

LA CALCULADORA GRAFICADORA SIMBÓLICA Y PROGRAMABLE (TI-92 PLUS) EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS, EL CASO DEL PROBLEMA DEL CILINDRO, UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN.

Maximiliano De Las Fuentes Lara, Carlos Valdez González, Ruth Rivera C.

Facultad de Ingeniería-Unidad Mexicali, Universidad Autónoma de Baja California

RESUMEN

Apoyados en la teoría de la escuela francesa sobre las representaciones (Duval y otros) se diseñó una estrategia didáctica de acercamiento a conceptos matemáticos del cálculo diferencial, como son: función, dominio, rango, límite, derivada, entre otros, mediante la resolución de problemas de optimización. Dicho acercamiento se logra mediante el apoyo de la calculadora graficadora, simbólica y programable, en particular el uso de la programación, la que de manera simultánea y a conveniencia permite visualizar y conectar distintas representaciones, a saber: gráfica, icónica, numérica y algebraica. Esta estrategia didáctica de acercamiento también se justifica en virtud de las serias dificultades que tienen los estudiantes para enfrentar y resolver por sí solos situaciones problemáticas, la deficiencia para asociar los conceptos con su funcionalidad en diferentes contextos y la aplicación correspondiente de los conceptos matemáticos a los problemas de ingeniería.

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente, la función del profesor de matemáticas, en todos los niveles de la enseñanza, ha sido la de transmitir a los alumnos un cuerpo sistematizado de conocimientos, es decir, ha consistido en transmitir información. En nuestros días, y sobre todo a raíz de las reflexiones provocadas por el desarrollo social, el impacto de las nuevas tecnologías de la información, las reformas curriculares y las aportaciones de la Matemática Educativa a la comprensión de los procesos de aprendizaje de las matemáticas, se ha venido definiendo una nueva actividad o responsabilidad del profesor: la de diseñar la enseñanza. En parte, eso es lo que significa profesionalizar la labor docente. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que el diseño de la enseñanza es una actividad del profesor cualitativamente diferente de su actividad práctica. El diseño de la enseñanza es una actividad teórica, y requiere de conocimientos más profundos del profesor no solamente en lo que concierne a la asignatura, sino también en lo relativo al proceso docente, al aprendizaje y a los estudiantes. Es un proceso creativo que exige no solamente profundos conocimientos psicológicos y pedagógicos, sino también del pensamiento lógico y en buena medida de la intuición.

La ubicación temática que describe el título de este trabajo no es de ninguna manera desconocida para los profesores de matemáticas, pues la mayoría de los docentes que impartimos cursos de matemáticas I en las distintas Instituciones Educativas de Nivel Superior abordamos tal temática, en mayor o menor grado de profundidad, con alguna u otra estrategia didáctica, utilizando recursos tecnológicos o no. De cualquier forma los docentes esperamos que los estudiantes realicen conexiones de manera mas o menos adecuada entre los conceptos matemáticos y los algoritmos asociados a los mismos para la obtención de los resultados finales.

La aplicación de las herramientas matemáticas en la resolución de problemas físicos, químicos, de la ciencia o ingeniería en general, en particular las del cálculo diferencial, es uno de los objetivos que se pretende logren los estudiantes en los cursos de matemáticas I (cálculo diferencial), sin desprestigiar de ninguna forma las competencias en los distintos contextos privilegiados por la matemática, a saber: geométrico, numérico, algebraico y verbal, las que también forman parte importante sin lugar a duda de la formación del pensamiento matemático de nuestros estudiantes.

Para los docentes no cuesta trabajo percibir que la solución sintética de los problemas de optimización de los cursos de matemáticas I se reduce a resolver la ecuación $f'(x) = 0$, con el planteamiento previo de la función $f(x)$. Sin embargo tal percepción no es fortuita, la comprensión auténtica no creemos pueda restringirse solamente al desarrollo de procedimientos algebraicos y demostraciones formales en este sistema de representación.

