \\ 3xn < 12 & \text{falsas hasta que hayamos reemplazado los símbolos } \square, n, \Delta \text{ y } x \text{ por} \\ & \text{números....} \\ 6 - \Delta = 2 & \\ x + 2 > 5 & \text{En matemáticas se les llama variables.} \end{array} \right.$$

- e) **Textos que no tienen una definición explícita de variable.** Como en el texto de Álgebra I del Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas (1987) que utiliza el concepto de variable hasta la página 77 para describir un polinomio:

“Puesto que usaremos en esta sección y en las demás de este capítulo las expresiones algebraicas llamadas polinomios, escribiremos  $P(x)$  en lugar de la proposición: un polinomio en la variable  $x$ ...”

Proposición que no se encuentra en las páginas anteriores, así como la definición de variable, pero que partir de esta página utiliza la palabra variable.

Muchos libros de Cálculo definen los conceptos de variable independiente y dependiente, pero generalmente utilizan antes las variables sin definir las, por ejemplo, como cuando definen intervalos y resuelven desigualdades, es decir, dan por hecho que el estudiante conoce el concepto de variable (Steward, 1994, Purcell, 1992, Zill, 1987). 9 libros.

2. **Variación.** Las definiciones de los libros transmiten diferentes formas en las que varía la variable. Se presentan al menos tres posibilidades:

- a) **Variables que no varían.** Esto es lo que con frecuencia se llama la incógnita. Se le encuentra en los textos cuando se resuelve un problema para el cual hay una respuesta única o la mayoría de las veces muchas respuestas finitas. Por ejemplo: “encuentre el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es igual a 21”. La solución del problema es la ecuación  $3x = 21$ , donde  $x$  representa el lado del triángulo. A pesar de que la variable  $x$  tiene como conjunto de reemplazo todos los números positivos conceptualizamos un triángulo único y el lado de este triángulo no cambia. Muchos libros de texto presentan

solamente problemas verbales que tienen una única respuesta numérica. En éstos el estudiante puede deducir que el único reemplazo apropiado para una variable es un único número. Thompson, (p. 38, 1976) en su definición de variable escribe: “Las ecuaciones  $3x - 5 = x - 3$ ,  $x = x + 1$ , y  $b^2 = 4$  contienen una letra como variable. Si reemplazamos la letra con un número obtenemos una expresión que es falsa o verdadera”. Y a partir de aquí utiliza las variables. 22 libros.

- b) **Variables discretas.** La consideración de las variables en las relaciones funcionales difiere de la situación "estática" descrita en (a). Una forma de demostrar la naturaleza discreta de la variabilidad de una variable está con las tablas, una técnica utilizada por varios textos, aunque no se defina el concepto de variable como sucede con los libros de educación primaria. 23 libros.

Por ejemplo, en el problema de encontrar el costo  $C$  de producir  $x$  cajas de cartón, donde el costo se encuentra con la expresión  $C = 2x$ , a través de la tabulación.

$x$	$C$
1	2
2	4
3	6

La variable  $x$  representa una variable discreta con un número infinito de valores.

- c) **Variables continuas.** En general se presenta de la misma forma que en (b) excepto que se considera que la variable cambia continuamente. Un ejemplo de una variable que varía continuamente es la de la ecuación  $s(t) = 50t$  donde  $s$  es la distancia y  $t$  es el tiempo (Lang, p. 15, 1990). Sin embargo, es difícil comunicar el concepto de variación continua ya que el acto de reemplazo debe de hacerse discreto. Es decir, es difícil mostrar la naturaleza continua de la variable  $s$  asignando valores a  $t$  en la expresión  $s(t) = 50t$ . Y esto se complica más porque aun cuando el tiempo y la distancia son conceptualmente continuos, cualquier medida de ellas debe de ser discreta. Debemos de cuestionarnos aquí en si el tratar con entidades continuas discretamente simplifica el problema o si esta es una sobre simplificación que pierde la esencia de la continuidad. 6 libros.

3. **En términos de constantes.** Algunos textos hacen la distinción entre constantes y variables, otros no. Así como el concepto de variable tiene una multitud de definiciones, también lo tiene el término “constante”. Algunos textos definen constante, otros como un caso especial de una variable, y otros no la definen, como lo hace Barnett p. 3, 1984 donde dice que una constante es un símbolo que corresponde exactamente a un objeto. 1 libro.

4. **Como componente de otro concepto matemático.** Una característica de varios libros es que definen variable y constante cuando definen expresión algebraica, o polinomio, o ecuación, o fórmula, o bien utilizan alguna expresión particular de algún problema algebraico, mencionamos algunos ejemplos:

“Utilizaremos letras (llamadas variables) y números al formar las expresiones y proposiciones con las que trabajaremos. Una expresión algebraica es una colección de variables y números reales (llamados constantes) organizados de tal manera utilizando sumas, restas...” (Larson/Hostetler, p. 40, 1985).

“Un termino (llamado también monomio) es una expresión que está compuesta por una constante o un producto de constantes y variables elevadas a potencias positivas” (Peterson, p. 11, 1985). 21 libros.

Estas definiciones oscurecen el significado real de variable. Una variable es un símbolo que representa una cantidad, relación u otras estructuras matemáticas, pero la esencia de una variable

es que representa un conjunto de cantidades, relaciones o estructuras matemáticas. Cuando las variables son introducidas en el interior de una ecuación, los estudiantes frecuentemente desarrollan el error conceptual de que la variable representa un sólo número: el valor que hace que una ecuación tenga solución.

**5. No define variable**, pero puede analizarse el enfoque en su uso (según términos) o su caracterización. 35 libros.

**6. No define ni utiliza la palabra variable en el texto.** 16 libros.

**7. Clasificación de acuerdo al uso.**

a) Como **incógnita**, 30 libros. (b) Como **Número General**, 65 libros; (c) Como **Relación Funcional**, 35 libros.

## 6. Conclusiones.

Las experiencias que se tienen con la aritmética son importantes para la comprensión progresiva del álgebra, ya que las primeras experiencias con el razonamiento algebraico se corresponden con la “aritmética generalizada”. El uso de variables es un indicador clave de que la actividad matemática pasa de ser aritmética a algebraica. Sin embargo, los resultados de varias investigaciones con estudiantes de todos los niveles nos muestran la persistencia de concepciones erróneas y la evidencia de que el concepto de variable es una cuestión confusa para los estudiantes.

Creemos que parte de esta problemática se debe a que el concepto de variable es en sí mismo muy difícil de definir y esto se corrobora con los resultados del análisis de la presentación de la definición de 99 textos de matemáticas. Estos 99 textos contienen muchas maneras de presentar el concepto de variable.

## Bibliografía.

- Dormolen, J. Van (1986). Textual Analysis, en Christiansen, B., Howson, A.G. y Otte, M. (eds.). Perspectives on Mathematics Education, pp. 141-171. Dordrecht: Reidel.
- Freeman, D. & Porter, A. (1989). Do Textbooks dictate the Content of Mathematics Instruction in Elementary Schools? American Educational Research Journal, 26(3), 403-421.
- García Blanco, M. y Llinares Ciscar, S. (1995). El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. Currículum, No 10-11, pp. 103-115.
- Howson, G. (1995). Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 texts. Vancouver: Pacific Educational
- Kieran, C. 1980. “Constructing meaning for non trivial equations”. Paper presented at the AERA conference, Boston.
- Kuchemann, D. (1987). Learning and Teaching Ratio: A Look at some Current Textbooks. En P. Ernest (Ed.) Teaching and Learning Mathematics. Part 2. Perspectives 34. School of Education. University of Exeter.
- Matz, M. 1979. “Towards a process model for high school algebra errors”.
- Otte, M. (1986). What is a Text?, en Christiansen, B., Howson, A.G. y Otte, M. (eds.). Perspectives on Mathematics Education, pp. 173-204. Dordrecht: Reídle Press.
- Remillard, J. (1990). Conceptions of Problem solving in commonly used and distinctive elementary Mathematics curricula. Paper of the Center for the Learning and Teaching of Elementary Subjects. IRT, Michigan State University.
- Sanz, I. (1990). Comunicación, Lenguaje y Matemáticas. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.) Teoría y Práctica en Educación Matemática. Sevilla: Alfar.
- Trigueros Maria, y Ursini, Sonia (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. Educación Matematica. Vol. 12, No. 2.



**Una Propuesta para el Tratamiento de la Función Cuadrática  
Con Estudiantes de Bachillerato  
Presentada por: Lorena Fernández Sesma  
Universidad de Sonora**

**Resumen**

En este documento se presenta un proyecto de tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, así como también un reporte de los avances que se han realizado a dicho trabajo. El proyecto está siendo llevado a cabo en el nivel educativo correspondiente al bachillerato. Consiste en el diseño y puesta en práctica de una secuencia didáctica para el manejo de la función cuadrática, bajo el marco teórico de la dialéctica herramienta-objeto de Règine Douady, utilizando diversos sistemas de representación para el objeto matemático. Se presentan también algunas de las actividades de la secuencia preliminar, la cual será evaluada mediante un pilotaje que se realizará durante la primer quincena del mes de febrero del 2005, con la participación de 15 alumnos segundo semestre de preparatoria.

**I. Presentación**

Este documento contiene un proyecto que ha sido presentado a la Comisión Académica del Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, con el propósito de llevar a cabo una tesis de grado, en la modalidad de desarrollo docente, con el que se buscará obtener el título de maestría.

El trabajo propuesto, se realizará en el nivel educativo correspondiente al bachillerato, y en éste se pretende diseñar y evaluar una secuencia didáctica para el estudio de la función cuadrática, con base en el marco teórico de la dialéctica herramienta-objeto de Règine Douady, empleando como apoyo el manejo de los registros de representación algebraico, gráfico y numérico.

**2. Elementos de Justificación**

Diversos investigadores, han realizado estudios encaminados a caracterizar los procesos cognitivos de estudiantes que aprenden matemáticas. Particularmente, el estudio funcional parece despertar especial interés en los estudiosos de esta disciplina, ya que las funciones son consideradas como objetos fundamentales al interior de la misma con una gran variedad de aplicaciones hacia otras áreas del conocimiento. De ahí que hayan sido realizadas distintas investigaciones para estudiar las dificultades que el aprendizaje de funciones tan elementales como la lineal y la cuadrática puede ocasionar en los alumnos. Estos objetos matemáticos constituyen las primeras nociones enseñadas durante el bachillerato para introducir al alumno a la comprensión del concepto de función, a través de su caracterización dentro de las representaciones algebraica, tabular y gráfica, y se constituyen en los cimientos cognitivos para la comprensión, operación y aplicación de los conocimientos de otras ramas de la matemática como son el cálculo diferencial e integral y la geometría, así como el aprendizaje de otras ciencias como la física, la química y la administración dentro de la misma preparatoria.

Por lo anterior se piensa que una instrucción significativa del estudio funcional, ayudará al estudiante a profundizar en la comprensión del concepto de función, así como en su utilidad como herramienta en la resolución de problemas naturales, económicos y administrativos, .

Otro elemento de justificación que se debe tener en cuenta, es el hecho de que desde el punto de vista matemático el modelo cuadrático es el de más alto grado que puede ser resuelto de forma algebraica considerando únicamente los coeficientes de la función, y cuya resolución resulta relativamente sencilla y fácil de enseñar a estudiantes de matemáticas en los niveles medio y superior.

### 3. Herramientas Teóricas

Para este estudio se establece que un alumno sabe matemáticas, si es capaz de utilizar sus conocimientos de forma explícita para dar solución a un problema. Por lo mismo se piensa que un alumno aprende matemáticas cuando es enfrentado a situaciones en las cuales encuentre un reto cognitivo que lo motive poner en acción sus conocimientos previos para buscar soluciones, o bien adaptar dichos conocimientos cuando sea necesario para lograr las soluciones buscadas. Las experiencias que un alumno vive cuando es enfrentado a dichas situaciones, son las que lo llevan a construir su conocimiento matemático.

Para esta investigación se ha diseñado una secuencia didáctica, basada en la enseñanza del álgebra a partir de un acercamiento funcional, en el cual se enfatiza la exploración de las funciones en “situaciones reales adaptadas al ambiente escolar”, estudiando sus propiedades a través de la elaboración e interpretación de ciertos modelos matemáticos, como son las gráficas, tablas, expresiones algebraicas, y el lenguaje natural<sup>1</sup>. Las actividades contempladas en la propuesta han sido diseñadas con base en la dialéctica herramienta-objeto (*D.H.O*) de Règine Douady, y están encaminadas a promover situaciones didácticas mediante las cuales se induzca al estudiante a pasar por las etapas cognitivas que establece Douady en su dialéctica.

Además del uso de la *D.H.O*, para el diseño de la secuencia didáctica, el planteamiento de las actividades de la misma contempla el estudio del objeto matemático en distintos sistemas de representación, con lo cual se facilita la observación e identificación de las diversas características del objeto, además de permitir un mayor número de tratamientos y transformaciones que pueden realizarse a dicho objeto.

### 5. La propuesta y sus características

**Objetivo.- Diseñar y experimentar una secuencia de actividades didácticas, basada en la dialéctica herramienta objeto y el manejo de diferentes sistemas de representación, que esté dirigida hacia el tratamiento de la función cuadrática con estudiantes de bachillerato.**

En la secuencia, los estudiantes utilizarán primero a la función cuadrática como herramienta para la solución de problemas, de tal forma que a través de la búsqueda de dichas resoluciones y la necesidad que éstas les impongan de estudiar el objeto en sus distintas representaciones, poco a poco el alumno identificará a la cuadrática como un objeto individual con características propias que es posible estudiar sin necesidad de un contexto real que le dé significado.

Se espera que las actividades propicien que el estudiante se enfrente a la posibilidad de utilizar, adaptar y construir su conocimiento, hasta alcanzar un determinado nivel de dominio del

---

<sup>1</sup> Bednardz, N. et al., ( ) *Acercamientos al Algebra, Perspectivas para la investigación y la enseñanza*. Traducción, Silvia Ibarra Olmos y José Luis Soto Munguía.

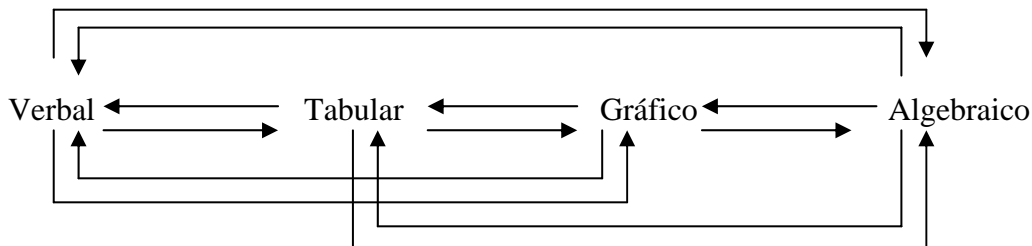
mismo. Este dominio será identificado en términos del desarrollo de habilidades cognitivas, tales como:

- Reconocimiento y tratamiento del objeto matemático en los cuatro sistemas de representación en los que será enseñado,
- Conversión del objeto de un sistema de representación a otro,
- Uso del objeto matemático como herramienta en la resolución de problemas reales adaptados para su manejo en el aula.
- Capacidad de interpretación de resultados obtenidos,
- Rediseño de estrategias y adaptación de herramientas al momento de enfrentar nuevas experiencias problemáticas,
- Toma de decisiones con respecto al uso de dichas estrategias y herramientas.

Con el fin de presentar el objeto matemático que será estudiado durante la secuencia didáctica por los alumnos participantes en este proyecto, se utilizan los sistemas de representación verbal, gráfico, tabular y algebraico, de tal forma que se permita al estudiante la posibilidad de observar al objeto matemático *función cuadrática*, en los cuatro registros de representación antes mencionados. Además se propician los tratamientos en cada uno de los diversos registros de acuerdo con la siguiente tabla:

Registro de representación	Tratamientos dentro de cada registro
Verbal	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Paráfrasis de los problemas escritos</li> <li>- Explicaciones orales y escritas de los tratamientos realizados en cada registro.</li> </ul>
Tabular	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Observación de las diferencias entre datos subsecuentes</li> <li>- Razón de cambio entre dichos datos</li> <li>- Observación en la tabla del valor inicial necesario para el contexto del problema (si se cuenta con él).</li> <li>- Evitar generalizaciones inválidas no espaciando en forma uniforme los valores de la variable independiente</li> <li>- Proporcionar datos experimentales (aproximaciones), que tienen un cierto margen de error y realizar el tratamiento especial que requieren dichos datos</li> </ul>
Gráfico	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Características gráficas de una función cuadrática</li> <li>- Significado de las intersecciones con los ejes cartesianos.</li> <li>- Pendientes (creciente o decreciente)</li> <li>- Identificación de las coordenadas del Vértice</li> <li>- Significado gráfico de los parámetros a, b, c</li> <li>- Visualización del objeto mediante el uso de paquetes computacionales, modificando sus parámetros</li> </ul>
Algebraico	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Significado de los parámetros a, b, c</li> <li>- Diferentes formas de representación algebraica (general y canónica)</li> <li>- Paso de una forma a otra.</li> </ul>

Se espera que la secuencia didáctica induzca al estudiante a realizar transformaciones entre distintos registros de representación, más allá de los tradicionalmente practicados por los maestros en clases, quienes comúnmente utilizan la vía *Registro verbal-tabular-gráfico-algebraico*, para presentar los objetos matemáticos. Las transformaciones entre registros que se pretende potenciar a través de esta propuesta de enseñanza, consistirán en todas las vías marcadas de acuerdo con el siguiente esquema:



Como puede observarse en el esquema, se buscará no omitir ninguna de las posibles transformaciones entre cada uno de los cuatro registros mencionados.

Para conseguir los objetivos mencionados, nos apoyaremos en el paquete computacional “GRÁFICOS”, el cual permite una mayor visualización del objeto matemático, así como del efecto de los parámetros de la cuadrática al momento de graficarla.

El diseño del paquete de cómputo, permite que se utilice en distintos niveles educativos, ya que su manejo es muy sencillo y didáctico. Mediante las funciones que utiliza GRÁFICOS, es posible establecer la expresión algebraica de una función y el paquete proporciona la tabla de datos y la gráfica de la misma, con lo cual se puede observar al objeto en tres sistemas de representación al mismo tiempo.

## 6. Aspectos metodológicos

Con la intención de alcanzar los objetivos planteados en este trabajo, se han identificado las fases que a continuación se describen, incorporando en dicha descripción la intención de cada una de las acciones ahí incluidas. Cabe hacer la aclaración de que a la fecha ya se tienen avances en algunas de ellas.

### Fase 1. Revisión bibliográfica

Como primera etapa en este proyecto, se planeó una *fase de revisión bibliográfica* en diversas fuentes en las cuales se involucre el diseño de propuestas para la enseñanza de objetos matemáticos, dando preferencia al análisis de aquellas enfocadas a enseñar las funciones lineal y cuadrática.

Los propósitos en esta etapa han sido: Ubicar el proyecto en el marco de trabajos realizados en el entorno más inmediato. Tener una idea global, acerca de las investigaciones más recientes respecto a las propuestas de enseñanza para la función cuadrática, y conocer el tipo de actividades didácticas que han sido puestas a prueba por otros investigadores, así como los resultados que ellos han obtenido al aplicarlas en el aula. Seleccionar el soporte teórico apropiado para el diseño de la secuencia.

### Fase 2. El diseño

La segunda etapa de este proyecto, es denominada *fase de diseño*, la cual a su vez tiene varias etapas. Primero se ha llevado a cabo un diseño preliminar de la secuencia didáctica y

posteriormente se realizará con ella un estudio piloto, que consistirá en la aplicación de la secuencia a un grupo de estudiantes de álgebra de primer año de bachillerato, la cual estará sujeta a observación durante el tiempo que dure el proceso de instrucción.

El propósito de esta observación será el de conocer si el diseño inicial de la propuesta incluye un lenguaje sencillo y comprensible para el estudiante, además de observar si el número de actividades permite lograr los objetivos didácticos planteados, y si dichas actividades efectivamente conducen al estudiante a un aprendizaje significativo de la cuadrática.

A partir de las observaciones obtenidas del pilotaje, se harán los ajustes necesarios, hasta obtener una versión más completa de la misma.

### Fase 3. Puesta en escena

La versión depurada de la secuencia, será puesta en práctica con alumnos de un curso de álgebra de una escuela preparatoria particular de la ciudad de Hermosillo, Sonora, en lo que se denominará *la puesta en escena* del proyecto.

Para el análisis de resultados se hará una selección de cinco alumnos, quienes serán invitados a participar en una evaluación más personal, para lo que la responsable del proyecto hará uso de estrategias tales como la aplicación de un cuestionario y posteriormente una entrevista video grabada, para detectar el estatus en el que los estudiantes tienen a la cuadrática al finalizar su instrucción, el manejo de la misma al momento de solucionar problemas, además de conocer en forma verbal las estrategias puestas en acción por parte de los alumnos para encontrar las soluciones buscadas, así como las dificultades a las que se enfrentaron durante el aprendizaje y la evaluación de la misma.

### Fase 4. Conclusiones

**En el anexo se muestran las dos primeras sesiones de la secuencia preliminar, la cual consta de seis sesiones.**

### Referencias

- Best, J. (1982). *Como investigar en educación*. Editorial Morata. Madrid. Pág. 101.
- Bednardz, N. et al., ( ) *Acercamientos al Álgebra, Perspectivas para la investigación y la enseñanza*. Traducción, Silvia Ibarra Olmos y José Luis Soto Munguía.
- De las Fuentes, M. (1998). *Una Propuesta para la Construcción del Concepto de Raíz Real empleando la Dialéctica Herramienta-Objeto y el Juego de Marcos. El caso de las Funciones Lineales y Cuadráticas*. Tesis de Grado. Universidad de Sonora. México.
- Hernández, R. (2000). *Metodología de la Investigación*. McGraw Hill. México. Pág. 227
- Hernández, V. (20 de Octubre de 1997). *EDUCACIÓN MATEMÁTICA, Grupos de Discusión* [Online] Universidad de Sonora. México. Disponible en: <http://fractus.mat.uson.mx>
- Martínez, M., (1998). *La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación*. Ed. Trillas. México. Pp. 30-33
- Peralta, J.X. (2003). *Dificultades para Articular los Registros Grafico, Algebraico y Tabular y la Exploración de algunas Actividades Didácticas Diseñadas para Superar estas Dificultades: El caso de la Función Lineal*. Tesis de Grado. Universidad de Sonora. México
- Valdez, C. (1999). *Los Manipuladores Simbólico, Gráfico y Tabular en el Aprendizaje del Álgebra. Estudio Piloto en torno a la Función Cuadrática*. Tesis de Grado. Universidad de Sonora. México.



## **El análisis consciente de los componentes de un problema y sus relaciones, un camino en el razonamiento matemático**

**Mario García Salazar**

Universidad Autónoma de Baja California

mariogs@uabc.mx

### **Resumen**

*Un camino para lograr la construcción de los procesos de razonamiento en los alumnos es el ayudarlos a analizar de manera consciente todos y cada uno de los elementos de cualquier problema o ejercicio que se les presente, la finalidad de dichos procesos y la manera de ayudar a los estudiantes en la adquisición de éstos a través del trabajo en equipo, del trabajo individual, la importancia de los conocimientos previos bien cimentados y la manera de interactuar del docente con sus estudiantes, ayudándoles además a revisar sus errores, es lo que se busca exponer en este trabajo.*

### **1. Introducción**

“Cuando usted lo explica sí lo entiendo, pero ya en mi casa no sé qué hacer”. Ante esta expresión tan frecuente de los alumnos surge la inquietud de cómo proveerlos de herramientas efectivas de razonamiento, es decir, ¿cuál debe ser el actuar del maestro para que ayude a sus alumnos a ser independientes, intelectualmente hablando?

La construcción de los procesos de razonamiento tiene como finalidad la “comprensión analítica y la aplicación de reglas formales” (Santamaría, 1995), es decir, el análisis consciente en matemáticas implica justificar o tener la justificación apropiada para cada uno de los procedimientos realizados en la solución de algún problema. En otras palabras, que el estudiante llegue a comprender cuándo los componentes de algún problema se suman, se restan, se multiplican, se dividen o tienen una relación exponencial o radical. Hecho esto, será capaz de plantear las ecuaciones que le ayuden en la solución del problema y además trabajará las ecuaciones hasta encontrar los diferentes valores de las incógnitas, para concluir en uno de dos sentidos de respuesta final. Uno, si se trata de la solución de un problema verbal, redactar la respuesta en los términos planteados por el problema y no sólo mencionando la cantidad correspondiente de la variable en la ecuación planteada, por ejemplo:

*Problema: ...¿cuál será el costo de cada boleto para...*

*Respuesta final: “el costo de cada boleto es de...”*

El segundo sentido para dar respuesta a un problema, es cuando éste sea un ejercicio (problema de rutina) en el que únicamente se solicite encontrar un valor de las incógnitas involucradas, por ejemplo:

*Problema:  $2x + 6y = 22$*

*$x + 5y = 17$*

*Respuesta final:  $x = 2, y = 3$*

*Problema:  $6x + 3 = -27$*

*Respuesta final:  $x = -5$*

En la inteligencia de que podrá explicar por qué si “está sumando pasa restando”, si “está dividiendo pasa multiplicando”, si “es positivo en esta situación pasa negativo y en esta otra no”, etcétera.

## 2. Estrategia de trabajo

La estrategia metodológica elaborada para esta investigación adopta, de la teoría cognitiva de Ausubel (1981: 515), la postura de que “el papel más importante y distintivo del profesor, en el salón de clase moderno, es el de director de las actividades de aprendizaje”, en otras palabras, el docente es el guía del programa y como tal debe tomar en cuenta que “el alumno es un sujeto activo procesador de información” (Hernández, 1998: 134), que posee la suficiente capacidad cognitiva “para aprender y solucionar problemas” (ídem), por lo que el docente NO efectúa los razonamientos que le corresponden a los alumnos, sino que se hace a un lado y deja que sus estudiantes efectúen la construcción y refuerzo de sus procesos de razonamiento.

Los dicentes cimientan y consolidan sus procesos cognitivos en tres momentos de trabajo activo:

1) Primer trabajo individual: cuando el nuevo conocimiento es presentado por el profesor, los alumnos participan al incluir los conocimientos previos con lo que se busca aprender. En el caso específico de la solución de una ecuación, los conocimientos previos mínimos de los alumnos serían, la distinción entre constantes y variables, junto con su manera de relacionarse y expresarse según las diferentes operaciones, la propiedad uniforme de la igualdad y la jerarquía de las operaciones. Con el uso de preguntas, el trabajo del maestro consiste en ayudarlos a hacer conscientes de la finalidad del problema, los elementos que lo constituyen y las estrategias que van a utilizar para llegar a la solución, es decir, en una ecuación lineal la finalidad es encontrar el valor de la incógnita y si se tiene una suma lo que se hará es una resta para poder despejarla; una vez hecho esto comparan lo que imaginaron con lo que hicieron.

El que sean conscientes de cual es la finalidad del problema o su dato central es de gran ayuda para el aprendizaje significativo de los problemas, según lo menciona Ausubel (1981).

El que en un primer momento se relacione el conocimiento previo con el nuevo, así como la identificación de los elementos y los procesos a seguir tiene su fundamento en la “construcción de significado para el conocimiento procesal” que propone Marzano (1992: 42) en su libro *dimensiones del aprendizaje*. Entendiendo como *conocimiento procesal* aquel “que incluye procedimientos que los alumnos deben de realizar o ejecutar”.

2) Trabajo en equipo: tiene como finalidad el que los alumnos confronten sus habilidades mentales con los de sus compañeros, lo que les ayudará a corregirlas, mejorarlas o adquirirlas de ser necesario. Cuando se hace referencia a este tipo de trabajo, se considera que los equipos estarán formados por dos o tres alumnos.

Trabajar en equipo y propiciar que entre sus integrantes se critiquen y se corrijan con el fin de concientizarse, forma también parte de las *dimensiones del aprendizaje* descritas por Marzano (1992) en el apartado de “organización y práctica del conocimiento procesal”.



3) Segundo trabajo individual: para no cansar a los alumnos de la dinámica del trabajo en equipo, se sugiere que de manera intermitente, resuelvan ejercicios de forma individual, para confrontarlos con sus propias habilidades al darse cuenta de lo que han logrado, tendencias que tienen al trabajar individualmente, redactar paso a paso el procedimiento utilizado y concientizarse de sus errores.

Dicha concientización se fundamenta en la ‘organización y práctica del conocimiento procesal’ que sugiere Marzano (1992) en su libro *dimensiones del aprendizaje*.

### 3. Conocimientos previos

Se considera que los conocimientos previos mínimos que deben tener los alumnos para trabajar en el fortalecimiento de los procesos de razonamiento son:

1. Entender las diferentes relaciones operacionales entre números y variables, es decir,  $3 + x$  es una suma;  $x - y$  es una resta;  $3x$  ó  $xy$  son multiplicaciones y  $\frac{3x}{y}$  una división. Además de la diferenciación y conceptualización de las constantes y variables.
2. Aplicar las propiedades de la igualdad, con especial énfasis la propiedad uniforme.
3. Tener presente la jerarquía de las operaciones.

### 4. ¿Cómo trabajar con los alumnos?

Una vez establecidos los conocimientos previos mencionados anteriormente, pero sin olvidar que el foco central de esta propuesta es el *análisis consciente* de los diferentes problemas, se propone trabajar en base a los siguientes aspectos:

#### 4.1. Iniciar el análisis con preguntas tales como:

○ ¿Cuáles son las variables?, ¿cuáles son las constantes?, ¿qué finalidad tiene el ejercicio?, ¿qué esperaríamos encontrar al final del ejercicio?, ¿cómo se relacionan los elementos del problema?, ¿quién es mayor?, ¿quién es menor?, ¿de cuál elemento depende el valor de las incógnitas?, ¿mediante qué operaciones se relacionan las constantes y las variables?, si las variables y las constantes se relacionan de esa manera ¿qué tendremos que hacer para despejar la variable?

Estas preguntas remiten a procesos generalizables y no a situaciones particulares, lo que es acorde a la teoría de Polya (1965: 26), que menciona que siendo así las preguntas se pueden plantear en cualquier tipo de problema, teórico o práctico ya que “las preguntas tienen un sentido y ayudan a esclarecer el problema”.

○ Polya (1965) menciona, entre otras, las preguntas: “¿es posible satisfacer la condición? Mire bien la incógnita. Trate de pensar en algún problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una similar. ¿Puede enunciar el problema en forma diferente? ¿Ha empleado todos los datos?; ¿ha hecho uso de toda la condición?”

#### 4.2. Junto con el grupo trabajar los diferentes procesos, de forma lenta y paso por paso.

**4.3.** Identificar en cada paso cada una de las reglas que se están siguiendo.

**4.4.** Insistir en que los alumnos justifiquen sus procedimientos. Ya sea verbalizando sus justificaciones o escribiéndolas.

Cuando los alumnos concluyan los ejercicios trabajados por equipos o individualmente y presenten sus resultados al maestro, es conveniente que se les retroalimente con el fin de revisar tanto los procesos mentales como los algorítmicos y así lograr una mayor significatividad en el aprendizaje que se está construyendo, con este objetivo se sugieren las siguientes preguntas, según lo propuesto por Martínez *et al.* (1990) en el Programa de Enriquecimiento Instrumental (PEI):

**a.- Preguntas dirigidas hacia el proceso**

¿Cómo lo has hecho?

¿Qué estrategias has usado para resolverlo?

¿Qué dificultades has encontrado y cómo las has resuelto?

**b.- Preguntas que requieren precisión y exactitud**

¿De qué otra manera se podía haber hecho?

¿Hay otras opciones?

¿Estás seguro de tu afirmación?

¿Quieres precisar más la respuesta?

**c.- Preguntas abiertas para el pensamiento divergente**

¿Hay alguna otra solución o respuesta?

¿Cómo ha resuelto cada uno la dificultad?

¿Qué harías tú en situaciones semejantes?

¿Por qué cada uno tiene sus respuestas distintas?

**d.- Preguntas que llevan a elegir estrategias alternativas**

¿Por qué has hecho eso así y no de otra manera?

¿Puede haber respuestas igualmente válidas?

¿Quieres discutir tu respuesta con la del compañero?

¿Alguien ha pensado en una solución distinta?

**e.- Preguntas que llevan al razonamiento**

Tu respuesta está muy bien, pero ¿por qué?

¿Por qué has escrito o dicho eso?

¿Qué tipo de razonamiento has utilizado?

¿Es lógico lo que afirmas?

**f.- Preguntas para comprobar hipótesis o insistir en el proceso**

Yo lo pensaría mejor, pruébalo.

¿Qué sucedería si en lugar de ese trato tomaras otro?

Cada uno tiene su hipótesis; vamos a comprobarlas

**g.- Preguntas para estimular la reflexión y controlar la impulsividad**

¿Qué pasos te han sido necesarios para realizar la tarea?

¿A qué se ha debido tu equivocación?

Si lo hubieras hecho de otra forma, ¿hubieras ido más o menos rápido?

“Un momento, déjame pensar...”  
 ¿Quieres repetir lo que acabas de decir?  
 ¿Podrías demostrarlo?

En síntesis de éstas, preguntar constantemente ¿cómo? y ¿por qué?

**4.5.** Es importante que se analicen los errores, proveyendo de espacios en la clase para “que los alumnos identifiquen tendencias ineficientes o prejuicios que tienen en su propio pensamiento” (Marzano, 1992). En otras palabras, propiciar que los alumnos se conscienticen en cuáles son sus errores al momento de resolver los diferentes ejercicios matemáticos y que los tengan presentes para posteriormente mejorar sus propias estrategias de solución.

## 5. A modo de conclusión

Que el alumno logre el *análisis consciente de los componentes de un problema y sus relaciones* es el objetivo de este trabajo, por lo que invito a todos los docentes a que utilicen esta propuesta en cada una de las materias que impartan, ya que se considera que el *análisis consciente* es una estrategia útil y práctica en cualquier nivel de matemáticas que se estudie y posiblemente también pueda ser utilizada en el estudio de las otras ciencias.

## Referencias

- Beltrán Veraza, Marisol. (1999) *Desarrollo de habilidades del pensamiento*. Éxodo. México.
- Davidoff, Linda L. (1989) *Introducción a la psicología*. McGraw Hill. México.
- Escareño Soberanes, Fortino (1997) "Algunas técnicas para enseñar a resolver problemas verbales con ecuaciones. Problemas numéricos simples" Revista Educar. Nueva época, núm. 2, jul - sep, Guadalajara, Jalisco
- Floristan, Casiano (1998) *Teología práctica*. Sígueme. España
- Good, Thomas L. Y Brophy, Jere (1997) *Psicología Educativa contemporánea*. McGraw Hill. México
- Luckman, Thomas (1996) *Teoría de la acción social*. Paidós. España
- Martínez Beltrán, José María et al. (1990) *Metodología de la mediación del PEI*. Bruño. Madrid. Marzano, Robert. (1992) *Dimensiones del aprendizaje*. Editorial Iteso. México.
- Marzano, Robert. (1992) *Dimensiones del aprendizaje*. Editorial Iteso. México.
- Microsoft (2000) *Enciclopedia microsoft Encarta 2000*
- Montes Cortés, Laura Verónica (2001) "La esquematización para la solución de problemas de áreas y perímetros, en primer año de secundaria" Tesis de Licenciatura en Educación Media en el Área de Matemáticas. Escuela Normal Superior de Jalisco. México.
- Morán Quiroz, Luis Rodolfo y Paniagua Villarruel, Maribel (2000) “Las razones del diálogo: argumentación en posgrado”. Coloquio de investigación educativa del Centro de Investigaciones Pedagógicas y Sociales. 29 de junio. Guadalajara, Jalisco, México

- Moreno Bayardo, Ma. Guadalupe (2000) "La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. El blanco y el negro de algunas estrategias didácticas". Revista Educar. Nueva época. Núm. 15. octubre – diciembre. Guadalajara, Jalisco, México
- Nuttin, Joseph (1982) *Teoría de la motivación humana*. Paidós. España
- Otero, María Rita; Papini, María Cecilia y Elichiribehety, Inés (1998) "Las representaciones mentales y la enseñanza de la matemática" revista Educación Matemática. Vol. 10, núm. 3, diciembre
- Parra, Blanca M. (1996) "Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas" en SEP, *La enseñanza de las matemáticas en la escuela*, secundaria. Lecturas Primer Nivel. Programa Nacional de Actualización Permanente (PRONAP) México. págs. 13 - 32 (que lo toma de la revista: *Educación Matemática*, vol. 2, núm. 3. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1990)
- Polya, G. (1965) *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. México. 1998
- Santamaría, Carlos. (1995) *Introducción al razonamiento humano*. Alianza, Psicología minor. España.
- Verneaux, Coger (1979) *Filosofía del hombre*. Herder. Barcelona.

