

MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA EN POTENCIALES DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES DE $|r|$

Julio César Ávila Romero
Universidad de Sonora

Resumen

Estudiaremos el movimiento de una partícula en un potencial radial (que depende solo de $|r|$, la distancia al origen) junto con sus aplicaciones más conocidas como las leyes de Kepler. Un resultado interesante es que sólo existen dos potenciales de este tipo que tienen la particularidad que todas sus órbitas acotadas son cerradas, los cuales son muy conocidos en Física. Por el otro extremo, una motivación puramente matemática nos lleva a estudiar potenciales homogéneos de grado cero (que no dependen de $|r|$), los cuales nos reducen a estudiar el movimiento de la partícula sólo sobre la superficie de la esfera unitaria, de la cual explotaremos sus propiedades topológicas. Para este último caso daremos condiciones necesarias para las cuales la partícula tiene un límite sobre la superficie de la esfera al hacer tender el tiempo al infinito.

1 Introducción

Iniciaremos estudiando la ecuación de Newton con potenciales radiales, también llamados *campos de fuerza central*. Una aplicación de esta teoría es el movimiento planetario, el cual sabemos que se encuentra gobernado por las leyes de Kepler. De todas las posibles formas en que nos podemos imaginar un potencial radial, existen solamente dos casos en que todas sus órbitas acotadas son cerradas, y para nuestra fortuna son potenciales muy estudiados en física.

En contraste al caso anterior, podemos imaginar ahora potenciales que cumplan con una propiedad muy particular, que no dependan de la distancia al origen. Podríamos decir que son todo lo contrario a los potenciales radiales. Este tipo de potenciales nos reducen a estudiar el movimiento de una partícula del espacio n -dimensional al movimiento sobre la cáscara de una esfera, lo cual nos induce a explotar sus propiedades topológicas. Ya que nos encontramos restringidos al movimiento sobre una esfera, encontramos condiciones necesarias para que la trayectoria de la partícula tenga un límite cuando el tiempo tiende a infinito.

2 Movimiento de una partícula en un campo central

De acuerdo al principio del determinismo de Newton, el estado inicial de un sistema mecánico determina completamente y de manera única el movimiento del sistema. En particular, la

posición y velocidad inicial determinan la aceleración, es decir,

$$\ddot{x} = \mathbf{F}(x, \dot{x}, t) \quad (1)$$

donde $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. En este reporte sólo consideraremos funciones que son continuamente diferenciables en todo su dominio.

Los sistemas se clasifican de acuerdo a las propiedades de la función \mathbf{F} . En particular, se dice que el sistema es *conservativo* si existe una función (llamada potencial) $\mathbf{U} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = -\nabla\mathbf{U}$. La ecuación de movimiento para un sistema conservativo tiene la forma, $\ddot{x} = -\nabla\mathbf{U}$. El nombre de conservativo se debe a que la energía total del sistema se conserva.

En un sistema con un grado de libertad siempre es posible introducir el potencial, $U(x) = \int_{x_0}^x f(s)ds$ es decir, en \mathbb{R} todo sistema es conservativo. Ejemplos en \mathbb{R}^2 de campos no conservativos son los siguientes,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x_1, x_2) &= (x_2, -x_1). \\ \mathbf{F}(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Ahora caracterizamos los campos que presentan invariancia respecto a las rotaciones y reflexiones que se le pueden aplicar en el espacio, es decir, que no tiene ninguna dependencia angular. Un campo vectorial en \mathbb{R}^2 es llamado *Campo de Fuerza Central* con centro en 0 si es invariante respecto al grupo de rotaciones (incluyendo reflexiones) con 0 fijo.

En [2] se muestra que si \mathbf{F} es un campo de fuerza central entonces tiene la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \phi(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3)$$

donde ϕ es una función escalar de una sola variable, r , la distancia del punto al centro 0. Esto representa una manera mas fácil de saber cuando tenemos un campo de fuerza central.