Por otra parte la presencia y disponibilidad real de recursos tecnológicos, en particular computadoras o calculadoras, es evidente, y abstraerse de su uso e incluso de su existencia misma, nos parece preocupante. En educación, los usos que se den a las calculadoras o computadoras son diversos y dependen directamente de los objetivos planteados.

En particular la calculadora graficadora simbólica y programable (la cual verdaderamente es una microcomputadora, dotada con casi todos los adelantos de la tecnología del campo: mayor capacidad de memoria, interactividad con la computadora, manipulación simbólica, menú icónico, entre otras, con alcances sustantivos y limitaciones por supuesto) es objeto de un verdadero examen de reflexión; su capacidad expresiva es potente en relación con la estrategia didáctica que se diseñe para la apropiación y/o desarrollo de competencias.

Debe aclararse que su uso en la educación no tiene por objeto reducir operaciones o simplificar procedimientos algebraicos o numéricos, mas bien se trata de un mediador cuyo fin es entre otros la de auxiliar al estudiante en la observación de los efectos de la variación de parámetros, el estudio y análisis de fenómenos de tipo geométrico o numérico, en general la exploración y el descubrimiento de ciertas regularidades mediante la construcción de situaciones hipotéticas a partir de estrategias didácticas previamente diseñadas.

ESTRATEGIA DIDÁCTICA

A continuación, con apoyo de la calculadora graficadora simbólica y programable, en particular utilizando la programación, se intenta mostrar una idea que creemos permite conectar diferentes representaciones. Hemos aprovechado para tal caso un problema típico de optimización, el conocido problema del depósito cilíndrico. Dicho problema se describe en la Figura 1. Mientras que la Figura 2 presenta el menú de opciones del programa, nos hemos asegurado de incurrir a propósito en ese menú con la entrada de datos que correspondería únicamente a la cantidad de material propuesta del cilindro, un análisis de propuestas que incorpora de manera simultánea tres distintas representaciones, y que posibilita la conexión de las mismas, (Figuras 4, 5, 6 y 7). Es factible abordar el análisis gráfico el cual se despliega con la opción F4 (Figuras 8, 9, 10 y 11). La última parte del programa se refiere a la emisión de los

resultados en donde consideramos los modelos algebraicos (figuras 12 y 13). Al final del documento se presenta el programa correspondiente al problema del depósito cilíndrico con área o cantidad de material definida para calcular las dimensiones radio r y altura h que generan el volumen máximo.

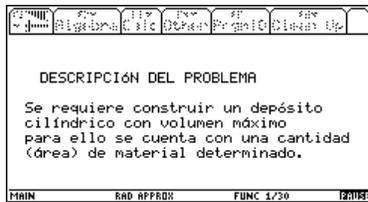


Figura 1

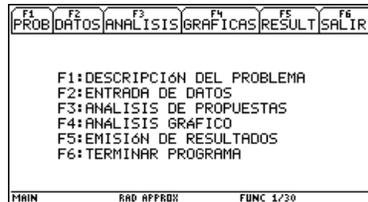


Figura 2



Figura 3

Análisis de propuestas

En este apartado del programa tenemos la posibilidad con el apoyo del recurso tecnológico de abordar distintas propuestas virtuales, esto se traduce en la promoción de sentido de las distintas representaciones bajo cierto contexto físico, los inicios de la fabricación de un gráfico continuo a través de un gráfico discreto, la descripción, el tratamiento y la conversión de cada representación, así como el principio del análisis gráfico de la función.

En este mismo sentido podemos asociar, conectar y transitar en las distintas representaciones, digamos de la icónica a la numérica y de esta última a la gráfica, en general transitar de un registro a otro. En todos los casos tales registros contemplan un sentido práctico, es decir están ligados a un contexto físico.