## **IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL ALGORITMO HÚNGARO PARA LA ASIGNACIÓN A PROFESOR-MATERIA UN HORARIO-AULA PARA IES.**

**M.C. Mario Gómez Quezada, M.I.O. Joaquín López Borbón**

*Universidad de Sonora*

### **Resumen.**

*Este trabajo consiste en la implementación computacional del algoritmo de asignación húngaro para el diseño de horarios en instituciones de educación superior (IES), partiendo de la información contenida en una base de datos. Esta información podrá estar en varios formatos tales como Access, SQL Server y Excel. Para el enlace con la base de datos, se utiliza la tecnología ADO/OLEDB, usando la propiedad DataSource para enlazar dinámicamente al origen de datos. Se implementaron algoritmos adicionales al de asignación con la finalidad de adecuar la información a sus propias necesidades y para evitar empalmes de horario para profesores y alumnos.*

### **Introducción**

El diseñar y mantener horarios en una institución educativa con un número considerable de materias, profesores y alumnos, es todo un reto. En todas las instituciones educativas, una de sus actividades más desgastante en cada ciclo escolar es el diseño y mantenimiento de horarios, y conforme el número de alumnos aumenta, el diseño de horarios en forma manual, se complica.

El reto más difícil al diseñar los horarios, es el satisfacer las preferencias de horario de los profesores, dado que algunos, sobre todo los de asignatura, cuentan con horas muy definidas para impartir sus materias y otros, por razones muy personales, restringen demasiado su rango de posible horario. Otro problema en el diseño de horarios es el de satisfacer los requerimientos de espacios físicos necesarios para impartir las materias y laboratorios, esto debido a que el número de horas disponibles en espacios físicos es normalmente demasiado justo al número de horas demandadas por los grupos de cursos a impartir.

Es imposible que en el diseño de horarios en forma manual se pueda alcanzar una solución óptima de asignación, debido al gran número de posibilidades que existen. Por ejemplo, un programa de licenciatura ofrece en promedio 270 horas por semana de clase o laboratorio; si se considera un solo grupo por materia, se requiere como mínimo de las mismas horas disponibles de profesores y espacios físicos. El número de combinaciones que existen en la posible asignación de profesor-materia a horario-aula es descomunal. El problema aquí, es como encontrar esa asignación óptima en ese número inmenso de posibilidades. El propósito de este trabajo es implementar el algoritmo húngaro que de solución al problema planteado anteriormente, optimizando los requerimientos de horario de la institución tales como:

- a) Horarios adecuados para cada uno de los grupos de cada materia. Debe de contemplar horarios para turnos matutinos y vespertinos, según convenga a la institución.
- b) Horarios adecuados para profesores. No todos los profesores tienen el mismo tiempo disponible, por consiguiente, sus cursos se deben de programar de acuerdo a su tiempo disponible.
- c) Optimización de espacios físicos. Los espacios físicos son recursos muy valiosos en las instituciones de educación superior, por lo que es prioritario su utilización eficiente.

Por sus características, nuestro problema cae dentro de la programación binaria debido a que sólo se manejan dos posibilidades: asignar o no asignar un profesor-materia a una hora-aula definida; esto nos ubica en los algoritmos llamados de asignación ([6] Páginas 13-18).

En este trabajo se describe la implementación computacional del algoritmo húngaro para el diseño automatizado de horarios.

### Implementación computacional.

Los modelos matemáticos están concebidos para dar solución a un conjunto de problemas de la vida real; estos problemas son modelados matemáticamente en forma general, por tal razón es necesario hacer ajustes y consideraciones para adaptarlos a un problema en particular.

La implementación computacional del algoritmo húngaro para el diseño de horarios no está ajena a esta situación, por lo tanto no se puede aplicar en forma directa. Esto se debe principalmente a la naturaleza de la información, por lo tanto es necesario tomar en cuenta algunas consideraciones como son: implementación de una base de datos, generación de nodos a partir de la base de datos, generación de prioridades para asignación de profesores y espacios físicos, adecuaciones para generar una matriz de costos la cual normalmente será no cuadrada, un algoritmo auxiliar para evitar empalme de profesores y alumnos, acondicionamiento del propio algoritmo Húngaro para que cumpla con las consideraciones anteriores, generación de la matriz de horarios a partir del acoplamiento de nodos y presentación de horarios en una matriz Horas-Aula ([6] Páginas 124-130).

Los pasos anteriores, necesarios para implementar el algoritmo Húngaro en el diseño de horarios, así como los pasos propios del algoritmo, serán codificados en módulos de clase de Visual Basic 6.0 ([11] Páginas 7-29).

**Base de datos.** La base de datos será la única fuente de información para el algoritmo, la cual contendrá información de materias, profesores, espacios físicos, carga académica, preferencias de horario para profesores, horarios, datos varios, contrato de profesores, prioridad de profesores y prioridad de espacios físicos. Esta base de datos podrá estar en cualquier formato. Los formatos que se reconocerán en este trabajo son: Microsoft Access, SQL Server y Excel ([3] Páginas 411-414).

**Importar datos.** Es necesario importar estos datos al programa que utilizaremos para la ejecución del algoritmo. Para el enlace con la base de datos, utilizaremos la tecnología ADO/OLEDB ([3] Páginas 384-393), usando la propiedad DataSource para enlazar dinámicamente al origen de datos. Las clases necesarias para manipular los datos son: *clsEnlaceDatos*, *clsCargarMatricesConRSH*, *clsEstructura*. Ver figura 1.

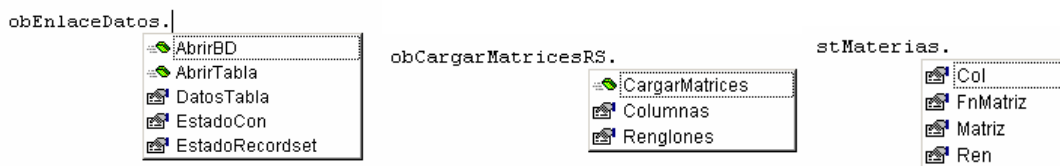


Figura 1. Interfaz de las clases *clsEnlaceDatos*, *clsCargarMatricesConRSH*, *clsEstructura*.

**Generar nodos a partir de la base de datos.** El primer paso es identificar la información que contendrán los nodos renglón y columna de la matriz de costos. De la información de la base de datos podemos observar que los profesores tienen asignada la materia y grupo a impartir y que es necesario asignarles un espacio físico y horario para que las impartan, esta es la labor principal del algoritmo.

La mínima unidad de asignación es la hora clase o laboratorio, debido a que cada hora de clase o laboratorio demanda un lugar, día y hora específicos para impartirse. Tomando en cuenta lo anterior, la información se puede clasificar en dos conjuntos {*Clave, Grupo, NoEmpleado, Teoria(1)/Lab(2), Hora/Clase, Semestre*} y {*Edificio, Piso, EspacioFisico, Dia,*

*Hora*}. El primer conjunto contiene la información de los nodos renglón o demanda, debido a que demandan un lugar, día y hora para impartir la hora clase o laboratorio y el segundo conjunto contiene la información de los nodos columna u oferta, debido a que están ofertando lugares, días y horas para impartir los cursos.

El total de nodos renglón ( $n$ ) estará determinado por el número de horas clase a ofrecer; si ofrecemos una clase de 5 horas a la semana, necesitaremos 5 nodos que representen a esas horas. Si consideramos 9 semestres en promedio para un programa de licenciatura y que en cada semestre se imparten 6 cursos en promedio con 4 horas por semana en promedio cada uno, necesitaremos un total de  $(9)(6)(4) = 216$  nodos para representar las 216 horas de clase. A este número hay que sumarle las horas que generen las materias en las cuales se ofrece más de un grupo y las horas de laboratorio. El total de nodos columna ( $m$ ) estará determinado por las horas y días hábiles que la institución decida utilizar para impartir sus cursos y por el número de espacios físicos disponibles. Si consideramos, para las necesidades de espacios físicos del ejemplo anterior, 4 aulas y 2 laboratorios en un rango de 07 a 22 horas hábiles (15 horas) en 5 días a la semana, necesitaremos un total de  $(6)(15)(5) = 450$  nodos para representar las 450 horas de espacios físicos disponibles.

**Nodos renglón y columna (CGPTLC y EPEFDH).** Para generar los nodos renglón y columna, se utiliza la clase *clsGenerarNodosH*, la cual contiene dos métodos, uno para calcular los nodos renglón *GenerarNodosCGPTLC* y el otro para calcular los nodos columna *GenerarNodosEPEFDH* y una serie de propiedades necesarias para recuperar información de estos nodos. En la figura 2 se muestra la interfaz de la clase *clsGenerarNodosH*.

**Generar costos.** El generar costos consiste en determinar un número que represente la ponderación de un nodo renglón con un nodo columna. El costo total es calculado a partir de las prioridades de asignación de los profesores, prioridad del tiempo disponible de profesores, prioridad de espacios físicos y semestre al que pertenece la materia.

El costo es el número que relaciona a los nodos renglón con los nodos columna agrupándose en la matriz de costos. El primer paso para el cálculo del costo total, es buscar en la propiedad *FnMatrizPP*, que renglón le corresponde al profesor del nodo  $i$ ; con esta información podremos acceder a su prioridad correspondiente. El segundo paso es buscar en la propiedad *FnMatrizPEF*, que renglón le corresponde al edificio, piso y espacio físico correspondiente al nodo  $j$ ; con esta información podemos acceder a su prioridad. Estas dos prioridades son calculadas por los métodos *ActualizarPP* y *ActualizarPEF* de la clase *clsActualizarPrioridadH*. El tercer paso calcula el costo total, reservando las unidades para el semestre, las decenas y centenas para la prioridad de espacios físicos, las unidades de millar para la prioridad del tiempo disponible de profesores y las decenas de millar para la prioridad de profesores, todo esto sumado con la finalidad de cada elemento no pierda su prioridad con respecto a los demás. La figura 2 muestra la interfaz de la clase *clsActualizarPrioridadH*.

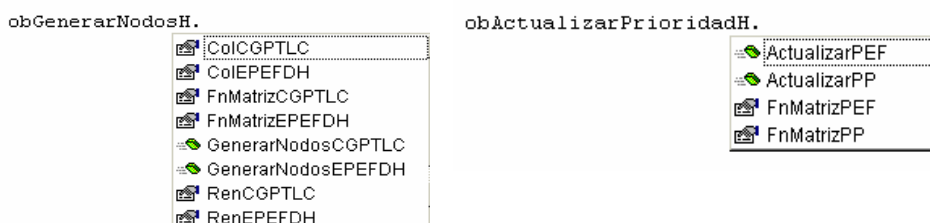


Figura 2. Interfaz de las clases *clsGenerarNodosH* y *clsActualizarPrioridadH*.

**Generar la matriz de costos.** La matriz de costos relaciona a los nodos renglón con los nodos columna. En la aplicación del algoritmo húngaro para el diseño de horarios, muchas de estas relaciones no se deben permitir; veamos estos casos:

- a) Un profesor en los nodos renglón, no puede relacionarse a un día y hora en los nodos columna que no esté en su rango de horario disponible.
- b) El curso en los nodos renglón que se va a impartir, puede ser una materia, laboratorio de física, química o de computo entre otros, cada uno de estos cursos requiere de un espacio físico definido, por lo tanto, no puede relacionarse con un nodo columna que ofrezca un espacio físico inadecuado para el tipo de curso que se va a impartir.
- c) Una materia en los nodos renglón, con un cierto número de alumnos inscritos, no puede relacionarse con un nodo columna que ofrezca un espacio físico con menor capacidad que la requerida por la materia.
- d) Una materia en los nodos renglón perteneciente a un semestre, se ofrecerá en un turno determinado (matutino o vespertino), y no debe relacionarse con un nodo columna que ofrezca una hora fuera de este turno.

Con una de las cuatro condiciones anteriores que no se cumpla, no debe permitirse la relación entre esos nodos. En las relaciones no permitidas de nodos se ingresará un costo muy grande comparado con los costos de las relaciones permitidas; esto no causa ningún problema debido a que el algoritmo toma en cuenta los menores costos al minimizar la función objetivo. Para generar la matriz de costos, utilizaremos la clase *clsGenerarMatrizCostosH*, la cual contiene el método *GenerarMatriz*, encargado de generar la matriz de costos; una propiedad de tipo función *FnMatriz*. Ver figura 3.

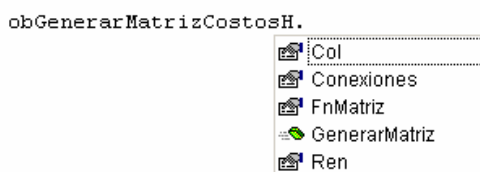


Figura 3. Interfaz de la clase *clsGenerarMatrizCostosH*

**Empalme de hora para profesores y alumnos.** Como se vio anteriormente, la mínima unidad de asignación es la hora clase o laboratorio, debido a que cada hora de clase o laboratorio demanda un lugar, día y hora específicos para impartirse; ésta fue la base para asignar información a cada nodo. Una materia se imparte varias horas a la semana y un profesor puede impartir varias de estas materias, por lo tanto, un mismo profesor aparece en varios nodos; este hecho permite que nodos renglón ligados al mismo profesor se relacionen con nodos columna ligados a un mismo día y hora. En caso que se de un acoplamiento entre estos nodos estaríamos ante una situación de empalme en día y hora para el profesor. Lo mismo ocurre para alumnos, debido a que a un alumno regular se le empalmarían materias del mismo semestre que se impartan el mismo día y hora. Estas relaciones se pueden observar más claramente en la figura 4.

La solución a este problema es impedir el acoplamiento de dos nodos con el mismo profesor, día y hora o materias del mismo semestre, día y hora. La manera más sencilla para lograr esto, es que cuando se de un acoplamiento, se elimine la relación de todas las parejas de nodos que caigan en la situación descrita anteriormente; esto genera un problema debido a que el acoplamiento entre nodos no es definitivo, a menos que se tuviera la certeza de lograr el acoplamiento total (que no queden nodos renglón expuestos) en el paso de acoplamiento inicial; en la mayoría de los casos esto no ocurre por lo que es necesario recurrir al acoplamiento máximo. En el acoplamiento máximo se buscan trayectorias aumentantes en árboles alternantes ([6] Páginas 43-49), esto implica que estaremos acoplando y desacoplando parejas de nodos, por lo tanto, si en la primera vez que acoplemos un par de nodos eliminamos todas aquellas relaciones que generan empalmes y si después ese par de nodos se desacopla en una trayectoria aumentante, perdería sentido haber eliminado las relaciones de



empalme, limitando la posibilidad de lograr trayectorias aumentantes existentes e impidiendo la optimización del algoritmo.

Una mejor solución es que cuando se lleve a cabo un acoplamiento se impida temporalmente a todas las aristas un posible acoplamiento entre parejas de nodos que relacionen a ese profesor con el mismo día y hora o una materia del mismo semestre con el mismo día y hora; de igual forma, si se desacopla un par de nodos en una trayectoria aumentante, implica que existen algunas aristas restringidas temporalmente, por lo tanto, es necesario levantarles la restricción debido a que desaparece la causa que la generó; de esta manera no se impide permanentemente a estas parejas de nodos, la posibilidad de acoplarse posteriormente en alguna otra trayectoria aumentante.

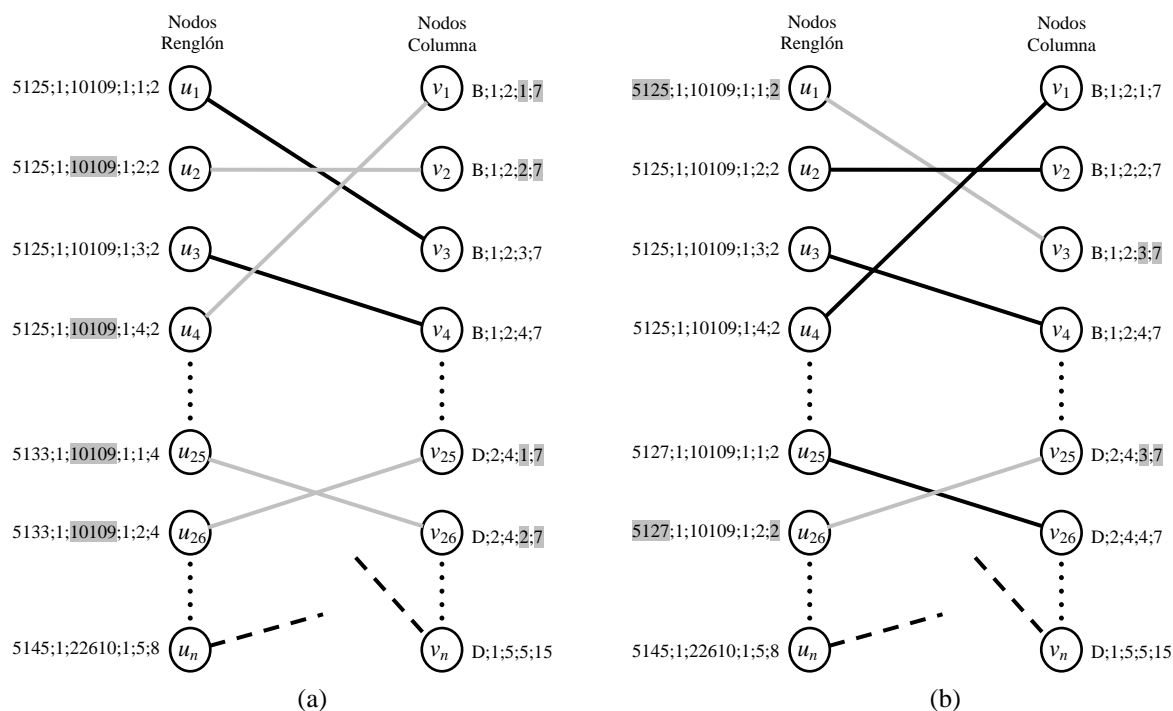


Figura 4. Acoplamientos con empalme para profesores y alumnos. La información resaltada en fondo gris, en la figura (a), corresponde al profesor, día y hora; en (b) corresponde a materia, semestre, día y hora.

### Aplicación del algoritmo Húngaro.

Todo lo visto hasta ahora, fue para acondicionar los datos a las necesidades del algoritmo húngaro y para impedir empalme de día hora en profesores y alumnos. Estamos listos para aplicar este algoritmo al diseño de horarios. A continuación se describe brevemente cada uno de sus pasos incluyendo los algoritmos auxiliares para su implementación computacional.

**Algoritmo Húngaro.** El método Húngaro tiene como propósito resolver el problema de asignación y las bases teóricas que lo sustentan fueron desarrolladas por los matemáticos Húngaros Köning y Egervary en 1931 ([1] Página 290). Consta de los siguientes tres pasos.

**Paso 1.** Encontrar el elemento menor en cada renglón y restárselo a cada elemento del mismo renglón. Hacer lo mismo con cada columna.

**Paso 2.** Trace el número mínimo de líneas, horizontales o verticales o ambas, que se necesitan para cubrir todos los ceros en la matriz. Si el mínimo de líneas necesarias para cubrir todos los ceros es igual al número de renglones, se ha encontrado una solución óptima, en caso contrario seguir con el paso 3. Algoritmos auxiliares: Bipartita asociada, acoplamiento inicial y acoplamiento máximo.

**Paso 3.** Encuentre el menor elemento  $k$  en la matriz, que no estén cubiertos por las líneas trazadas en el paso 2. Posteriormente restar  $k$  a cada elemento no cubierto y sumar  $k$  a cada elemento cubierto por 2 líneas. Continuar con el paso 2. Algoritmo auxiliar: Cubierta.

**Matriz de costos reducidos (Paso 1).** Para reducir la matriz de costos se utiliza la clase *clsMatrizReducidaH*, la cual cuenta con un método para reducir la matriz de costos *ReducirMatriz* y una propiedad para recuperar la matriz una vez reducida.

**Bipartita asociada (Paso 2).** Una gráfica bipartita esta formada por dos conjuntos no vacíos, finitos y sin elementos en común, cuyos elementos se llaman nodos o vértices de la gráfica y un conjunto de aristas o lados que unen nodos de un conjunto a otro, no se permite que las aristas unan nodos del mismo conjunto, de ahí el nombre de bipartita. Para calcular la bipartita asociada utilizaremos la clase *clsBipartitaAH*, la cual cuenta con un método *BipartitaAsociada* y propiedades matriciales de tipo función, necesarias para recuperar la información. No todas las propiedades de la interfase de esta clase son utilizadas por otras clases del algoritmo, pero es importante tener acceso a ellas para verificar en un momento dado la veracidad de la información. Para poder utilizar las clases anteriores utilizaremos los objetos *obMatrizReducidaH* y *obBipartitaAH*, los cuales se muestran en la figura 5.

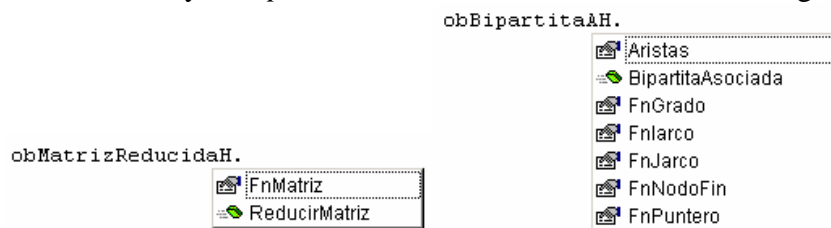


Figura 5. Interfaz de las clases *clsMatrizReducidaH* y *clsBipartitaAH*.

**Acoplamiento inicial (Paso 2).** El cálculo del acoplamiento inicial estará a cargo de la clase *clsAcoplamientoIH*, la cual cuenta con un método *AcoplaInicial* y propiedades matriciales de tipo función, necesarias para recuperar la información del arreglo unidimensional de acoplamiento entre nodos y un arreglo de tipo booleano que nos proporcionará información sobre aristas restringidas en el caso de empalme para profesores y alumnos; además cuenta con una propiedad de tipo entero que nos proporciona el número de nodos que aún quedan expuestos.

**Acoplamiento máximo (Paso 2).** El acoplamiento máximo será calculado a través de la clase *clsAcoplamientoMH*. Su interfaz cuenta con un método *AcoplaMaximo* y propiedades matriciales de tipo función, *FnAcopla* y *FnAristasRestringidas*, necesarias para recuperar la información del arreglo unidimensional de acoplamiento entre nodos y un arreglo de tipo booleano que nos proporcionará información sobre aristas restringidas en el caso de empalme para profesor; este arreglo será utilizado a la hora de construir árboles alternantes, evitando que una arista restringida desacoplada forme parte del árbol alternante. Además cuenta con una propiedad de tipo entero que nos proporciona el número de nodos que aún quedan expuestos. Para poder utilizar las clases anteriores utilizaremos los objetos *obAcoplamientoInicialH* y *obAcoplamientoMaximoH*, los cuales se muestran en la figura 6.

**Cubierta (Paso 3).** El cálculo de la cubierta se realiza a través de la clase *clsCubiertaH*. Su interfaz cuenta con un método *Cubierta* y una propiedad matricial de tipo función, *FnArbolExpuestos*, en la cuál tendremos la información de los nodos renglón y columna a cubrir. Ver figura 7.

**Mínimo no cubierto (Paso 3).** Utilizaremos la clase *clsMinimoNoCubiertoH* para el cálculo del elemento mínimo de la matriz reducida que no esté cubierto, esto se realiza a través del método *Kminimo* y el resultado lo obtendremos en la propiedad de tipo entero

*Kmin*, valor que se utilizará en la clase siguiente para restarlo a cada renglón y columna no cubiertos. Ver figura 7.

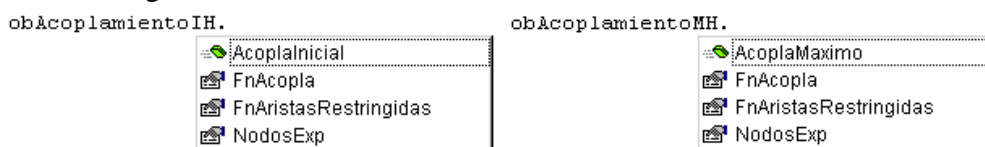


Figura 6. Interfaz de las clases *clsAcoplamientoIH* y *clsAcoplamientoMH*.

**Suma a elementos doblemente cubiertos y resta a elementos no cubiertos (Paso 3).** Este paso se lleva a cabo a través de la clase *clsSumResElemCubNoCubH* con el método *NuevaReducirMatriz* encargado de la suma y resta a elementos de la matriz reducida, y una propiedad matricial de tipo función *FnNuevaMatriz* necesaria para recuperar la nueva matriz reducida. Para poder utilizar las clases anteriores utilizaremos los objetos *obMinimoNoCubiertoH* y *obSumResElemCubNoCubH*, los cuales se muestran en la figura 7.

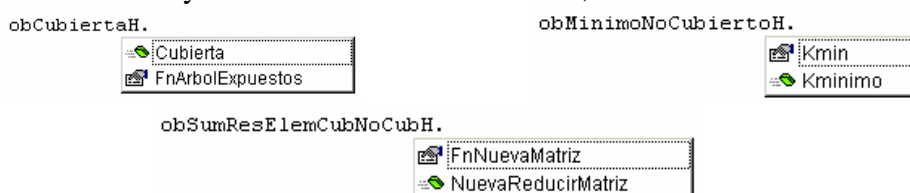


Figura 7. Interfaz de las clases *clsCubiertaH*, *clsMinimoNoCubiertoH* y *clsSumResElemCubNoCubH*.

**Conclusión del algoritmo.** La conclusión del algoritmo ocurre cuando se acoplan todos los nodos renglón. Como esto no ocurre normalmente en el primer ciclo, es necesario repetir el paso 2 y 3 del algoritmo hasta lograr acoplar todos los nodos renglón. Lo anterior se logra ejecutando un bucle hasta que *NodosExp* de la clase *clsAcoplamientoMH* sea igual a cero (ésta es la salida del algoritmo); dentro de este bucle se repiten los métodos *Cubierta*, *Kminimo*, *NuevaReducirMatriz*, *BipartitaAsociada*, *AcoplaInicial* y *AcoplaMaximo*. Recuerde que antes de llegar a este bucle es necesario haber calculado la matriz de costos, reducir la matriz de costos, bipartita asociada, acoplamiento inicial y máximo. Si corremos todos los métodos que hemos estado analizando, en la secuencia descrita anteriormente, obtendremos el resultado mostrado en la figura 8.

Matriz de Incidencia		32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
1	1000000	1000000	1000000	1000000	252013	251013	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
2	1000000	1000000	1000000	1000000	252013	251013	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
3	1000000	1000000	1000000	1000000	252013	251013	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
4	1000000	1000000	1000000	1000000	252013	251013	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
5	1000000	1000000	1000000	201011	203011	204011	202011	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
6	1000000	1000000	1000000	201011	203011	204011	202011	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
7	1000000	1000000	1000000	201011	203011	204011	202011	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
8	1000000	1000000	1000000	201011	203011	204011	202011	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
9	1000000	1000000	1000000	201011	203011	204011	202011	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
10	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	211014	212014	213014	214014	1000000	1000000	1000000
11	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	211014	212014	213014	214014	1000000	1000000	1000000
12	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	211014	212014	213014	214014	1000000	1000000	1000000
13	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	211014	212014	213014	214014	1000000	1000000	1000000
14	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	211014	212014	213014	214014	1000000	1000000	1000000
15	1000000	1000000	1000000	1000000	182011	183011	181011	184011	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
16	1000000	1000000	1000000	1000000	182011	183011	181011	184011	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
17	1000000	1000000	1000000	1000000	182011	183011	181011	184011	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
18	1000000	1000000	1000000	1000000	182011	183011	181011	184011	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
19	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000
20	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	1000000	111012	112012	113012	1000000	1000000	1000000	1000000

Valor Mínimo de Asignación: 17331107

Figura 8. Valores mínimos de asignación en la matriz de costos para horarios.

## Resultados.

A este punto se ha logrado el acoplamiento de todos los nodos renglón del algoritmo húngaro para el diseño de horarios, logrando con ello conocer la relación de menor costo entre todos los nodos. La información de interés para conformar los horarios, se da a través de la propiedad *FnAcopla* de la clase *clsAcoplamientoMH*; en esta propiedad tenemos la información de cómo quedaron en definitiva acoplados los nodos. A continuación veremos que a través de la información del acoplamiento entre nodos podemos conformar los horarios, esto se logra a través de la clase *clsHorarios*, la cual se encarga de convertir la información del acoplamiento en una tabla de horarios, dando la opción de guardarla en la base de datos. La información que contiene la tabla de horarios no es fácil interpretar y mucho menos tener un panorama completo del diseño. Para resolver este problema se plasmará la información en una matriz hora-aula, la cual nos presenta la información de una forma más visual.

**Generar y actualizar la tabla de horarios.** El generar los horarios a través del acoplamiento entre nodos, es una labor relativamente sencilla, esto debido a que solo se requiere unir la información asociada a los nodos acoplados ( $i, j$ ) en un matriz que pasará a ser posteriormente la tabla de horarios. La información asociada a los nodos se encuentra en los objetos *stCGPTLC* y *stEPEFDH* por lo tanto es necesario rescatar esa información de cada pareja de nodos acoplados. Esta responsabilidad esta a cargo del método *GenerarMatriz* de la clase *clsHorarios*; y la responsabilidad de actualizar la tabla *Horarios* en la base de datos esta a cargo del método *ActualizarTablaBD* de esta misma clase, ver figura 9.

**Matriz Horas-Aula.** Es importante presentar la información de una manera más visual y por consiguiente, fácil de interpretar; para lograr esto, omitiremos claves para profesores, maestros, días de la semana y hora. Se colocará la información relacionada por hora y espacio físico, conteniendo en cada relación los cinco días de la semana y en cada día y hora, colocaremos el nombre del profesor, la materia e información útil, tal como clave de la materia, grupo, semestre y carrera. Esto se logra a través del método *CargarMatrizHoraAula* de la clase *clsMatrizHoraAula*. Para poder utilizar las clases anteriores utilizaremos los objetos *obHorarios* y *obMatrizHorasAula*, los cuales se muestran en la figura 9.

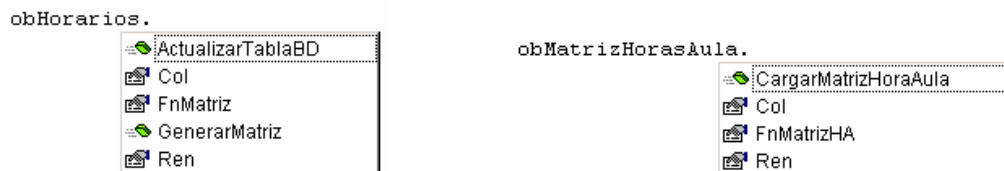


Figura 9. Interfaz de las clases *clsHorarios* y *clsMatrizHoraAula*.

Después de correr los métodos *GenerarMatriz* y *CargarMatrizHoraAula*, podremos disponer de la información contenida en la propiedad *FnMatrizHA*. En este documento se ha elegido su presentación en un objeto *MSFlexGrid* debido a la facilidad de uso, ya que solo se requiere vaciar la información contenida en la propiedad *FnMatrizHA*. El formato del objeto *MSFlexGrid* se deja a criterio y gusto del lector. En la figura 10 se presenta una opción.

Como resultado del diseño de horarios, una materia puede quedar programada en aulas diferentes, esto se debe básicamente a que los distintos planes de estudio contienen materias que se imparten desde una hasta cinco horas por semana y el algoritmo está concebido para optimizar el uso de espacios físicos, por lo tanto, siempre está tratando de llenar los huecos que dejan las materias con horas menores a cinco por semana.

Edificio=B; Piso=1; Aula=1			Edificio=B; Piso=1; Aula=2		
	Profesor	Guillermo Méndez Sainz	Profesor	Ramón Arturo Vega Robles	Profesor
LUN	Materia	Física I	LUN	Materia	Probabilidad y Estadística
	Claves	Clave 5120; Grupo 1; Sem: 1; Carr. IIS		Claves	Clave 3040; Grupo 1; Sem: 3; Carr. IIS
	Profesor	Guillermo Méndez Sainz		Profesor	Ramón Arturo Vega Robles
MAR	Materia	Física I	MAR	Materia	Probabilidad y Estadística
	Claves	Clave 5120; Grupo 1; Sem: 1; Carr. IIS		Claves	Clave 3040; Grupo 1; Sem: 3; Carr. IIS
	Profesor	Guillermo Méndez Sainz		Profesor	Ramón Arturo Vega Robles
07 - 08	MIE	Materia	MIE	Materia	Probabilidad y Estadística
	Claves	Clave 5120; Grupo 1; Sem: 1; Carr. IIS		Claves	Clave 3040; Grupo 1; Sem: 3; Carr. IIS
	Profesor	Guillermo Méndez Sainz		Profesor	Ramón Arturo Vega Robles
	Materia	Física I	JUE	Materia	Probabilidad y Estadística
	Claves	Clave 5120; Grupo 1; Sem: 1; Carr. IIS		Claves	Clave 3040; Grupo 1; Sem: 3; Carr. IIS
	Profesor	Guillermo Méndez Sainz		Profesor	Ramón Arturo Vega Robles
	Materia	Física I	VIE	Materia	Probabilidad y Estadística
	Claves	Clave 5120; Grupo 1; Sem: 1; Carr. IIS		Claves	Clave 3040; Grupo 1; Sem: 3; Carr. IIS
	Profesor	Mario Gómez Quezada		Profesor	Leticia León Godínez
LUN	Materia	Física III	LUN	Materia	Matemáticas I
	Claves	Clave 5129 ; Grupo 1; Sem: 3; Carr. IIS		Claves	Clave 4200 ; Grupo 1; Sem: 1; Carr. IIS
	Profesor	Mario Gómez Quezada		Profesor	Leticia León Godínez
MAR	Materia	Física III	MAR	Materia	Matemáticas I
	Claves	Clave 5129 ; Grupo 1; Sem: 3; Carr. IIS		Claves	Clave 4200 ; Grupo 1; Sem: 1; Carr. IIS
	Profesor	Mario Gómez Quezada		Profesor	Leticia León Godínez
08 - 09	MIE	Materia	MIE	Materia	Matemáticas I
	Claves	Clave 5129 ; Grupo 1; Sem: 3; Carr. IIS		Claves	Clave 4200 ; Grupo 1; Sem: 1; Carr. IIS
	Profesor	Mario Gómez Quezada		Profesor	Leticia León Godínez
	Materia	Física III	JUE	Materia	Matemáticas I
	Claves	Clave 5129 ; Grupo 1; Sem: 3; Carr. IIS		Claves	Clave 4200 ; Grupo 1; Sem: 1; Carr. IIS
	Profesor	Mario Gómez Quezada		Profesor	Leticia León Godínez

Figura 10. Horarios en la presentación Horas-Aula.

Otra razón por la que puede ocurrir lo anterior, es que el algoritmo va asignando horario a cada hora de materia en forma individual, dependiendo de la prioridad que tenga el profesor que imparte la materia y la prioridad del espacio físico; por consiguiente, esta situación dependerá del número de materias con horas menores a cinco por semana, de la prioridad de profesores, de la prioridad de espacios físicos y de las restricciones que impongan los profesores de su tiempo disponible.

### Bibliografía.

1. Bazaraa y Jarvis. 1986. *Programación Lineal y Flujo en Redes*, Ed. Limusa.
2. Béla Bollobás. *Graph Theory (Graduate texts in Mathematics 63)*, Springer Verlag.
3. Bullen, Green, Bovey, Rosenberg. 1992. *Excel 2002 VBA Programmer's Reference*, Wiley Publishing, Inc.
4. Dimitri P. Bertsekas. 1992. *Linear Network Optimization (Algorithms and Codes)*, The MIT Press.
5. Katta G. Murty. *Programming*, Ed. John Wiley and Sons.
6. Gómez Quezada Mario. Noviembre del 2004. *Análisis e implementación de un algoritmo de asignación para diseño de horarios en instituciones de educación superior*. Tesis de maestría en ciencias computacionales del ITN.
7. Michael R. Garey and David S. Jonson. *Computers and Intractability (A Guide to the theory the NP-Copleteness)*, Library of Congress Cataloging in Publication Data.
8. Morales Ozuna Albertina. *El Problema de Acoplamiento en Graficas Bipartitas*, Tesis de Lic. En Matemáticas. Biblioteca de Ciencias Exactas y Naturales UNISON.
9. Papadimitriou and Steiglitz. *Combinatorial Optimization (Algorithms and Complexity)*, Dover Publications, Inc.
10. Peter Wright. 1998. *Begining Visual Basic 6*, Published by Wrox Press.
11. Peter Wright. 2001. *Begining Visual Basic 6 Objects*, Published by Wrox Press.



