

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE PERTURBACIONES USANDO ÁLGEBRA COMPUTACIONAL

José Ítalo Sánchez Gil Inna Shingareva Martín G. García A.
Universidad de Sonora

Resumen

Este trabajo es una introducción a la teoría de perturbaciones usando álgebra computacional. Se obtienen soluciones analíticas aproximadas de ecuaciones de varios tipos, que involucran un parámetro pequeño. Las ecuaciones pueden ser de cualquier clase, es decir, algebraicas, diferenciales, integrales, integro-diferenciales, etc. Sin embargo, en este trabajo sólo se consideran problemas de perturbaciones regulares y singulares para ecuaciones algebraicas. Las soluciones analíticas obtenidas usando los métodos de perturbación y álgebra computacional serán comparadas con las soluciones exactas o numéricas correspondientes.

1 Introducción

La teoría de perturbaciones es una colección de métodos para obtener *soluciones analíticas aproximadas* de ecuaciones en las que se involucra un parámetro pequeño ε . Las ecuaciones pueden ser, por ejemplo, algebraicas, diferenciales (EDO, EDP), integrales, integro-diferenciales, etc. La teoría de perturbaciones se aplica en diferentes áreas del conocimiento. Por ejemplo, la mayoría de los métodos de la física moderna contienen aplicaciones de métodos de perturbación.

Si seguimos los métodos de la teoría de perturbaciones y aplicamos cambios de variables y usamos álgebra computacional, entonces lo que se pretende es reducir un problema difícil a uno más fácil.

Es muy frecuente que en las aplicaciones, cuando se estudia un modelo de un sistema físico, químico, biológico, etc., se tenga la siguiente ecuación (algebraica, diferencial, etc.), que involucra un parámetro pequeño ε definido en un intervalo $I = (0, \varepsilon_0)$:

$$F(x; \varepsilon) = 0, \tag{1}$$

donde x es la variable real. Resolvemos la ecuación (1) y la solución es llamada una *solución perturbada*. Si conocemos la *solución no perturbada*, es decir, la solución de la ecuación

$$F(x; 0) = 0, \tag{2}$$

entonces el análisis asintótico nos lleva a construir la solución analítica aproximada para $\varepsilon > 0$ pequeño. A continuación, presentamos las definiciones y el teorema que son esenciales en la teoría de perturbaciones. Fijemos la variable x en la ecuación (1), digamos, $x = x^*$ y hagamos $F(x^*; \varepsilon) = f(\varepsilon)$.

Definición 1.1. Una función $g(\varepsilon)$, $\varepsilon \in I$, se llama función de norma si $g(\varepsilon)$ es positiva y monótona en el intervalo I .

El comportamiento de una función $f(\varepsilon)$ es comparado con una función de norma $g(\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ y para ello empleamos los símbolos de Landau, “O” y “o”.

Definición 1.2. $f(\varepsilon) = O(g(\varepsilon))$ cuando $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$, si existen una vecindad de ε_0 y una constante $k > 0$, tales que $|f(\varepsilon)| \leq k|g(\varepsilon)|$. Por lo tanto, $f = O(g)$ cuando $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ si f/g es acotada.

Definición 1.3. $f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon))$ cuando $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$, si existen una vecindad de ε_0 y una función $\delta(\varepsilon) > 0$, tales que $\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \delta(\varepsilon) = 0$ y $|f(\varepsilon)| \leq \delta(\varepsilon)|g(\varepsilon)|$. Por lo tanto, $f = o(g)$ cuando $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ si $f/g \rightarrow 0$.

Definición 1.4. Una sucesión $g_n(\varepsilon)$ ($n = 1, 2, \dots$) de funciones de norma es una sucesión asintótica si $g_{n+1}(\varepsilon) = o(g_n(\varepsilon))$ cuando $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$.