Un ejemplo de un campo de fuerza central es el Campo Newtoniano dado por,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{k}{r^3} \mathbf{r}$$

y un ejemplo de un campo no central es el Campo dado en (2), o bien, como veremos después cualquier potencial homogéneo de grado cero (no constante) representa un ejemplo de un campo no central.

También se muestra en [2] que todo campo de fuerza central es conservativo y su energía potencial solo depende de la distancia al centro del campo, es decir, $\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}(r)$. El potencial para el campo de fuerza central Newtoniano es, $\mathbf{U}(r) = \frac{k}{|r|}$.

De esta manera, el movimiento de una partícula puntual (masa unitaria) en un campo de fuerza central sobre un plano está definido por la ecuación, $\ddot{\mathbf{r}} = \phi(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$

La invariancia de una ecuación de un sistema mecánico respecto a un grupo de transformaciones siempre implica una ley de conservación. El momento angular de una partícula puntual relativo al centro del campo 0, está dado por, $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ donde el vector $\mathbf{M} = M\mathbf{n}$ es perpendicular al plano, con $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es un sistema ortonormal orientado en el plano con \mathbf{n} su vector normal.

Teorema 2.1 (Ley de Conservación del Momento Angular). *En un Campo de Fuerza Central, el momento angular \mathbf{M} relativo al centro del campo 0 no cambia con el tiempo.*

A partir de su definición y de la ecuación de movimiento se muestra el teorema anterior. Introduciremos coordenadas polares $\{r, \varphi\}$ en el plano. Consideremos sobre el punto \mathbf{r} , con coordenadas polares, dos vectores ortonormales, $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi\}$. El vector \mathbf{e}_r se encuentra sobre la dirección del radio vector y el vector \mathbf{e}_φ es perpendicular a éste en la dirección de crecimiento de φ , es decir,

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$$

y con esto se obtiene la siguiente relación,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \quad (4)$$

la cual implica que,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = (r^2\dot{\varphi})\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi$$

por lo tanto, $M=r^2\dot{\varphi}$ es la cantidad conservada.

Esta conservación tiene un significado geométrico. Kepler llamó a la velocidad del cambio de área barrida $S(t)$ por el radio vector como *velocidad sectorial*,

$$C = \frac{dS}{dt}$$

Esta ley de conservación está estrechamente ligada con la segunda Ley de Kepler, la cual establece que: en tiempos iguales el radio vector barre áreas iguales. O lo que es lo mismo decir, la velocidad sectorial es constante. Entonces, en nuestro caso tenemos que,

$$C = \frac{d}{dt}S(t) = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}M = \text{cte.}$$

Por la ley de conservación del momento angular, el problema de una partícula en un campo de fuerza central se reduce un grado de libertad y así, el movimiento queda completamente determinado.

Teorema 2.2. *Para el movimiento de una partícula puntual de masa unitaria en un campo central, la distancia del centro del campo varía en la misma tasa como r varía en el problema unidimensional con la energía potencial,*

$$\mathbf{V}(r) = \mathbf{U}(r) + \frac{M^2}{2r^2}$$

conocida como, Energía Potencial Efectiva.

Se puede observar que la energía derivada del problema unidimensional es, igual a la energía del problema original, usando (4), la cual es

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} + \mathbf{V}(r) = \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \mathbf{U}(r)$$

lo cual permite integrar completamente la ecuación de movimiento y así obtenemos la ecuación de la órbita en coordenadas polares:

$$\varphi = \int \frac{M/r^2}{\sqrt{2(E - \mathbf{V}(r))}} dr. \quad (5)$$

Fijamos el valor de la constante del momento angular M , y observamos que la variación de r en el tiempo es fácil de visualizar en la gráfica del potencial efectivo $\mathbf{V}(r)$. Sea E el valor total de la energía, todas las órbitas se encuentran en la región $\mathbf{V}(r) \leq E$. Los puntos de la frontera, $\mathbf{V} = E$, son llamados *puntos de retorno*, y estos cumplen que $\dot{r} = 0$, pero en general, la velocidad de la partícula en movimiento no es igual a cero, puesto que para $M \neq 0$ se tiene que $\dot{\varphi} \neq 0$.