## **PROPUESTA DE CAMBIOS EN LOS CONTENIDOS Y MÉTODOS DE ENSEÑANZA PARA UN CURSO INTRODUCTORIO DE ESTADÍSTICA**

**Gudelia Figueroa Preciado**

gfiguero@gauss.mat.uson.mx

**Irma Nancy Larios Rodríguez**

nancy@gauss.mat.uson.mx

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

### **Resumen.**

*En este trabajo se presentan algunos de los cambios propuestos por diversos investigadores, en cuanto a los contenidos y metodología de enseñanza para un curso introductorio de estadística. Con fundamento en la revisión realizada se expone una propuesta de los contenidos disciplinarios que debiera contemplar este curso y se realizan una serie de recomendaciones metodológicas de enseñanza que se pueden implementar para estimular la comprensión adecuada de los conceptos estadísticos básicos.*

### **Antecedentes**

Parte de los conocimientos estadísticos que por lo general tiene un profesional, son los que recibe a través de un curso introductorio de estadística durante su estancia en alguna universidad. Infortunadamente, en muchos de los casos, este acercamiento escolarizado con la estadística les deja una impresión negativa, en el sentido de que es difícil recolectar, manejar e interpretar datos y por lo tanto es algo que hay que tratar de evitar. Algunos profesionistas lo ven incluso como uno de los cursos más complejos que hayan tomado y muchos maestros sienten que sus esfuerzos por enseñar un buen curso, no son recompensados con el aprendizaje mostrado por los estudiantes en las evaluaciones efectuadas.

La mayor preocupación de aquellos que enseñan estadística es asegurarse de que el estudiante entienda las ideas estadísticas y esté preparado para aplicarlas en situaciones del mundo real. Muchos afirman que se debe enseñar el razonamiento estadístico, antes que los métodos estadísticos. Pero, ¿cómo razonan los estudiantes? Esto es difícil de responder y lo que algunos investigadores concluyen es que, se necesita valorar eficazmente la manera en que los nuevos cursos de estadística están preparando a los estudiantes para pensar, razonar y comunicar diversas situaciones, usando la estadística (Garfield 1995, 2002). Estas evaluaciones deben permitir estimar cómo diferentes actividades y materiales pueden ayudar a los estudiantes a desarrollar un razonamiento estadístico.

Debido a esta problemática, la enseñanza de la estadística se ha venido reformando en los últimos años y han surgido distintas propuestas sobre diversos métodos de enseñanza y reformulación de los contenidos de esta materia. La experiencia ha demostrado que el contenido de los cursos y los métodos de enseñanza utilizados no deben ser manejados por separado, pues cambios en los métodos enseñanza se realizan en función de lo que se espera que los estudiantes comprendan y esto último conduce a reformar los contenidos de los cursos. En este trabajo se mencionan los cambios en contenidos y algunos recursos pedagógicos que muchos investigadores en el área han sugerido para un curso introductorio de estadística.

### Contenidos Sugeridos en un Curso Introductorio de Estadística

La Asociación Americana de Estadística (ASA<sup>1</sup>) y la Asociación Matemática de América, (MAA<sup>2</sup>) promovieron la formación de un comité que discutiera el contenido de los cursos introductorios de estadística. Las recomendaciones de éste se manifestaron en el sentido de que un curso introductorio de estadística debe estar enfocado principalmente en las ideas estadísticas, dando énfasis a la comprensión de los conceptos y el análisis de datos, esto a expensas de cubrir menos teoría y fórmulas que muchas veces aparecen como “recetas mágicas”. Se recomendó que en la medida de lo posible, se debe automatizar el desarrollo de cálculos y gráficas, reconociendo que la tecnología en computadoras ha cambiado radicalmente la práctica de la estadística.

Garfield (1995) establece que, si se recapitula sobre lo que un estudiante de estadística debe saber al final de un curso, se brinda la pauta para conocer lo que debe perseguirse en el estudio de esta disciplina. Se desea que el estudiante comprenda:

1. La idea de variabilidad de los datos y la interpretación de resúmenes estadísticos.
2. Que la distribución normal es un modelo útil, pero es raro que se ajuste perfectamente a un conjunto de datos.
3. La utilidad de las características muestrales, y cómo estas medidas dependen críticamente de la manera en que se recolectaron los datos.
4. Que exista una correlación entre dos variables no implica que exista una relación de causa y efecto entre las mismas.
5. Que los estadísticos pueden probar muy poco en forma concluyente, aunque pueden sugerir resultados y por lo tanto las conclusiones estadísticas no deben ser aceptadas ciegamente.

Moore (1992), manifiesta que “El objetivo principal en la enseñanza estadística es construir la habilidad en los estudiantes para manejar inteligentemente la variación y los datos”. De esa manera resume los elementos básicos del pensamiento estadístico en:

- La omnipresencia de la variación en los procesos.
- La necesidad de datos acerca de estos procesos.
- El diseño en la producción de datos, teniendo en mente la variación.
- La cuantificación de la variación.
- La explicación de la variación.
- 

Ballman (1997) coincide en la importancia de enfatizar sobre esta variación aleatoria y su rol en estadística. Moore (1992) finaliza exponiendo que: “La estadística es una ciencia matemática, pero no es una rama de las matemáticas. Es una disciplina metodológica y no una colección de métodos accesorios o dependientes de economía, psicología o ingeniería de la calidad”. Asimismo dice “La estadística es una disciplina, por propio derecho, con modos característicos de pensamiento que son más fundamentales que un método específico o una teoría matemática”.

---

<sup>1</sup> American Statistical Association

<sup>2</sup> Mathematical Association of America



Las diferentes manifestaciones en cuanto a los contenidos de un curso introductorio de estadística coinciden que la lógica de éste debe ser tal, que facilite la conexión entre el análisis de datos, la probabilidad y la inferencia. Moore (1992,1995) propone el siguiente orden:

- *Análisis de Datos.* Esto involucra organizar, describir y resumir datos. Se recomienda:
  - Moverse de lo simple a lo complejo; o sea examinar una sola variable, después variables relacionadas y luego analizar varias variables.
  - Al examinar los datos, tratar de observar un patrón general y después fijarse en desviaciones marcadas de ese patrón.
  - Moverse de formas gráficas a medidas numéricas y viceversa, y relacionarlas con diferentes aspectos de los datos.
- *Producción de Datos.* Se debe enfatizar el aspecto de la producción de datos. Los modelos matemáticos estándares ignoran la producción de datos y no se puede enseñar estadística estableciendo “Suponga que  $X_1, \dots, X_n$  son observaciones independientes e idénticamente distribuidas”.

El enseñar diferentes técnicas de diseño para la producción de datos, se ajusta de manera natural en los tópicos previos a la inferencia estadística. Se necesita cubrir esta temática pero sin extralimitarse, simplemente para que el estudiante comprenda que para diseñar un experimento o recolectar datos para una encuesta, no basta con cuidar simplemente el proceso de aleatorización. Algunos aspectos importantes, por ejemplo procedimientos para desarrollar y probar preguntas en una encuesta, entrenamiento y supervisión de los encuestadores o bien aspectos importantes en el diseño de un experimento, tal como el especificar claramente los objetivos de éste, determinar la característica a medir, identificar los factores que pueden influir en la respuesta, calcular el número de repeticiones necesarias, etcétera, se deben explicar al estudiante, enfatizando que son cuestiones realmente importantes y que pueden afectar en gran manera los resultados de los datos a analizar, ya que las conclusiones de un estudio dependen completamente de la manera en que los datos fueron producidos.

- *Probabilidad.* La dosis considerable que generalmente se enseña en un curso de estadística debiera ser reducida y limitarse solamente a cubrir aquellos aspectos que son esenciales para la inferencia estadística que se va a cubrir.
- *Inferencia.* La noción de distribución muestral es central para el razonamiento de la inferencia clásica. Usualmente los estudiantes tienen dificultad en comprenderla por lo que es necesaria una explicación detallada y utilizar simulación para facilitar su comprensión. No es muy recomendable manejar inferencia Bayesiana en un curso introductorio, pues ella requiere que los estudiantes distingan entre la distribución condicional de un estadístico dado un parámetro, y la distribución condicional del parámetro dado un valor observado en el estadístico.

Moore (1990, 1992) sugiere que éste es el orden lógico en que los temas debieran aparecer en la currícula, aunque los tres últimos puntos pueden surgir informalmente desde el inicio del análisis de datos, ya que al analizar un conjunto de datos no se puede dejar de mencionar la manera en

que éstos pueden ser producidos, la aleatoriedad de los resultados observados y las conclusiones informales que puede sugerir un análisis exploratorio de datos.

Se recomienda igualmente trabajar con ejemplos, de preferencia reales y de diversas disciplinas, que puedan convencer a los estudiantes que en realidad están aprendiendo herramientas que pueden aplicar en su vida diaria y en cualquier carrera; así se conecta el proceso de aprendizaje a la realidad. Por eso es recomendable que trabajen generando sus propios datos, desarrollen proyectos que les permitan recolectar datos ya sea por experimentos o por encuestas, que estén conscientes de las diversas fuentes de error que pueden tener y finalmente que analicen, resuman e interpreten la información obtenida.

### **Cambios Sugeridos en los Métodos de Enseñanza de un Curso de Estadística**

Hay muchas sugerencias sobre lo que hay que hacer para que los estudiantes puedan comprender conceptos estadísticos de una mejor manera y diferente a la enseñanza tradicional. Se debe para ello, tomar en cuenta las diferentes formas de pensar y los distintos estilos de aprendizaje. También hay que motivar al estudiante para que comprenda la estadística y valore su utilidad; las personas no pueden valorar lo que no entienden.

En cada grupo de personas están presentes diferentes estilos de aprendizaje y procesan la información de manera distinta. Por ello mismo se deben efectuar cambios en la enseñanza de la estadística, de tal forma que ésta incluya una variedad de métodos de aprendizaje. Hay quienes responden mejor cuando cuantifican, analizan y teorizan, algunos cuando organizan cosas y practican, otros cuando exploran ideas, descubren y conceptualizan por ellos mismos qué está pasando; varios aprenden mejor cuando la actividad es personalizada. Snee (1993) afirma que: “Todo curso debiera tener un componente experimental de aprendizaje. El proverbio chino “Lo escucho, lo olvido; Lo veo, lo recuerdo; Lo hago, lo entiendo”, muestra la importancia que tiene el aprender “haciendo las cosas”. Algunas técnicas de aprendizaje experimental incluyen actividades y proyectos individuales o por grupo. Garfield (1993) muestra las ventajas de trabajar en grupos utilizando aprendizaje colaborativo.

Considerando lo anteriormente expuesto, delMas(1999), Cobb (1993), Ledolter (1995), Chance (1997) y otros, han propuesto algunos cambios en la enseñanza de la estadística, como los que se mencionan a continuación:

- Diseñar cursos basados en actividades que conduzcan al estudiante a los conceptos, en lugar de brindarle éstos como una receta. Algunas de estas actividades le deben permitir aclarar malas concepciones previas, éstas se pueden lograr al incitarlo o proponerle actividades en las que deba dar una respuesta sin efectuar ningún cálculo y regresar nuevamente a ellas después de efectuado éste, con el fin de determinar si lo manifestado previamente tiene algún sentido. Cuando a los estudiantes se les propone este tipo de actividad se logra un mayor interés en comparar los resultados actuales con sus propuestas previas.
- Utilizar software que permita a los estudiantes visualizar e interactuar con los datos, eso les permite incrementar su comprensión sobre los fenómenos aleatorios y sobre el manejo de datos. Una instrucción con ayuda de cómputo permite al estudiante desplegar la información de diversas maneras y en forma muy rápida. Esto le facilita cambiar de una

tabla de frecuencias a un histograma o un diagrama de caja y conjugar toda la información que éstos le brindan para emitir una conclusión.

- Incluir proyectos en los cursos introductorios de estadística, tales que, después de seleccionar el problema a estudiar, permitan al estudiante generar sus propios datos, analizarlos con la ayuda de software y comunicar sus resultados en un reporte final. Este último es importante, pues además de indicar cómo el estudiante abordó el problema, permite que mejoren sus técnicas de escritura.

Sobre los puntos detallados anteriormente se pueden agregar algunos comentarios como los siguientes:

*Respecto al Diseño de Actividades.*

Al diseñar actividades para un curso de estadística se desea que el estudiante pueda asimilar diferentes conocimientos de una manera natural y que a la vez le permitan abandonar conceptos erróneos que puede traer previamente e incrementen la comprensión y uso de las ideas estadísticas. Se plantea fácil, pero ello implica muchas reformas; dado que se deben diseñar actividades de forma efectiva para que el estudiante comprenda que los datos que está manejando no son simplemente números o cualidades, sino que hay un contexto que les otorga significado. Éstas deben contemplar prácticas donde el estudiante construya su propio conocimiento en lugar de recibirlo y así reestructure la nueva información presentada con su propio conocimiento previo. Para poder diseñar estas actividades, el maestro debe tener claro lo que quiere que el alumno comprenda y verificar si la actividad logra el objetivo planteado.

¿Qué considerar para elaborar estas actividades? Se debe tomar en cuenta que cada actividad debe diseñarse de manera que el estudiante la siga fácilmente y motive su participación en este proceso de enseñanza aprendizaje. La actividad debe tener notas para el instructor, que le permitan comprenderla, modificarla o adecuarla y en ocasiones mejorarla. Se debe especificar, en caso necesario, los conocimientos previos que debe tener el estudiante para poder realizarla, una estimación del tiempo necesario para su desarrollo y una estrategia de trabajo. Para las actividades que ya se han probado con los alumnos, se sugiere agregar observaciones sobre el desarrollo de la misma y los resultados obtenidos. Las actividades pueden ser diseñadas para trabajarlas tanto en el salón de clases como en un laboratorio de cómputo, puedan ser realizadas grupal o individualmente y algunas pueden servir para dejarlas como tareas extraclase.

Los maestros que realizan o han realizado este tipo de actividades en sus cursos, comprueban que éstas son atractivas al estudiante, pues al mismo tiempo que aprende conceptos nuevos, interactúa con sus compañeros y maestro. Garfield (1993) sugiere que se trabaje habitualmente de manera colaborativa, en grupos pequeños de tres o cuatro estudiantes, para que discutan, analicen y resuelvan el problema, pero según el tipo de actividad el maestro puede utilizar diferentes maneras para llevarla a cabo.

*En relación al uso de software*

Los estudiantes deben saber cómo organizar los datos a través del uso de software. No es posible analizar los grandes conjuntos de datos que se manejan en la práctica diaria con tan sólo lápiz y papel. No se recomienda, de ninguna manera, que el estudiante utilice este software de manera mecánica. El maestro debe cuidar que el estudiante conozca cómo interpretar las gráficas

o cálculos realizados y, en la medida de lo posible, que haya realizado esos cálculos o gráficas manualmente, por lo menos una vez.

Es indudable que los cambios tecnológicos han modificado la enseñanza de muchas materias, entre ellas la estadística, pero no se puede negar que los recursos tecnológicos con que se cuenta hoy en día, en muchas universidades del país, no son suficientes para ir a la par con estos cambios. Por otra parte, algunos maestros son renuentes a incluir el uso de software en sus clases, pues no se sienten preparados para ello. Estos problemas deben resolverse con prontitud pues se debe garantizar que el egresado obtenga los conocimientos y habilidades requeridas en la práctica profesional actual, a la que se enfrentará rápidamente.

#### *Referente a los Proyectos de Clase*

Ledolter (1995) afirma que los cursos introductorios de estadística debieran contemplar proyectos con datos reales, donde el estudiante aplique las técnicas que se cubrieron en el curso. El estudiante debe ser responsable de la formulación del proyecto, la recolección de datos, los análisis realizados y los resultados expresados en el reporte; el maestro sólo servirá de guía durante el desarrollo del mismo. Los estudiantes estarán involucrados en todas las etapas del desarrollo del proyecto para que comprendan y valoren la dificultad de obtener datos relevantes al estudio planteado. Además, estos proyectos le permiten comprender al estudiante que la estadística es mucho más que resumir datos.

#### **Conclusiones**

El implementar los cambios anteriormente sugeridos pretende lograr un curso significativamente diferente al tradicional, pues se otorga un mayor énfasis al dominio de conceptos, el uso de nuevas tecnologías, la utilización de datos reales y la interpretación de resultados. Es recomendable que, aunado a la implementación de estos cambios, se considere alguna manera de medir cómo los estudiantes están respondiendo a ellos, esto permitirá una retroalimentación que conlleve a mejorar el curso continuamente.

#### **Bibliografía**

Ballman, K. (1997), "Greater Emphasis on Variation in an Introductory Statistics Course" *Journal of Statistics Education* [Online], 5(2)

[www.amstat.org/publications/jse/v5n2/ballman.html](http://www.amstat.org/publications/jse/v5n2/ballman.html)

Chance, B. L. (1997), "Experiences with Authentic Assessment Techniques in an Introductory Statistics Course" *Journal of Statistics Education* [Online], 5(3)

[www.amstat.org/publications/jse/v5n3/chance.html](http://www.amstat.org/publications/jse/v5n3/chance.html)

Cobb, G. (1993), "Reconsidering Statistics Education: A National Science Foundation Conference" *Journal of Statistics Education* [Online], 1(1)

[www.amstat.org/publications/jse/v1n1/cobb.html](http://www.amstat.org/publications/jse/v1n1/cobb.html)

delMas, R. C., Garfield, J., and Chance, B. L. (1999), "A Model of Classroom Research in Action: Developing Simulation Activities to Improve Students' Statistical Reasoning," *Journal of Statistics Education* [Online], 7(3).

[www.amstat.org/publications/jse/secure/v7n3/delmas.cfm](http://www.amstat.org/publications/jse/secure/v7n3/delmas.cfm)

- Garfield, J. B. (1993), "Teaching Statistics Using Small-Group Cooperative Learning" *Journal of Statistics Education* [Online], 1(1)  
[www.amstat.org/publications/jse/v1n1/garfield.html](http://www.amstat.org/publications/jse/v1n1/garfield.html)
- Garfield, J. (1995), "How students learn statistics," *International Statistical Review*, 63, 25-34.
- Garfield, J., Hogg, B., Schau, C., and Whittinghill, D. (2002), "First Courses in Statistical Science: The Status of Educational Reform Efforts" *Journal of Statistics Education* [Online], 10(2)  
[www.amstat.org/publications/jse/v10n2/garfield.html](http://www.amstat.org/publications/jse/v10n2/garfield.html)
- Ledolter, J. (1995), "Projects in Introductory Statistics Courses," *The American Statistician*, 49, 364-367.
- Moore, D. S. (1995), *The Basic Practice of Statistics*, New York: W. H. Freeman and Co.
- Moore, D. S.(1990), *Uncertainty, On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy*. Mathematical Sciences Education Board, National Research Council.
- Moore, David S. (1992), What is statistics? In David C. Hoaglin and David S. Moore (eds.). *Perspectives on Contemporary Statistics*, MAA Notes, 21. Washington, DC: Mathematical Association of America. Pp 1-18.
- Snee, R. D. (1993), "What´s missing in Statistical Education?," *The American Statistician*, 47, 149-154.



## REESCRIBIENDO LA HISTORIA: DE MOIVRE Y SU CUADRATURA

M. C. Enrique Hugues Galindo

L. M. Francisco Cándido García Durán

Universidad De Sonora

### RESUMEN

Dentro de la historia de la probabilidad y la estadística el primero en utilizar lo que hoy es conocido como la aproximación normal a la distribución binomial fue Abraham De Moivre. En su primer intento al respecto este matemático propone una fórmula de cuadratura numérica para aproximar una suma de términos, sin explicaciones adicionales sobre cómo obtuvo dicha fórmula. Esta propuesta constituye así un misterio sin resolver y en este trabajo se presenta una plausible explicación de la génesis de dicha cuadratura. La explicación se da en un contexto geométrico apoyada tanto en el estado del arte de las cuadraturas, en la correspondiente época histórica, como en interpretaciones geométricas de la cuadratura de De Moivre y de las cuadraturas al uso en ese período.

### 1. INTRODUCCIÓN

Abraham De Moivre (1667-1754) alcanzó la inmortalidad matemática gracias a sus trabajos sobre el azar, plasmados principalmente en tres libros que cubren diferentes aspectos matemáticos del tema: *Doctrine of Chances* (1717, 1738, 1756), *Annuities upon Lives* (1725, y varias ediciones posteriores) y *Miscelanea Analytica de Seriebus et Quadraturis* (1730). Siendo este último el que nos interesa aquí, en particular por la presentación que en el hace De Moivre de su logro parcial sobre lo que hoy es conocido como la aproximación normal a la distribución binomial. Este logro lo completó en tres años y lo publicó, en 1733, en una nota corta en latín, que fue traducida al inglés e incorporada, cada vez más ampliada, en ediciones posteriores de su *Doctrine*.

El problema que estaba abordando De Moivre era el primeramente planteado por James Bernoulli de especificar el número  $N$  de experimentos necesarios para obtener la tasa real de casos, dentro de una aproximación dada. Con su personal tratamiento matemático él siguió un enfoque distinto, más en el tenor de Nicolás Bernoulli: dado  $N$ , encontrar la probabilidad,. Para ello comenzó considerando el comportamiento aproximado de la distribución binomial simétrica  $(1+1)^n$ . Dentro de esta fase logró dos resultados, entre otros, importantes: el primero, dar una fórmula para un valor aproximado de la razón del término máximo,  $M$ , de la serie binomial, a la suma total de términos de la serie,  $2^n$ ; el segundo, dar una fórmula que le permitía calcular aproximadamente la razón del término máximo,  $M$ , y otro término,  $Q$ , a una distancia  $p$  del máximo. Y en su obra de 1730 muestra cómo con estas dos fórmulas, y una tabla de logaritmos, calcular  $M$  y  $Q$ .

Esto era sólo un primer paso, pero el paso importante para superar lo logrado por Bernoulli en este asunto, y los años en que lo dio De Moivre, lo señala claramente Stephen Stigler (1986):

Si él iba a mejorar el resultado de Bernoulli (y él *debería* mejorar el resultado si iba a ser de uso práctico), entonces el necesitaba una manera de sumar los

términos de la binomial cerca del término máximo. Esto es, necesitaba una manera práctica y exacta de sumar  $Q$  para... ( $p$ ) cerca de cero, o equivalentemente sumar  $Q/2^n$  ... En 1730 *casi* cumplió esta meta, y en 1733 finalmente tuvo éxito.

## 2. INTENTO DE 1730

Una descripción del quid del intento de 1730 de De Moivre, junto con plausibles explicaciones y presunciones sobre el, y el estatus de la cuestión bajo estudio, es presentada inmejorablemente en la obra ya citada de Stigler, por lo que le cedemos la palabra:

Habiendo mostrado la factibilidad de calcular  $M/2^n$  y  $Q/2^n$ , quedaba la tarea de sumar estos términos, digamos, desde  $p = -\frac{1}{2}\sqrt{n}$  a  $p = +\frac{1}{2}\sqrt{n}$ . En su primer intento para tratar con esto en 1730, De Moivre se ha contentado con declarar una fórmula de cuadratura, sin dar algunos ejemplos numéricos. Él había mostrado que la curva binomial tiene puntos de inflexión en  $p = \pm\frac{1}{2}\sqrt{n}$ . Por lo tanto, entre estos puntos la curva podía ser esperado estar razonablemente bien aproximada por una función cuadrática de  $p$ , y el área bajo la curva (o la suma de términos) podía ser encontrada por una fórmula de cuadratura de tres puntos apropiada a funciones cuadráticas.

Hacer lo anterior debería haber sido “pan comido” para De Moivre ya que para esa época las fórmulas de cuadraturas eran bastantes conocidas, en particular, en la Escuela Inglesa a la que él pertenecía: Isaac Newton y la comunidad matemática de la isla. Ya en 1687, en sus *Principia*, Newton deduce un corolario donde afirma que dar un valor cercano del área bajo una curva conociendo un cierto número de sus ordenadas se resuelve encontrando el área bajo lo que hoy llamamos polinomio de interpolación para dichas ordenadas, mismo polinomio que Newton y sus “seguidores” llamaban parábola. Newton concluye dicho corolario, según cita aparecida en Jean-Luc Chabert et al. (1999), diciendo “el área de esta parábola será cercanamente la misma con el área de la figura curvilínea propuesta para ser cuadrada: pero la parábola puede ser siempre cuadrada geoméricamente por métodos generalmente conocidos.”

Más aún, en la publicación póstuma de Roger Cotes, *De Methodo Differentiali Newtoniana*, de 1722, se listan fórmulas, sin explicación, para las áreas bajo las curvas en los casos donde se conocen desde 3 a 11 ordenadas equidistantes, mismas que hoy se conocen como fórmulas de Newton-Cotes. Más aún, en 1730 James Stirling publicó su *Treatise on Summation and Interpolation of Infinite Series*, donde sin darle reconocimiento a Cotes, aparecen dichas fórmulas junto con una nueva, para entonces, Tabla de Correcciones, dada sin justificación. Estas mismas fórmulas también son dadas por Stirling en su publicación de 1749, *The Differential Method: Or, a Treatise concerning Summation and Interpolation of Infinite Series by James Stirling*. Entre esta lista la primera de ellas, para tres ordenadas, es hoy conocida como fórmula de Simpson 1/3:

$$CC_p = 2p \left\{ \frac{[A+C] + 4B}{6} \right\} \quad (I)$$

¿Es esta la cuadratura que decide usar De Moivre? La respuesta es negativa ya que en cambio, propone otra fórmula de cuadratura; ¿cuál es su propuesta y cuándo la hace? Stigler nos señala que,



En 1730, en un breve corolario presentado sin prueba, De Moivre declara tal fórmula (De Moivre, 1730, p. 110). Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son tres coeficientes binomiales equidistantes,  $A$  estando a una distancia  $p$  de  $B$  y  $B$  una distancia  $p$  de  $C$ , entonces la suma de los términos desde  $A$  hasta  $C$  es aproximadamente

$$CM_p = \frac{(2p+1)}{6p} [(p+1)(A+C) + (4p-2)B]. \quad (\text{II})$$

Esta fórmula suscita varias interrogantes. Para empezar, habiendo una fórmula, (I), para el caso de tres ordenadas, que podía ser considerada del “dominio público” matemático en la Escuela Inglesa, ¿por qué no la utilizó De Moivre? Además, Newton, en su corolario ya mencionado antes, había dado un camino a seguir para obtener cuadraturas: cuadrar polinomios de interpolación de las curvas a cuadrar, mismo camino que muy posiblemente siguió Cotes; ¿siguió este camino De Moivre u algún otro? Posponiendo para más adelante una plausible explicación de la heurística de De Moivre, seguimos con la narración de Stigler de las condiciones bajo las que usó su cuadratura y qué pasó:

Presumiblemente De Moivre tenía en mente aplicar esta fórmula con el término máximo  $M/2^n$  como  $B$  y (en el caso simétrico)  $Q/2^n$  como  $A=C$ , con  $p \leq \frac{1}{2}\sqrt{n}$  y  $M$  y  $Q$  encontrados desde... (las fórmulas previamente encontradas por él)... Pero él no presenta ningún cálculo; y en 1730 no va más allá de simplemente declarar la fórmula.

¿Por qué De Moivre no presentó cálculos con esta cuadratura?

Si esta carencia de persistencia fue debida a una incertidumbre pesimista acerca de la calidad de esta aproximación para  $p \leq \frac{1}{2}\sqrt{n}$ , o al conocimiento de que no se podría extender para  $p$  grandes (de aquí limitando la aplicabilidad a azares por debajo de “certeza moral”), no es conocido.

Por supuesto que lo anteriormente narrado tenía consecuencias para el estatus de la cuestión en estudio, ¿pero cuál era este?, Stigler nos lo dice,

El intento de 1730 ha ido solamente al borde de la factibilidad, no ha causa de que las expresiones... (para calcular  $M/2^n$  y  $M/Q$ ) dejarán cualquier cosa a ser deseada como aproximaciones a términos individuales de una binomial, sino a causa de la carencia de una forma analítica compacta para ... (calcular  $M/Q$ ) excluyendo cualquier otro excepto los intentos más toscos en cuadraturas. Una aproximación exitosa a los *términos* individuales de la binomial ha sido encontrada, pero no en una forma que permitía la suma fácil de grandes números de términos. Por lo tanto las cuestiones que Bernoulli se ha planteado antes de 1705 eran todavía frustrantemente incontestables. Con el simple paso tomado por De Moivre en 1733, esto cambió.

Este paso consistió en que para dar la suma pretendida de términos de la binomial dejar de lado el usar cuadraturas y, en cambio, usar un procedimiento que descansó en última instancia en integrar término a término una serie, Por estar fuera de los alcances de este trabajo no abundamos más en este éxito y seguimos con una especulación que nos proporciona una posible explicación para la génesis de la cuadratura de De Moivre.

### 3. UNA POSIBLE EXPLICACIÓN DE LA GÉNESIS DE LA CUADRATURA

En este apartado ofrecemos una plausible explicación que supone que la fuente matemática a la que recurrió De Moivre fue la de las ideas geométricas subyacentes en el concepto de *cuadratura*, ideas heredadas del viejo problema de la Cuadratura del Círculo. En apartado más abajo damos argumentaciones más detalladas para considerar plausible y razonable esta suposición, aquí damos solamente el esquema general de la génesis. Empezamos la presentación notando que si multiplicamos por  $(p/p)$  la fórmula (I) para  $CC_p$ , esta puede ser escrita como

$$CC_p = 2p \left\{ \frac{[A+C]p + 4pB}{6p} \right\},$$

que interpretada *geoméricamente* es el *área de un rectángulo* de base  $2p$ , y altura el factor de la derecha encerrado en “{...}” Además, esta altura es un promedio ponderado de los términos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , donde la suma de los pesos es  $6p$ .

Nos parece razonable y plausible, por razones que se presentarán en apartado posterior, que De Moivre para proponer otra cuadratura, haya partido del principio de *dar una fórmula de cuadratura que produjera al menos el mismo resultado que la de Simpson 1/3*, es decir, que  $CC_p \leq CM_p$ . En el *entorno geométrico* esto conlleva que la fórmula que se vaya a desarrollar debe ser interpretada como el *área de un rectángulo*,  $CM_p = ARM$ ; un rectángulo que por la unicidad del rectángulo asociado a Simpson no puede tener ni su misma base ni su misma altura. En este contexto, a reserva de desarrollar más abajo una justificación, tenemos que para el rectángulo asociado a la cuadratura de De Moivre, tomamos la base  $b = 2p+1$ , con una altura  $h$  por determinar, por lo que  $ARM = (2p+1)h$ . Para la *altura* se propone que esta sea un promedio ponderado, es decir,

$$h = \frac{\{T_1[A+C] + T_2B\}}{2T_1 + T_2},$$

con  $2T_1 + T_2 = 6p$ . E imponemos que los pesos tengan la forma:  $T_1 = p + c_1$  y  $T_2 = 4p + c_2$ . Obtenemos con ello que el área del rectángulo asociado a la cuadratura sea

$$ARM = (2p+1) \frac{\{(p+c_1)[A+C] + (4p+c_2)B\}}{6p}$$

Ahora de la condición  $2T_1 + T_2 = 6p$ , con un breve desarrollo algebraico:

$$\begin{aligned} 6p &= 2T_1 + T_2 = \\ &= 2(p+c_1) + (4p+c_2) = \\ &= (2p+4p) + (2c_1+c_2) \\ \text{es decir, } 6p &= (2p+4p) + (2c_1+c_2) \\ &\text{y } 2p+4p = 6p \\ \text{por lo tanto, } &2c_1+c_2 = 0, \end{aligned}$$

obtenemos la relación:  $c_2 = -2c_1$ . Una relación lineal entre  $c_2$  y  $c_1$ , para  $c_2 \neq 0$ ,  $c_1 \neq 0$ .

Con esta relación rescribimos la fórmula  $ARM$  para el área como

$$ARM = (2p+1) \frac{\{(p+c_1)[A+C] + (4p-2c_1)B\}}{6p}, \quad \text{(III)}$$

Habiendo obtenido como área  $ARM$  del rectángulo la expresión anterior, para desprender de ella la fórmula específica (II) para  $CM_p$ , establecida por De Moivre, basta

con el requerimiento de que en el caso  $p = 1$  se debe obtener la suma correcta de términos de la binomial

$$A + B + C = (3/6)\{(1 + c_1)[A+C] + (4 - 2c_1)B\},$$

que implica

$$A + B + C = (1/2)\{(1 + c_1)[A+C] + (4 - 2c_1)B\}$$

Comparando los términos correspondientes a ambos lados, lo anterior implica que se cumplan dos ecuaciones lineales,

$$(1/2)(1 + c_1) = 1 \quad \text{y} \quad (1/2)(4 - 2c_1) = 1$$

que tienen la solución común  $c_1 = 1$ . Y con la relación obtenida antes para  $c_2$  y  $c_1$ ,  $c_2 = 2$ .

Con estos dos valores y recordando el postulado inicial  $CM_p = ARM$ , llegamos a la cuadratura propuesta por De Moivre,

$$CM_p = \frac{(2p+1)}{6p} [(p+1)(A+C) + (4p-2)B].$$

Vemos con todo lo anterior que desde el ámbito geométrico es posible dar una explicación de la génesis de la fórmula de De Moivre.

#### 4. JUSTIFICACIÓN PARA EL FACTOR $2p+1$

¿Por qué el factor  $2p+1$  en la cuadratura  $CM_p$  propuesta por De Moivre? Desde nuestro punto de vista moderno, con una perspectiva probabilista, se puede dar una justificación si recordamos la costumbre de tomar los términos de la distribución binomial como áreas de rectángulos de base 1 y altura el término de la binomial. En esta perspectiva, tener las ordenadas  $A$  y  $C$  a distancia  $p$  de  $B$ , es considerar dichas ordenadas como alturas situadas en el centro de la correspondiente base 1 del correspondiente rectángulo (Ver figura 1), por lo que otra alternativa es situarlas en el extremo de la base más alejado de la ordenada  $B$ . Haciendo esto se lleva las ordenadas  $A$  y  $C$  a la distancia  $p + 1/2$  de  $B$ . Lo que plantea que la suma para tres ordenadas  $A$ ,  $B$  y  $C$  sea, ahora, con esta nueva equidistancia; y que se plantee por consiguiente una cuadratura para tres ordenadas con la equidistancia  $p + 1/2$ . Si se aplica la cuadratura de Simpson, entonces, se obtiene:

$$CC_{p+1/2} = (2p+1) \left\{ \frac{p[A+C] + 4pB}{6p} \right\}.$$

Fórmula que corresponde al área de un rectángulo  $RC_{p+1/2}$  de base  $2p+1$  y altura el factor entre “{...}”.

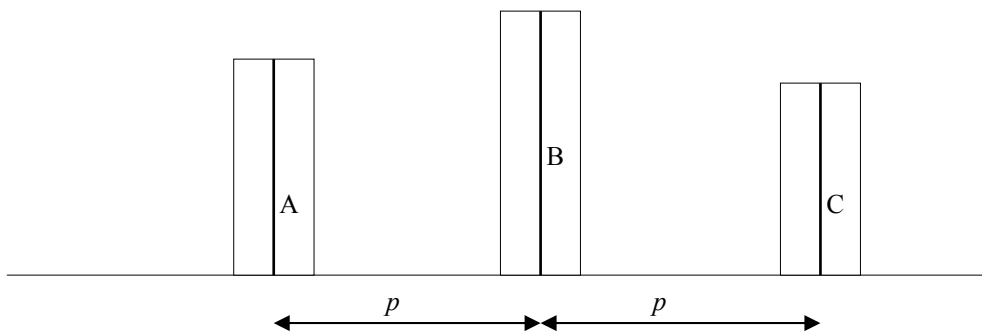


Figura 1

Consideramos que entonces no parece descabellado introducir el factor  $2p+1$  en la cuadratura  $CM_p$  a desarrollar, pues este correspondería, así, a la base del rectángulo  $RM$  cuya área sería igual a la cuadratura. Nuestra consideración se ve reforzada más aún, si notamos que la altura del rectángulo  $RC_{p+\frac{1}{2}}$  es el *mismo* promedio ponderado que aparece en la fórmula  $CC_p$ , propiciando con ello que se vuelva atractivo proponer para altura del rectángulo  $RM$  un promedio ponderado, tal como hicimos en el apartado correspondiente más arriba.