Teorema 1.5. Teorema fundamental de la teoría de perturbaciones. Si

$$A_0g_0(\varepsilon) + A_1g_1(\varepsilon) + A_2g_2(\varepsilon) + \dots + A_n g_n(\varepsilon) + O(g_{n+1}(\varepsilon)) = 0,$$

donde $g_n(\varepsilon)$ es una sucesión asintótica y los coeficientes A_i ($i = 0, 1, \dots, n$) son independientes de ε , entonces

$$A_0 = A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0.$$

Demostración. Definimos

$$P(x(\varepsilon)) = A_0g_0(\varepsilon) + A_1g_1(\varepsilon) + \dots + A_n g_n(\varepsilon) + O(g_{n+1}(\varepsilon)) = 0. \quad (3)$$

Dividiendo a ambos lados de la ecuación (3) por $g_i(\varepsilon)$ ($i = 0, \dots, n$) y calculando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ vemos que si $P(x(\varepsilon)) = 0$, entonces $A_i = 0$. \square

En este trabajo daremos una introducción a los principios generales de la teoría de perturbaciones aplicando los métodos a algunos casos simples de ecuaciones algebraicas.

La teoría de perturbaciones fue desarrollada muchos años antes de la existencia de las computadoras. Aunque las computadoras pueden ser utilizadas para resolver una gran variedad de problemas numéricos, los métodos de perturbaciones más antiguos se siguen utilizando. Esto es así porque las soluciones numéricas no siempre son necesarias, a veces no son la forma de aproximación más útil (por ejemplo, si la ecuación resuelta contiene muchos parámetros y requerimos la solución como una función de esos parámetros). También algunas veces, es más conveniente tener una solución aproximada en términos de una fórmula que tener un resultado numérico. Con álgebra computacional es posible encontrar soluciones

analíticas aproximadas de orden superior y de mayor exactitud, mismas que podemos encontrar sin la ayuda de estas técnicas. En la práctica los métodos de perturbación y numéricos son complementarios, por ejemplo, podemos usar la teoría de perturbaciones para verificar resultados numéricos o proporcionar el primer paso para un método numérico, y las soluciones numéricas pueden ser usadas para comprobar algunos errores algebraicos o errores de cualquier tipo.

En general, los métodos de perturbación son algebraicamente laboriosos y usualmente no es posible calcular más de dos términos de una serie de perturbación de un problema real, simplemente porque el álgebra se vuelve inmanejable. La aplicación de álgebra computacional elimina este obstáculo y algunas veces nos permite encontrar más términos de orden superior. A continuación, mostramos cómo hacer ésto para ecuaciones algebraicas.

2 Perturbaciones de ecuaciones algebraicas

2.1 Métodos de perturbaciones regulares

Ahora mostraremos cómo podemos aplicar la teoría de perturbaciones en algunos problemas particulares los cuales pueden resolverse analíticamente o en forma numérica.

Un problema de perturbaciones regulares está definido como un problema en el cual una serie de perturbación es una serie de potencias en ε con un radio de convergencia diferente de zero. Para estos problemas la solución perturbada se acerca suavemente a la solución de la ecuación no perturbada (2) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Resolvemos la ecuación (1), donde F es alguna función de la variable real x y del parámetro pequeño ε (la función F también puede depender de otros parámetros). Se asume que la ecuación no perturbada (2) tiene una solución no perturbada conocida x_0 y que la solución de la ecuación perturbada (1) está cerca a esta solución y puede ser expandida como una serie de potencias de ε (o alguna función de ε). Comenzamos por encontrar aproximaciones a las raíces de la ecuación cuadrática.

Ejemplo 2.1. *Consideremos la ecuación*

$$x^2 - ax + \varepsilon = 0 \tag{4}$$

para valores muy pequeños de ε , esto es $|\varepsilon| \ll 1$. Si $\varepsilon = 0$, las raíces de la ecuación no perturbada $x^2 - ax = 0$ son $x_0 = 0, a$. Por lo tanto, si $\varepsilon \rightarrow 0$, entonces

$$X_1(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad X_2(\varepsilon) \rightarrow a.$$