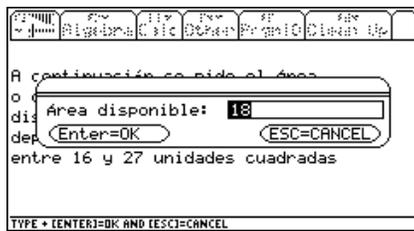


Figura 4

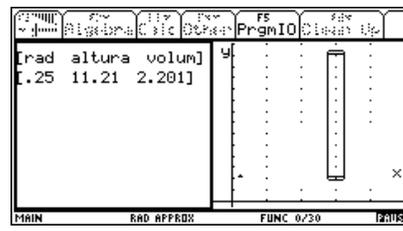


Figura 5

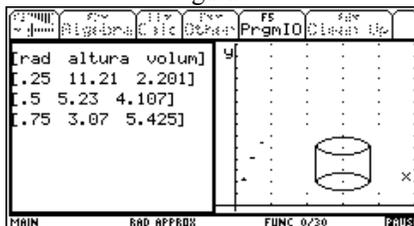


Figura 6

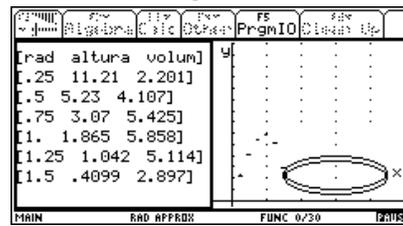


Figura 7

Trabajo con la gráfica

En este rubro del programa tenemos la posibilidad de realizar distintas asociaciones, como el valor y el signo de las pendientes de las rectas tangentes y plasmarlo en el mismo sistema de coordenadas, posibilitando la fabricación de la idea de derivada como una función. Recordemos que tales gráficos corresponden a un problema físico, esto es, tienen sentido para el estudiante.

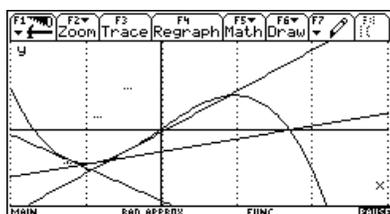


Figura 8

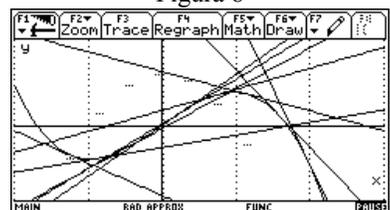


Figura 10

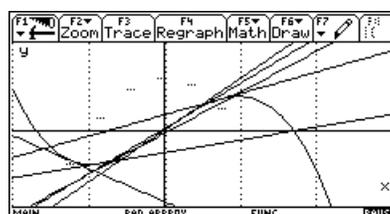


Figura 9

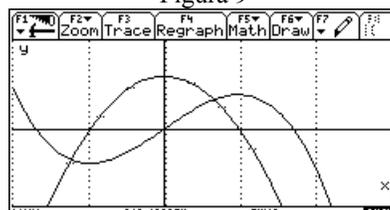


Figura 11

Esta actividad se refuerza mediante la colocación de los puntos (derivadas puntuales) asociando por ejemplo los signos de la derivada con la condición creciente o decreciente de la función de origen, además de considerar la posibilidad de construir la derivada en un contexto geométrico a partir del trazo imaginario o virtual de rectas tangentes, es decir, hay intentos de incorporar el pensamiento visual a través de este análisis, así como de identificar o vincular la raíz de la gráfica de la derivada como el correspondiente punto crítico, en nuestro caso un máximo local.