La desigualdad $\mathbf{V}(r) \leq E$ nos arroja como resultado una o varias regiones anulares en el plano,

$$0 \leq r_{\min} \leq r \leq r_{\max} \leq \infty$$

las cuales analizaremos por casos.

Consideremos el caso cuando $0 \leq r_{\min} < r_{\max} < \infty$. En este caso el movimiento es acotado y se encuentra en la región dentro del anillo formado por las circunferencias de radio r_{\min} y r_{\max} . Los puntos donde $r = r_{\min}$ son llamados *pericentros* y donde $r = r_{\max}$ son llamados *apocentros*. El valor del ángulo que se encuentra entre el Apocentro y Pericentro sucesivos está dado por la integral,

$$\Phi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M/r^2}{\sqrt{2(E - \mathbf{V}(r))}} dr.$$

En general, las órbitas no son cerradas, y para esto daremos condiciones para que una órbita sea cerrada. Si el ángulo Φ es conmensurable con 2π , es decir, si $\Phi = 2\pi(\frac{m}{n})$, donde m, n son enteros, entonces la órbita es cerrada. Su demostración se hace al notar que después de un número entero de veces de repetir el ángulo Φ , siempre podemos tener un múltiplo entero de 2π , lo cual significa que la órbita es cerrada.

Ahora veremos las condiciones para que una órbita no sea cerrada, es decir, sea abierta y sus consecuencias.

Teorema 2.3. *Si el ángulo Φ no es conmensurable con 2π , entonces la órbita es densa en la región anular.*

Este teorema es una aplicación directa del Teorema de Poincaré, el cual puede verificar en [2]. Si tenemos que $r_{\min} = r_{\max}$, es decir, E es el valor del punto mínimo del potencial efectivo \mathbf{V} , entonces la región anular se degenera a un círculo el cual también es una órbita.

Para valores de E que sean sólo un poco mayores que el mínimo de \mathbf{V} , la región anular $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ es muy estrecha. En el correspondiente caso unidimensional, r hará oscilaciones alrededor del punto mínimo del potencial efectivo. Para este caso, el ángulo Φ se puede aproximar como

$$\Phi \approx \Phi_{circ} = \pi \sqrt{\frac{\mathbf{U}'}{3\mathbf{U}' + r\mathbf{U}''}}$$

Con esta aproximación, se puede ver que la magnitud de Φ_{circ} es independiente de r sólo para los potenciales de la forma $\mathbf{U}(r) = ar^\alpha$ para $\alpha \geq -2, \alpha \neq 0$ y $\mathbf{U}(r) = b \ln r$. De aquí que $\phi_{circ} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha + 2}}$ (el caso logaritmico es para $\alpha = 0$).

Con todo esto se puede concluir que sólo existen dos casos en los cuales todas las órbitas acotadas en un campo central son cerradas, que son:

$$\mathbf{U}(r) = ar^2 \quad \text{y} \quad \mathbf{U}(r) = -\frac{k}{r} \quad a, k > 0$$

donde el primero de ellos corresponde al *oscilador armónico* cuyas órbitas son elípticas y el segundo de ellos es el *potencial Newtoniano*.

3 Ecuación de Newton con Potenciales Homogéneos de grado cero

En esta sección daremos un giro drástico sobre la clase de funciones potenciales que se estudiarán en la ecuación de Newton. Cabe mencionar que la motivación al estudio de este problema es meramente matemática pues al parecer no existe alguna función potencial de este tipo en un fenómeno físico estudiado en un laboratorio.

A saber, la clase de funciones que se estudiarán en esta sección son homogéneas de grado cero, las que sólo llamaremos homogéneas.

Sea $\mathbf{V} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función potencial tal que $\mathbf{V} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ y es homogénea de grado cero, es decir,

$$\mathbf{V}(tx) = \mathbf{V}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in (0, \infty)$$

Consideremos soluciones $x(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ de la ecuación de Newton

$$\ddot{x}(t) = -\nabla \mathbf{V}(x(t)) \tag{6}$$

Introducimos la siguiente notación,

$$\left\| \begin{array}{l} r(t) = |x(t)| \\ w(t) = \frac{x(t)}{r(t)} \\ p_\perp(t) = p(t) - (w(t) \cdot p(t))w(t) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} p(t) = \dot{x}(t) \\ \dot{f}(t) = \frac{d}{dt} f(t) \end{array} \right.$$

La ventaja que tenemos con el hecho de trabajar con este tipo de potenciales, es que sólo necesitamos trabajar con el vector unitario ya que el potencial se comporta con el mismo efecto sobre los vectores independientemente de su longitud. De esta manera lo que estamos haciendo es compactificar todo el espacio a la superficie de una esfera unitaria y así aprovecharemos las propiedades topológicas de dicha superficie. Entonces estudiaremos el comportamiento del vector $w(t)$ de una partícula bajo la acción de este potencial cuando el tiempo tiende a infinito.

Describiremos las condiciones necesarias que debe cumplir el potencial \mathbf{V} para que el siguiente límite exista,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t). \quad (7)$$

Además, se mostrará que este límite es un punto crítico del potencial \mathbf{V} , es decir, el gradiente del potencial se anula en este punto. La demostración hace uso de los conceptos de *compacidad y conexidad* que pueden consultarse en [3].

En [1], se demuestra lo siguiente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{\perp}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \nabla \mathbf{V}(w(t)) = 0 \quad (8)$$

En este mismo artículo también se demuestra que cuando el conjunto de puntos críticos del potencial es finito entonces (7) existe y es un punto crítico. Aquí proponemos una demostración mas general, que se apoya en los resultados topológicos previos.

Teorema 3.1. *Suponga $Cr \equiv \{w \in S^{n-1} : \nabla \mathbf{V}(w) = 0\}$ es totalmente desconexo. Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = w_0 \quad (9)$$

existe y $w_0 \in Cr$.

Demostración: Sea $R = \{w(t) : t > 0\} \subset S^{n-1}$ el cual es acotado. Sea A el conjunto de puntos límite de R ; usando (8) y la continuidad de $\nabla \mathbf{V}$ se tiene que $A \subseteq Cr$ y así A es totalmente desconexo.

Sean $w_1, w_2 \in A$, entonces existen sucesiones $\{t_n\}, \{\tau_n\}$ tales que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w(t_n) = w_1 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w(\tau_n) = w_2$$

Seleccionamos las sucesiones tales que, $t_n \leq \tau_n$, y definimos

$$L_n = \{w(t) : t_n \leq t \leq \tau_n\}$$

el cual es un conjunto no vaco compacto y conexo. Adems L_n es perfecto con lo cual obtenemos que L_n est contenido en A . Se sigue de aqu que L_n debe constar de un nico punto por lo que $w_1 = w_2$. Por consiguiente, A consta de un nico punto w_0 y as el limite existe.

Para mostrar que $w_0 \in Cr$, se utiliza (8) y la continuidad de $\nabla \mathbf{V}$. □

En [1] se demuestra que en el plano el límite (9) existe para cualquier función potencial homogénea de grado cero.

Teorema 3.2. *Suponga que $x(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es una solución de (6). Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = w_0$$

existe y $w_0 \in Cr$.

En general, se puede bosquejar un contraejemplo para que en una dimensión de orden mayor no tenga límite, el cual no se tratará en este reporte.

Bibliografía

- [1] Herbst, Ira W. (1991) Spectral and scattering theory for Schrödinger operators with potentials independent de $|x|$. *American Journal of Mathematics* 113. 509-565.
- [2] Arnold, V.I. (1989) *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer.
- [3] Munkres, James R. (1999) *Topology*. Prentice-Hall.