Todavía más, se *tenía* que proponer un nuevo promedio ponderado como altura, porque resulta obvio que con la cuadratura  $CC_{p+\frac{1}{2}}$  obtenemos un área mayor que la dada por  $CC_p$ ; de hecho,

$$CC_{p+\frac{1}{2}} \nearrow CC_p = \frac{[A+C]+4B}{6}. \quad (\text{IV})$$

Por lo anterior, no se puede proponer directamente  $CC_{p+\frac{1}{2}}$  para llevar a cabo la suma de términos de la binomial. En síntesis, y a nivel especulativo, la situación para De Moivre era la siguiente: si no iba a usar la fórmula conocida  $CC_p$  y la  $CC_{p+\frac{1}{2}}$  daba un valor mayor, la cuadratura  $CM_p$  que él propusiera debía dar entonces un valor intermedio:

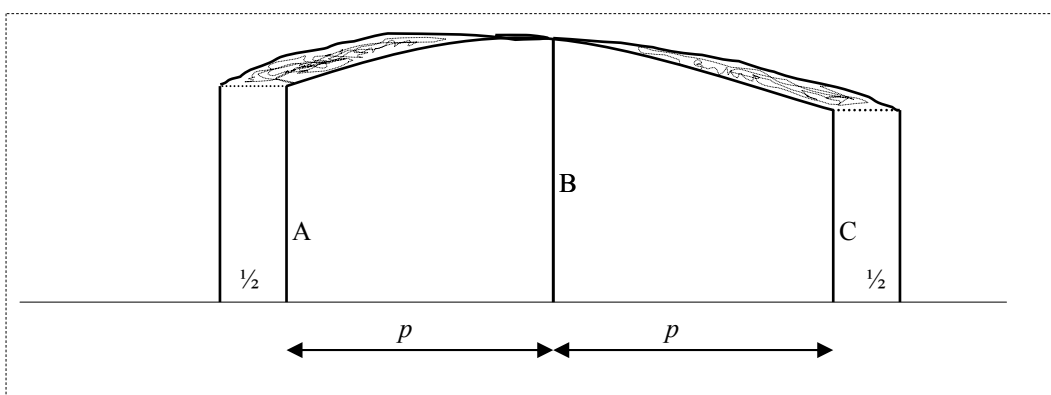
$$CC_p \leq CM_p < CC_{p+\frac{1}{2}}.$$

Nótese que proponerse esto es plausible pues en el tema de las Cuadraturas en esos tiempos ya se estaban mejorando las fórmulas de cuadraturas de Newton-Cotes añadiéndoles *correcciones*. Más precisamente, en el trabajo de 1730 de James Stirling ya mencionado, sin darle reconocimiento a Cotes, aparecen las fórmulas junto con una nueva, para entonces, Tabla de Correcciones, dada sin justificación. Para el caso de tres ordenadas la corrección de Stirling requería usar dos ordenadas más, una por cada lado, con la misma equidistancia que la que había entre las tres iniciales. Así, podemos pensar que De Moivre intentó dar una fórmula mejorada de cuadratura para tres ordenadas que no requería ordenadas adicionales equidistantes, sino que usaba las tres iniciales y la “corrección”, en términos de añadir área a la cuadratura conocida, se lograba con el traslado de  $\frac{1}{2}$  unidad a ambos lados para  $A$  y  $C$ . Esto parece factible si recordamos que sus ordenadas eran probabilidades y si consideramos que su fórmula estaba pensada no para cualesquiera tres ordenadas, sino para este tipo de probabilidades. En resumen, consideramos que la

cuadratura de De Moivre es una fórmula corregida para el caso de tres probabilidades binomiales: un uso de una técnica más general en el campo de la probabilidad pero un uso adaptado y acondicionado a dicho campo.

### 5. ALGUNAS FÓRMULAS ÚTILES

Lo dicho en la parte final del apartado anterior se verá más soportado cuando demos una interpretación geométrica de la cuadratura propuesta por De Moivre, pero para ello necesitamos antes, analizar geoméricamente la diferencia entre las cuadraturas de Simpson,  $CC_p$  y  $CC_{p+\frac{1}{2}}$ . Recordemos que  $CC_p$  corresponde al área bajo el arco de parábola determinado por las tres ordenadas, y encerrado por las ordenadas  $A$  y  $C$ , y el segmento del eje  $X$  entre dichas ordenadas extremas, donde dicho segmento mide  $2p$ . Análogamente para  $CC_{p+\frac{1}{2}}$ , pero en este caso el segmento entre las ordenadas extremas mide  $2p + 1$ . Si en una misma figura dibujamos ambas áreas,



nos damos cuenta que  $CC_{p+\frac{1}{2}}$ , se puede obtener de  $CC_p$  de la siguiente manera: al área  $CC_p$  le sumamos el área del rectángulo  $RI$ , a la izquierda de base  $\frac{1}{2}$  y altura  $A$ , le sumamos el área del rectángulo  $RD$ , a la derecha de base  $\frac{1}{2}$  y altura  $C$ , y el área sombreada,  $AEP$ , entre los arcos de parábola de  $CC_{p+\frac{1}{2}}$  y  $CC_p$ . Es decir,

$$CC_{p+\frac{1}{2}} = CC_p + \frac{1}{2}(A+C) + AEP. \quad (V)$$

Con esto y usando (IV) obtenemos una fórmula para el área sombreada entre los arcos de parábola,

$$\begin{aligned} AEP &= CC_{p+\frac{1}{2}} \curvearrowright CC_p \curvearrowright \frac{1}{2}(A+C) \\ AEP &= (2B \curvearrowright [A+C]) / 3. \end{aligned} \quad (VI)$$

Fórmula que nos será útil en el siguiente apartado.

### 6. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA CUADRATURA

Desde la fórmula propuesta por De Moivre

$$CM_p = \frac{(2p+1)}{6p} [(p+1)(A+C) + (4p-2)B],$$

un desarrollo algebraico algo extenso, pero sencillo, que omitimos por cuestiones de extensión, nos lleva a:

$$CM_p = CC_p + \frac{1}{2} (A+C) + (1/6p) ( [A+C] \curvearrowright 2B ),$$

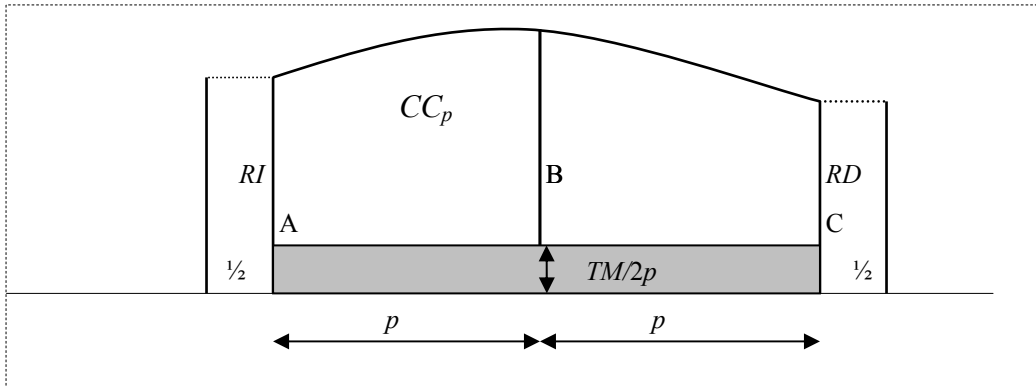
que, recordando la presunción de Stigler,  $B > A$ ,  $B > C$ , escribimos como,

$$CM_p = CC_p + \frac{1}{2} (A+C) \curvearrowright (1/6p) ( 2B \curvearrowright [A+C] ). \quad (VII)$$

Interpretando geoméricamente esta fórmula vemos que De Moivre a la cuadratura de Simpson,  $CC_p$ , le está *sumando* las áreas de los rectángulos mencionados arriba: el rectángulo,  $RI$ , a la izquierda y el de la derecha,  $RD$ , y está *restando* un término,  $TM$ , donde

$$TM = (1/6p) ( 2B \curvearrowright [A+C] ). \quad (VIII)$$

Así, notemos entonces que la corrección hecha por De Moivre a la fórmula conocida por sus contemporáneos consistió en *sumar* áreas de dos rectángulos y *restar* otro término. De aquí confirmamos, por un lado, de (VII), que al sumar, se buscaba el cumplimiento de la desigualdad  $CC_p \leq CM_p$ ; y por otro lado, comparando (V) y (VII), que al restar, se buscaba  $CM_p < CC_p + \frac{1}{2}$ . Más fácil de observar que se cumplen ambas desigualdades si comparamos la siguiente figura con la presentada inmediatamente antes para  $CM_p$  y  $CC_p + \frac{1}{2}$ :



Donde la altura del rectángulo gris es  $TM/2p$  y la base  $2p$ , por lo que su área es  $TM$ . El área de este rectángulo es la que se está restando en la fórmula propuesta por De Moivre.

De (VIII) ya tenemos una fórmula para el área restada  $TM$  pero ¿qué relación guarda ella con las cuadraturas de Simpson? Comparando (VI) y (VIII) es obvio que

$$TM = AEP / 2p.$$

Es decir, ¡el área restada  $TM$  es una proporción del área  $AEP$  entre los arcos de parábola!

## 7. CONCLUSIÓN

Esperamos que los argumentos aquí expuestos sean apoyo más que suficiente para la aproximación geométrica a la génesis de la cuadratura De Moivre. Esta explicación adquiere verosimilitud si recordamos que los matemáticos del período histórico de los personajes mencionados en este texto denominaban con el término “*cuadraturas*” las fórmulas que hoy, para nosotros, son de *integración* numérica, y que este tema matemático surgió del entorno geométrico, en particular del antiguo problema de la Cuadratura de Círculo y la Cuadratura de la Parábola, específicamente de arco de parábola, que derivaron en la búsqueda de cuadraturas de curvas, entendiéndose por ello el dar un rectángulo cuya área fuera igual a la del área bajo la curva. Siendo estos estudios de prosapia matemática parece verosímil que De Moivre haya recurrido al bagaje geométrico en el tema de las *cuadraturas* para afrontar el reto de dar su propia fórmula. Por supuesto que la plausible explicación presentada aquí no pasa de ser una especulación: la historia de la génesis de la cuadratura de De Moivre todavía aguarda su descubrimiento y narración.

Además, el considerar que De Moivre pretendía dar una fórmula que diera al menos el mismo resultado que daba la conocida cuadratura de Simpson  $1/3$ , conlleva, de cara al fin último del trabajo de De Moivre, que, para efectos prácticos, el intentar *aproximar la suma de términos de la binomial por cuadraturas numéricas* llevaba a un callejón sin salida. Muestra de la brillantez e intuición matemáticas de De Moivre fue abandonar entonces esta ruta e intentar una vía alterna que lo condujo al logro plasmado en su texto de 1733.

### **Bibliografía**

Chabert, J-L et al. A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg 1999.

Goldstine, H. H. A History of Numerical Analysis from the 16<sup>th</sup> through the 19<sup>th</sup> Century. Springer-Verlag. New York 1977.

Hald, A. A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750. John Wiley & Sons Inc. New York 1990.

Stigler, S. M. The History of Statistics. Harvard University Press. Cambridge Massachusetts 1986





## INTERACCIONES DÉBILES: ONDAS COMPUESTAS EN UN FLUIDO DE DOS CAPAS

Inna Shingareva      Carlos Lizárraga Celaya

Departamentos de Matemáticas y Física, Universidad de Sonora

### Resumen

*Este trabajo es una introducción a problemas de interacciones de ondas no lineales en fluidos. Se considera un problema de interacciones débiles de dos modos de ondas estacionarias en un fluido de dos capas. Se describen las interacciones débiles en las que pueden aparecer ondas compuestas. Con ayuda de métodos de álgebra computacional, se desarrolla un método asintótico para obtener las soluciones asintóticas de ondas compuestas en variables Lagrangianas.*

## 1 Introducción

Es conocido que las ecuaciones de evolución no lineales se pueden dividir en dos grupos: las ecuaciones integrables (para las cuales se conocen soluciones exactas o se pueden deducir propiedades finas de las soluciones) y las ecuaciones no integrables. Sin embargo, en la literatura científica se conoce un número pequeño de resultados para describir propiedades finas de las soluciones, como se ha hecho en el caso integrable. En este trabajo se desarrolla un método para la descripción de la evolución e interacción de ondas para un sistema de ecuaciones diferenciales no integrables.

Consideramos un ejemplo importante de un sistema no integrable: las ecuaciones para la dinámica de fluidos que describan interacciones débiles de ondas estacionarias compuestas en un fluido de dos capas. Restringiéndonos a este sistema particular, desarrollamos métodos cuya estructura general nos permitirá investigar sistemas hiperbólicos cuasilineales generales y sistemas con dispersión o viscosidad pequeña.

Desde nuestro punto de vista, el problema abierto más interesante tiene que ver con la descripción de la interacción de ondas rápidamente oscilantes para el problema de frontera libre en fluidos de dos capas.

Desde el punto de vista aplicado, los resultados del trabajo se pueden utilizar en oceanología y varias aplicaciones técnicas, por ejemplo, en la generación de algunos tipos de ondas en las zonas costeras y mar adentro, en el fenómeno de mezclado y rompimiento de olas en el océano, en la dinámica de cohetes de combustible, para el transporte en fluidos no uniformes, en el proceso de extracción de petróleo, y otros.

En este trabajo se considera el problema de interacciones de dos modos de ondas estacionarias no lineales para un fluido de dos capas infinitas en un dominio rectangular. Suponemos que el fluido es ideal (incompresible e irrotacional) inviscido. Las ondas bidimensionales, y los efectos de tensión superficial en la frontera libre son despreciables.

Con ayuda de métodos de álgebra computacional, se desarrolla un método asintótico para construir la solución analítica aproximada. El sistema de ecuaciones diferenciales parciales y las condiciones de frontera se describen en variables Lagrangianas. Escogemos la solución de la aproximación lineal en la forma de una onda estacionaria de dos modos.

El método asintótico se basa en la teoría de perturbaciones y es una generalización del método para obtener las soluciones que describen el movimiento de ondas estacionarias en un fluido de una y dos capas en variables Lagrangianas, ver, por ejemplo, [?], [?], [?], [?].

En general, es conocido que se pueden realizar dos tipos diferentes de interacciones de modos de ondas: las interacciones débiles y las interacciones fuertes. En este trabajo se estudian las interacciones débiles en las que pueden aparecer *ondas compuestas*. El término de *ondas compuestas* fué introducido por Yakov Ivanovich Sekerzh-Zenkovich en 1951 [?]. Las ondas compuestas representan una combinación de dos modos, componentes que se preservan en el tiempo. Hacemos notar que las interacciones fuertes en las que pueden aparecer ondas compuestas, las transferencias de la energía de un modo a otro, y fenomenos más complicados, es un tema para investigaciones futuras.

Construimos procedimientos apropiados de álgebra computacional (con ayuda del sistema Maple) para auxiliarnos en la construcción de soluciones asintóticas (en este trabajo no se presentan los procedimientos).

## 2 Planteamiento del Problema

Consideramos un problema de interacciones de dos modos de ondas estacionarias no lineales en un fluido incompresible, irrotacional e inviscido, de dos capas en un dominio rectangular

$$\mathcal{D} = \{0 \leq x^{(1)} \leq L, \eta(x, t) \leq y^{(1)} \leq \infty\} \cup \{0 \leq x^{(2)} \leq L, -\infty \leq y^{(2)} \leq \eta(x, t)\}.$$

Se estudia una versión estable del problema de superficie libre y consideramos que la capa superior es más ligera que la capa inferior, i.e. la razón de densidades

$$\gamma = \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}} < 1.$$

Se considera el movimiento en dos dimensiones de ondas de gravedad no lineales estacionarias en el dominio  $\mathcal{D}$ . Fijamos el sistema de coordenadas cartesiano  $x0y$  en la interfaz entre los dos fluidos de tal forma que el eje  $x$  describe los flujos horizontales de fluido en las dos capas  $x^{(m)}$  ( $m = 1, 2$ ), el eje  $y$  vertical, de tal forma que la superficie libre sin perturbar tiene coordenadas  $y^{(m)} = 0$  y  $x^{(m)} \in [0, L]$ , donde  $L$  es la distancia entre las dos paredes verticales.

Introducimos, como en [?], las variables Lagrangianas  $(a^{(m)}, b)$ : en  $t = 0$  la frontera libre es  $\{x^{(m)}(a^{(m)}, 0, 0), y^{(m)}(a^{(m)}, 0, 0)\}$ ; la frontera libre es  $\{x^{(m)}(a^{(m)}, 0, t), y^{(m)}(a^{(m)}, 0, t)\}$  en cualquier instante de tiempo; en las fronteras sólidas vertical y horizontal (de arriba y abajo) del dominio  $a^{(m)} = 0$ ,  $a^{(m)} = L$  y  $b = \pm\infty$  las velocidades horizontales  $x_t^{(m)} = 0$ ; en  $t = 0$  y en cualquier instante de tiempo, los Jacobianos  $J = \frac{\partial(x^{(m)}, y^{(m)})}{\partial(a^{(m)}, b)} = 1$ .

Escribimos el sistema de ecuaciones diferenciales parciales y las condiciones de frontera para un fluido de dos capas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 x_{tt}^{(m)} x_a^{(m)} + (y_{tt}^{(m)} + g) y_a^{(m)} + \frac{p_a^{(m)}}{\rho^{(m)}} &= 0, \\
 x_{tt}^{(m)} x_b^{(m)} + (y_{tt}^{(m)} + g) y_b^{(m)} + \frac{p_b^{(m)}}{\rho^{(m)}} &= 0, \\
 \frac{\partial(x^{(m)}, y^{(m)})}{\partial(a^{(m)}, b)} &= 1, \\
 x^{(m)}(0, b, t) &= 0, \quad x^{(m)}(L, b, t) = L, \\
 y^{(m)}(a^{(m)}, (-1)^{m-1} \infty, t) &= (-1)^{m-1} \infty, \\
 x^{(1)}(a^{(m)}, 0, t) - x^{(2)}(a^{(m)}, 0, t) &= 0, \\
 y^{(1)}(a^{(m)}, 0, t) - y^{(2)}(a^{(m)}, 0, t) &= 0, \\
 p^{(1)}(a^{(m)}, 0, t) - p^{(2)}(a^{(m)}, 0, t) &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde  $x^{(m)}(a^{(m)}, b, t)$  y  $y^{(m)}(a^{(m)}, b, t)$  son las coordenadas de las partículas individuales en movimiento,  $p^{(m)}(a^{(m)}, b, t)$  es la presión en las capas de fluidos (la superior e inferior, respectivamente), y  $\rho^{(m)}$  son las densidades de fluidos. Consideramos el problema sin permitir efectos de tensión superficial en la frontera libre del fluido.

Introducimos las siguientes escalas:

$$\begin{aligned}
 \psi^{(q)} &= \sqrt{n^{(q)}} \omega^{(q)} t, \quad \kappa A^{(q)} = \varepsilon B^{(q)} \quad (q = 1, 2), \\
 \alpha^{(m)} &= a^{(m)} \kappa, \quad \beta = b \kappa, \quad (m = 1, 2), \\
 \kappa x^{(m)} &= \alpha^{(m)} + \varepsilon \xi^{(m)}, \quad \kappa y^{(m)} = \beta + \varepsilon \eta^{(m)}, \\
 \kappa^2 p^{(m)} &= -(\kappa \rho^{(m)} g) \kappa y^{(m)} + \varepsilon \rho^{(m)} \omega_{(0)}^2 \sigma^{(m)}, \\
 \omega_{(0)}^2 &= g \lambda \kappa, \quad \lambda = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad \gamma = \frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}}, \quad \kappa = \frac{\pi}{L},
 \end{aligned}$$

donde  $\psi^{(q)}$ ,  $\omega^{(q)}$ ,  $B^{(q)}$ ,  $n^{(q)}$  ( $q = 1, 2$ ) son, respectivamente, las fases, las frecuencias no lineales, las amplitudes, y los números de los modos de la onda,  $\alpha^{(m)}$ ,  $\beta$ , ( $m = 1, 2$ ) son las variables Lagrangianas,  $\xi^{(m)}$ ,  $\eta^{(m)}$ ,  $\sigma^{(m)}$  son las funciones desconocidas, y  $\omega_{(0)}$  es la frecuencia lineal.

Denotemos por  $\mathcal{L}^i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) los operadores lineales

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^1(X, Z) &= \mathcal{L}^4(X) + Z_{\alpha^{(m)}}, \\
 \mathcal{L}^2(Y, Z) &= \mathcal{L}^4(Y) + Z_{\beta}, \\
 \mathcal{L}^3(X, Y) &= X_{\alpha^{(m)}} + Y_{\beta}, \\
 \mathcal{L}^4(X) &= n^{(1)} X_{\psi^{(1)} \psi^{(1)}} + n^{(2)} X_{\psi^{(2)} \psi^{(2)}} + 2\sqrt{n^{(1)} n^{(2)}} X_{\psi^{(1)} \psi^{(2)}}.
 \end{aligned}$$

y reescribimos el problema de valor a la frontera (??) en términos de los operadores lineales

y la forma adimensional:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^1(\xi^{(m)}, \sigma^{(m)}) &= -\varepsilon \{ \mathcal{L}^4(\xi^{(m)}) \xi_{\alpha^{(m)}}^{(m)} + \mathcal{L}^4(\eta^{(m)}) \eta_{\alpha^{(m)}}^{(m)} \}, \\
 \mathcal{L}^2(\eta^{(m)}, \sigma^{(m)}) &= -\varepsilon \{ \mathcal{L}^4(\xi^{(m)}) \xi_{\beta}^{(m)} + \mathcal{L}^4(\eta^{(m)}) \eta_{\beta}^{(m)} \}, \\
 \mathcal{L}^3(\xi^{(m)}, \eta^{(m)}) &= -\varepsilon \{ \xi_{\alpha^{(m)}}^{(m)} \eta_{\beta}^{(m)} - \xi_{\beta}^{(m)} \eta_{\alpha^{(m)}}^{(m)} \}, \\
 \xi^{(m)}(0, \beta, \psi^{(q)}) &= 0, \quad \xi^{(m)}(\pi, \beta, \psi^{(q)}) = 0, \\
 \eta^{(m)}(\alpha^{(m)}, (-1)^{m-1} \infty, \psi^{(q)}) &= 0, \quad q = 1, 2, \\
 \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} &= -\varepsilon \{ \xi^{(1)}(\alpha^{(1)}, 0, \psi^{(q)}) - \xi^{(2)}(\alpha^{(2)}, 0, \psi^{(q)}) \}, \\
 \eta^{(1)}(\alpha^{(1)}, 0, \psi^{(q)}) - \eta^{(2)}(\alpha^{(2)}, 0, \psi^{(q)}) &= 0, \\
 2(1 + \gamma)^{-2} \{ (1 + \gamma) \mathcal{K}_1 - (1 - \gamma) \mathcal{K}_2 \} &= 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_1 &= \gamma \eta^{(1)}(\alpha^{(1)}, 0, \psi^{(q)}) - \eta^{(2)}(\alpha^{(2)}, 0, \psi^{(q)}), \\
 \mathcal{K}_2 &= \gamma \sigma^{(1)}(\alpha^{(1)}, 0, \psi^{(q)}) - \sigma^{(2)}(\alpha^{(2)}, 0, \psi^{(q)}),
 \end{aligned}$$

En la primera aproximación de (??) obtenemos el problema lineal:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^1(\xi^{(m)}, \sigma^{(m)}) &= 0, \quad \mathcal{L}^2(\eta^{(m)}, \sigma^{(m)}) = 0, \quad \mathcal{L}^3(\xi^{(m)}, \eta^{(m)}) = 0, \\
 \xi^{(m)}(0, \beta, \psi^{(q)}) &= 0, \quad \xi^{(m)}(\pi, \beta, \psi^{(q)}) = 0, \quad \eta^{(m)}(\alpha^{(m)}, (-1)^{m-1} \infty, \psi^{(q)}) = 0, \quad q = 1, 2, \\
 \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} &= 0, \quad \eta^{(1)}(\alpha^{(1)}, 0, \psi^{(q)}) - \eta^{(2)}(\alpha^{(2)}, 0, \psi^{(q)}) = 0, \\
 2(1 + \gamma)^{-2} \{ (1 + \gamma) \mathcal{K}_1 - (1 - \gamma) \mathcal{K}_2 \} &= 0.
 \end{aligned}$$

Para el problema de interacciones débiles de ondas estacionarias no lineales, escogemos la solución del problema lineal en la forma que describe la superposición de dos modos lineales con las amplitudes  $B^{(1)}$  y  $B^{(2)}$ , las fases  $\psi^{(1)}$  y  $\psi^{(2)}$  y los números de modos  $n^{(1)}$  y  $n^{(2)}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{(m)111}(\xi^{(m)}) &= (-1)^{m-1} B^{(1)} \exp[(-1)^m n^{(1)} \beta] \operatorname{sen}(\alpha^{(m)} n^{(1)}) \cos(\psi^{(1)}) + \\
 &\quad (-1)^{m-1} B^{(2)} \exp[(-1)^m n^{(2)} \beta] \operatorname{sen}(\alpha^{(m)} n^{(2)}) \cos(\psi^{(2)}), \\
 \mathcal{F}^{(m)111}(\eta^{(m)}) &= B^{(1)} \exp[(-1)^m n^{(1)} \beta] \cos(\alpha^{(m)} n^{(1)}) \cos(\psi^{(1)}) + \\
 &\quad B^{(2)} \exp[(-1)^m n^{(2)} \beta] \cos(\alpha^{(m)} n^{(2)}) \cos(\psi^{(2)}), \\
 \mathcal{F}^{(m)111}(\sigma^{(m)}) &= (-1)^m B^{(1)} \exp[(-1)^m n^{(1)} \beta] \cos(\alpha^{(m)} n^{(1)}) \cos(\psi^{(1)}) + \\
 &\quad (-1)^m B^{(2)} \exp[(-1)^m n^{(2)} \beta] \cos(\alpha^{(m)} n^{(2)}) \cos(\psi^{(2)}),
 \end{aligned}$$

donde las amplitudes y las fases satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned}
 \frac{dB^{(1)}}{dt} &= 0, \quad \frac{d\psi^{(1)}}{dt} = \sqrt{n^{(1)}} \omega_{(0)}, \\
 \frac{dB^{(2)}}{dt} &= 0, \quad \frac{d\psi^{(2)}}{dt} = \sqrt{n^{(2)}} \omega_{(0)}.
 \end{aligned}$$

### 3 Método Asintótico

En la construcción de la solución asintótica generalizamos el método [?] aplicado al estudio de un modo del fluido de dos capas.

Definimos la serie de potencias en el parámetro de amplitud  $\varepsilon$

$$u^{(m)} = \mathcal{F}^{(m)111}(u^{(m)}) + \sum_{i=2}^N \varepsilon^{i-1} u^{(m)(i)} + O(\varepsilon^N), \quad u = \xi, \eta, \sigma, \quad (3)$$

donde  $\xi^{(m)(i)}$ ,  $\eta^{(m)(i)}$ ,  $\sigma^{(m)(i)}$  son funciones desconocidas,  $2\pi$ -periódicas en  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  y  $\alpha^{(m)}$ , de las variables  $\alpha^{(m)}$ ,  $\beta$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ . Suponemos que  $\xi^{(m)}$ ,  $\eta^{(m)}$  y  $\sigma^{(m)}$  se pueden expandir en este tipo de series.

Considerando ondas estacionarias débilmente no lineales, podemos suponer que las frecuencias de los modos de la onda no lineal  $\omega_1$  y  $\omega_2$  están cerca de las frecuencias de los modos de la onda lineal  $\omega_{(0)}$ :

$$\omega^{(q)}(\varepsilon) \equiv \frac{d\psi^{(q)}}{dt} = \sqrt{n^{(q)}} \omega_{(0)} + \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon^i \omega_{(i)}^{(q)} + O(\varepsilon^N), \quad q = 1, 2, \quad (4)$$

donde  $\omega_{(i)}^{(q)}$  son nuevas correcciones desconocidas a la frecuencia de la onda no lineal.

Hacemos notar que la obtención en cada aproximación de las condiciones de frontera en la frontera libre es un procedimiento especial y similar al procedimiento cuya descripción y listado del programa se presentan en [?]. Aquí indicamos sólo la idea del procedimiento: con la nueva variable  $\alpha$  para la descripción de la frontera libre las variables Lagrangianas en las capas superior e inferior  $\alpha^{(m)}$  son

$$\alpha^{(m)} = \alpha + (-1)^m \sum_{i=2}^N \varepsilon^{i-1} A^{(i-1)} + O(\varepsilon^N).$$

Si aplicamos las tres condiciones en la frontera libre y expandemos las expresiones analíticas en serie de Taylor, obtenemos en cada aproximación los valores del nuevo parámetro  $A^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) y las condiciones de frontera en la frontera libre.

Buscamos una solución  $2\pi$ -periódica en  $\psi^{(q)}$  y  $\alpha^{(m)}$  ( $q, m = 1, 2$ ) al sistema de ecuaciones de movimiento y condiciones de frontera (??) en la forma:

$$v^{(m)(i)} = \sum_{j,k,l=0}^i V^{(m)(i)jkl} \mathcal{F}^{(m)jkl}(v^{(m)}), \quad v = \xi, \eta, \sigma, \quad V = \Xi, H, \Sigma,$$

donde  $\Xi^{(m)(i)jkl}$ ,  $H^{(m)(i)jkl}$ ,  $\Sigma^{(m)(i)jkl}$  y  $\omega_{(i)}^{(q)}$ ,  $q, m = 1, 2$ ,  $i = 2, \dots, N$ , son constantes desconocidas.

Si sustituimos estas series en el sistema lineal no homogéneo de ecuaciones diferenciales parciales, condiciones de frontera sólidas y las condiciones de frontera libres, y aplicamos las condiciones de ortogonalidad para soluciones periódicas, obtenemos una familia de sistemas

de ecuaciones algebraicas lineales con respecto a los coeficientes desconocidos,  $\Xi^{(m)(i)jkl}$ ,  $\mathbb{H}^{(m)(i)jkl}$ ,  $\Sigma^{(m)(i)jkl}$ , para cada aproximación.

Al encontrar en la solución aproximada todos los coeficientes en  $\omega_{(i)}^{(q)}$ ,  $q = 1, 2$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ , escribimos las relaciones de frecuencia-amplitud para el problema de interacciones de ondas en un fluido de dos capas utilizando las ecuaciones diferenciales ordinarias (??) para las fases  $\psi^{(1)}$  y  $\psi^{(2)}$  de los modos de la onda:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^{(1)}}{\sqrt{n^{(1)}} \omega_{(0)}} &= 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{8(1 + \gamma)^2} \left[ (B^{(1)})^2 n^{(1)} (1 + \gamma^2) + 4n^{(1)} (n^{(2)} - n^{(1)}) (B^{(2)})^2 \gamma \right] + \dots, \\ \frac{\omega^{(2)}}{\sqrt{n^{(2)}} \omega_{(0)}} &= 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{8(1 + \gamma)^2} \left[ (B^{(2)})^2 n^{(2)} (1 + \gamma^2) + 4n^{(1)} (n^{(2)} - n^{(1)}) (B^{(1)})^2 \gamma \right] + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

## 4 Comparación de Resultados

Ahora comparamos los resultados analíticos para las relaciones de frecuencia-amplitud (??) con los resultados conocidos en la literatura científica.

Al considerar que los números de los modos de la onda son iguales,  $n^{(2)} = n^{(1)}$ , obtenemos las expresiones analíticas para el problema de ondas estacionarias de un modo en un fluido de dos capas [?], la formula (27):

$$\frac{\omega}{\omega_{(0)}} = 1 - \varepsilon^2 \left[ \frac{1 + \gamma^2}{8(1 + \gamma)^2} \right] - \varepsilon^4 \left[ \frac{15\gamma^4 - 64\gamma^3 + 54\gamma^2 - 64\gamma + 23}{256(1 + \gamma)^4} \right] + O(\varepsilon^5). \quad (6)$$

Si ponemos  $\rho^{(1)} = 0$  y  $n^{(2)} = n^{(1)}$ , i.e. el caso límite asintótico de no poseer capa superior, tenemos  $\gamma \rightarrow 0$ , obtenemos la relación de frecuencia-amplitud para el problema de ondas estacionarias superficiales de un modo [?], la formula (11):

$$\frac{\omega}{\omega_{(0)}} = 1 - \frac{1}{8} \varepsilon^2 - \frac{23}{256} \varepsilon^4 + O(\varepsilon^5). \quad (7)$$

Esto significa que se recuperan los resultados de Rayleigh [?], Penney y Price [?], Aoki [?] en variables de Euler y los resultados previos de los presentes autores [?], [?] en variables Lagrangianas.

Si hacemos  $\rho^{(1)} = 0$ , obtenemos el caso particular del problema de interacciones de modos de ondas, i.e. consideramos el problema de ondas estacionarias superficiales de dos modos. Para este caso ponemos  $\gamma \rightarrow 0$  y obtenemos las relaciones de frecuencia-amplitud de dos modos de la onda las cuales son iguales a (??). Esto significa que los coeficientes que describen las interacciones de ondas son ceros, i.e. las ondas superficiales no interactúan en el problema considerado.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias a financiamiento de SEP-CONACYT, proyectos F-41421 y 43208.

## Bibliografía

- [1] AOKI, H. Higher order calculation of finite periodic standing waves by means of the computer. *J. Phys. Soc. Jpn.* **49** (1980) 1598–1606.
- [2] PENNEY, W. G. AND PRICE, A. T. Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid. Part 2. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **224** (1952) 254–284.
- [3] RAYLEIGH, LORD Deep water waves, progressive or stationary, to the third order of approximation. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **91** (1915) 345–353.
- [4] SEKERZH-ZENKOVICH, YA. I. Composite standing waves of finite amplitude on the surface of a heavy fluid of infinite depth. *Izvestiya Akad. Nauk USSR, Ser. Geofiz.* **5** (1951) 68–83.
- [5] SHINGAREVA, I. Investigation of Standing Surface Waves in a Fluid of Finite Depth by Computer Algebra Methods. PhD thesis, *Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow*, 1995.
- [6] SHINGAREVA, I., SEKERZH-ZENKOVICH, S. YA., AND GARCÍA A., M. G. Ninth-Order Analytic Solution of Free Standing Gravity Waves in Fluid of Infinite Depth. *Bull. ERCOFTAC (European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion)* **52** (2002) 37–41.
- [7] SHINGAREVA, I. AND LIZÁRRAGA-CELAYA, C. High Order Asymptotic Solutions to Free Standing Water Waves by Computer Algebra. *Proceedings of the Maple Summer Workshop, July 11-14, Waterloo, Ontario, Canada, R.J. Lopez (Editor)* (2004) 1–28.
- [8] SHINGAREVA, I. On Frequency-Amplitude Dependences for Free Standing Water Waves. *J. of Computational and Applied Mathematics (enviado)* (2004).
- [9] SHINGAREVA, I Y LIZÁRRAGA-CELAYA, C. Curva Crítica en Estructuras de Fluidos. *Aportaciones Matemáticas* (2004) 57–72.





**ACOPLAMIENTO MÁXIMO Y CUBIERTA MÍNIMA EN GRÁFICAS BIPARTITAS Y PROBLEMA DE ASIGNACIÓN.**

**M.I.O. Joaquín López Borbón, M.C. Mario Gómez Quezada**  
*Universidad de Sonora*

**Resumen**

*En esta plática se plantearán tres problemas clásicos de optimización combinatoria, se desarrollarán algoritmos para su solución y se presentará su implementación computacional.*

**Introducción**

Con el fin de ilustrar los problemas de optimización combinatoria por desarrollar, consideremos los siguientes problemas:

Problema 1.- El departamento de idiomas cuenta con 6 profesores, para cubrir 6 trabajos de traducción. En la siguiente tabla se determina si un profesor  $u_i$  tiene o no habilidades para realizar cada uno de los trabajos  $v_j$ . El problema es determinar el número máximo de trabajos que se pueden realizar, de tal manera que cada profesor no debe de asignarse a más de un trabajo. Este es un ejemplo de un problema de acoplamiento máximo.