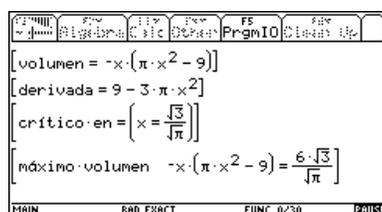


Figura 12

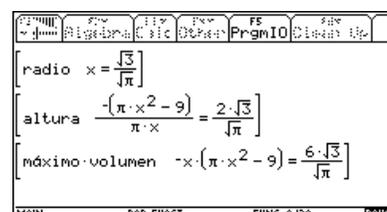


Figura 13

Emisión de resultados

En algunas ocasiones dependiendo de las estrategias diseñadas se puede incorporar el trabajo con cálculo de regresiones polinomiales o de otro estilo. Nos parece que el tratamiento en el campo algebraico después de realizar una tarea descriptiva en cada representación, así como conexiones, análisis e interpretaciones con los registros anteriores, evita ejecutar desarrollos algebraicos sin comprender, ver figura 12 y 13.

RESULTADOS

Los resultados que hasta estos momentos es posible emitir no versan precisamente sobre la cuantificación de los índices de aprobación o reprobación, de hecho no es este factor propiamente el que buscamos observar, sino por una parte la percepción del estudiante en un ambiente dinámico distinto al tradicional y la motivación que ciertamente genera el presentar un problema de optimización con esta estrategia; por la otra la asociación entre los diferentes

contextos. A continuación se exponen algunos de los comentarios y/o reflexiones motivo de la aplicación de la estrategia didáctica diseñada a un grupo de estudiantes de matemáticas I:

- La resistencia a creer que todas las propuestas emitidas requieren la misma cantidad de material para el cilindro.
- Se hacen observaciones como que la capacidad disminuye entre más esbelto o más bajo es el depósito cilíndrico.
- Las diferencias entre las ordenadas son cada vez más pequeñas conforme avanza la gráfica al crítico.
- La coincidencia de la raíz de la función derivada con el crítico de la función.
- El signo positivo de la pendiente de la recta tangente cuando la función es creciente.

Con esta estrategia no logramos una evolución significativa en la manipulación algebraica por parte del estudiante, pero si un significado de los modelos y los números que se obtienen en torno al problema físico, en general consideramos que las citadas observaciones emitidas por los estudiantes son sumamente valiosas, puesto que ayudan a estructurar un mejor conocimiento de los objetos de conocimiento en juego desde la perspectiva tanto herramental como objetal.

Programa del depósito cilíndrico

<pre> Cilindr1() Prgm ClrIO:ClrDraw:FnoFF :ClrHome setMode("Graph","FUNCTION") Output 20,40,"EL PROBLEMA DEL CILINDRO" Output 30,32,"UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN" Pause :ClrIO Lbl sopita:ClrIO Output 20,30,"F1:DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA" Output 30,30,"F2:ENTRADA DE DATOS" Output 40,30,"F3:ANÁLISIS DE PROPUESTAS" Output 50,30,"F4:ANÁLISIS GRÁFICO" Output 60,30,"F5:EMISIÓN DE RESULTADOS" Output 70,30,"F6:TERMINAR PROGRAMA" Toolbar Title "PROB",sop1 Title "DATOS",sop2 Title "ANÁLISIS",sop3 Title "GRÁFICAS",sop4 Title "RESULT",sop5 Title "SALIR",sop6 EndTBar:ClrIO </pre>	<pre> Output 70,10,"(área) de material determinado.":Pause :ClrIO Goto sopita Lbl sop2:ClrIO:Disp "" Disp "A continuación se pide el área" Disp "o cantidad de material" Disp "disponible para fabricar el" Disp "depósito cilíndrico" Disp "entre 16 y 27 unidades cuadradas":Pause Request "Área disponible",v Goto sopita Lbl sop3:ClrIO:ClrGraph:ClrDraw setMode({"split 1 app","home"}) setMode({"split 2 app","graph"}):expr(v) →v -0.5→xmin:5→xmax:-0.5→ymin:14→ymax 1→xscl:1→yscl:Circle 3,2,1:Circle 3,6,1 Line 2,2,2,6:Line 4,2,4,6 (v-2*π*x^2)/(2*π*x) →h(x) Define q(x)=π *x^2*h(x) Define qq(x)=d(q(x),x) Disp [[rad,altura,volum]]:Pause Circle 3,2,1,0:Circle 3,6,1,0 Line 2,2,2,6,0:Line 4,2,4,6,0 For s,0.25,1.75,0.25 Circle 3,2,s:Circle 3,2+h(s),s Line 3-s,2,3-s,2+h(s):Line 3+s,2,3+s,2+h(s) PtOn s,q(s):PtOn s+0.04,q(s) </pre>
--	--