Si $|\varepsilon| \ll 1$, las raíces de la ecuación (4) son de la forma:

$$X_i = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots, \quad (i = 1, 2), \tag{5}$$

donde x_k ($k = 1, 2, \dots$) son coeficientes que deben ser determinados. Para esto, sustituimos cada serie definida en (5) en la ecuación (4) y agrupamos todos los términos de cada potencia de ε , por ejemplo, hasta $O(\varepsilon^5)$. Entonces el parámetro ε es considerado como una variable

(no como una constante fija). Por lo tanto, la ecuación modificada se satisface para un rango de valores de ε . Por el teorema fundamental de la teoría de perturbaciones esto significa que todos los coeficientes de ε^k ($k=0, 1, \dots$) deben ser iguales a cero. Por lo tanto, tenemos cinco ecuaciones, las cuales pueden ser resueltas sucesivamente para x_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$). Puesto que la ecuación de orden cero tiene dos soluciones, obtenemos las dos soluciones aproximadas siguientes:

$$X_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{a} + \frac{\varepsilon^2}{a^3} + \frac{2\varepsilon^3}{a^5} + \frac{5\varepsilon^4}{a^7} + O(\varepsilon^5), \quad X_2(\varepsilon) = a - \frac{\varepsilon}{a} - \frac{\varepsilon^2}{a^3} - \frac{2\varepsilon^3}{a^5} - \frac{5\varepsilon^4}{a^7} + O(\varepsilon^5).$$

Ahora comparemos analíticamente y numéricamente las soluciones exactas y las aproximadas. Las soluciones exactas de esta ecuación son: $x_1 = \frac{1}{2}a(1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon/a^2})$ y $x_2 = \frac{1}{2}a(1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon/a^2})$. Si expandemos la raíz cuadrada $\sqrt{1 - 4\varepsilon/a^2}$ como una serie de Taylor alrededor de $\varepsilon = 0$ de orden 5 y sustituimos los resultados en x_1 y x_2 , entonces tenemos

$$x_1 = \frac{\varepsilon}{a} + \frac{\varepsilon^2}{a^3} + \frac{2\varepsilon^3}{a^5} + \frac{5\varepsilon^4}{a^7} + O(\varepsilon^5), \quad x_2 = a - \frac{\varepsilon}{a} - \frac{\varepsilon^2}{a^3} - \frac{2\varepsilon^3}{a^5} - \frac{5\varepsilon^4}{a^7} + O(\varepsilon^5),$$

que coinciden con las soluciones de la teoría de perturbaciones. Numéricamente, si calculamos un error de aproximación, por ejemplo, para $a = 5$ y $\varepsilon = 0.01$, tenemos las soluciones exactas

$$x_1 = .20080646e - 1, \quad x_2 = 4.979919354$$

y las soluciones aproximadas

$$X_1(0.01) = .2008064640e - 1, \quad X_2(0.01) = 4.979919354,$$

con errores de $.1991967788e - 7$ y 0. Si la aproximación no es bastante buena con siete dígitos decimales, entonces podemos calcular más términos de las expansiones.

Presentamos cómo obtener las soluciones de perturbaciones regulares de ecuaciones polinomiales usando un sistema de álgebra computacional (por ejemplo, Maple):

```
n := 25; Ec := x -> x^2 - a*x + epsilon; RegPertPoly(Ec, x, epsilon);
```

El procedimiento `RegPertPoly`, escrito para diferentes problemas, es presentado en el Apéndice. Este ejemplo ilustra todas las ideas centrales de la teoría de perturbaciones regulares y también nos permite comparar nuestras soluciones aproximadas con las soluciones exactas.

2.2 Métodos de perturbaciones singulares

Un problema de perturbaciones singulares es un problema en el cual la serie de perturbación

- (i) no puede tener la forma de una serie de potencias, o
- (ii) puede tener la forma de una serie de potencias con radio de convergencia igual a cero (por ejemplo, podría ser una expansión asintótica).