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$u_1$	Si	Si	No	Si	No	No
$u_2$	Si	No	No	No	No	Si
$u_3$	No	Si	Si	No	Si	No
$u_4$	Si	No	No	No	No	Si
$u_5$	No	No	No	Si	No	Si
$u_6$	No	Si	No	No	No	Si

Problema 2.- Una empresa necesita realizar 6 tareas y a escogido a 6 de sus empleados que las han llevado a cabo con anterioridad. Las unidades de tiempo de cada empleado para ejecutar cada tarea se presentan en la siguiente matriz, donde los renglones representan a los empleados y las columnas a las tareas.

El problema de la empresa es el de decidir como “asignar” cada empleado a una tarea y cada tarea a un empleado, de tal forma que la suma de los tiempos de ejecución de las 6 tareas, llamado valor de la asignación, sea mínimo. Este problema es un ejemplo de problema de asignación.

	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	
$E_1$	4	2	6	2	8	4	$E_i \longrightarrow$ Empleados $T_j \longrightarrow$ Tareas
$E_2$	5	9	5	6	8	3	
$E_3$	9	4	5	8	4	7	
$E_4$	3	3	9	7	4	1	
$E_5$	9	6	6	2	4	2	
$E_6$	7	1	4	5	9	1	

**Problema de acoplamiento máximo.**

Una gráfica bipartita esta formada por dos conjuntos no vacíos, finitos y sin elementos en común, cuyos elementos se llaman vértices o nodos de la gráfica y un conjunto de aristas o lados que unen vértices de un conjunto a otro, no se permite que las aristas unan vértices del mismo

conjunto, de ahí el nombre de bipartita. El problema 1 puede modelarse mediante una gráfica bipartita donde un conjunto de vértices representan a los profesores, el otro conjunto de vértices

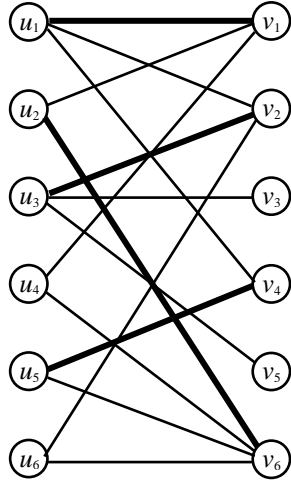


Figura 1

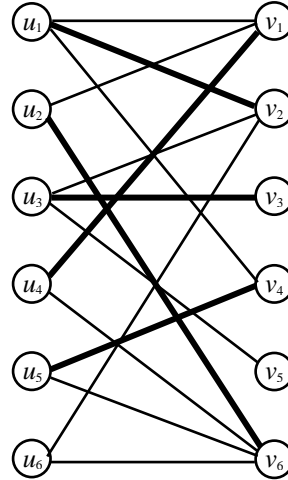


Figura 2

a los trabajos y si el profesor  $u_i$  tiene habilidades para desarrollar el trabajo  $v_j$  se representa mediante la arista de  $u_i$  a  $v_j$ . La figura 1 es la gráfica bipartita que modela al problema 1.

Un **acoplamiento** en una gráfica es un subconjunto de sus aristas que no tienen vértices en común. En las gráficas anteriores, las aristas remarcadas con líneas gruesas son ejemplos de acoplamientos; acoplamiento de 4 aristas en la figura 1 y acoplamiento de 5 aristas en la figura 2, ambos de la misma gráfica.

Como el número de aristas en una gráfica es finito, se plantea el problema de encontrar el acoplamiento que tenga el mayor número de aristas de la gráfica, a esto se le llama **problema de acoplamiento máximo**. Por lo tanto el problema 1 es un problema de acoplamiento máximo. En el acoplamiento de la figura 2, se verá después que es un acoplamiento máximo, es decir, en dicha gráfica es imposible encontrar otro acoplamiento con más de 5 aristas, que en problema 1 significa que 5 es el máximo número de trabajos que se pueden realizar.

Una sucesión de vértices es una trayectoria si en la gráfica existen aristas que unen los vértices consecutivos, además se dice que la *trayectoria* es *umentante* con respecto a un acoplamiento si comienza con una arista que no está en el acoplamiento, la que sigue está en el acoplamiento y la que sigue no está, y continúa así alternadamente hasta terminar con una arista que no está en dicho acoplamiento. Por ejemplo en la figura 1  $u_4, v_1, u_1, v_2, u_3, v_3$  es una trayectoria umentante en el sentido de que si metemos al acoplamiento las aristas de la trayectoria que no estaban en el acoplamiento y sacamos del acoplamiento las aristas de la trayectoria que si estaban, dejando igual todas las aristas de la gráfica que no están en la trayectoria, se obtiene un nuevo acoplamiento, con una arista más que el acoplamiento anterior, el nuevo acoplamiento obtenido se ilustra en la gráfica de la figura 2.

De lo anterior se deduce que para encontrar un acoplamiento máximo en una gráfica, se requiere comenzar con un acoplamiento inicial, luego encontrar una trayectoria umentante para obtener un nuevo acoplamiento con una arista más, repetir lo anterior hasta que ya no se pueda obtener trayectoria umentante, lo cual significa que el acoplamiento actual es máximo. Este algoritmo fue deducido por Berge [9]. Como se puede observar el acoplamiento, en la gráfica de la figura 2, es máximo, debido a que no existe ninguna otra trayectoria umentante.

**Problema de cobertura mínima.**

Una *cubierta* de una gráfica es un subconjunto de sus nodos tales que toda arista de la gráfica tiene al menos uno de sus extremos en dicho subconjunto de vértices. Por ejemplo en la figura 2,  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$  es una cubierta con 6 vértices. Otra cubierta de la misma gráfica no tan evidente es  $u_3, v_1, v_2, v_4, v_6$  la cual tiene 5 vértices. Como el número de vértices en la gráfica es finito, tiene que haber una cubierta que tenga el menor número de vértices, encontrar esta cubierta se le conoce con el nombre de *problema de cobertura mínima*. Por lo tanto en una gráfica, cualquier cubierta  $K$  contiene al menos un vértice extremo de toda arista de cualquier acoplamiento  $M$ , es decir  $|M| \leq |K|$  para cualquier acoplamiento  $M$  y cualquier cubierta  $K$  ( $|$  denota cardinalidad).

En caso de que  $|M| = |K|$  se garantiza que  $M$  es máximo y  $K$  es mínima. Como ejemplo, la cubierta  $u_3, v_1, v_2, v_4, v_6$  es mínima ya que el acoplamiento máximo (figura 2) tiene también 5 aristas. De lo anterior se deduce que un método para encontrar la cubierta mínima es encontrar un acoplamiento máximo, luego, si se encuentra una cubierta (si es que existe) con el mismo número de elementos del acoplamiento máximo, esta cubierta tiene que ser mínima. Hall en 1937 [2] demuestra un teorema que lleva su nombre, del cual se deduce que en una gráfica bipartita siempre se puede encontrar una cubierta mínima con el mismo número de elementos que un acoplamiento máximo, de dicha demostración se deduce un algoritmo para encontrar dicha cobertura mínima.

En el siguiente contexto se dice que dos vértices de una gráfica son adyacentes, si existe una arista que los une, y al conjunto de vértices adyacentes a un vértice dado se le llama vecinos de dicho vértice. Además, si una arista pertenece a un acoplamiento se dirá que sus vértices extremos están acoplados en caso contrario se dirá que es un vértice expuesto.

Para encontrar una cubierta mínima en una gráfica bipartita supóngase que ya se tiene un acoplamiento máximo, entonces ocurren dos casos: todos los vértices a la izquierda están acoplados ó existe al menos uno de ellos expuesto. En caso de que todos estén acoplados, entonces se escoge la cubierta formada por dichos vértices; esta cubierta es mínima ya que por cada vértice renglón existe una arista del acoplamiento.

Si existen vértices expuestos, incluirlos en un conjunto  $S$ ,  $u_6$  es expuesto en el acoplamiento de la figura 2 entonces  $S = \{u_6\}$ . Luego encontrar todos sus vecinos, en este caso son  $v_2$  y  $v_6$  e incluirlos en un conjunto  $V(S)$  entonces  $V(S) = \{v_2, v_6\}$ , estos vecinos no deben ser expuestos ya que por ser un acoplamiento máximo no existe trayectoria aumentante, es decir, por cada vértice vecino existe una arista en el acoplamiento y además  $V(S) = \{v_2, v_6\}$  cubre a todas las aristas que salen de  $S = \{u_6\}$ .

Enseguida, de cada vértice de  $V(S)$  regresarse por la arista en el acoplamiento e incluir en  $S$  los vértices acoplados, en este caso son  $u_1$  y  $u_2$ , es decir el nuevo  $S = \{u_6, u_1, u_2\}$ . Repitiendo como al principio, encontrar todos los vecinos de los vértices incluidos en  $S$ , es decir de  $u_1$  y  $u_2$ , e incluirlos en  $V(S)$  (los que no estaban), estos son,  $v_1$  y  $v_4$ , el nuevo  $V(S) = \{v_2, v_6, v_1, v_4\}$  puede observarse también que  $v_1$  y  $v_4$  cubren todas las aristas que salen de  $u_1$  y  $u_2$ , pero además  $v_1$  y  $v_4$  están acoplados (por que de lo contrario existiría una trayectoria aumentante) de ahí que por cada vértice incluido en  $V(S)$  existe una arista acoplada no considerada anteriormente. Hasta ahora se puede afirmar que  $V(S)$  cubre todos los vértices de  $S$  y por cada elemento de  $V(S)$  existe una arista diferente del acoplamiento. Igual como se hizo anteriormente, regresar de  $v_1$  y  $v_4$  por la arista en el acoplamiento e incluir en  $S$  los vértices acoplados estos son  $u_4$  y  $u_5$ , el nuevo  $S = \{u_6,$

$u_1, u_2, u_4$  y  $u_5$ }. Al repetir el algoritmo, es decir, incluir en  $V(S)$  los nuevos vecinos de  $u_4$  y  $u_5$ , nos damos cuenta que ya están incluidos, lo cual tenía que suceder dado que existe un número finito de vértices a la derecha. De esta manera se construye que  $V(S)$  cubre todas las aristas que salen de  $S$ , y además por cada elemento de  $V(S)$  existe una arista diferente en el acoplamiento. En caso de que  $S$  no contenga a todos los vértices de la izquierda, llamemos a este conjunto complemento de  $S$  denotado por  $S^c$ , es un hecho, que cada uno de estos vértices está acoplado, porque de otra manera estaría en  $S$  desde el principio del algoritmo, además  $V(S)$  seguramente no cubre a todas las aristas que salen de  $S^c$ , al menos no cubre las aristas en el acoplamiento que sale de  $S^c$ , porque recuerde que el algoritmo se regresa por la arista acoplada e incluye en  $S$  el vértice renglón acoplado. Lo anterior indica que  $S^c$  cubre el resto de las aristas no cubiertas por  $V(S)$  y además como cada vértice renglón de  $S^c$  está acoplado entonces existe también, (al igual que para  $V(S)$ ) una arista distinta en el acoplamiento. En conclusión, la unión de los vértices de  $V(S)$  y  $S^c$  son una cobertura con el mínimo número de elementos que el del acoplamiento máximo, por lo tanto esta cobertura es mínima. Para la gráfica anterior  $S^c = \{u_3\}$  y  $V(S) = \{v_2, v_6, v_1, v_4\}$  los cuales forman la cubierta mínima.

**Problema de asignación.**

El problema 2 es un ejemplo de problema de asignación; a la matriz dada se le llama matriz de asignación o matriz de costo o peso, y sus entradas pueden representar tiempos, habilidad, distancia, beneficios, prioridad o cualquier otra.

Una asignación consiste en escoger un elemento que en cada renglón y en distinta columna. Por ejemplo una asignación es: empleado 1 a tarea 1, empleado 2 a tarea 2, empleado 3 a tarea 3, empleado 4 a tarea 4, empleado 5 a tarea 5 y empleado 6 a tarea 6, con valor de asignación 30, como se ilustra en la matriz figura 3 remarcando las entradas

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 2 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 5 & 6 & 8 & 3 \\ 9 & 4 & 5 & 8 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 9 & 7 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 6 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 4 & 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 3. Valor de asignación = 30.

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 2 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 5 & 6 & 8 & 3 \\ 9 & 4 & 5 & 8 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 9 & 7 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 6 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 4 & 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 4. Valor de asignación = 17

Otro ejemplo de asignación con valor de asignación 17, es remarcada en las entradas de la matriz de la figura 4.

**Problema de asignación en términos de programación binaria.**

Considerando que  $C = \{c_{ij}\}$  es la matriz de asignación, el problema de asignación en términos de programación binaria, queda formulado como:

$$\min(Z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{S. a. } \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1; \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3)$$

$$x_{ij} = 0, 1 \quad \text{para toda } i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4)$$

Si el  $ij$ -ésimo elemento de la matriz de asignación se ha escogido en la asignación  $x_{ij} = 1$ , en caso contrario  $x_{ij} = 0$ . Las restricciones (2), (3) y (4), exigen que se elija exactamente un elemento en distinto renglón y en distinta columna. Además la función objetivo (1) exige que el valor de esta asignación sea de valor mínimo. De esta manera el problema de asignación queda formulado como un caso particular de programación binaria.

### Métodos de solución.

Uno de métodos más burdos para resolver el problema de asignación es encontrar todas las asignaciones, calcular su valor y decidir cual es el valor mínimo. Para una matriz  $n \times n$  hay  $n!$  asignaciones, por lo cual este método es improcedente para  $n$  grandes. También resulta improcedente utilizar los métodos de programación binaria debido a que tienen orden de convergencia no polinomial. Por otra parte, la matriz de las restricciones (no la de asignación) es totalmente unimodular [1] lo cual garantiza que si se considera a las variables como continuas  $0 \leq x_{ij} \leq 1$ , el valor óptimo de la función objetivo se obtendrá con  $x_{ij} = 0, 1$ . Sin embargo los métodos de programación lineal continua, producen soluciones degeneradas.

De los algoritmos especializados que por aprovechar la estructura del problema son más eficientes que los de propósito general, se pueden citar el algoritmo de la subasta [3] y el algoritmo Húngaro; este último es el más conocido y utilizado por su fácil implementación y justificación teórica, por tal motivo, se empleará para obtener la solución del problema 2.

### Algoritmo húngaro.

Las bases teóricas que sustentan al algoritmo fueron desarrolladas por los matemáticos Húngaros Köning y Egervary en 1931 [1]. Este método es relativamente fácil, ya que mediante suma o resta de constantes a los renglones ó columnas se van obteniendo matrices que tienen la misma asignación óptima que la matriz original, solo que con menor valor de asignación. El método termina cuando se ha obtenido una matriz con valor de asignación cero, es decir cuando se ha obtenido un cero en cada renglón y en distinta columna.

*Paso 1* Encontrar el elemento menor en cada renglón y restárselo a cada elemento del mismo renglón. Hacer lo mismo con cada columna.

*Paso 2* Trace el número mínimo de líneas, horizontales o verticales o ambas, que se necesitan para cubrir todos los ceros en la matriz. Si el mínimo de líneas necesarias para cubrir todos los ceros es igual al número de renglones, se ha encontrado una solución óptima, en caso contrario seguir con el paso 3.

*Paso 3* Encuentre el menor elemento  $k$  en la matriz, que no estén cubiertos por las líneas trazadas en el paso 2. Posteriormente restar  $k$  a cada elemento no cubierto y sumar  $k$  a cada elemento cubierto por 2 líneas. Continuar con el paso 2.

Para la realización del paso 2, es necesario resolver un *problema de acoplamiento máximo*, de donde se deducirá cuales son el máximo número de ceros que se pueden escoger en cada renglón y en distinta columna y además de la solución de este problema también se deduce cual es la *cubierta mínima* de ceros. Note que en el paso 3 restar  $k$  a cada elemento no cubierto y

sumar  $k$  a cada elemento cubierto por 2 líneas es equivalente a restar  $k$  a los elementos de cada renglón no cubierto y sumar  $k$  a los elementos de cada columna cubierta.

**Aplicando el algoritmo al problema 2.**

*Paso 1.* Obtener el mínimo en cada renglón (figura 5) y restárselo a los elementos de dicho renglón (figura 6). Luego, restar el mínimo de cada columna (mostrados debajo de la figura 6) a los elementos de dicha columna quedando la matriz de la figura 7.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 2 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 5 & 6 & 8 & 3 \\ 9 & 4 & 5 & 8 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 9 & 7 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 6 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 4 & 5 & 9 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 2 \\ \rightarrow 3 \\ \rightarrow 4 \\ \rightarrow 1 \\ \rightarrow 2 \\ \rightarrow 1 \end{matrix}$$

Figura 5.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 4 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Figura 6.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 6 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 7.

Este paso logra que exista al menos un cero en cada renglón y en cada columna, pero quizás no en diferente columna, esto lo verifica el paso2.

*Paso 2.* Los ceros de la figura 7 se representan en una gráfica bipartita donde un conjunto de vértices representa a los renglones y el otro a las columnas y una arista une un vértice renglón con un vértice columna solo si en dicho renglón y columna hay un cero. Por ejemplo la **gráfica bipartita asociada** a la matriz de la figura 7 es la figura 1. Observe que un acoplamiento equivale a escoger un cero en distinto renglón y distinta columna; por ejemplo el acoplamiento mostrado en la figura 1 equivale a los ceros remarcados en figura 8 y el acoplamiento (el cual es máximo) de la misma gráfica figura 2 corresponde a los ceros remarcados de la figura 9 que son el máximo número de ceros que se pueden escogerse en distinto renglón y distinta columna. Por otra parte, se obtuvo que la cubierta mínima de la gráfica figura 2 es  $u_3, v_1, v_2, v_4, v_6$  que corresponde a la menor cobertura de todos los ceros en la matriz (renglones y columnas rayadas en figura 9).

*Paso 3.* Encontrar el menor elemento  $k$  en la matriz de la figura 9, que no estén cubiertos por las líneas, en este caso  $k=1$ . Posteriormente se resta 1 a los elementos no cubiertos y se suma 1 a los doblemente cubiertos, quedando la nueva matriz de asignación (figura 10).

$$C_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 6 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 8.

$$C_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 6 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 9.

Continuar con el paso 2. La nueva matriz (figura 10) tiene asociada la gráfica bipartita de la figura 11 donde se han remarcado las aristas de su acoplamiento máximo que corresponde a los 6 ceros remarcados en la figura 10, que en términos de cobertura significa que se necesita tachar los 6 renglones para cubrir todos los ceros de la matriz. El algoritmo termina con asignación óptima del problema original remarcada en la matriz de costos de la figura 12 con valor óptimo  $= 4 + 5 + 4 + 1 + 2 + 1 = 17$ .

$$C_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 10.

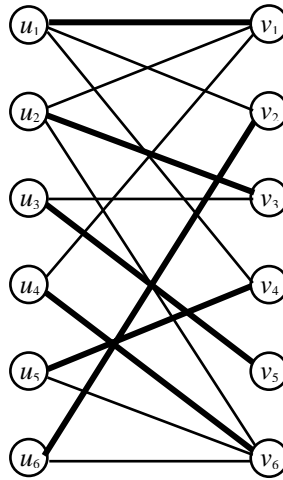


Figura 11.

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 2 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 5 & 6 & 8 & 3 \\ 9 & 4 & 5 & 8 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 9 & 7 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 6 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 4 & 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 12.

**Justificación del paso 1 y 3 del algoritmo húngaro.**

Sea  $Z$  la función objetivo del problema de asignación original y  $Z'$  la función objetivo que resulta de sumar o restar una constante  $\alpha_i$  a todos los elementos del renglón  $i$  y sumar o restar  $\beta_j$  a todos los elementos de la columna  $j$ , esto lo podemos expresar de la siguiente manera.

$$Z' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (c_{ij} \pm \alpha_i \pm \beta_j) x_{ij}$$

$$Z' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \pm \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i x_{ij} \pm \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_j x_{ij}$$

$$Z' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \pm \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n x_{ij} \pm \sum_{i=1}^n \beta_j \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad (\text{por las restricciones 2 y 3})$$

$$Z' = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \pm \sum_{i=1}^n \alpha_i \pm \sum_{i=1}^n \beta_j$$

$$Z' = Z \pm Cte.$$

Queda demostrado que si a un renglón o columna de una matriz de asignación se le suma una constante, la matriz resultante tiene la misma asignación óptima que la original y solo cambia el valor objetivo.

**Conclusiones**

Como se puede observar las bases teóricas que sustentan los algoritmos de estos problemas son sumamente elementales, por lo que se deducen algoritmos muy eficientes. El algoritmo para acoplamiento máximo es de orden  $O(\min(|V1|, |V2|)|A|)$  donde  $V1$  y  $V2$  son los conjuntos de

vértices de la gráfica bipartita y  $A$  el conjunto de aristas. El algoritmo húngaro tiene orden  $O(n^2)$  para una matriz de asignación  $n \times n$ .

Estos problemas se han utilizado en calendarización de vuelos, asignación de locomotoras a trenes y pueden extenderse a gráficas en general, lo cuál aumenta la gama de sus aplicaciones. En el documento de esta memoria titulado “Implementación computacional del algoritmo húngaro para la asignación a profesor-materia un horario-aula para IES”, se desarrolla una aplicación y se describen la implementación computacional de estos algoritmos.

### Bibliografía

1. Bazaraa y Jarvis. *Programación Lineal y Flujo en Redes*, Ed. Limusa, 1986.
2. Béla Bollobás. *Graph Theory (Graduate texts in Mathematics 63)*, Springer Verlag.
3. Dimitri P. Bertsekas. *Linear Network Optimization (Algorithms and Codes)*, The MIT Press, 1992.
4. Gómez Quezada Mario. Análisis e implementación de un algoritmo de asignación para el diseño de horarios en instituciones de educación superior. Tesis maestría en ciencias computacionales del Instituto Tecnológico de Nogales, noviembre 2004.
5. Fulkerson. *Editor Studies in Graph Theory Part I (MAA Studies in Mathematics vol 11)*, Ed. The Mathematical Association of America.
6. Michael R. Garey and David S. Jonson. *Computers and Intractability (A Guide to the theory the NP-Copleteness)*, Library of Congress Cataloging in Publication Data.
7. Morales Ozuna Albertina. *El Problema de Acoplamiento en Graficas Bipartitas*, Tesis de Lic. En Matemáticas. Biblioteca de Ciencias Exactas y Naturales UNISON.
8. Nemhauser and Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*, Ed. John Wiley and Sons.
9. Papadimitriou and Steiglitz. *Combinatorial Optimization (Algorithms and Complexity)*, Dover Publications, Inc.
10. Peter Wright. *Begining Visual Basic 6 Objects*, Published by Wrox Press, 2001.
11. Syslo, Deo and Kowalik. *Discrete Optimization Algorithms*, Ed. Prentice-Hall



## CRITERIOS PARA DETERMINAR SI UN POLINOMIO ES HURWITZ

Carlos Loredo      Baltazar Aguirre  
 Universidad Autónoma Metropolitana  
 Unidad Iztapalapa

### Resumen

*La estabilidad de un sistema lineal  $\dot{x} = Ax$  se determina estudiando las raíces de su polinomio característico  $p_A(t)$ . Si todas sus raíces tienen parte real negativa entonces todas las soluciones de  $\dot{x} = Ax$  convergen al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Un polinomio  $f(t)$  con la propiedad de que todas sus raíces están en  $\mathbb{C}^-$  se llama polinomio Hurwitz. En este trabajo presentamos varios criterios para determinar si un polinomio dado es o no Hurwitz.*

## 1 Criterio de Routh-Hurwitz

Al final del siglo XIX el ingeniero austriaco A. Stodola, el descubridor de la teoría del vapor y las turbinas de gas, sin conocer los trabajos de Routh, propuso el problema de encontrar condiciones bajo las cuales todas las raíces de una ecuación algebraica tuvieran parte real negativa. En 1895, en [3], A. Hurwitz en base a los trabajos de Hermite dio una solución al problema (independiente de la dada por Routh). Todas las demostraciones de los teoremas presentados pueden consultarse en [5].

**Definición 1.1** (Matriz de Hurwitz). Dado el polinomio

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

denotamos por  $H(f)$  a la matriz de Hurwitz de  $f$ , la cual queda definida como

$$H(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

**Teorema 1.2** (Criterio de Routh-Hurwitz). *Sea*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

*con  $a_0 > 0$ ,  $f(x)$  es Hurwitz si y solo si  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\dots$ ,  $\Delta_n > 0$ , donde  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  son los menores principales diagonales de  $H(f)$ . (ver [2], [3], [4], [5] y [6] para una prueba).*

**Ejemplo 1.3.** Verifiquemos si el polinomio  $f(t) = t^5 + 7t^4 + 19t^3 + 25t^2 + 16t + 4$  es Hurwitz.

**Solución.** Hacemos  $a_0 = 1, a_1 = 7, a_2 = 19, a_3 = 25, a_4 = 16, a_5 = 4$  y construimos la matriz de Hurwitz de  $f$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 7 & 25 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 19 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 25 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 19 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 25 & 4 \end{pmatrix}$$

Puede verificarse que  $\Delta_1, \dots, \Delta_5 > 0$ . Por el Teorema 1.2,  $f$  es Hurwitz.

**Corolario 1.4.** Sea  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  un polinomio real.  $f(x)$  es Hurwitz si y sólo si

$$a_0 \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, a_0 \Delta_3 > 0, \dots \begin{cases} a_0 \Delta_n > 0, & n \text{ impar} \\ \Delta_n > 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

**Aplicación 1.1.** Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales  $\dot{x} = Ax$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

puede demostrarse que el polinomio característico de  $A$ ,  $p_A(t)$ , está dado por  $p_A(t) = t^n + a_1t^{n-1} + a_2t^{n-2} + \dots + a_n$ . Si  $p_A(t)$  es Hurwitz entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Y el hecho de que  $p_A(t)$  sea o no sea Hurwitz podemos determinarlo utilizando el Criterio de Routh-Hurwitz. Debido a esto a los polinomios Hurwitz también se les conoce como polinomios estables.

## 2 El Teorema de Hermite-Biehler y el Teorema de Leonhard-Mihailov

**Definición 2.1.** Dado el polinomio real  $p(t)$  considerar  $p(i\omega)$ ,  $w \in \mathbb{R}$ ;  $p(i\omega) = \alpha(\omega) + i\beta(\omega)$  determina una curva en el plano complejo. Al argumento de  $p(i\omega)$ ,  $\arg p(i\omega)$ , lo llamamos la fase de  $p(i\omega)$ .

A continuación presentamos el Teorema de Leonhard-Mihailov y el Teorema de Hermite-Biehler. Las demostraciones de estos teoremas pueden verse en [1] y [5].

**Teorema 2.2** (Leonhard-Mihailov). Sea  $P(t)$  un polinomio de grado  $n$ .  $P(t)$  es Hurwitz si y sólo si  $\arg[P(i\omega)]$  es una función continua y estrictamente creciente en  $\omega \in (-\infty, +\infty)$  y el cambio neto cumple  $\arg[P(+i\infty)] - \arg[P(-i\infty)] = n\pi$ .

**Ejemplo 2.3.** Determinaremos si es Hurwitz el polinomio  $p(t) = t^3 + 3t^2 + 3$ .

**Solución.** Calculamos  $p(i\omega)$

$$p(i\omega) = (i\omega)^3 + 3(i\omega)^2 + (i\omega) + 3 = 3 - 3\omega^2 + i\omega(1 - \omega^2)$$

$$\Rightarrow \arg p(i\omega) = \arctan \frac{\omega(1 - \omega^2)}{3 - 3\omega^2} = \arctan \frac{\omega(1 - \omega^2)}{3(1 - \omega^2)} = \arctan \frac{\omega}{3}$$

luego

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg p(i\omega) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arctan \frac{\omega}{3} = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \arg p(i\omega) = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \arctan \frac{\omega}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

por lo tanto

$$\arg[p(+i\infty)] - \arg[p(-i\infty)] = \pi \neq 3\pi$$

Así,  $p(t)$  no es Hurwitz.

**Definición 2.4.** Considerar el polinomio real  $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$ . Podemos escribir a  $p(t)$  de la siguiente forma

$$p(t) = (a_0 + a_2t^2 + a_4t^4 + \dots) + t(a_1 + a_3t^2 + a_5t^4 + \dots)$$

$$\Rightarrow p(i\omega) = (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots) + i\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots)$$

Definimos

$$p^e(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots; \quad p^o(\omega) = a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots$$

$$p^{par}(t) = a_0 + a_2t^2 + a_4t^4 + \dots; \quad p^{imp}(t) = a_1t + a_3t^3 + a_5t^5 + \dots$$

**Definición 2.5.** El polinomio  $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$  satisface la propiedad de la alternancia si y sólo si

- los coeficientes principales de  $p^{par}(t)$  y  $p^{imp}(t)$  tienen el mismo signo;
- todas las raíces de  $p^e(\omega)$  y  $p^o(\omega)$  son reales y las raíces positivas de  $p^e(\omega)$  y  $p^o(\omega)$  se van alternando, es decir

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \omega_{o,2} < \dots$$

**Teorema 2.6** (Hermite-Biehler). *Un polinomio real  $P(t)$  es Hurwitz si y sólo si satisface la propiedad de la alternancia.*

El Teorema de Leonhard-Mihailov y el Teorema de Hermite Biehler tienen el mismo significado. Podemos decir que el Teorema de Leonhard-Mihailov es la versión geométrica mientras que el Teorema de Hermite-Biehler la versión algebraica.

### 3 Test de estabilidad de polinomios

Este procedimiento consiste en determinar si un polinomio es Hurwitz, verificando si un polinomio de grado menor lo es.

**Definición 3.1.** Dado el polinomio  $P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ , si  $a_{n-1} \neq 0$ , definimos

$$Q(t) = a_{n-1} t^{n-1} + \left( a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-3} \right) t^{n-2} + a_{n-3} t^{n-3} + \left( a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}} a_{n-5} \right) t^{n-4} + \dots \quad (1)$$

**Teorema 3.2.** Si  $P(t)$  tiene todos sus coeficientes positivos,  $P(t)$  es Hurwitz si y sólo si  $Q(t)$  es Hurwitz. (Puede consultarse una demostración en [1] y [5]).

El teorema anterior muestra como verificar si un polinomio  $P(t)$  es Hurwitz por medio de la reducción sucesiva de su grado. Este resultado nos permite dar un algoritmo para verificar si un polinomio es o no Hurwitz.

**Algoritmo 3.1.**

1. Hacer  $P^{(0)}(t) = P(t)$ .
2. Verificar que todos los coeficientes de  $P^{(i)}(t)$  son positivos.
3. Construir  $P^{(i+1)}(t) = Q(t)$  usando la ecuación 1.
4. Regresar a 2). Si el polinomio no satisface 2) detener el proceso y entonces  $P(t)$  no es Hurwitz. En otro caso seguir el proceso hasta llegar a  $P^{(n-2)}$  (el cual es de grado 2) y entonces  $P(t)$  es Hurwitz.

**Ejemplo 3.3.** Verifiquemos si el polinomio  $q(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$  es Hurwitz.

**Solución.** Hacemos

$$P^{(0)}(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

Luego construimos  $P^{(1)}(x)$ :

$$P^{(1)}(x) = 5x^4 + \left( 10 - \frac{1}{5} 10 \right) x^3 + 10x^2 + \left( 5 - \frac{1}{5} 1 \right) x + 1 = 5x^4 + 8x^3 + 10x^2 + \frac{24}{5}x + 1$$

Los coeficientes de  $P^{(1)}(x)$  son todos positivos cumpliéndose así el paso 2) del algoritmo, entonces construimos  $P^{(2)}(x)$ :

$$P^{(2)}(x) = 8x^3 + \left( 10 - \frac{5}{8} \left( \frac{24}{5} \right) \right) x^2 + \frac{24}{5}x + \left( 1 - \frac{5}{8} 0 \right) = 8x^3 + 7x^2 + \frac{24}{5}x + 1$$

Vemos que  $P^{(2)}(x)$  cumple el paso 2) del algoritmo, entonces construimos a continuación  $P^{(3)}(x)$ :

$$P^{(3)}(x) = 7x^2 + \left( \frac{24}{5} - \frac{8}{7} (1) \right) x + 1 = 7x^2 + \frac{128}{75}x + 1$$

Como  $P^{(3)}(x)$  es de grado 2 y todos sus coeficientes son positivos entonces, por el paso 4) del algoritmo, podemos concluir que  $q(x)$  es Hurwitz.

## 4 Criterio de Routh

En 1875 Edward J. Routh, usando el *Teorema de Sturm* y la teoría de *índices de Cauchy*, elabora un algoritmo para determinar el número  $k$  de raíces con parte real positiva de un polinomio real. En el caso particular cuando  $k = 0$  este algoritmo provee un criterio de estabilidad. Una demostración de este criterio es desarrollada en [2]. Consideremos el polinomio real

$$f(z) = a_0z^n + b_0z^{n-1} + a_1z^{n-2} + b_1z^{n-3} + \dots \quad (a_0 \neq 0)$$

$$\Rightarrow f(i\omega) = a_0(i\omega)^n + b_0(i\omega)^{n-1} + a_1(i\omega)^{n-2} + b_1(i\omega)^{n-3} + \dots$$

Tomemos

$$f_1(\omega) = a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + \dots, \quad f_2(\omega) = b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + \dots$$

y construimos una sucesión generalizada de Sturm  $f_1(\omega), f_2(\omega), f_3(\omega), \dots, f_m(\omega)$  por medio del algoritmo de Euclides ( $m = n + 1$ ).

$$\Rightarrow f_3(\omega) = \frac{a_0}{b_0}\omega f_2(\omega) - f_1(\omega) = c_0\omega^{n-2} - c_1\omega^{n-4} + c_2\omega^{n-6} - \dots$$

donde

$$\begin{aligned} c_0 &= a_1 - \frac{a_0}{b_0}b_1 = \frac{b_0a_1 - a_0b_1}{b_0}, \\ c_1 &= a_2 - \frac{a_0}{b_0}b_2 = \frac{b_0a_2 - a_0b_2}{b_0}, \\ c_2 &= a_3 - \frac{a_0}{b_0}b_3 = \frac{b_0a_3 - a_0b_3}{b_0}, \\ &\vdots \\ \Rightarrow f_4(\omega) &= \frac{b_0}{c_0}\omega f_3(\omega) - f_2(\omega) = d_0\omega^{n-3} - d_1\omega^{n-5} + d_2\omega^{n-7} - \dots \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} d_0 &= b_1 - \frac{b_0}{c_0}c_1 = \frac{c_0b_1 - b_0c_1}{c_0}, \\ d_1 &= b_2 - \frac{b_0}{c_0}c_2 = \frac{c_0b_2 - b_0c_2}{c_0}, \\ d_2 &= b_3 - \frac{b_0}{c_0}c_3 = \frac{c_0b_3 - b_0c_3}{c_0}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3}$$

Los coeficientes de los polinomios restantes  $f_5(\omega), \dots, f_{n+1}(\omega)$  son similarmente determinados. Con dichos coeficientes formamos el *esquema de Routh*:

$$\left. \begin{array}{cccc} a_0, & a_1, & a_3, & \dots \\ b_0, & b_1, & b_3, & \dots \\ c_0, & c_1, & c_3, & \dots \\ d_0, & d_1, & d_3, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right\} \tag{4}$$

Las fórmulas (2) y (3) muestran como obtener cada fila de este esquema.

**Teorema 4.1** (Routh). *El número de raíces de un polinomio real  $f(z)$  en el semiplano derecho ( $Re z > 0$ ) es igual al número de variaciones de signo de la primera columna del esquema de Routh.*

**Corolario 4.2** (Criterio de Routh). *Todas las raíces del polinomio real  $f(z)$  tienen parte real negativa si y sólo si al realizar el algoritmo de Routh todos los elementos de la primera columna del esquema de Routh son diferentes de cero y del mismo signo*

**Ejemplo 4.3.** Verifiquemos si  $p(t) = t^4 + t^3 + 7t^2 + 2t + 3$  es Hurwitz, construyendo el Esquema de Routh.

**Solución.** Evaluamos  $p(t)$  en  $i\omega$

$$p(i\omega) = \omega^4 - 7\omega^2 + 3 + i(\omega^3 - 2\omega)$$

en este caso tenemos que  $a_0 = 1, a_1 = 7, a_2 = 3, b_0 = 1, b_1 = 2$ . Ahora formamos el esquema de Routh haciendo uso de (2) y de (3)

$$c_0 = \frac{b_0 a_1 - a_0 b_1}{b_0} = \frac{1(7) - 1(2)}{1} = 5 \qquad c_1 = \frac{b_0 a_2 - a_0 b_2}{b_0} = \frac{1(3) - 1(2)}{1} = 1$$

$$d_0 = \frac{c_0 b_1 - b_0 c_1}{c_0} = \frac{5(2) - 1(1)}{5} = \frac{9}{5} \qquad e_0 = \frac{d_0 c_1 - c_0 d_1}{d_0} = \frac{(9/5)(1) - 5(0)}{9/5} = 1$$

$a_0$	$a_1$	$a_2$	1	7	0
$b_0$	$b_1$		1	2	
$c_0$	$c_1$		5	1	
$d_0$			9/5		
$e_0$			1		

Como los elementos de la primera columna del esquema de Routh son del mismo signo entonces todas las raíces de  $p(t)$  tienen parte real negativa, *i.e.*,  $p(t)$  es Hurwitz.

### Bibliografía

- [1] Bhattacharyya, S.P., H. Chapellat, L.H. Keel. (1995) *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice-Hall.
- [2] Gantmacher, F.R. (1959) *Matrix Theory (vol. I y II)*, AMS Chelsea Publishing.
- [3] Hurwitz, A. (1895) *Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt*, Math. Ann., vol. 46 pp. 273-84.
- [4] Lancaster, P. and Miron Tismenetsky. (1985) *The Theory of Matrices with applications*, Academic Press.
- [5] Loredo, Carlos. (2004) *Criterios para determinar si un polinomio es polinomio Hurwitz. Reporte de los seminarios de investigación I y II*, UAM-Iztapalapa, México, D.F.
- [6] Uspensky, J.V. (1990) *Teoría de Ecuaciones*, Limusa.

**ÁLGEBRA Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO:  
Un binomio conceptual presente en el currículum matemático actual.**

**L.M. Rosalinda Mena Chavarría y MC. Martha Cristina Villalba Gtz.  
UNIVERSIDAD DE SONORA**

**Resumen**

*En esta ponencia se expone una parte de los resultados de una investigación documental acerca de los conceptos “Álgebra” y “Pensamiento Algebraico” con el objetivo de clarificar la visión que los educadores e investigadores de la educación matemática tienen alrededor de enseñar álgebra en la escuela. La importancia de esta clarificación se sustenta en que dichos conceptos están íntimamente relacionados en las modernas propuestas curriculares para la enseñanza del Álgebra elemental.*

El Álgebra desde su estatus disciplinar, al ser llevada al aula, ha cobrado históricamente distintos significados de acuerdo a lo institucionalmente aceptado como “saber algebraico” según el nivel escolar correspondiente. Por otra parte, encontramos que los paradigmas actuales en las propuestas curriculares para la enseñanza del álgebra enfatizan la importancia que juega el estudiante en el aprendizaje de la misma, por ello, los procesos cognitivos implicados en una actividad de aprendizaje algebraico están, por su naturaleza, imbricados con las formas de pensar que tiene el estudiante: en su forma de *pensar algebraicamente*.

Consideramos que es de suma importancia para los profesores tener conciencia de lo que es, para cada uno, el álgebra escolar y lo que significa aprenderla y enseñarla, pues de dichas concepciones se desprende la práctica real de su tarea cotidiana en el aula. Así pues, a continuación exponemos algunas ideas extraídas de diversos documentos que reportan investigaciones recientes, tanto nacionales como internacionales, y que están presentes en los foros de discusión, para tratar de aclarar los puntos de vista acerca del modelo algebraico que se corresponde con las bases y principios subyacentes a los currículums actuales, y que nos permitirán relacionar los conceptos de Álgebra y Pensamiento Algebraico.

El investigador Louis Charbonneau, (Kieran 1996) hace referencia a varias formas de considerar lo que es el álgebra:

- *Álgebra es una extensión de la aritmética.* En la escuela se enseña álgebra diciendo que los símbolos,  $w$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $e$ , etc. son como números, o sea, se comportan como números. El enfatizar en números escondidos en letras, fomenta la idea de que los símbolos algebraicos se comportan, no por el modo para el cual fueron creados, sino como otro objeto matemático. Pero la historia nos muestra que debemos tener cuidado al definir el álgebra como una extensión de la aritmética, ya que del siglo XIV hacia la mitad del siglo XVI, el punto de vista del álgebra era en términos numéricos. En esta referencia vemos que el álgebra se encontró en los libros de los mercaderes: los algebristas eran practicantes de una aritmética comercial. Se inventaron nuevas reglas, pero no se tenía un álgebra con un dominio matemático

determinado. Además, el álgebra durante este periodo, fundamentalmente no progresó, más bien se tuvo gran dificultad al tratar de determinar las reglas del razonamiento algebraico.

- Álgebra es simbolismo. El simbolismo es central en el álgebra. El simbolismo reduce el volumen de la presentación de un argumento, por lo que se podría decir que el simbolismo es un lenguaje. Un obstáculo muy general, al considerar al álgebra sólo como un lenguaje que emplea símbolos en lugar de muchas palabras y operaciones que los estudiantes ya han usado en aritmética, puede ser el creer que las palabras comunes y corrientes y los símbolos tienen exactamente el mismo significado que ellos les dan en aritmética. El simbolismo nos permite ponerle un nombre a algo que no lo tenía, lo cual es muy importante en la forma analítica de maniobrar un problema. Pero en álgebra, no todo es simbolismo. El simbolismo es un medio para resolver problemas, es un medio que acompaña al análisis de un problema. Los símbolos son herramientas del razonamiento.

El investigador Alan Bell (Kieran 1996) afirma que: “Históricamente, álgebra ha sido formar y resolver ecuaciones con el fin de dar solución al planteamiento de problemas”. Para establecer que hoy, esta misma concepción de lo que es álgebra se amplía agregándole la generalización, el trabajo con funciones y fórmulas como características dominantes en toda actividad algebraica. Aun está presente en la actualidad la forma de una álgebra históricamente tradicional, la cual inicia con la solución de problemas relativamente complejos concernientes a cantidades (números) y a las cuatro operaciones fundamentales. Históricamente el modo inicial de representar la solución era verbal, pero se fue desarrollando a través de simbolismos semi-verbales hasta llegar al lenguaje algebraico actual. Además, hoy en día, el sentido amplio del álgebra está basado en la exploración de problemas en forma abierta, extendiéndolos y desarrollándolos en la búsqueda de más resultados y más generalizaciones, lo cual constituye la actividad algebraica esencial.

Para el investigador James J. Kaput (1995): Históricamente el contenido del álgebra ha consistido en hileras e hileras de letras y números guiados por leyes operativas o formalismos sintácticos, donde los escasos problemas que se plantean son presentados como aplicaciones al final de cada tema. Pero presentar el álgebra así, es restringirla al estudio de una sola cosa sin relaciones a otros procesos mentales, es tener una visión de un álgebra no relacionada, fuera del contexto de la nueva propuesta de enseñanza.

Más adelante, en el mismo documento, Kaput señala que: “La esencia del álgebra en el nivel secundaria es dinámica y transformacional. El álgebra elemental implica acción: coleccionar términos semejantes, factorizar, hacer desarrollos, solucionar ecuaciones, simplificar expresiones, sumar sucesiones, graficar, etc. El álgebra elemental parece ser una extraordinaria colección de procesos transformacionales. Todo lo algebraico parece fluido y variable, pero la experiencia nos dice que el valor de la potencia del álgebra se ha sobresimplificado, su fluidez se contiene con tan sólo no hablar de las propiedades de las estructuras que emergen de la naturaleza de los objetos algebraicos con los que el álgebra manipula ...y de la auto-evaluación en retrospectiva del proceso de desarrollo de la estrategia de solución.”



Vance (Kieran 1996): Algunas veces el álgebra se define como la aritmética generalizada o como un lenguaje para generalizar la aritmética, como sea, lo algebraico es más que un conjunto de reglas para manipular símbolos: es una forma de pensar.

Dentro de los estándares de la NCTM de 1989 (Hitt, 2000) álgebra es: entender el concepto de variable, expresión y ecuación; representar situaciones y patrones numéricos con tablas, gráficas, reglas verbales y ecuaciones y explorar las interrelaciones de estas representaciones; analizar tablas y gráficas para identificar propiedades y relaciones; desarrollar confianza en resolver ecuaciones lineales usando métodos concretos, formales e informales; investigar desigualdades y ecuaciones lineales y no lineales; aplicar métodos algebraicos para resolver una variedad de problemas del mundo real y problemas matemáticos.

Al hacer énfasis en patrones y funciones la NCTM considera que álgebra es: describir, extender, analizar y crear una amplia variedad de patrones; describir y representar relaciones entre gráficas, tablas, reglas; analizar relaciones funcionales para explicar cómo un cambio en una cantidad provoca cambio en otra, usar patrones y funciones para representar y resolver problemas.

Según los Programas de la SEP (1993) el álgebra de hoy es: un álgebra que nos enseña a expresar los fenómenos cotidianos para poder plantearlos como problemas en nuestro propio contexto y resolverlos. Aprender álgebra hoy implica que se nos enseñe a razonar; a cuestionar y argumentar. Es una enseñanza del álgebra que debe promover que el alumno forje su propio aprendizaje, que ponga a funcionar su intelecto para que aprenda y así pueda construir un razonamiento cada día más evolucionado. Porque en la nueva reforma algebraica lo que deben saber de álgebra los estudiantes, se encuentra interiorizado en las características del pensamiento algebraico, promoviéndose el aprendizaje de un álgebra contextualizada cuyo aprendizaje depende de desarrollar el pensamiento algebraico a través de procesos como la resolución de problemas, que permiten desarrollar habilidades de comunicación, de razonamiento, relacionales y de uso de representaciones

En un intento de síntesis de lo expuesto anteriormente, si se quiere detectar de qué manera están inmersas habilidades del pensamiento algebraico en la forma de pensar del alumno, se debiera observar si tiene actitud reflexiva, es decir, si actúa tratando de ejecutar la actividad reflexivamente; pregunta, escucha, analiza, discute con los demás y:

1. Sabe usar el lenguaje algebraico para expresar relaciones
2. Sabe usar y trabajar con representaciones y símbolos
3. Sabe preguntarse a sí mismo
4. Sabe extraer información del problema
5. Sabe representar una situación en palabras, diagramas, tablas, gráficas y ecuaciones
6. Sabe reconocer métodos generales similares en diferentes tipos de problemas
7. Muestra capacidad de reflexionar al hablar sobre los procedimientos generales que se efectúan sobre números y símbolos
8. Puede validar conjeturas, pero también hacerlas e investigarlas

9. Identifica relaciones funcionales
10. Sabe construir el significado de los símbolos y de las operaciones en el álgebra
11. Sabe manipular u operar expresiones simbólicas
12. Tiene capacidad de operar con una cantidad desconocida como si fuera conocida
13. Tiene la capacidad de trabajar con variables como si fueran números
14. Tiene la capacidad de manipular fórmulas
15. Sabe escribir y usar la notación correctamente y con significado
16. Sabe trabajar métodos paso a paso en los problemas
17. Sabe generalizar modelos
18. Tiene la capacidad de reconocer patrones
19. Tiene la capacidad de organizar datos
20. Tiene la capacidad para reconocer que al introducir las incógnitas en una tabla se convierten en variables
21. Tiene la capacidad para discernir entre lo que se mantiene constante y lo que varía
22. Tiene la capacidad para utilizar múltiples representaciones, diagramas, tablas, graficas, ecuaciones, series , identidades, relaciones funcionales, etc. , al resolver un problema
23. Tiene la capacidad para darle sentido y significado a los elementos que conforman una ecuación o relación funcional dentro del contexto
24. Sabe encontrar y comprobar las generalizaciones
25. Sabe reconocer y usar propiedades generales de sistemas numéricos y sus operaciones
26. Tiene capacidad para articular tanto el razonamiento algebraico como geométrico
27. Muestra capacidad para desarrollar y evaluar argumentos matemáticos: qué significa preguntarse ¿por qué esto funciona ?
28. Puede interactuar entre la conceptualización que tienes sobre la variación y la variable
29. Puede pensar en cómo “funcionan” las funciones
30. Tiene la capacidad de entender todo el proceso de resolución que se requiere en el problema con el fin de llegar a la meta propuesta
31. Sabe reflexionar sobre el procedimiento expresándolo verbalmente y por escrito
32. Sabe hacer transformaciones sintácticas y luego verificar si desde la solución se puede llegar a la situación original (proceso de reversibilidad)
33. Sabe interpretar las soluciones de incógnitas
34. Hace transformaciones sintácticas y luego puede percibir globalmente el problema
35. Muestra capacidad para usar materiales concretos, calculadoras o computadoras en relación a las expresiones simbólicas asociadas.
36. Reconoce el impacto de las estructuras numéricas sobre los cálculos con símbolos algebraicos

Considerando las propuestas hechas en las reformas curriculares antes citadas, podríamos decir que en las visiones subyacentes, la particularidad en la caracterización del álgebra es que el foco de atención parece que no puede desligarse de los procesos mentales de quien la aborda, ya sea para enseñarla o para aprenderla, de aquí que se establezca como prioritario poner atención a las habilidades que se desarrollan cuando se fomentan los procesos mentales mediante situaciones didácticas apropiadas. Parece

pues, que para ser congruentes con esta visión, en el discurso didáctico va tomando lugar el “fomentar el pensamiento algebraico” en vez de “enseñar álgebra”.

**Bibliografía:**

*Hitt, F.; Hernández, A.* (2000, Eds.) Experimentaciones en Educación Matemática en los Niveles Medio Superior y Universitario. CINVESTAV-IPN. México.

*Kieran, C.; Bernard, N.; Leley, L* (1996, Eds.) Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching. Kluwer Academic Publishers. Boston

*Kaput, J.* (1995). A research based supporting long term Algebra Reform . Paper presented at the 17<sup>th</sup> Annual Meeting of North American . EEUA.

SEP (1993) Planes y programas en la escuela secundaria. México.

SEP (1995) La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas. Primer Nivel. Programa Nacional de Actualización Permanente. México.



## MÓDULO WEB PARA EL APRENDIZAJE DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN INGENIERÍA QUÍMICA

Marco Antonio Núñez Esquer

Departamento de Ingeniería Química y Metalurgia, Universidad de Sonora

### Resumen

*En este trabajo se describe un módulo web diseñado como apoyo didáctico al curso “Análisis Matemático de Procesos” ofrecido en la carrera de ingeniero químico de la Universidad de Sonora, el cual trata sobre la formulación y solución de modelos matemáticos. Como ejemplo de aplicación para el desarrollo del módulo web, se seleccionó la técnica Recuperación de Fluorescencia Después de Fotoblanqueamiento (RFDF), en la cual ocurre un proceso de difusión de masa cuya descripción matemática es el objeto de estudio. Este módulo web tiene una aplicabilidad amplia, ya que puede ser utilizado no sólo en cursos relacionados con ingeniería química sino en general en materias de ciencias e ingeniería a nivel licenciatura o posgrado, en programas presenciales o a distancia, que tengan relación con modelos matemáticos o solución de ecuaciones diferenciales parciales.*

### 1. Introducción

El Internet ha representado un nuevo medio de comunicación entre profesores y estudiantes, así como una oportunidad de incorporar nuevas técnicas de enseñanza alternativas al salón de clases. Una de las ventajas de los sistemas de aprendizaje basados en Internet consiste en que pueden utilizarse métodos múltiples de presentación como texto, gráficas, audio, video, animación y simulación. Dado que el material se encuentra disponible 24 horas al día, siete días a la semana, este tipo de herramienta también permite un aprendizaje más flexible, ya que el alumno (dentro de los límites de fechas de entrega de tareas o proyectos) puede decidir el momento en que se produce, y la velocidad a la cual practicar los temas revisados.

En el trabajo reportado aquí se desarrolló un módulo web o módulo para Internet con el fin de utilizarlo como apoyo didáctico para el curso “Análisis Matemático de Procesos” de la carrera de ingeniero químico de la Universidad de Sonora. Este curso trata sobre modelos matemáticos de aplicación en ingeniería química: su clasificación, formulación, solución y análisis. Dado que el estudiante que toma este curso ya ha llevado al menos una materia sobre solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, la orientación del programa es hacia modelos matemáticos que dan como resultado ecuaciones diferenciales parciales (EDP's). Dentro de este curso se revisan técnicas básicas de solución de EDP's, como Separación de Variables, Transformada de Laplace y Combinación de Variables.

En este módulo web se estudia matemáticamente un proceso de difusión de masa que ocurre durante la aplicación de la técnica RFDF (Recuperación de Fluorescencia Después de Fotoblanqueamiento) la cual se emplea para cuantificar el movimiento de moléculas en medios específicos. El modelo matemático resultante es adimensionalizado y posteriormente resuelto utilizando el método de Separación de Variables.

### 2. Descripción del Módulo Web

El módulo web puede accederse en la siguiente dirección:

<http://geocities.com/modulorfdf/index.html>

La página principal del módulo corresponde a una página de Presentación, en la cual se describen las ventajas del uso de internet en el proceso de enseñanza-aprendizaje y las

características principales del módulo web. En la sección izquierda de la página aparece un menú de opciones que el usuario puede elegir haciendo clic con su mouse y que lo lleva directamente a la página seleccionada.

Las páginas que pueden accesarse a través del menú son:

- Introducción
- Modelo Matemático
- Adimensionalización del Modelo
- Solución del Modelo Matemático
- Ejercicios
- Glosario
- Referencias
- Apéndices

En la página “Introducción” se describe la técnica RFDF (Recuperación de Fluorescencia Después de Fotoblanqueamiento) en la cual se basa el modelo matemático objeto del presente módulo web. Para la descripción de la técnica se hace uso no sólo de texto sino también de imágenes y video, que le permiten al usuario una mejor comprensión de cómo funciona esta técnica (Figura 1).

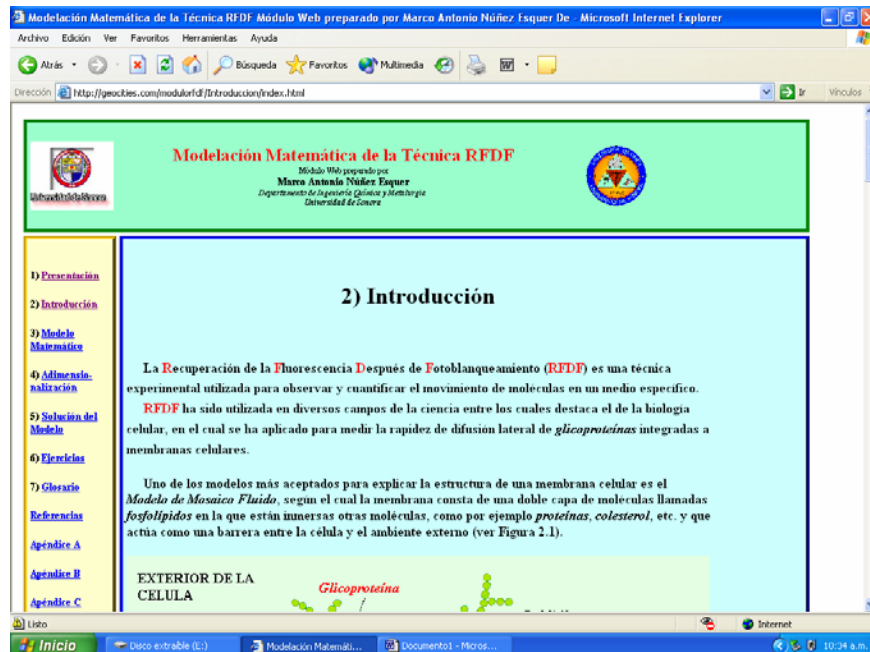


Figura 1. Página “Introducción”.

La página “Modelo Matemático” se ocupa de formular el modelo cuya solución describe la variación de concentración de moléculas de interés en el dominio considerado, tanto en espacio como en tiempo. El modelo matemático se deduce a partir de la simplificación del balance de masa para el soluto utilizando consideraciones específicas para la técnica RFDF. La ecuación

diferencial parcial obtenida de esta simplificación se complementa con las condiciones inicial/límite apropiadas para el caso de estudio (Figura 2).

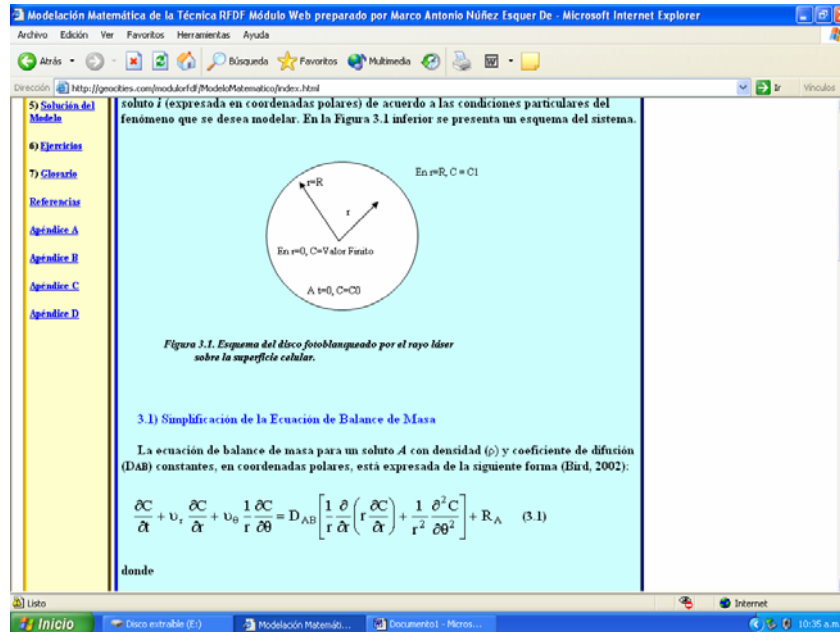


Figura 2. Página “Modelo Matemático”.

En “Adimensionalización del Modelo Matemático” se aplica una metodología establecida para expresar el modelo de forma adimensional con el fin de simplificarlo y generalizar los resultados que de él se obtengan. Las variables características utilizadas para llevar a cabo la adimensionalización se definen tomando en cuenta las dimensiones del sistema que se está modelando (Figura 3). El modelo adimensionalizado es el que se resuelve en la siguiente sección.

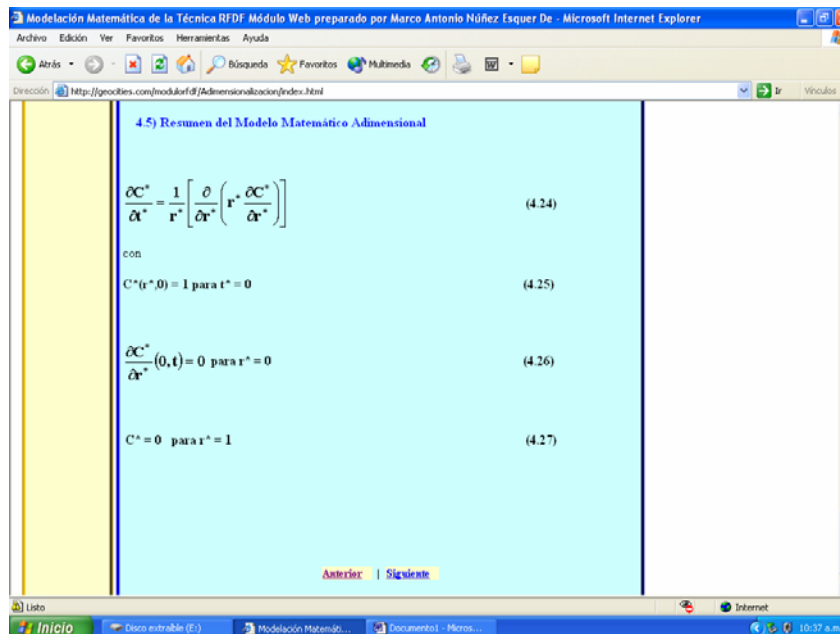


Figura 3. Página “Adimensionalización del Modelo Matemático”.

La página de “Solución del Modelo Matemático” describe cómo resolver la ecuación diferencial parcial y condiciones límite/inicial adimensionalizadas utilizando el método de Separación de Variables. En esta página se va presentando paso a paso el procedimiento utilizado para obtener la solución completa del problema, de forma que finalmente se obtenga una expresión para la concentración del soluto como función de la posición y el tiempo transcurrido desde el inicio de la aplicación de la técnica RFDF (Figura 4).

Modelación Matemática de la Técnica RFDF Módulo Web preparado por Marco Antonio Núñez Esquer De - Microsoft Internet Explorer

Archivo Edición Ver Favoritos Herramientas Ayuda

Dirección <http://geocities.com/modulordf/Solucion/index.html>

$$= \frac{1}{\alpha_n} J_1(\alpha_n) \quad (5.30)$$

Ahora, substituyendo (5.30) en (5.27)

$$C^*(r^*, t^*) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\alpha_n^2 t^*) \frac{J_0(\alpha_n r^*)}{J_1^2(\alpha_n)} \frac{1}{\alpha_n} J_1(\alpha_n) \quad (5.31)$$

Simplificando, se obtiene finalmente la solución deseada

$$C^*(r^*, t^*) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \exp(-\alpha_n^2 t^*) \frac{J_0(\alpha_n r^*)}{J_1(\alpha_n)} \quad (5.32)$$

La solución (5.32) permite determinar la concentración adimensional de moléculas fluorescentes en cualquier posición radial en el interior del disco fotoblanqueado sobre la superficie celular y a cualquier tiempo.

[Anterior](#) | [Siguiente](#)

Inicio | Disco extraíble (E:) | Modelación Matemá... | Document1 - Micros... | Internet | 10:39 a.m.

Figura 4. Página “Solución del Modelo Matemático”.

“Ejercicios” es una página que presenta una serie de problemas propuestos relacionados con la formulación y solución de modelos matemáticos, que en algunos casos incluyen variantes de la aplicación de la técnica RFDF. Estos ejercicios han sido diseñados para que se practiquen los conceptos presentados a lo largo del módulo web y pueden ser asignados como tareas dentro del curso en el cual se utilice este módulo para internet (Figura 5).



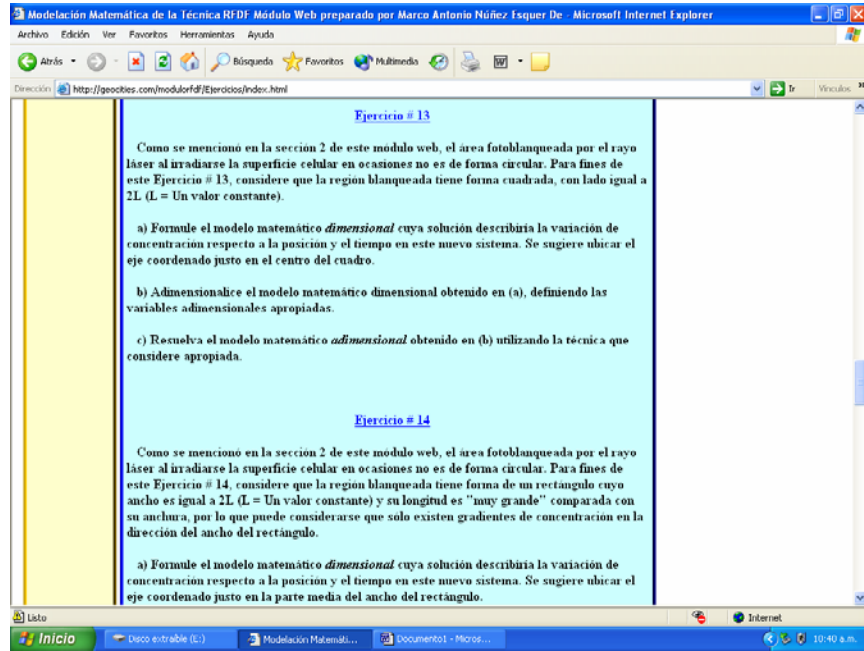


Figura 5. Página "Ejercicios".

El vocabulario requerido para comprender la forma en que funciona la técnica RFDF generalmente no es del dominio del estudiante típico de ciencias e ingeniería, por lo que en la página "Glosario" se incluyen definiciones de términos característicos de la técnica RFDF para una mejor comprensión del módulo web (Figura 6).

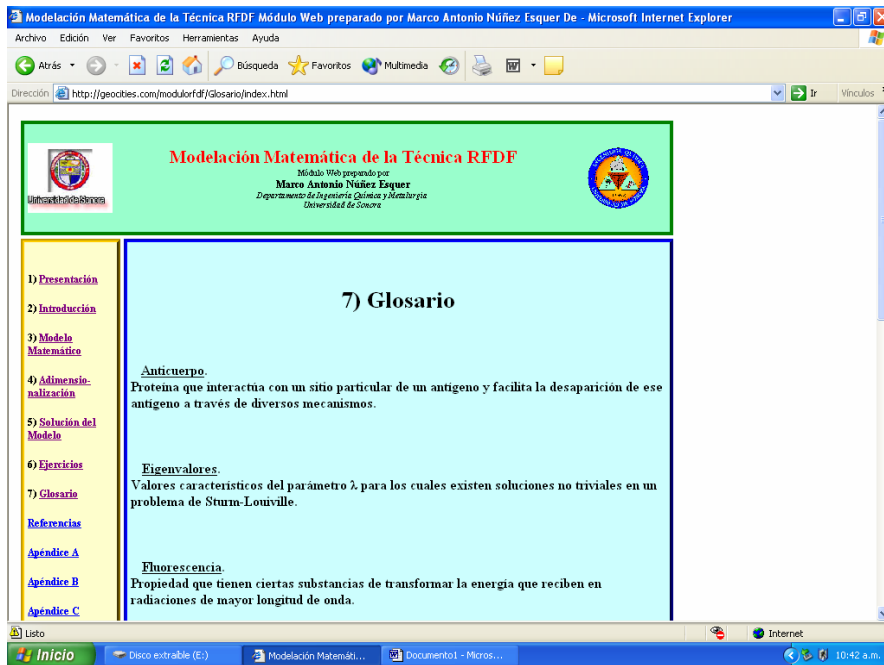


Figura 6. Página "Glosario".

En la página “Referencias” se presenta un listado de la bibliografía consultada para la elaboración del presente módulo y puede servir de punto de partida al estudiante para la solución de los problemas asignados en la página de “Ejercicios”. Finalmente, en la página de “Apéndices” se describen de forma detallada tablas o demostraciones requeridas durante el desarrollo de la solución del modelo matemático (Figura 7).

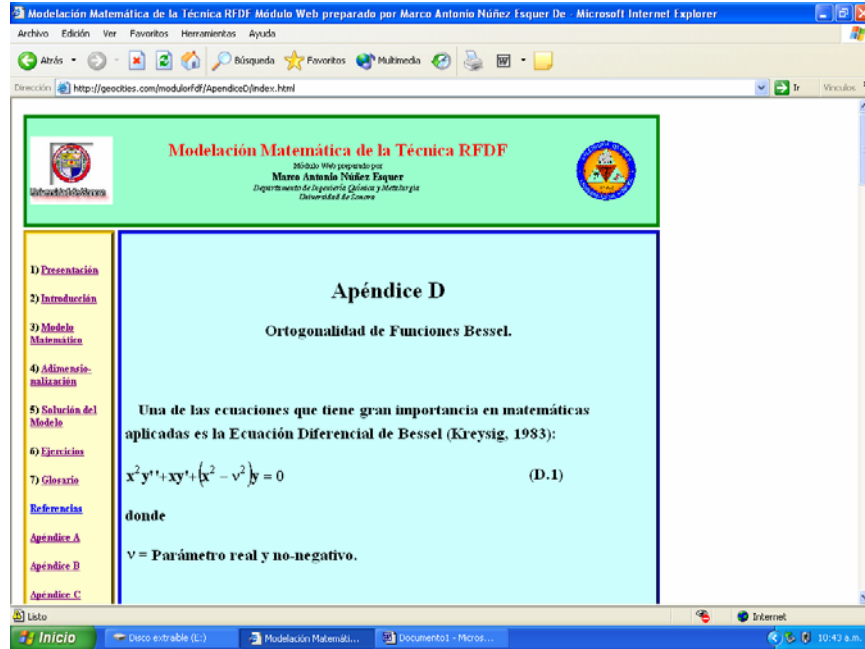


Figura 7. Página “Apéndices”.

### 3. Conclusiones

En este reporte se ha descrito un módulo web de apoyo al curso “Análisis Matemático de Procesos” que se ofrece en la carrera de ingeniería química de la Universidad de Sonora. Utilizando este módulo para internet, los estudiantes pueden practicar conceptos presentados en el mismo módulo o revisados en las sesiones de clase. Se incluye una página de Ejercicios propuestos que pueden servir de base para tareas o proyectos a realizar por los alumnos.

Este módulo puede ser empleado tanto en cursos presenciales como a distancia que tengan relación con la modelación matemática en ciencias e ingeniería, o con la solución de ecuaciones diferenciales parciales.

### 4. Bibliografía

Núñez Esquer, Marco Antonio, <http://www.geocities.com/modulorfd/index.html>

## **PRESENTACIÓN DE UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA VISUAL PARA EL ESTUDIO DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN**

**Juan De Dios Ocampo Díaz, Jesús Eduardo Mora Ramírez,  
Juan De Dios Ocampo Peña**  
Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California  
Instituto Salvatierra, Preparatoria

### **Resumen**

*El presente trabajo presenta el desarrollo de una herramienta didáctica visual para apoyar el estudio del factor de fricción en un plano inclinado, donde se involucran las variables: ángulo de inclinación, peso y distancia recorrida por el cuerpo de peso  $W$ , coeficiente de fricción, así mismo se presentan los resultados en forma gráfica que pueden obtenerse de empleo de dicha herramienta, misma que fue evaluada principalmente en el estudio del factor de fricción por estudiantes de nivel medio superior y superior específicamente de carreras de ingeniería. El desarrollo de este tipo de herramientas visuales para el análisis y solución de problemas de mecánica clásica que se imparte tanto en las instituciones de nivel medio superior y superior, se considera que permiten al alumno un mejor entendimiento tanto de las variables involucradas como del peso que tiene cada una de ellas en el problema analizado. La Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California tiene contemplado iniciar con el desarrollo de este tipo de herramientas didácticas para fortalecer la enseñanza de este tipo de temas.*

### **Introducción**

En la vida cotidiana la fricción se presenta en situaciones tan comunes como el frenar un automóvil, calentarse las manos frotándolas una contra la otra, o la típica broma de secundaria que consistía en frotar el extremo metálico de un lápiz sobre el pupitre y así poder quemar el brazo (en el mejor de los casos) de un compañero. Si el rozamiento o la fricción desaparecieran repentinamente, muchos de los fenómenos ordinarios, se desarrollarían en forma completamente distinta. La fricción es en realidad un fenómeno muy complejo que no puede ser representado mediante un modelo simple. Las fuerzas de fricción, por su propia naturaleza, están presentes en prácticamente todos los fenómenos mecánicos oponiéndose al deslizamiento de un objeto sobre otro. La fricción ocurre en todas las partes, entre dos medios que se hallan en contacto como pudiera ser el caso de: sólido con sólido, sólido y líquido, sólido y gas, etc. Los primeros investigadores modernos pensaban que la fricción se debía a la trabazón mecánica de irregularidades superficiales llamadas “asperezas”. Sin embargo, las investigaciones modernas, sugieren que la mayor parte de la fricción generada entre las superficies de contacto de los sólidos ordinarios (particularmente los metales), se debe a la adhesión local entre las superficies. Cuando dos superficies son presionadas una contra la otra, en las asperezas que están en contacto, se forman puntos de alta presión, debido a que el área de contacto es muy pequeña, provocando fusión o cohesión locales entre las superficies. Si se requiere deslizar una superficie sobre otra, estos puntos de fusión (llamados: “soldado en frío”), deberán ser rotos. Algunos estudios realizados han demostrado que este tipo de unión contribuye en mayor grado a la

resistencia friccional, en porcentajes hasta del orden del 80 %, para el caso de superficies metálicas.

La civilización egipcia entendía en cierta forma en fenómeno de rozamiento, ya que en un mural encontrado en una ruta egipcia fechado en 1900 A.C., se ve una gran estatua de piedra que se va deslizando en una rastra mientras un hombre, enfrente de la rastra, va echando aceite lubricante en su camino (Pérez Montiel, 2004).

Las leyes de rozamiento fueron descubiertas experimentalmente por Leonardo da Vinci (1452-1519) y redescubiertas en 1699, por el ingeniero francés G. Amontons (Pérez Montiel, 2004). El enunciado de Leonardo da Vinci relativo a las dos leyes fue un hecho notable, sobre todo porque esto se realizó dos siglos antes de que Isaac Newton desarrollara por completo el concepto de fuerza. Leonardo da Vinci formuló estas leyes de la manera siguiente:

- a) El rozamiento producido por el mismo peso será de igual resistencia al principio del movimiento, aun cuando el contacto sea de diferentes anchos y largos.
- b) El rozamiento produce un esfuerzo de valor doble si el peso se duplica.

El sabio francés Charles A. Coulomb (1736-1806) realizó muchos experimentos sobre rozamiento y señaló la diferencia entre rozamiento estático y rozamiento dinámico.

### **Fuerza de fricción**

Para su estudio, las fuerzas de fricción se clasifican en fuerzas de fricción secas y viscosas. Las viscosas se relacionan en la mayoría de las situaciones con el movimiento de los fluidos. Las fuerzas de fricción secas, a su vez, se dividen en fuerzas de fricción estática, dinámica y de rodamiento.

- a) *Fuerzas de fricción estática*: Este tipo de fuerzas evita el movimiento entre sólidos en contacto, que se encuentran secas y limpias (sin lubricación). Para deslizar cualquier objeto sobre una superficie, antes debe vencerse la fricción estática.
- b) *Fuerza de fricción dinámica o cinética*: Esta fuerza aparece una vez que se ha vencido a la fricción estática y se ha iniciado el movimiento. En general es menor que a fricción estática, debido a esto se requiere menor esfuerzo para seguir deslizando un sólido sobre otro, que para empezar el movimiento entre estos.

### **Desarrollo y prueba del software**

El software fue desarrollado sobre a aplicación de Macromedia Flash, programa diseñado principalmente para crear animaciones o sitios interactivos en Internet. Esto hace que el software se pueda utilizar sin necesidad de una instalación complicada y además permite la generación de ejecutables del software que no dependen de la plataforma que se este utilizando, es decir, lo mismo se podrá utilizar en un sistema operativo como Windows, Macintosh, Linux, etc. Otra

ventaja es que este software puede incorporarse a una página de Internet, para usarlo allí o permitir su descarga por cualquier usuario.

El diseño del software está aun en su primera etapa, ya que actualmente solo puede calcular los coeficientes de fricción estática y dinámica, pero en una segunda etapa se contempla agregar el cálculo de velocidades y aceleraciones lineales, así como el manejo de energías cinéticas y potenciales, todo esto involucrando desde luego fuerzas de fricción. El software ha estado probándose con estudiantes de nivel medio y nivel superior especialmente de las carreras de ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California, tratando de que estos estén cursando materias de las asignaturas como estática o dinámica, particularmente en temas relacionados a la fricción, teniéndose hasta a fecha buena aceptación y comentarios por parte del alumnado, quien específicamente señala que el software es una herramienta didáctica visual que les permite entender más claramente el concepto de fuerza de fricción y lo relacionado a la misma.

La figura 1, presenta la carátula principal de programa para calcular el coeficiente de fricción, dando la opción al usuario de elegir ya sea el cálculo de la fricción estática o la fricción dinámica.

Los datos de entrada que pide el software, y los correspondientes a la salida, son los que se muestran en la tabla no. 1, esto depende de lo que se desee calcular:

<b>Datos de Entrada para el Cálculo</b>	<b>Datos de Salida</b>
Masa (Kg.)	Fuerza de Fricción (N)
Coefficiente de Fricción ( $\mu$ )	Ángulo de la componente ( $\theta$ )
Peso del bloque (N)	La fuerza Normal (N)
Ángulo de la componente normal ( $\theta$ )	Coefficiente de fricción ( $\mu$ )
Aceleración de la gravedad ( $m/s^2$ )	

*Tabla 1. Datos de entrada y salida del software de cálculo*

La figura 2, muestra la pantalla correspondiente a la selección del parámetro a calcular, y una vez que este es seleccionado solicita los datos correspondientes, tal como se señalaron en la tabla 1.

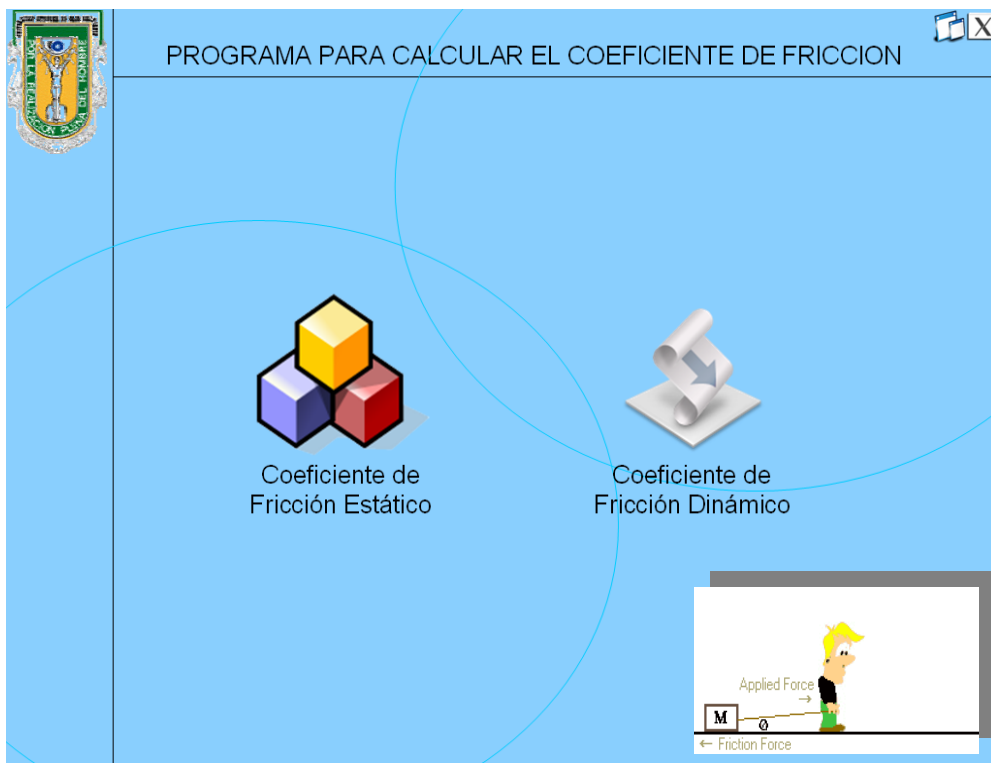


Figura 1. Pantalla de presentación del programa de cálculo del Coeficiente de Fricción

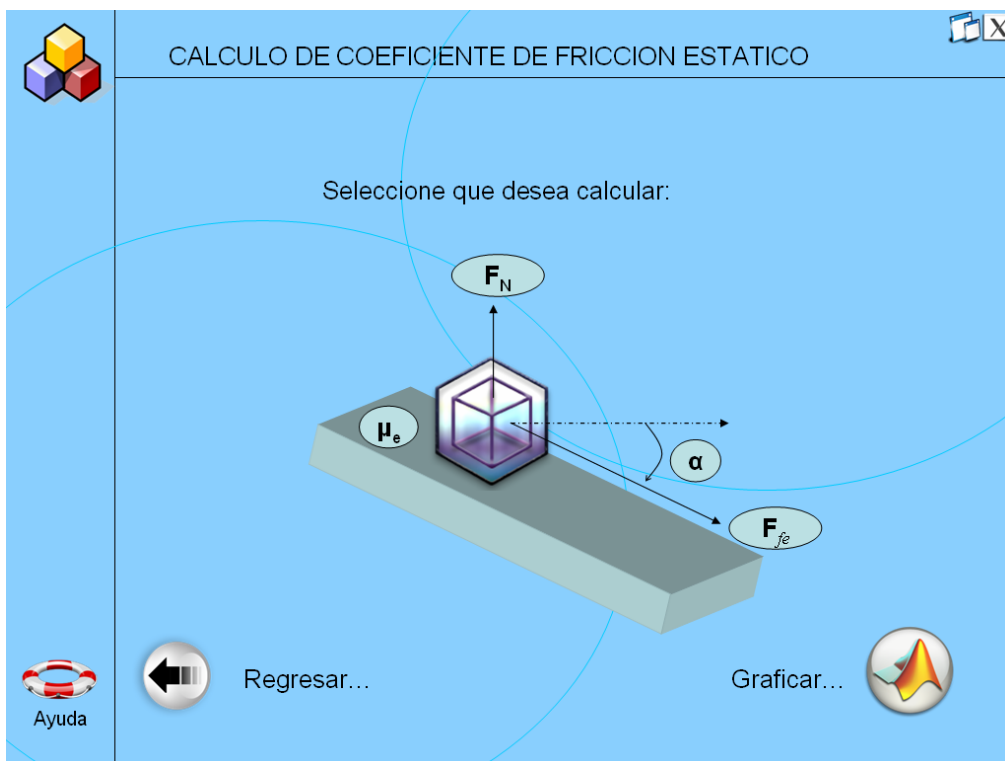
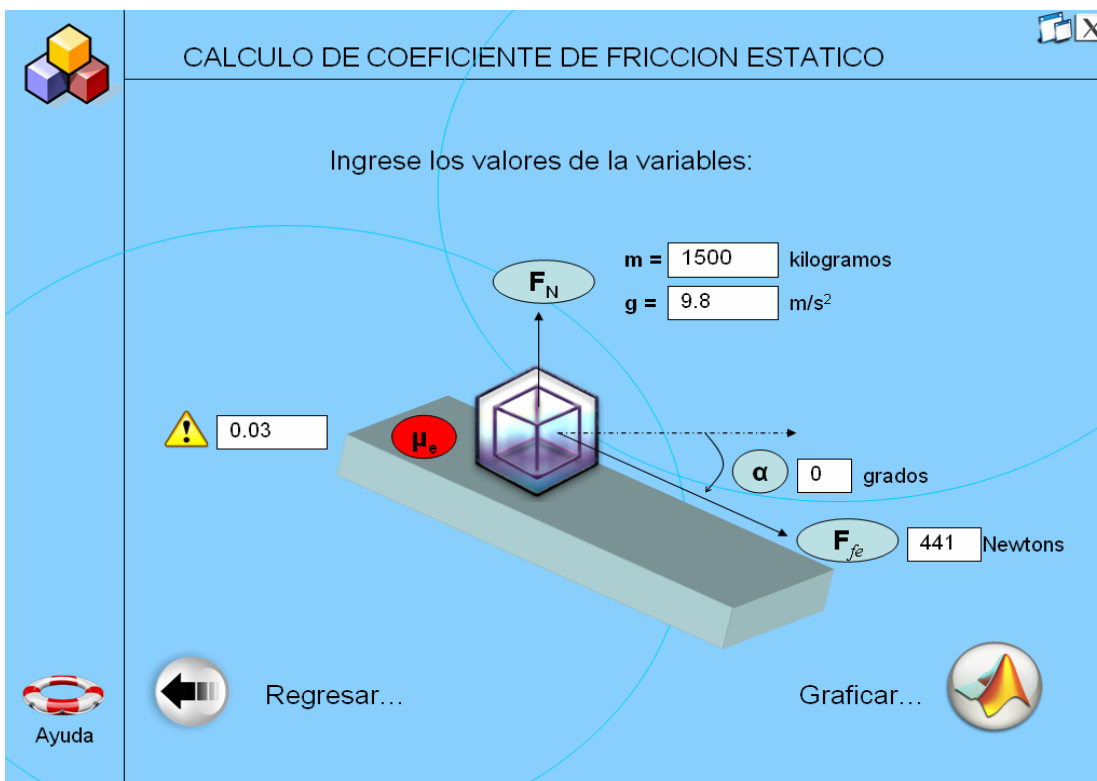


Figura 2. Pantalla correspondiente a la selección de la opción de cálculo

El software desarrollado incluye una opción de ayuda, la cual incluye entre otras cosas los siguientes aspectos:

- ❖ Archivo de definiciones, como fuerza, masa, fuerza de fricción, fuerza normal, coeficiente de fricción, etc.
- ❖ Archivo de bibliografía de científicos e investigadores relacionados al estudio del fenómeno de la fricción, tal como lo fueron por ejemplo: Leonardo da Vinci, Isaac Newton, etc.
- ❖ Archivo de problemas que se pueden resolver con el software.

La figura 3, muestra la pantalla de salida de un cálculo realizado por el software, correspondiente al factor de fricción.



*Figura 3. Pantalla correspondiente los datos de salida*

Como se puede observar en las tres pantallas presentadas (Figs. 1 a 3), el software está desarrollado de tal forma que permita sentir confianza al usuario, asimismo se incluye una opción de generación de gráficas, presentándose en la figura no. 4 un ejemplo del tipo de gráfica que puede obtenerse mediante la resolución de cierto tipo de problemas de fricción.

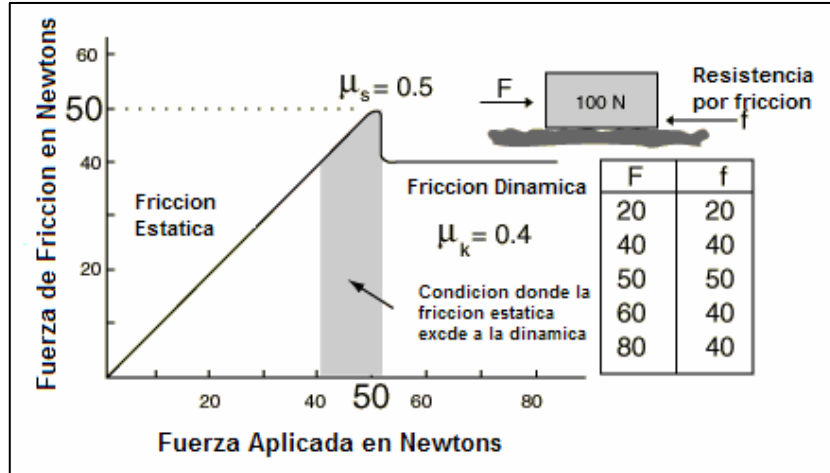


Figura 4. Gráfica de fuerza de fricción Vs fuerza aplicada al cuerpo

## Conclusiones

En la actualidad el desarrollo de herramientas visuales modernas para la enseñanza de temas de matemáticas y física en las escuelas de nivel medio y medio superior se considera de vital importancia y apoyo didáctico, ya que le permiten al alumno interactuar de manera fácil e interesante con la computadora, resolviendo problemas que le permiten fortalecer su aprendizaje.

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California, se está dando impulso a los académicos para el desarrollo de este tipo de herramientas didácticas, que serán utilizadas por los alumnos tanto en las clases de teoría como en los laboratorios. Se está proyectando futuras actualizaciones del software donde se puedan resolver problemas cada vez más complejos, además de tener mayor facilidad de manejar la información que el programa arroja agregando módulos de exportación de datos. Otra adición importante es poder conectar un equipo que pueda realizar la medición directa de las variables involucradas en el problema, para así poder tener una experiencia más enriquecedora y clara de lo que concierne al fenómeno de fricción.

## Bibliografía

- Gutiérrez, Carlos; Cepeda, Martha Lucía: 1994. *Física I*. Primera edición. Editorial Larousse.  
 McKelvey, John; Grotch, Howard: 1980. *Física para ciencias e ingeniería*. Primera edición. Editorial Harla.  
 Pérez Montiel, Héctor: 2004. *Física General*. Cuarta reimpresión. Publicaciones Cultural.  
 Dawes, Brendan: 2002. *Macromedia Flash MX, ActionScript para diseñadores gráficos*. Primera edición. Editorial Prentice Hall.  
 Resnick; Halliday; Krane: 1998. *Física*. Tomo 1. Editorial CECSA.



## “BENEFICIOS DE UNA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN CONTEXTO”

**M. en C. Carlos Daniel Prado Pérez**

Institución

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Estado de México

### Resumen

*Se presenta en este artículo el esquema educativo que sobre matemática en contexto se ha implantado en la división de ingeniería del ITESM Campus Estado de México. Se señalan las experiencias obtenidas bajo la lente de los beneficios y retos generados por este enfoque educativo, en particular, se señalan los logros que en torno a la baja eficiencia terminal, la poca vinculación de la teoría con la práctica y la disminuida motivación de los estudiantes hacia el estudio se han generado. El paradigma que sobre educación superior en matemáticas se propone en este trabajo comprende cuatro aspectos básicos:*

- + matemáticas en contexto, enfoque que se sustenta en la integración curricular,*
- + cambio del paradigma de la didáctica tradicional de las matemáticas, por medio de la incorporación de técnicas didácticas alternativas,*
- + incorporación de la tecnología como soporte pedagógico y científico, y*
- + capacitación docente continua.*

### Introducción

Los retos de las actuales sociedades imponen cambios vertiginosos en la educación, y de manera particular en la educación superior. Desde hace varios años, se detectó a nivel institucional (ver [3]) que uno de los problemas hoy día al que deben enfrentarse las universidades, es que su poca movilidad está en clara discrepancia con el complejo y constante movimiento que existe en el actual mundo globalizado de los estudiantes, y más aún de sus egresados. Así, es notorio que la educación superior no ha logrado todavía afrontar con éxito los siguientes particulares:

- + La rigidez de una didáctica que ya resulta inadecuada para el tiempo actual.
- + La escasa vinculación entre la teoría y la práctica.
- + La escasa incorporación de las nuevas tecnologías a la educación.
- + El poco interés por desarrollar en los alumnos no sólo el aprendizaje de conocimientos sino también habilidades, actitudes y valores.
- + La baja eficiencia terminal, en particular en estudiantes de ingeniería y ciencias.

Ante esta realidad, se impone la necesidad de un cambio del paradigma educativo que se caracterice por ser pluridimensional y bajo el cual se asume como responsabilidad de las instituciones de educación superior, dotar a sus estudiantes de herramientas que les permitan un desarrollo profesional más sólido con el cual puedan afrontar más exitosamente las exigencias de su contexto (ver [7]). Es menester señalar, que la propuesta de este trabajo no conlleva la idea de pasar de un paradigma educativo tradicional a otro que a la postre también resulte obsoleto; no, por el contrario, es vital que las instituciones y los docentes que laboran en ellas vean la necesidad de adecuar de manera continua la educación que ofrecen a las necesidades de una sociedad cambiante a la que sirven. Así, los ejes que dirigen el presente trabajo en el área de matemáticas y sobre los cuales el ITESM Campus Estado de México ha soportado sus líneas de acción durante los últimos seis años son:

- ✚ matemáticas en contexto, enfoque que se sustenta en la integración curricular y que busca generar aprendizajes significativos,
- ✚ cambio del paradigma de la didáctica tradicional de las matemáticas, por medio de la incorporación de técnicas didácticas alternativas,
- ✚ incorporación de la tecnología como soporte pedagógico y científico, y
- ✚ capacitación docente continua.

### Desarrollo

#### *De matemáticas en contexto e integración curricular:*

A medida que la ciencia ha ido presentando una descripción más coherente del mundo, se hacen más claras las tendencias hacia su unificación. En la actualidad, la ciencia refleja un proceso de síntesis que considera el trabajo interdisciplinario y multidisciplinario. No es extraño entonces que uno de los temas abordados con más frecuencia en la literatura educativa y en los últimos congresos internacionales en educación, sea la necesidad de que se proporcione al alumno un verdadero conocimiento significativo, motivando la acción y la reflexión de quien se acerca al mismo (ver [6]).

A través de diversas investigaciones realizadas en el departamento de matemáticas de la división de ingeniería del Campus Estado de México, se pudieron detectar problemas existentes en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, se encontró que había poca retención de conocimientos en los alumnos, que los cursos estaban orientados por el manejo rígido de símbolos, por el abuso de reglas y algoritmos, y que no se lograba un adecuado desarrollo del pensamiento lógico. Además, se notó poca o nula transferencia entre diferentes regiones del conocimiento por lo cual los cursos carecían de aplicaciones en las áreas de interés de los estudiantes. La situación descrita limitaba considerablemente el nivel de significancia de los conocimientos y por ende el desinterés de los jóvenes; después de todo, ¿quién puede interesarse en estudiar algo a lo cual no le encuentra sentido?

Las razones expuestas llevaron al departamento de matemáticas a buscar alternativas a la modalidad tradicional de su educación, búsqueda que se planteó en el marco de los propios objetivos que el ITESM se había propuesto lograr en sus egresados.

El plan considerado para afrontar esta problemática evolucionó en dos etapas a lo largo de siete años y abarca la implantación de dos programas educativos:

- ✚ El primero, llamado “Principia”, que vigente hasta la fecha se dirigió desde sus orígenes a los mejores estudiantes de ingeniería.
- ✚ El segundo, llamado “Rediseño de la Práctica Docente” y al que de aquí en adelante llamaremos simplemente “modelo educativo”, recogía las experiencias de “Principia” e incorporaba a todos los estudiantes de ingeniería.

Actualmente, ambos programas promueven la educación matemática en contexto, y no obstante que en el segundo programa se promueve con menor frecuencia, las diversas evaluaciones aplicadas permiten arribar a las siguientes conclusiones acerca de integración curricular.

- ✚ Permite darle significado a la mayor parte de los conceptos de la matemática y facilita el tránsito entre lo teórico y lo práctico.
- ✚ Promueve la habilidad de los estudiantes para que transfirieran conocimientos entre diferentes disciplinas.
- ✚ A través de soluciones de problemas y proyectos, la investigación-acción se enriquece notablemente con la incorporación de la tecnología.

- ✚ Habilita a los estudiantes en el trabajo de equipo y en el aprendizaje colaborativo.
- ✚ Logra modificar las actitudes de los estudiantes hacia el estudio de las matemáticas y afecta favorablemente la percepción que de ellas muchos se habían formado.

*Del uso de nuevas técnicas didácticas:*

Al reflexionar sobre lo que se ha escrito, podría deducirse que difícilmente la didáctica tradicional podría ofrecer alternativas para lograr los aspectos que se han señalado. Un esquema donde el profesor es el centro alrededor del cual gira el proceso de enseñanza-aprendizaje sería insuficiente. Por ello, otro eje del modelo educativo corresponde al uso de diferentes técnicas didácticas que, como podrá leerse, tienen la impronta del constructivismo (ver [ 4 ] y [ 6 ]). Estas técnicas comparten las siguientes características comunes.

- ✚ Funcionan como un proceso didáctico global dentro del cual se desarrollan las actividades de aprendizaje conectadas frecuentemente con actividades del ejercicio profesional.
- ✚ Permiten a los alumnos abordar los contenidos de los programas a partir de problemáticas que requieren respuestas fundamentadas.
- ✚ Hacen énfasis en la comprensión de la realidad a través de un sistema de trabajo de colaboración por medio del cual los alumnos comparten en el grupo la planeación, el proceso y los resultados.
- ✚ Incorporan la participación activa y responsable de los alumnos en su propio proceso de aprendizaje, al tiempo que les habilita en la toma de decisiones.
- ✚ Dirigen el trabajo del profesor hacia la facilitación del aprendizaje por medio de la orientación, el apoyo, la retroalimentación, la planeación y la evaluación de todo el proceso.
- ✚ Centran el esfuerzo del proceso educativo en el aprendizaje más que en la enseñanza.
- ✚ Permiten reflexionar sobre situaciones problemáticas desde una perspectiva ética y social.
- ✚ Incorporan de manera natural la tecnología como apoyo de la educación.
- ✚ Exigen la continua capacitación del cuerpo docente.

A continuación se ofrece un listado de las técnicas didácticas utilizadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas así como una breve descripción de las mismas.

✚ Aprendizaje basado en problemas.

Un elemento fundamental a considerar en la aplicación de esta técnica, es la forma como los problemas son presentados a los alumnos. Generalmente, se presentan descripciones no muy definidas de fenómenos o eventos problemáticos que suponen un reto al quedar inmersos en el contexto propio de los estudiantes. La estructura y complejidad de los problemas se adaptan al nivel de los estudiantes y ésta aumenta conforme los jóvenes avanzan en conocimientos y madurez. El proceso de madurez está relacionado con el avance en la autonomía del estudiante, y ésta es en todo caso el resultado de una constante interacción con el profesor y sus compañeros de equipo.

✚ Aprendizaje colaborativo

Las técnicas para el aprendizaje colaborativo son muy diversas (ver [1]) y se diferencian en el grado de dificultad y alcance de la tarea. La esencia de esta técnica es el trabajo en equipo lo que exige del profesor el cuidado de situaciones que los equipos deben enfrentar. Por ejemplo, el profesor:

- Debe ofrecer a cada alumno y a cada grupo retroalimentación sobre la eficacia en la ejecución de las tareas y el trabajo en equipo.

- Requiere verificar que los equipos y cada miembro de los mismos reflexionen sobre la retroalimentación que reciben del profesor y de sus propios compañeros.
- Necesita ayudar a los equipos a fijar los objetivos de su aprendizaje.

#### 🚩 Aprendizaje orientado a proyectos

Esta técnica conduce a los estudiantes a construir su aprendizaje a partir de la planeación y desarrollo de actividades que dan como resultado un producto tangible dirigido a una situación problemática real. El proyecto es un trabajo que se lleva a cabo en un tiempo determinado para crear un producto físico mediante la realización de una serie de tareas y el uso efectivo de recursos. Durante su desarrollo los estudiantes tienen que tomar decisiones, organizar el trabajo, decidir las mejores herramientas tecnológicas, y finalmente presentar y defender el resultado ante el grupo. En el desarrollo de proyectos se proponen situaciones complejas que involucran la adquisición de conocimientos y donde frecuentemente se exploran aprendizajes futuros. Cabe enfatizar que en esta técnica el uso de la tecnología es imprescindible.

#### *De la incorporación de la tecnología:*

Actualmente, el modelo educativo se beneficia del uso de una plataforma computacional para fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje. Cabe señalar que la tecnología por sí misma no sustenta de manera aislada ningún proceso didáctico, pero éste se complementa y refuerza, sobretodo en aquellos aspectos donde la simbología matemática resulta insuficiente, ya sea en el aprendizaje de los alumnos o en la solución de los problemas que se proponen.

De manera general, la plataforma computacional permite acceder a las principales herramientas de la tecnología como son: Internet, correo electrónico, páginas electrónicas, multimedios, “Blackboard” y “Webtec”. Estos dos últimos recursos son las plataformas donde se han colocado la totalidad de los cursos de ingeniería y que adicionalmente permiten interacciones profesor-alumno y alumno-alumno tanto sincrónica como asincrónicamente. De manera adicional hay que señalar que en diversos cursos se han incorporado aplicaciones con Excel, Power Point y MATHEMATICA.

El uso de la tecnología ha permitido:

- 🚩 Tener acceso a una multitud de datos y a una información actualizada.
- 🚩 Llevar a cabo proyectos comunes con alumnos y profesores de carácter interdisciplinario.
- 🚩 Aprender a un ritmo individual.
- 🚩 Acceder a diferentes enfoques para solucionar un problema, incluyendo los enfoques gráficos, numéricos y verbales. Esto atiende a los diferentes estilos de aprendizaje que pueden encontrarse en los alumnos.
- 🚩 Tener una herramienta poderosa para analizar problemas cuando los métodos simbólicos ya no pueden proporcionar una estrategia de solución.

#### *De la profesionalización docente:*

Bajo el enfoque educativo descrito, es claro que el trabajo del docente no consiste ya en sólo transmitir información, ni siquiera conocimientos, sino en presentarlos en forma de situaciones problemáticas situándolas en un contexto adecuado y poniendo los problemas en perspectiva, de manera que el alumno pueda establecer la conexión entre solución y otras interrogantes de mayor alcance, y que al mismo tiempo bajo un buen diseño, planeación y estructuración de actividades, éstas puedan ir desarrollando en los estudiantes habilidades como el pensamiento crítico, la solución de problemas, la toma de decisiones, la investigación autónoma. Es por la relación del profesor con el alumno como también por el diseño de las diferentes actividades y su implantación, que la profesionalización del personal docente no puede quedar a la ventura. Así, en este marco de ideas es que la formación del profesor debe ser cultivada institucionalmente desde el punto de vista humano e intelectual para proveerle

las herramientas que le son necesarias en este modelo educativo. Nunca se insistirá demasiado en la importancia de la calidad en la educación y, por ende, del profesorado. Así, en una preparación básica de la cual todo el cuerpo docente forma parte se trabaja en un “Programa de Habilidades Docentes, (PDHD)”, que se orienta a la adquisición de las habilidades computacionales mínimas y de las técnicas didácticas expuestas. El PDHD consta de las siguientes cuatro etapas que se describen a continuación.

- ✚ ETAPA I: En ésta se describen las características de la educación superior del siglo XXI, mismas que están sustentadas en los documentos informativos de organizaciones de carácter mundial (ver [ 2]).
- ✚ ETAPA II: Aquí se proporciona capacitación básica en alguna de las técnicas didácticas señaladas con anterioridad, asimismo se inicia la preparación de algún curso que bajo el modelo educativo incorpore alguna técnica didáctica.
- ✚ ETAPA III: Se realiza una práctica guiada de la implantación de un curso que incorpora, matemática en contexto, tecnología y una técnica didáctica. Un aspecto central de esta etapa lo constituye la evaluación que el profesor hace durante el curso. Una evaluación que apoyada sobre una metodología llamada “portafolio”, genera un espectro amplio de observaciones que abarcan al curso mismo en cuanto al planteamiento de sus intenciones educativas, sus objetivos, la pertinencia de sus actividades y la correspondiente evaluación que de éstas se proponga, además, la evaluación “portafolio” también contempla el proceso mismo bajo el cual el profesor interactúa con sus alumnos, y la manera como los alumnos interactúan entre sí. Por tanto, la evaluación “portafolio” es una estrategia que se emplea para evaluar tanto a los alumnos, como también al profesor y al proceso mismo. Esta etapa es crucial porque bajo la dirección de un “experto”, los profesores participantes pueden vivir la práctica de nuevas metodologías didácticas donde se incorporan de manera sistemática y metódica aspectos como la tecnología, el trabajo interdisciplinario y de equipo.
- ✚ ETAPA IV: Con base en la Etapa III, los profesores son capaces de proponer mejoras a sus propios cursos y a los de otros autores. Estos cambios se impulsan bajo esquemas colegiados al interior de las academias que conforman al departamento de matemáticas, donde se determina y decide la pertinencia de las modificaciones propuestas.

### Resultados

Son diversos los resultados que se han podido recabar desde los inicios de estos esfuerzos. Se han contemplado aspectos tanto cualitativos como cuantitativos. En este apartado se comenta sobre los tres tipos de evaluación más importantes.

- ✚ Una primera evaluación es cualitativa [5]. A través de encuestas de opinión a alumnos y profesores se ha determinado que el modelo está impactando favorablemente y de manera significativa en las siguientes habilidades:
  - Analizar y resolver problemas.
  - Trabajar en equipo.
  - Trabajar eficientemente con la tecnología y diversas fuentes de información.
  - Aprender e investigar por cuenta propia.
- ✚ Una segunda evaluación (cuantitativa) se refiere a la eficiencia terminal. Se ha determinado que el modelo educativo presentado y los programas de apoyo estudiantil están relacionados íntimamente con la eficiencia terminal. En este sentido vale la pena señalar que el promedio de eficiencia terminal en las carreras de ingeniería promedia el 70.23% y en cuanto a los cursos de matemáticas los porcentajes de aprobación promedian alrededor del 73.3%.
- ✚ El tercer tipo de evaluación (cuantitativa) es externa y se refiere al CENEVAL. Se presenta en este rubro una síntesis de los aspectos más relevantes. Dos índices generales

pueden establecer de forma directa el desempeño del Campus Estado de México. “El Testimonio de Alto Rendimiento Académico” (TARA) que se otorga a los estudiantes con un índice CENEVAL arriba de 1150 puntos y “El Testimonio de Desempeño Académico Suficiente” que se otorga a los sustentantes que hayan obtenido entre 1000 y 1149 puntos. Ahora, de los alumnos sustentantes del semestre agosto-diciembre de 2003, 72.69% logró un puntaje mayor o igual a 1000 puntos, mientras que en el semestre enero-mayo de 2004, 89.3% logró un puntaje mayor o igual a 1000 y menor a 1150, y el 7.07% de los examinados logró un puntaje mayor o igual a 1150 puntos.

### Conclusiones

1. El modelo educativo referente a una matemática en contexto propicia aprendizajes significativos y genera al mismo tiempo la habilidad de transferir conocimientos entre diversas regiones disciplinarias.
2. Una de las características distintivas de un esquema interdisciplinario sobre el cual se sustenta este enfoque de las matemáticas en contexto, es que los alumnos elevan notoriamente su nivel de actividad intelectual y de participación activa en los procesos de su propio aprendizaje.
3. Bajo este modelo educativo muchos conceptos de regiones diversas del conocimiento se vinculan, esto cambia la concepción tradicional de las matemáticas vistas como bloques rígidos de conocimientos que se deben aprender de memoria sin conexión alguna con la realidad y un contexto específico.
4. La capacitación docente resulta indispensable pues sólo así se puede abordar la compleja tarea de promover aprendizajes desde la plataforma de diversas herramientas didácticas y tecnológicas.
5. Las sociedades actuales son, de uno u otro modo, sociedades de información en las que el desarrollo de las tecnologías puede crear un entorno cultural y educativo capaz de diversificar las fuentes del conocimiento y del saber.

### Bibliografía

- [1] Artzt; Newman: 1991. *How to use cooperative learning in the mathematics class*. Editorial NCTM.
- [2] Delors, Jacques: 1997. *“La Educación Encierra un Tesoro”*. Ediciones UNESCO, México.
- [3] Santiago, R.; et al. 1997. *“Rediseño de la práctica docente”*, Congreso Académico del ITESM – CEM, México.
- [4] Douady, A. 1995. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- [5] González, A.; Santiago, R.; Garza, B. (se publicará en 2005). *“Design and implementation of various web-based courses which involve a didactic technique: the ITESM model”*, Editorial Kluwer Academic Publishers, Educational Innovation in Economics and Business IX.
- [6] Pirie, S.R.; Kieren, T.E. 1992. *“Creating constructivist environments and constructing creative mathematics”*, Editorial Kluwer Academic Publishers, Educational Studies in Mathematics, 23.
- [7] Vargas Leyva, M. 2004. *“Hacia el Nuevo Paradigma Educativo en la Educación de la Ingeniería”*, Memorias de la XXXI Conferencia Nacional de Ingeniería, Instituto Tecnológico de Tijuana, México.

## DE LA INTEGRAL DE RIEMANN AL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO: UN ACERCAMIENTO CON EL APLET DESCARTES

**Eduardo Tellechea Armenta**

Universidad de Sonora  
etellech@gauss.mat.uson.mx

### Resumen

*En este trabajo se presenta un acercamiento gráfico al concepto de Integral con el fin de que el estudiante transite gradualmente desde las sumas de Riemann al estudio de la Integral como una función del extremo superior y sus propiedades. Utilizaremos un trazador de la Función Integral construido con el Applet Descartes, para arribar de manera visual a la relación entre una función y su función Integral, es decir, al Teorema Fundamental del Cálculo. Se aprovechan las capacidades del software para que el alumno interactúe de manera gráfica y numérica con la computadora al nivel de poder comprobar resultados, predecir propiedades y conjeturar sobre situaciones de más generalidad. La utilización de este tipo de recursos computacionales en que el alumno manipula dinámicamente las gráficas, es de gran ayuda antes de abordar un enfoque abstracto. Esta propuesta se enmarca en el contexto de un nuevo modelo educativo que actualmente se implementa en la Universidad de Sonora.*

### Introducción

El avance de la tecnología en los últimos años, el número creciente de computadoras personales y la cada vez mayor cantidad de profesores que incorporan el uso de esta herramienta como apoyo en sus cursos, resalta la importancia de la utilización de herramientas computacionales en la enseñanza de las Matemáticas. La Universidad de Sonora ha modificado los planes de estudio de casi todas las carreras, destacándose que aproximadamente el 20% del tiempo dedicado a cada curso de matemáticas, se impartirá en un laboratorio de cómputo con el uso de software educativo. En este contexto los profesores tenemos el reto de diseñar actividades didácticas, creando para ello ambientes computacionales de aprendizaje en los que la interactividad con la computadora permita al alumno verificar sus resultados, explorar de manera gráfico-numérica, detectar patrones de comportamiento, analizar situaciones medulares y conjeturar resultados más generales, todo ello como una preparación para acceder a un enfoque más abstracto. En este trabajo se presenta una propuesta de actividades interactivas para el laboratorio de cómputo, las cuales pueden ser utilizadas también a través del Internet. Se hace la observación que por restricciones de espacio, solo se presentarán la descripciones generales de cada una de las actividades a partir de las cuales se podrían generar hojas de trabajo que sirvan de guía al alumno.

En la sección 1, se presenta al estudiante, el applet básico para el estudio de sumas de Riemann, el cual muestra además el valor numérico de las sumas correspondientes. Este mismo applet permite considerar funciones con valores negativos y funciones discontinuas para analizar en general el valor de la Integral de la función en un intervalo dado. En la sección 2, se introduce la integral como función del extremos superior, y se analizan sencillos casos de funciones constantes, escalonadas, lineales y seccionalmente lineales, para verificar resultados obtenidos en clase. Posteriormente se analizan sencillas funciones discontinuas, y continuas no derivables con el fin de conjeturar sobre la continuidad o derivabilidad de la función integral. En la sección 3, se

describe la construcción del trazador de la Función Integral, partiendo de funciones escalonadas y aproximándola por medio de funciones continuas seccionalmente lineales. Finalmente en la sección 4 se construye gráficamente la derivada de la función integral, verificándose visualmente el Teorema Fundamental del Cálculo.

### 1. Sumas de Riemann

En esta primera actividad se presenta al estudiante un applet como en la Figura 1, que grafica y calcula las Sumas de Riemann con alturas en los extremos de los intervalos de la partición (sumas superiores e inferiores para funciones monótonas) presentando ambas en la misma pantalla. Es posible modificar libremente la función, los extremos del intervalo de integración y el número de subdivisiones de la partición.

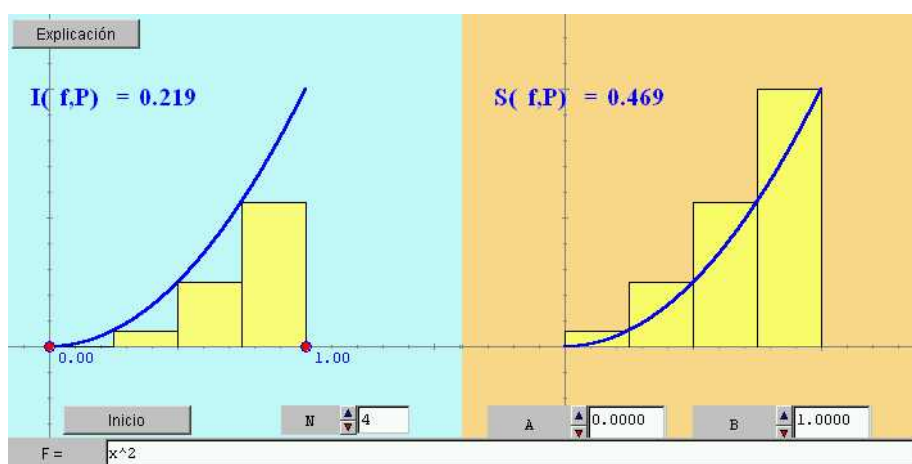


Figura 1

Al interactuar con este applet el estudiante se familiarizará con el concepto de Integral como límite de sumas de Riemann, iniciando con funciones no negativas que le permitirán interpretar a la integral como el área bajo la gráfica de la función y encima del eje de las abscisas. También explorará sumas de Riemann e integrales de funciones discontinuas y funciones con valores positivos y negativos. En la Figura 2 se muestra una secuencia de sumas inferiores para  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[0, 1]$  y para subdivisiones del intervalo en 15, 30 y 1000 partes iguales, respectivamente.

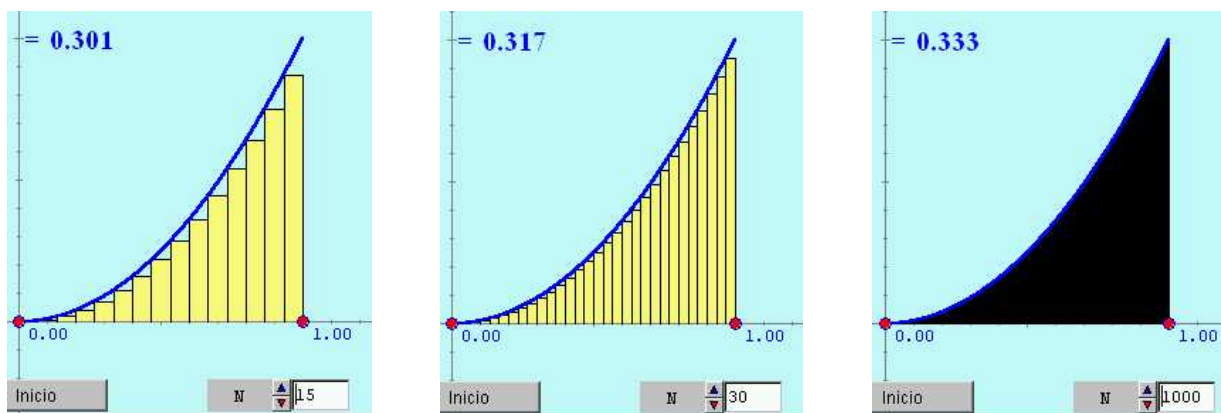


Figura 2



En las dos primeras imágenes de la Figura 3 se muestran las sumas superiores para  $f(x) = 1 - x^2$  en los intervalos  $[0, 1]$  y  $[0, 1.5]$  para una subdivisión del intervalo correspondiente en 10 partes iguales; y en la otra, una suma de Riemann para una función discontinua.

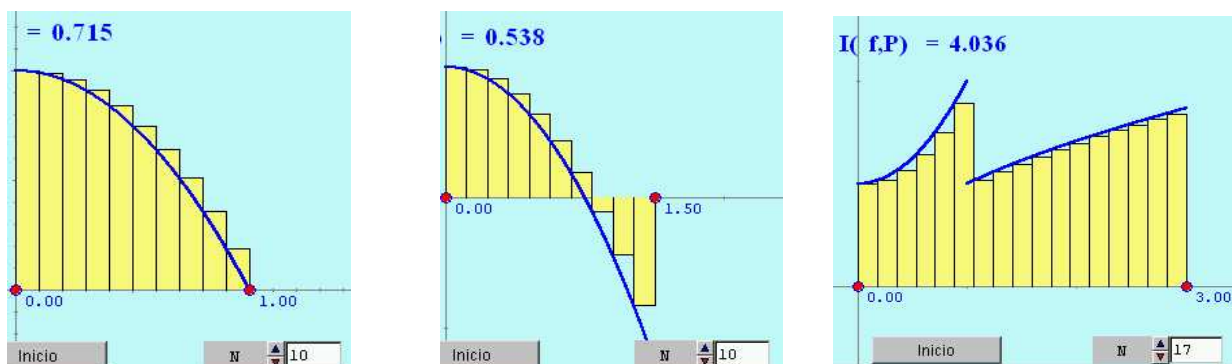


Figura 3

## 2. La función Integral $I(x)$ para funciones $f(x)$ constantes, escalonadas y lineales y seccionalmente lineales.

El objetivo de esta actividad es que el estudiante se familiarice con la integral como una función del extremo superior

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt$$

e interactuando con la computadora, pueda descubrir de manera visual las condiciones bajo las cuales la integral resulta una función continua o derivable, teniendo así un primer acercamiento gráfico al Teorema Fundamental del Cálculo.

En la Figura 4 se muestran tres applets, en los dos primeros, el alumno modifica el extremo superior del intervalo y el programa muestra el área acumulada así como la gráfica de la función integral. En el tercer applet, se muestra la integral de una función escalonada en la cual los puntos P, R y S pueden modificarse en pantalla, arrastrándolos con el mouse.

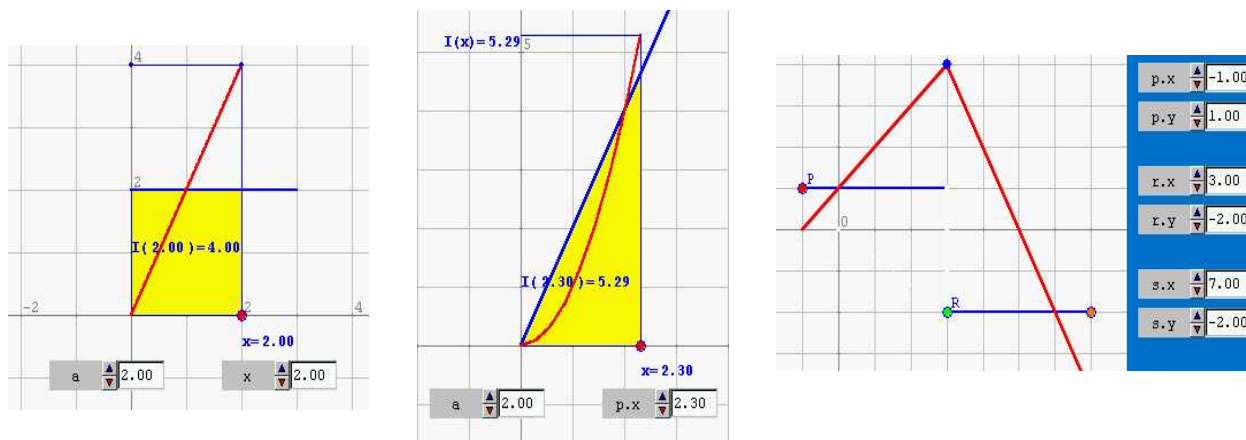


Figura 4

Para explorar el comportamiento de la función Integral (continuidad y derivabilidad) se le presenta al estudiante un applet con una función poligonal de dos secciones en el que puede manipularse en pantalla los puntos P, Q, R y S directamente arrastrándolos con el mouse, o modificando numéricamente las coordenadas de dichos puntos. En la figura 5, se muestra la función Integral para una función continua y otra discontinua.

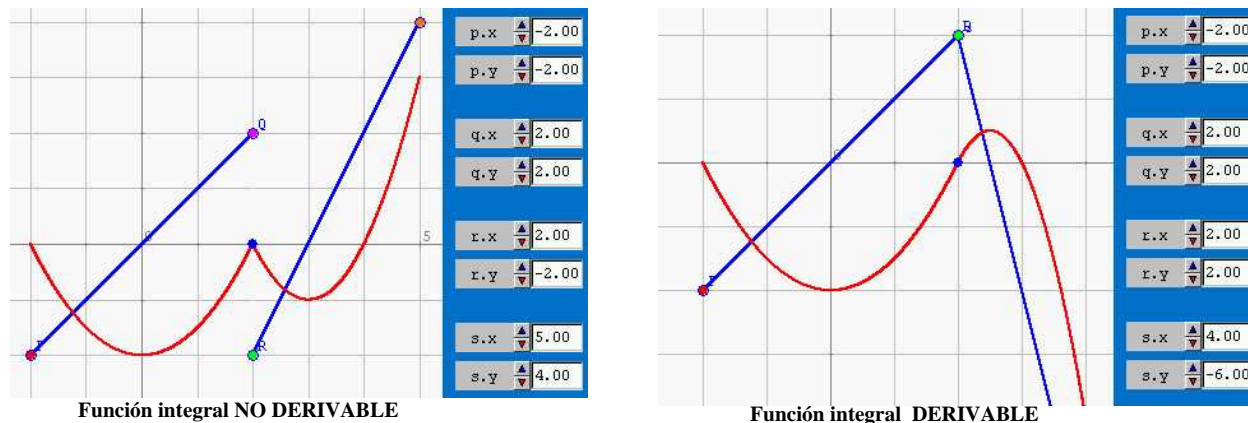


Figura 5

Al modificar los puntos P, Q, R y S, el alumno verificará que las características observadas en la función integral no dependen del caso particular de función seccionalmente lineal de que se trate.

El alumno podrá conjeturar que la integral es siempre continua y que si la función original es continua, la integral será derivable.

Con el fin de visualizar el Teorema Fundamental de Cálculo (TFC), para este tipo de funciones, podemos encontrar visualmente, en cada punto, la derivada de la Integral, haciendo zoom a la imagen en el punto deseado y ver si la función se comporta como una recta y en ese caso, determinar la derivada con la ayuda de la cuadrícula y encontrar la relación entre la derivada de la integral y la función original, arribando de manera visual al TFC. En la Figura 5, puede visualizarse que la derivada de la Integral en los puntos de derivada cero, coincide ésta, con el valor de la función en dicho punto y lo mismo sucede en la segunda gráfica de esta figura en  $x = 3$ , haciendo zoom.

### 3. Construcción de un trazador de la función Integral.

Con el fin de continuar con la exploración del TFC, para otro tipo de funciones como trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc., construimos un Trazador de la función Integral aproximando la función  $f$ , integrable en un intervalo cerrado  $[a, b]$ , por medio de funciones escalonadas, siendo las correspondientes integrales de estas escalonadas, una buena aproximación a la integral de la función para valores “grandes” de  $N$ , En la Figura 6 se muestra la construcción del trazador para la función  $f(x) = \cos x$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$  para  $N = 5$ .

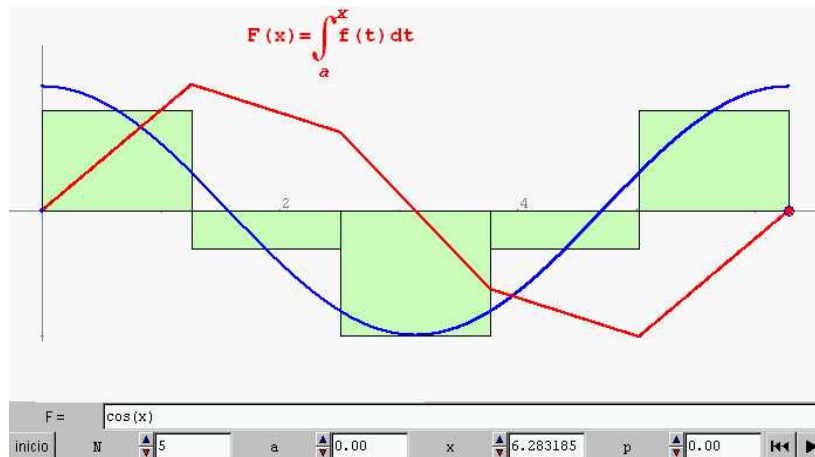


Figura 6

En la figura 7 se muestran otras dos aproximaciones a la integral de la función  $f(x) = \cos x$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , con  $N = 10$  y  $N = 30$ , respectivamente.

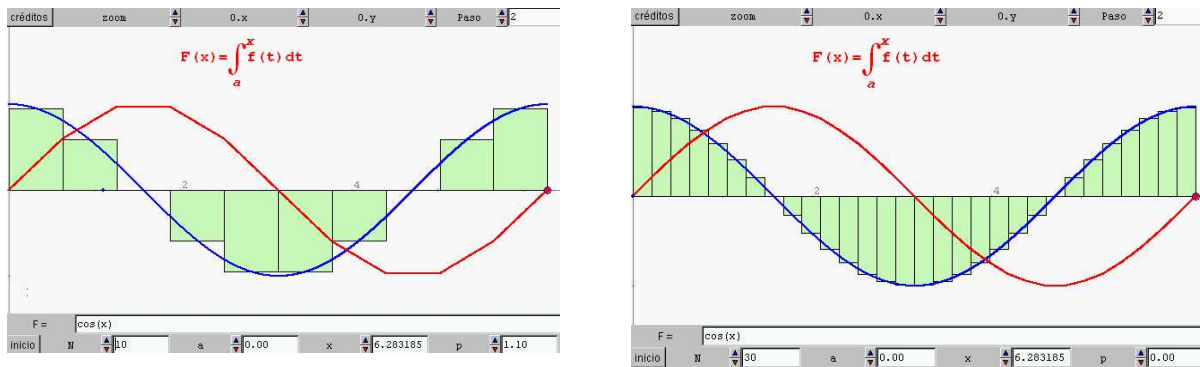


Figura 7

Obsérvese que a para  $N = 30$ , puede visualizarse que la integral corresponde a una función muy parecida a la función  $f(x) = \sin x$ , es decir, al parecer

$$\int_0^x \cos t \, dt = \text{sen} x$$

El estudiante explorará las integrales de otras funciones pidiendo al programa que sólo muestre la función Integral para un valor grande de  $N$ .

#### 4. Trazando la derivada de la función Integral

Una vez que contamos con un trazador de integrales, podemos explorar la relación entre la función y su integral, construyendo gráficamente la derivada de la función integral en cada punto y ver si nuestras conjeturas persisten cuando consideramos un tipo más general de funciones. En la figura 8 se muestra la integral de la función coseno. El segmento AB es de longitud uno, de tal manera que el segmento dirigido, BC representa la derivada en el punto correspondiente.

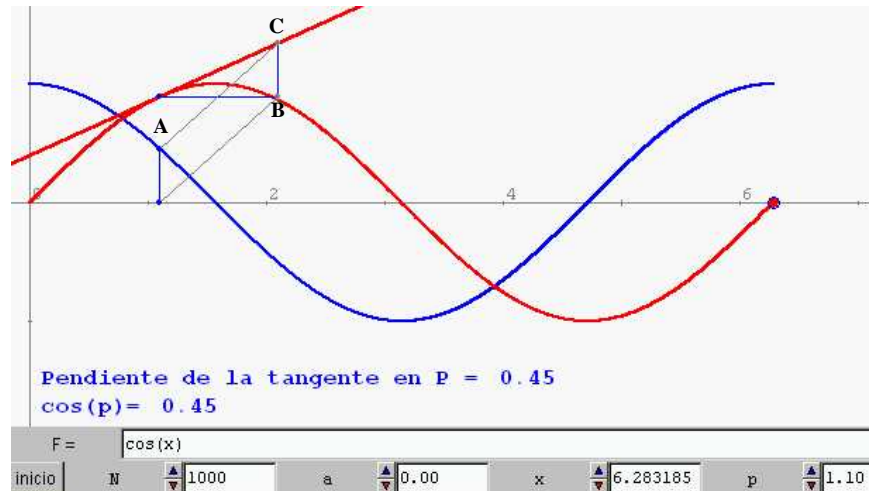


Figura 8

Así pues, con la ayuda de este applet verificamos de manera visual el resultado del TFC.

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \cos t \, dt = \cos x$$

Análogamente podemos verificar este resultado para otro tipo de funciones:

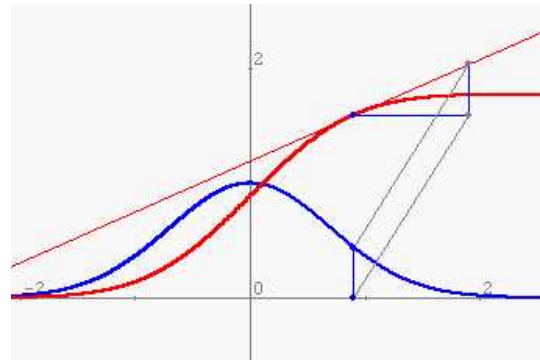
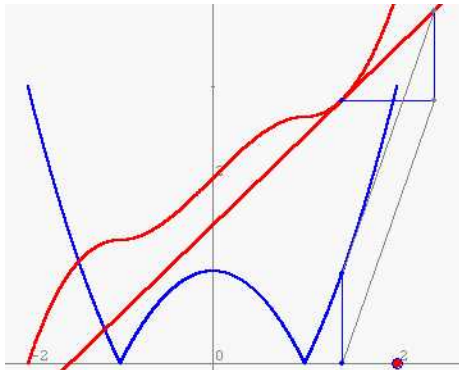


Figura 9

$$\frac{d}{dx} \int_0^x |t^2 - 1| \, dt = |x^2 - 1|$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^x e^{-t^2} \, dt = e^{-x^2}$$

**Referencias:**

ABREU, J.L. – OLIVERÓ, M. (2003) Applet Descartes (software), Ministerio de Educación Cultura y Deporte de España.  
 PROYECTO DESCARTES, Página web: <http://descartes.cnice.mecd.es/>  
 TELLECHEA, A.E. (2004), El Applet Descartes en el diseño de actividades interactivas de Matemáticas Notas de curso para profesores. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora.  
 TELLECHEA, A.E.- ROBLES, A,G (2004) Un Aparato Virtual para trazar la función Derivada y su utilización en la enseñanza del Cálculo Diferencial  
[http://descartes.cnice.mecd.es/Analisis/Funcion\\_derivada/index.htm](http://descartes.cnice.mecd.es/Analisis/Funcion_derivada/index.htm)

# Un ejemplo de transformación de Darboux en mecánica cuántica.

A. Jáuregui      V. Santana

Departamento de Física, Universidad de Sonora

## Resumen

*Construimos la transformación de Darboux de la ecuación de Schrodinger unidimensional y como ejemplo la aplicamos al potencial de pozo rectangular finito.*

## 1 Introducción.

La técnica matemática llamada transformación de Darboux permite construir una ecuación diferencial y sus soluciones a partir de otra que es conocida. La técnica fue estudiada por primera vez por el matemático francés Gaston Darboux en 1882 en el caso particular de la ecuación de Sturm-Liouville, su generalización se aplica en la actualidad a una amplia clase de ecuaciones de evolución en distintas ramas de la física. En este trabajo presentamos un ejemplo de la aplicación de la transformación de Darboux en la mecánica cuántica.

## 2 Transformación de Darboux.

En esta sección reproducimos la forma como se usa la transformación de Darboux en la ecuación de Schrödinger unidimensional para el potencial  $V_0(x)$  que, en unidades  $\hbar = m = 1$ , se escribe como

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \varphi_\lambda + V_0(x) \varphi_\lambda = E_\lambda \varphi_\lambda, \quad (1)$$

donde  $E_\lambda$  es el eigenvalor de la energía y  $\varphi_\lambda(x)$  la correspondiente eigenfunción. Suponemos que conocemos las eigenfunciones y los eigenvalores del potencial  $V_0(x)$ .

Por cada función  $\varphi_\lambda(x)$  definimos una nueva función, que denotamos con  $\psi_\lambda(x)$ , mediante la expresión

$$\psi_\lambda(x) = \frac{d\varphi_\lambda}{dx} - \sigma(x) \varphi_\lambda, \quad (2)$$

donde  $\sigma(x)$  es una función por determinar, a la cual sólo le pedimos que tenga primera y segunda derivadas continuas.

Derivando dos veces la expresión (2) y usando la ecuación (1) para eliminar la segunda derivada de la función  $\varphi_\lambda$  encontramos la ecuación que satisfacen las funciones  $\psi_\lambda(x)$ , el resultado puede escribirse de la siguiente forma

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \psi_\lambda + \left( V_0(x) - \frac{d\sigma}{dx} \right) \psi_\lambda = E_\lambda \psi_\lambda + \frac{1}{2} \varphi_\lambda \frac{d}{dx} \left( \frac{d\sigma}{dx} + \sigma^2 - 2V_0 \right). \quad (3)$$

De la ecuación anterior se sigue que cuando la función  $\sigma$  es tal que el coeficiente que multiplica a  $\varphi_\lambda$  es cero, entonces las funciones  $\psi_\lambda$  satisfacen la ecuación

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \psi_\lambda + \left( V_0(x) - \frac{d\sigma}{dx} \right) \psi_\lambda = E_\lambda \psi_\lambda, \quad (4)$$

es decir, en ese caso  $\psi_\lambda$  es solución de la ecuación de Schrödinger con potencial

$$V_1(x) = V_0(x) - \frac{d\sigma}{dx}. \quad (5)$$

Como el eigenvalor  $E_\lambda$  en la ecuación (4) es el mismo que el de la ecuación (1), el resultado anterior implica que los potenciales  $V_0(x)$  y  $V_1(x)$  tienen el mismo espectro de eigenvalores, en otras palabras,  $V_0$  y  $V_1$  son potenciales isoenergéticos.

Ahora regresamos a la condición que debe satisfacer la función  $\sigma$ . De la ecuación (3), el coeficiente del segundo término del lado derecho es cero si la función  $\sigma(x)$  es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d\sigma}{dx} + \sigma^2 - 2V_0 = c, \quad (6)$$

donde  $c$  es constante. La ecuación anterior es una ecuación diferencial no lineal del tipo de Riccati que puede ser linealizada mediante el cambio a la función  $\chi(x)$  dada por la expresión

$$\sigma(x) = \frac{1}{\chi(x)} \frac{d}{dx} \chi(x). \quad (7)$$

La sustitución de (7) en (6) nos lleva a que la función  $\chi(x)$  es solución de la ecuación de Schrödinger original, ecuación (1), con eigenvalor  $c$ . Si identificamos el eigenvalor  $c$  con  $E_\mu$ , entonces  $\chi(x)$  es la eigenfunción  $\varphi_\mu(x)$ , y por lo tanto la función  $\sigma(x)$  es la derivada logarítmica de la eigenfunción  $\varphi_\mu(x)$ ,

$$\sigma(x) = \frac{1}{\varphi_\mu(x)} \frac{d}{dx} \varphi_\mu(x). \quad (8)$$

Sustituyendo la función  $\sigma(x)$  en las ecuaciones (2) y (5), podemos enunciar el resultado de la siguiente forma: Si  $\{\varphi_\lambda\}$  son las eigenfunciones de la ecuación de Schrödinger con potencial  $V_0(x)$  y espectro de eigenvalores  $\{E_\lambda\}$ , y  $\varphi_\mu$  es la eigenfunción que corresponde al eigenvalor  $E_\mu$ , entonces la ecuación de Schrödinger con potencial

$$V[1] = V_0 - \frac{d}{dx} \frac{\varphi'_\mu}{\varphi_\mu} \quad (9)$$

tiene el mismo espectro de eigenvalores  $\{E_\lambda\}$ , excepto por el eigenvalor  $E_\mu$ , y las eigenfunciones están dadas por

$$\psi_\lambda[1] = \varphi'_\lambda - \frac{1}{\varphi_\mu} \varphi'_\mu \varphi_\lambda, \quad (10)$$

donde la prima indica derivada con respecto a  $x$ .

De las dos expresiones anteriores se sigue que tanto el potencial  $V[1]$  como las eigenfunciones  $\psi_\lambda[1]$  tienen polos en los ceros de la función auxiliar  $\varphi_\mu(x)$ . Este inconveniente es superado si se usa como función auxiliar la eigenfunción del estado de más baja energía, o menor eigenvalor, ya que esta eigenfunción no tiene ceros.

### 3 Eigenfunciones del pozo finito.

En esta sección encontramos las eigenfunciones y eigenvalores del potencial de pozo rectangular finito de profundidad  $U$  y anchura  $L$ , centrado en el origen,

$$V_0(x) = \begin{cases} 0 & x < -\frac{L}{2} \\ -U & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ 0 & x > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (11)$$

La sustitución del potencial anterior en la ecuación de Schrödinger, ecuación (1), nos lleva a tres ecuaciones que se resuelven con la condición de que la eigenfunción se anula cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , lo cual garantiza que estemos considerando únicamente estados con  $E < 0$ , o estados ligados. La solución es

$$\varphi = \begin{cases} Ae^{kx} & x < -\frac{L}{2} \\ B \sin qx + C \cos qx & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ De^{-kx} & x > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (12)$$

donde las constantes  $k$  y  $q$  están dadas por

$$k = \sqrt{2|E|} \quad \text{y} \quad q = \sqrt{2(U - |E|)}. \quad (13)$$

Como el potencial es simétrico, las eigenfunciones son simétricas o antisimétricas ante el cambio  $x \rightarrow -x$ . En particular, los estados simétricos, que incluyen al estado base o de mínima energía, se describen con funciones que llevan el coseno en la región intermedia. Al aplicar las condiciones de continuidad de la eigenfunción y su derivada en las fronteras de la región intermedia encontramos que las constantes  $A$ ,  $C$  y  $D$  satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} Ae^{-k\frac{L}{2}} &= B \cos \frac{qL}{2} \\ kAe^{-k\frac{L}{2}} &= qB \sin \frac{qL}{2} \\ D &= A. \end{aligned}$$

De estas ecuaciones deducimos las siguientes relaciones

$$A = D = Be^{k\frac{L}{2}} \cos \frac{qL}{2} \quad (14)$$

$$\tan \frac{qL}{2} = \frac{k}{q}. \quad (15)$$

La primera de éstas nos dice que los estados simétricos tienen como eigenfunciones

$$\varphi = B \begin{cases} \xi e^{kx} & x < -\frac{L}{2} \\ \cos qx & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \xi e^{-kx} & x > \frac{L}{2} \end{cases}, \quad (16)$$

donde  $\xi = e^{kL/2} \cos \frac{qL}{2}$ . La constante  $B$  es una constante de normalización.

Por su parte la ecuación (15), escrita en términos de la energía

$$\tan \sqrt{2(U - |E|)} \frac{L}{2} = \sqrt{\frac{|E|}{U - |E|}}, \quad (17)$$

nos proporciona los eigenvalores de los estados simétricos.

De la misma forma, los estados antisimétricos son descritos por

$$\varphi = F \begin{cases} -\eta e^{kx} & x < -\frac{L}{2} \\ \sin qx & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \eta e^{-kx} & x > \frac{L}{2} \end{cases}, \quad (18)$$

donde  $\eta = e^{kL/2} \sin \frac{qL}{2}$  y  $F$  es constante de normalización.

En este caso obtenemos los eigenvalores a partir de la ecuación

$$\cot \sqrt{2(U - |E|)} = -\sqrt{\frac{|E|}{U - |E|}}. \quad (19)$$

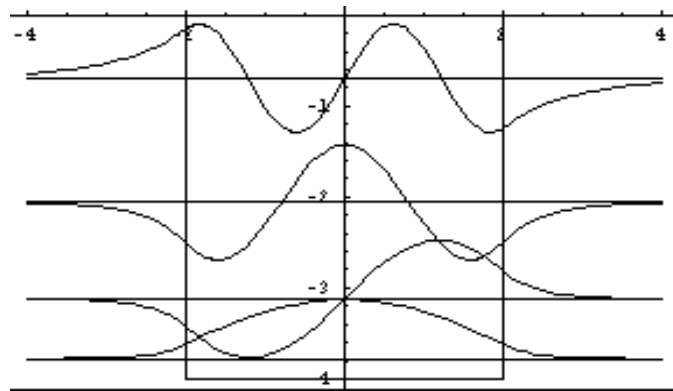


Figura 1: Eigenfunciones de los cuatro niveles del pozo rectangular finito con  $U = 4$  y  $L = 4$ .

Como las ecuaciones (17) y (19) son trascendentes su solución es numérica y para ello es necesario tomar un caso particular, escogemos  $U = 4$  y  $L = 4$ . En este caso la ecuación (17) tiene dos raíces que se calculan numéricamente, de energías  $E_0 = -3.77791$  y  $E_2 = -2.05806$ , respectivamente. Para los estados antisimétricos hay otros dos eigenvalores que corresponden a las energías  $E_1 = -3.11995$  y  $E_3 = -0.694672$ , respectivamente. En total el espectro está formado por los cuatro eigenvalores mencionados. En la figura 1 graficamos las eigenfunciones de los cuatro estados sobre el nivel de energía correspondiente, superpuestas a la grafica del potencial del pozo rectangular finito.



## 4 Transformación de Darboux del pozo finito.

Ahora aplicamos la transformación de Darboux al pozo cuadrado. Usamos como función auxiliar la eigenfunción del estado base, o estado de mínima energía, dada por

$$\varphi_0(x) = B_0 \begin{cases} \xi_0 e^{k_0 x} & x < -\frac{L}{2} \\ \cos q_0 x & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \xi_0 e^{-k_0 x} & x > \frac{L}{2} \end{cases}. \quad (20)$$

De acuerdo al teorema de Darboux para construir el potencial  $V[1]$ , ecuación (9), es necesario encontrar la derivada logarítmica de  $\varphi_0(x)$ . De (20) se sigue que

$$\frac{\varphi'_0}{\varphi_0} = \begin{cases} k_0 & x < -\frac{L}{2} \\ -q_0 \tan q_0 x & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ k_0 & x > \frac{L}{2} \end{cases}. \quad (21)$$

Derivando de nuevo encontramos

$$\frac{d}{dx} \frac{\varphi'_0}{\varphi_0} = \begin{cases} 0 & x < -\frac{L}{2} \\ -q_0^2 \sec^2 q_0 x & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0 & x > \frac{L}{2} \end{cases}. \quad (22)$$

Sustituyendo el resultado anterior en la expresión (9) obtenemos el nuevo potencial

$$V[1] = \begin{cases} 0 & x < -\frac{L}{2} \\ -V_0 + q_0^2 \sec^2 q_0 x & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0 & x > \frac{L}{2} \end{cases}, \quad (23)$$

este potencial es simétrico y tiene el mismo espectro de energía que el pozo finito, excepto por el eigenvalor  $E_0$  que en este potencial no aparece.

Por su parte, las eigenfunciones de la energía del potencial  $V[1]$  se obtienen usando la expresión (10). Sustituyendo (21) en dicha expresión obtenemos

$$\psi_\lambda[1] = \begin{cases} \varphi'_\lambda & x < -\frac{L}{2} \\ \varphi'_\lambda + q_0 \varphi_\lambda \tan q_0 x & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \varphi'_\lambda & x > \frac{L}{2} \end{cases}. \quad (24)$$

Cuando usamos los estados antisimétricos de  $V_0$ , ecuación (18), resultan los estados simétricos de  $V[1]$ , dados por

$$\psi_n[1] = F_n \begin{cases} -\eta_n (k_n - k_0) e^{kx} & x < -\frac{L}{2} \\ q_n \cos q_n x + q_0 \tan q_0 x \sin q_n x & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ -\eta_n (k_n - k_0) e^{-kx} & x > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (25)$$

para  $n = 1, 3, 5, \dots$  Y cuando usamos los estados simétricos de  $V_0$ , dados por (16), obtenemos los estados antisimétricos de  $V[1]$

$$\psi_n[1] = B_n \begin{cases} \xi_n (k_n - k_0) e^{kx} & x < -\frac{L}{2} \\ -q_n \sin q_n x + q_0 \tan q_0 x \cos q_n x & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ -\xi_n (k_n - k_0) e^{-kx} & x > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (26)$$

para  $n = 2, 4, 6, \dots$ . En la figura 2 graficamos las funciones de onda superpuestas al potencial  $V [1]$  para el caso numérico que hemos estado desarrollando. En este caso el potencial  $V [1]$  tiene sólo tres niveles de energía.

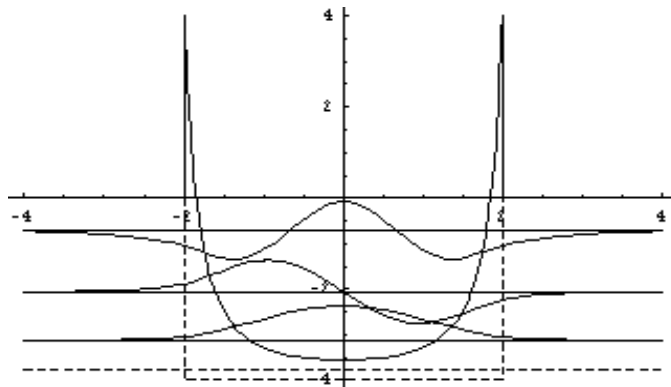


Figura 2: Eigenfunciones del potencial transformado de Darboux  $V [1]$ . La línea gruesa representa al potencial  $V [1]$  y con línea punteada hemos dibujado el potencial original y el nivel de energía que desaparece de  $V [1]$ .

## Bibliografía

- [1] Darboux, G., Compt. Rend. Acad. Sc. (Paris) **94** (1882) 1456
- [2] Matveev, V. B. y Salle, M. A. (1991) *Darboux Transformations and Solitons*, Springer-Verlag.
- [3] de la Peña, L.. (1991) *Introducción a la mecánica cuántica*, UNAM-FCE, México.
- [4] Khare, A. y Sukhatme, U., J. Phys. A: Math. Gen. 22 (1989) 2847.

## Índice de Autores

Aguirre Baltazar.....	1, 7, 101
Benítez Mojica David.....	13
Borbón González Dora Julia.....	19
Cárdenas Haro José Antonio.....	27
Castañeda Valdez Lizet Aime.....	13
Díaz Gómez José Luis.....	33, 39
Fernández Sesma Lorena.....	45
Figuroa Preciado Gudelia .....	67
Galaviz Yañez Guillermo.....	27
García Durán Francisco Cándido.....	75
García Salazar Mario.....	51
Gómez Quezada Mario.....	57, 93
Hugues Galindo Enrique.....	75
Jáuregui A.....	137
Larios Rodríguez Irma Nancy.....	67
Lizárraga Celaya Carlos.....	85
López Borbón Joaquín.....	57, 93
López Ceballos Paulina Danae.....	27
López Mariscal Gilberto.....	27
Loredo Carlos.....	7, 101
Mena Chavarría Rosalinda .....	107
Mora Ramírez Jesús Eduardo.....	119
Morales Peral Lina.....	39
Núñez Esquer Marco Antonio.....	113
Ocampo Díaz... Juan De Dios.....	119
Ocampo Peña Juan De Dios.....	119
Prado Pérez Carlos Daniel.....	125
Santana V.....	137
Shingareva Inna.....	85
Tellechea Armenta Eduardo.....	131
Villalba Gtz. Martha Cristina.....	107