<p>Lbl sop1:ClrIO Output 20,20,"DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA" Output 40,10,"Se requiere construir un depósito" Output 50,10,"cilíndrico con volumen máximo" Output 60,10,"para ello se cuenta con una cantidad" Text "ANÁLISIS DE PROPUESTAS" setMode("Graph","FUNCTION") setGraph("grid","on") setMode("Exact/Approx","APPROXIMATE") setMode("Display Digits","FLOAT 4") setMode({"split screen","left-right"})</p>	<p>PtOn s-0.04,q(s):PtOn s,q(s)+0.04 PtOn s,q(s)-0.04:Disp [[s,h(s),q(s)]:Pause Circle 3,2,s,0:Circle 3,2+h(s),s,0 Line 3-s,2,3-s,2+h(s),0:Line 3+s,2,3+s,2+h(s),0 EndFor:Pause:DrawFunc q(x):Pause :ClrIO setMode("Split Screen","FULL") ClrDraw:ClrGraph:Goto sopita Lbl sop4:ClrIO setMode("Split Screen","FULL") -2→xmin:3→xmax:-13→ymin:15→ymax Text "ANÁLISIS GRÁFICO" Output 30,10,"A continuación se presenta la gráfica" Output 40,10,"de la función, radio contra</p>
--	---

<p>Volumen" Output 50,10,"así como el trazo de rectas tangentes":Pause ClrGraph:ClrDraw:ClrIO Graph q(x) For s,-1.25,2,0.4 DrawSlp s,q(s),qq(s) PtOn s,qq(s) PtOn s+0.04,qq(s):PtOn s-0.04,qq(s) PtOn s,qq(s)+0.04:PtOn s,qq(s)-0.04 Pause :EndFor:Pause :ClrGraph:ClrDraw Output 20,20,"Trazo de la función y su derivada":Pause :ClrIO Graph q(x):For s,-1.25,2,0.4 PtOn s,qq(s) PtOn s+0.04,qq(s):PtOn s-0.04,qq(s)</p>	<p>PtOn s,qq(s)+0.04:PtOn s,qq(s)-0.04 EndFor:Pause :Graph qq(x) Pause :ClrGraph:Goto sopita:Lbl sop5:ClrIO ClrHome:Text "EMISIÓN DE RESULTADOS" setMode("Exact/Approx","EXACT") Disp [[volumen=q(x)]] d(q(x),x) →qq(x):Disp [[derivada=qq(x)]] Disp [[crítico*en=fMax(q(x),x) x>0]] Define toto=fMax(q(x),x) x>0 Define ka=q(toto) Disp [[volumen*máximo,ka]] Pause :ClrIO:Disp [[radio,toto]] Disp [[altura,h(toto)]] Disp [[volumen*máximo,ka]] Pause :ClrIO:Goto sopita:Lbl sop6:ClrIO EndPrgm</p>
---	---

Bibliografía

- Duval Raymund-Registros de Representación Semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.
- Díaz Gómez José Luis-Introducción al uso de los recursos computacionales. Marzo 1995
- De Las Fuentes Lara Maximiliano-Una propuesta para la construcción del concepto de raíz real empleando la dialéctica herramienta-objeto y el juego de marcos. El caso de las funciones lineales y cuadráticas. Tesis de Grado. Noviembre 1998.
- TI-92-Manual del Usuario. Texas Instruments. 1995