En estos problemas la ecuación no perturbada (2) usualmente tiene un comportamiento diferente que la ecuación perturbada (1).

a) Método de coordenadas reescaladas

Ejemplo 2.2. Consideremos la ecuación

$$\varepsilon x^2 - ax + \varepsilon = 0, \quad |\varepsilon| \ll 1. \quad (6)$$

Si resolvemos este problema como un problema de perturbaciones regulares (con ayuda del procedimiento *RegPertPoly*), encontramos sólo una raíz:

$$X_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{a} + \frac{\varepsilon^3}{a^3} + \frac{2\varepsilon^5}{a^5} + O(\varepsilon^7).$$

Intentemos encontrar la segunda raíz usando las soluciones exactas: $x_1 = \frac{1}{2\varepsilon}(a + \sqrt{a^2 - 4\varepsilon^2})$, $x_2 = \frac{1}{2\varepsilon}(a - \sqrt{a^2 - 4\varepsilon^2})$. Si tomamos $|\varepsilon| \ll 1$, expandemos la raíz cuadrada como una serie de Taylor alrededor de $\varepsilon = 0$ de orden 7 y sustituimos los resultados en x_i ($i = 1, 2$), entonces se tiene

$$x_1 = \frac{a}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{a} - \frac{\varepsilon^3}{a^3} - \frac{2\varepsilon^5}{a^5} + O(\varepsilon^7), \quad x_2 = \frac{\varepsilon}{a} + \frac{\varepsilon^3}{a^3} + \frac{2\varepsilon^5}{a^5} + O(\varepsilon^7).$$

La raíz que falta, x_1 , tiene la característica que tiende al infinito cuando $\varepsilon \rightarrow 0$; esto significa que existe una singularidad en el modelo. La forma de x_1 sugiere el cambio de variable

$$z = \varepsilon x.$$

Estas coordenadas reescaladas convierten la ecuación (6) en la ecuación $z^2 - az + \varepsilon^2 = 0$, que tiene un comportamiento regular. El procedimiento general de la teoría de perturbaciones singulares es extraer el comportamiento singular de una solución y, por un cambio de variable, reducir el problema singular a un problema regular. Las soluciones de este problema modificado son:

$$z_1 = a - \frac{\varepsilon^2}{a} - \frac{\varepsilon^4}{a^3} - \frac{2\varepsilon^6}{a^5} + O(\varepsilon^7), \quad z_2 = \frac{\varepsilon^2}{a} + \frac{\varepsilon^4}{a^3} + \frac{2\varepsilon^6}{a^5} + O(\varepsilon^7).$$

En términos de la variable original x obtenemos:

$$X_1(\varepsilon) = \frac{a}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{a} - \frac{\varepsilon^3}{a^3} - \frac{2\varepsilon^5}{a^5} + O(\varepsilon^7), \quad X_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{a} + \frac{\varepsilon^3}{a^3} + \frac{2\varepsilon^5}{a^5} + O(\varepsilon^7).$$

Estas expresiones analíticas son idénticas a las soluciones exactas del problema singular. En este ejemplo hemos encontrado las raíces del problema singular por un cambio de variable, sin recurrir a la fórmula cuadrática. Esto es importante puesto que se aplica para polinomios de orden superior.

Aquí presentamos cómo podemos obtener las soluciones de problemas de perturbaciones singulares para ecuaciones polinomiales, usando el sistema Maple:

```
n := 7; Ec := x -> epsilon*x^2-a*x+epsilon;
Ec1:= unapply(simplify(epsilon*Ec(z/epsilon)), z);
R := RegPertPoly(Ec1, z, epsilon);
for i from 1 to nops(R) do X[i]:= rhs(expand((x*epsilon=R[i])/epsilon)); od;
```

b) Método de normas no determinadas.

Ejemplo 2.3. Consideremos la ecuación

$$x^2 - ax\varepsilon - \varepsilon = 0, \quad |\varepsilon| \ll 1. \quad (7)$$

Si resolvemos este problema como un problema regular (por ejemplo, con ayuda el procedimiento **RegPertPoly**), no encontraremos las raíces (como el lector puede verificar en la ilustración final de Maple, segunda línea). Esto significa que esta ecuación no tiene raíces de la forma (5). Consideramos un cambio de variable

$$x = \varepsilon^q z, \quad z = z_0 + z_1\varepsilon + z_2\varepsilon^2 + \dots$$

Entonces la ecuación (7) tiene la forma:

$$\varepsilon^{2q} z^2 - a\varepsilon^{q+1} z - \varepsilon = 0.$$

Si igualamos todas las posibles parejas de potencias de funciones de norma, tenemos:

- (1) $2q = q + 1$, $\varepsilon^2 z^2 - a\varepsilon^2 z - \varepsilon = 0$, lo cual nos indica que el comportamiento singular se mantiene;
- (2) $q+1 = 1$, $z^2 - a\varepsilon z - \varepsilon = 0$, lo cual nos dice que el comportamiento singular se mantiene;
- (3) $2q = 1$, $z^2 - a\varepsilon^{(1/2)} z - 1 = 0$, y por lo tanto encontramos que $q = \frac{1}{2}$.

Si hacemos un cambio de parámetro, parámetro reescalado $\alpha = \varepsilon^{1/2}$, y aplicamos la expansión regular para este parámetro α (con ayuda del procedimiento **RegPertPoly**), obtenemos las dos soluciones:

$$z_1(\alpha) = 1 + \frac{a\alpha}{2} + \frac{a^2\alpha^2}{8} - \frac{a^4\alpha^4}{128} + \frac{a^6\alpha^6}{1024}, \quad z_2(\alpha) = -1 + \frac{a\alpha}{2} - \frac{a^2\alpha^2}{8} + \frac{a^4\alpha^4}{128} - \frac{a^6\alpha^6}{1024}.$$

En términos del parámetro original ε y la variable original x , tenemos el resultado final:

$$X_1 = \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{a\varepsilon}{2} + \frac{a^2\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{8} - \frac{a^4\varepsilon^{\frac{5}{2}}}{128} + \frac{a^6\varepsilon^{\frac{7}{2}}}{1024} + O(\varepsilon^{\frac{9}{2}}), \quad X_2 = -\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{a\varepsilon}{2} - \frac{a^2\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{8} + \frac{a^4\varepsilon^{\frac{5}{2}}}{128} - \frac{a^6\varepsilon^{\frac{7}{2}}}{1024} + O(\varepsilon^{\frac{9}{2}}).$$

Ilustramos el método de normas no determinadas (método de perturbación singular) usando el sistema Maple:

```
n := 7; Ec := x -> x^2-a*x*epsilon-epsilon;
RegPertPoly(Ec, x, epsilon);
Ec1 := unapply(simplify(Ec(epsilon^q*z)), z);
E1 := subs(q=1, Ec1(z)); E2 := subs(q=0, Ec1(z));
E3 := simplify(subs(q=1/2, Ec1(z))/epsilon);
E31 := unapply(subs(epsilon^(1/2)=alpha, E3), z);
R := subs(alpha=epsilon^(1/2), RegPertPoly(E31, z, alpha));
for i from 1 to nops(R) do X[i]:= expand(R[i]*epsilon^(1/2)); od;
```

Apéndice

1. Teoría de perturbaciones regulares para ecuaciones polinomiales

```
RegPertPoly := proc(Expr, var, param)
  global Sers:
  local i, j, Expr1, X, y, k:
  y := var[0];
  Expr1:= collect(Expr(y), param);
  X[0] := [solve(coeff(Expr1, param, 0), var[0])];
  k := nops(X[0]);
  for j from 1 to k do
    y[j] := X[0][j];
    for i from 1 to n do
      y[j] := y[j]+param^i*var[i];
      Expr1 := Expr(y[j]);
      X[i] := solve(coeff(Expr1, param, i), var[i]);
      y[j] := X[0][j] + add(X[i]*param^i, i=1..i);
    od:
  Sers := sort(convert(y, list)):
od:
RETURN(Sers):
end:
```

Bibliografía

- [1] Nayfeh, A. (1973) *Perturbation Methods*. Wiley.
- [2] Bender, C.M.; Orszag, S.A. (1978) *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill.