

La Derivada Geométrica y el Cálculo Geométrico
Carlos Pereyda Pierre y Arnulfo Castellanos-Moreno

Departamento de Física, Universidad de Sonora
Apartado 1626, Hermosillo, Sonora, México.

Resumen

En este artículo discutimos el concepto de derivada geométrica y el teorema fundamental del cálculo en el contexto del cálculo geométrico. Enseguida demostramos que resultan como casos particulares el teorema fundamental del cálculo para funciones escalares en el cálculo tradicional de varias variables, así como los teoremas de la divergencia y del rotacional para campos vectoriales además del teorema de Cauchy de los números complejos.

I. Introducción

En este trabajo nos proponemos estudiar la derivada geométrica y discutir el teorema fundamental del cálculo en el contexto del Cálculo Geométrico, que trata con funciones definidas y valuadas en espacios lineales llamados álgebras geométricas. Para leer una introducción breve sobre esta clase de matemáticas es recomendable consultar la referencia [9], sobre la cual descansa este artículo. En este trabajo asociamos dos significados a la frase álgebra geométrica, para evitar confusiones, cuando nos estemos refiriendo al método la escribiremos con mayúsculas o la abreviaremos como AG y cuando hablemos del espacio lineal la escribiremos con minúsculas y nunca usaremos abreviaturas.

El Álgebra Geométrica (AG) retoma el trabajo sobre teoría de extensiones de Hermann Grassmann de 1844 [1]. Aparentemente, mucho de este trabajo no fue adecuadamente apreciado en el siglo XIX y empezó a generar interés en la segunda mitad del siglo XX, de tal modo que muchas de sus ideas fueron redescubiertas por diversos investigadores. El programa de Grassmann, en palabras de David Hestenes, consistió en la elaboración de un cálculo universal, siendo ésta una idea que se retoma con la disertación doctoral de este autor en 1963 en la University of California Los Angeles en 1963 y revisada y refinada en el libro Space-Time Álgebra, publicado en 1966. Entre los elementos previos que influyen sobre este trabajo se encuentran las notas de Marcel Riesz [2]. El trabajo posterior a esa fecha consiste en un programa de aplicaciones a la Física y de difusión de esta matemática que inicia con las referencias [3] y [4] y que continúa en los años recientes con un número creciente de obras, entre las cuales podemos citar [5] y [6]. Además, la facilidad para realizar transformaciones lineales ha llevado a aplicar estas matemáticas a modelos para estudiar la relación de la visión con el equilibrio de las personas [7] y a desarrollar con éxito estudios sobre robótica [8]. El Álgebra Geométrica es un lenguaje natural construido sobre el campo de los números reales y contiene los formalismos de los vectores, los números complejos, los cuaternios, los espinores y otras formas algebraicas que podemos identificar con las formas diferenciales. En general, sustituye y generaliza al álgebra lineal.

Este artículo se organiza como sigue: en la segunda sección definimos la derivada geométrica, en la tercera demostramos el teorema fundamental del cálculo, en la cuarta lo

particularizamos para $\mathbf{R}^3$ y en la quinta demostramos que en el plano complejo se reduce al teorema de Cauchy.

II. La derivada geométrica

El cálculo diferencial en $\mathbf{R}^n$:

Nos proponemos estudiar la derivada geométrica de una función multivectorial F . Nuestro punto de partida es una función f definida sobre un intervalo $[x, x+\varepsilon]$ contenido en los números reales. La idea consiste en interpretar la derivada de esta función $f(x)$:

$$\partial_x f(x) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \quad 1.1$$

como la suma de los dos valores que toma la función en la frontera del intervalo $[x, x+\varepsilon]$, tal que dicha función valuada está multiplicada por dos direcciones en los extremos de dicho intervalo: dirección $-I$ en el punto x y dirección $+I$ en el punto $x+\varepsilon$, de modo que enseguida dividimos la suma entre el tamaño del intervalo: ε . Si trabajamos con funciones valuadas en $\mathbf{R}^2$, nuestro conjunto es un segmento del plano, las fronteras son el contorno que delimita a dicha región del plano y el conjunto de puntos frontera donde es necesario especificar direcciones es infinito. El tamaño del intervalo será el área dirigida del segmento de plano. Es decir, habrá en el denominador un bivector y en lugar de sumar dos valores, como en (1.1), lo que tenemos que hacer es una integral de contorno. En cambio, si decidimos trabajar en $\mathbf{R}^3$, la región es un volumen del espacio tridimensional y la frontera es la superficie que lo rodea, en consecuencia, lo que tendremos es una integral de superficie como la que sigue:

$$\int_S F d^2 \bar{x} = \lim_{\substack{\Delta^2 \bar{x}_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \Delta^2(\bar{x}_k) F(\bar{x}_k), \quad 1.2$$

donde $\Delta^2(\bar{x}_k)$ es un bivector que aproxima e indica la dirección de la superficie S en el punto $\bar{x}_k$. En el denominador de la definición de derivada tendremos el volumen dirigido de la porción del espacio tridimensional correspondiente, por consiguiente, habrá en el denominador un trivector. En consecuencia con las consideraciones anteriores, la definición de derivada geométrica de la función multivectorial F es

$$\nabla F = \lim_{m(\bar{x}) \rightarrow 0} \frac{1}{m(\bar{x})} \left\{ \lim_{\substack{\Delta \bar{S}_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{j=1}^N \Delta \bar{S}_j F(\bar{r}_j) \right\} = \lim_{m(\bar{x}) \rightarrow 0} \frac{1}{m(\bar{x})} \int_S d\bar{S} F(\bar{x}), \quad 1.3$$

donde $m(\bar{x})$ es el trivector correspondiente. Es importante hacer notar que depende de $\bar{x}$, lo cual nos da la oportunidad de considerar espacios cuya dirección cambia de un punto a otro del espacio.

La función F puede ser un escalar, un vector, un bivector, un trivector, o una combinación de ellos, es decir, un multivector.

La generalización a $\mathbf{R}^n$ es directa, basta considerar un subconjunto Ω de $\mathbf{R}^n$, rodeado por una frontera que denotaremos como $\partial\Omega$, tal que el multivector de grado $n-1$: $\Delta^{n-1}(\bar{x}_k)$, aproxima a la superficie e indica su dirección en el punto $\bar{x}_k$ de Ω .

Hasta aquí hemos supuesto que la orientación del espacio puede cambiar de un punto a otro del espacio. Una forma de imaginarlo es cuando pensamos en una superficie S en $\mathbf{R}^3$. Así como S puede cambiar su orientación, lo mismo puede ocurrir con el espacio n -dimensional inmerso en un espacio de dimensión $n+1$.

Cuando se trata de espacios llanos, como es el caso de $\mathbf{R}^3$, el multivector $m(\vec{x})$ es un trivector que denominamos $V(\vec{x})=iV$, de modo que la orientación indicada por el trivector i es la misma en todo el espacio. Sobre esta base, veremos cuál es la forma de la derivada geométrica en $\mathbf{R}^3$:

$$\nabla f(t, \vec{x}) = \lim_{V(\vec{x}) \rightarrow 0} \frac{1}{V(\vec{x})} \left\{ \lim_{\substack{\Delta \vec{S}_j \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{j=1}^N \Delta \vec{S}_j f(\vec{r}_j) \right\}. \quad 1.4$$

Podemos tomar un segmento de volumen de forma cúbica, lo suficientemente pequeño para aproximar la frontera S de la expresión (1.4) por medio de la suma que sigue

$$\nabla f(t, \vec{x}) = \lim_{V(\vec{x}) \rightarrow 0} \frac{1}{V(\vec{x})} \left\{ \sum_{j=1}^6 \Delta \vec{S}_j f(\vec{r}_j) \right\}, \quad 1.5$$

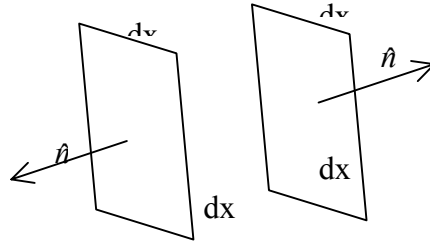
de forma que cada sumando corresponde a una cara del cubo. El bivector $\Delta \vec{S}_j$, con $j=1, \dots, 6$, tiene area $d^2x = dx_i dx_j$ con $i, j=1, 2, 3$, de modo que puede ser representado mediante su vector dual $i\hat{n} d^2x$:

$$\Delta \vec{S}_j = i\hat{n} d^2x, \quad 1.6$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal a cada cara del volumen cúbico seleccionado. En detalle, es una suma de seis integrales de superficie sobre cada una de las caras y queda como sigue

$$\nabla f(t, \vec{x}) = \sum_{j=1}^6 \left\{ \lim_{V(\vec{x}) \rightarrow 0} \frac{1}{V(\vec{x})} \int_S d\vec{S}_j f(\vec{r}_j) \right\}, \quad 1.7$$

donde $\vec{r}_j$ son los puntos sobre la j -ésima cara. Numerando las caras como 1, 2, 3, 4, 5 y 6, respectivamente, podemos establecer el siguiente razonamiento: la única diferencia entre dos caras opuestas es la dirección del bivector, no su magnitud. Esto se traduce en la dirección de los vectores normales,



por eso se pueden representar como $\Delta \vec{S}_1 = i(\hat{n}_1) d^2x$ y $\Delta \vec{S}_2 = i(\hat{n}_2) d^2x$, donde $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$. Asimismo tendremos $\hat{n}_3 = -\hat{n}_4$ y $\hat{n}_5 = -\hat{n}_6$. Resulta

$$\begin{aligned} \nabla f(t, \vec{x}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{iV} \{ & \int_{S_1} i(\bar{n}_2) d^2x f(\vec{r}_2) + \int_{S_1} i(\bar{n}_1) d^2x f(\vec{r}_1) + \int_{S_4} i(\bar{n}_4) d^2x f(\vec{r}_4) + \\ & \int_{S_3} i(\bar{n}_3) d^2x f(\vec{r}_3) + \int_{S_6} i(\bar{n}_6) d^2x f(\vec{r}_6) + \int_{S_5} i(\bar{n}_5) d^2x f(\vec{r}_5) \} \end{aligned}$$

Reagrupando y simplificando,

$$\begin{aligned}\nabla f(t, \vec{x}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{iV} \{ & i(\vec{n}_2) \int_{S_2} \left(\frac{d^2 \vec{x}}{V} \right) [f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1)] + i(\vec{n}_4) \int_{S_4} \left(\frac{d^2 \vec{x}}{V} \right) [f(\vec{r}_4) - f(\vec{r}_3)] \\ & + i(\vec{n}_6) \int_{S_6} \left(\frac{d^2 \vec{x}}{V} \right) [f(\vec{r}_6) - f(\vec{r}_5)] \}.\end{aligned}$$

Podemos usar coordenadas cartesianas porque se trata de un cubo, hacemos $x_2=x$, $x_4=y$, $x_6=z$, también hemos incluido el volumen como denominador que acompaña al numerador: $d^2 \vec{x}$. Si el cubo es tan pequeño que las funciones pueden ser aproximadas como en constantes en sus áreas respectivas, los términos entre corchetes salen de las integrales como constantes multiplicativas. Entonces podemos establecer las siguientes expresiones:

$$\int_{S_2} \frac{d^2 \vec{x}}{V} = \frac{1}{\Delta x} \text{ para las caras con normal en la dirección de } \pm \hat{n}_2$$

$$\int_{S_4} \frac{d^2 \vec{x}}{V} = \frac{1}{\Delta y} \text{ para las caras con normal en la dirección de } \pm \hat{n}_4$$

$$\int_{S_6} \frac{d^2 \vec{x}}{V} = \frac{1}{\Delta z} \text{ para las caras con normal en la dirección de } \pm \hat{n}_6$$

Además, si usamos la base ortonormal usual : $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, podemos escribir

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta x \sigma_1, \quad \vec{r}_4 - \vec{r}_3 = \Delta y \sigma_2, \quad \vec{r}_6 - \vec{r}_5 = \Delta z \sigma_3$$

y entonces tenemos

$$\begin{aligned}\nabla f(t, \vec{x}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sigma_1 \frac{1}{\Delta x} [f(r_1 + \Delta x \sigma_1) - f(\vec{r}_1)] &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sigma_1 \frac{1}{\Delta x} [f(r_1 + \Delta x \sigma_1) - f(\vec{r}_1)] \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sigma_1 \frac{1}{\Delta x} [f(r_1 + \Delta x \sigma_1) - f(\vec{r}_1)]\end{aligned}$$

así

$$\nabla f(t, \vec{x}) = \sigma_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \sigma_3 \frac{\partial f}{\partial z}, \quad 1.8$$

de donde resulta que, cuando f es la función real Φ , la derivada geométrica coincide con el gradiente

$$\nabla f(t, \vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad 1.9$$

III. El teorema fundamental del cálculo

Para espacios llanos el teorema fundamental del cálculo se enuncia como sigue:

Teorema: Sea F una función multivectorial cuyo dominio es un volumen $\Omega \subset R^n$ con una superficie que ahora simbolizamos como $\partial\Omega$, se cumple que

$$\int_{\Omega} d^n \vec{x} \nabla F = \oint_{\partial\Omega} d^{n-1} \vec{x} F \quad 2.1$$

donde $d^n \vec{x}$ es un elemento de volumen dirigido en Ω y $d^{n-1} \vec{x}$ es un multivector que aproxima a la superficie $\partial\Omega$ en cada punto $\vec{x}$.

Demostración:

Puesto que hemos restringido nuestro estudio a espacios llanos, el elemento de volumen es $V(\vec{x}) = iV$ y será representado como: $V = \Delta^n \vec{x}$; a su vez, el multivector que aproxima a la superficie

será $d\vec{s} = d^{n-1}\vec{x}$, por lo tanto, en la nueva notación la definición de derivada (1.4) se escribe como sigue

$$\nabla F(\vec{x}) = \lim_{\Delta^n \vec{x} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta^n \vec{x}} \int_{\partial\Omega} d^{n-1}\vec{x} F(\vec{x}) \quad 2.2$$

Escribiendo el lado izquierdo de 2.1 mediante la definición de integral resulta

$$\int_{\Omega} d^n \vec{x} \nabla F = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N (\Delta^n \vec{x})_k (\nabla F) \quad 2.3$$

usando ahora la expresión 2.2 en el lado derecho

$$\int_{\Omega} d^n \vec{x} \nabla F = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N (\Delta^n \vec{x})_k \left\{ \lim_{\Delta^n \vec{x} \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta^n \vec{x}} \int_{\partial\Omega} d^{n-1}\vec{x} F(\vec{x}) \right\}$$

simplificando

$$\int_{\Omega} d^n \vec{x} \nabla F = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{\partial\Omega} d^{n-1}\vec{x} F(\vec{x}) \right\}_k = \int_{\partial\Omega} d^{n-1}\vec{x} F(\vec{x}) \quad 2.4$$

con lo cual queda completa la demostración.

IV Ejemplos Particulares en $\mathbf{R}^3$

Si F es una función escalar f definida en $\mathbf{R}^3$, el teorema fundamental del cálculo se reescribe como

$$\int_{\mathcal{V}} d^3 \vec{x} \nabla f = \oint_{\mathcal{S}} d^2 \vec{x} F, \quad 3.1$$

Para ligar estos resultado con los del cálculo usual basta relacionar el trivector con su dual escalar: $d^3 \vec{x} = i d^3 x$ y el bivector con su dual vectorial $d^2 \vec{x} = i \vec{n} d^2 x$, donde $\vec{n}$ es el vector normal al bivector $d^2 \vec{x}$.

Si F es un campo vectorial $\vec{E}$, usamos que $\nabla \vec{E} = \nabla \bullet \vec{E} + \nabla \wedge \vec{E}$, también $\vec{n} \vec{E} = \vec{n} \bullet \vec{E} + \vec{n} \wedge \vec{E}$, que sustituidas en (2.1) e igualando partes escalares y partes bivectoriales nos proporciona las relaciones que siguen:

$$\int_{\mathcal{V}} d^3 x \nabla \bullet \vec{E} = \oint_{\mathcal{S}} d^2 x \vec{n} \bullet \vec{E} \quad \text{y} \quad \int_{\mathcal{V}} d^3 x \nabla \wedge \vec{E} = \oint_{\mathcal{S}} d^2 x \vec{n} \wedge \vec{E},$$

La primera expresión es el teorema de la divergencia del cálculo usual y la segunda nos proporciona el teorema del rotacional si usamos los vectores duales para escribirla, en lugar de los bivectores que hemos usado.

V. El teorema fundamental del cálculo en el plano complejo

Podemos particularizar el teorema fundamental del cálculo al caso del plano complejo si hacemos: $n=2$, el dominio Ω es entonces una región S del plano complejo y la frontera $\partial\Omega$ es el contorno C que rodea a la región S . Enseguida aprovechamos que en el álgebra geométrica los números complejos son una subálgebra del álgebra geométrica G_2 que se discute en la referencia [9], entonces:

$$z = x + iy$$

donde $i = \sigma_1 \sigma_2$, con $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ la base ortonormal en $\mathbf{R}^2$.

Una función $f(z)$ valuada en los complejos puede escribirse como

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

También sabemos que para que la función sea derivable deben de cumplirse las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

El operador nabla $\nabla = \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial y}$ sobre $f(z)$ resulta

$$f(z) = \left(\sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) [u(x, y) + iv(x, y)]$$

$$= \sigma_1 \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \sigma_1 i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \sigma_2 i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

calculando $\sigma_1 i = \sigma_1 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2$ y $\sigma_2 i = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 (-\sigma_2 \sigma_1) = -\sigma_1$, reagrupamos en la expresión anterior y se obtiene

$$\nabla f(z) = \sigma_1 \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right] + \sigma_2 \left[\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right].$$

De las ecuaciones de Cauchy-Riemann resulta

$$\nabla f(z) = 0.$$

Entonces el teorema fundamental del cálculo se escribe como sigue

$$\int_{\gamma} d^2 \bar{x} \nabla f(z) = \oint_{\gamma} d\bar{x} f(z)$$

usando $d^2 \bar{x} = id^2 x$ y multiplicando por $-i$, se obtiene

$$-i \int_{\gamma} id^2 x \nabla f(z) = -i \oint_{\gamma} d\bar{x} f(z),$$

tal que si usamos: $\nabla f(z) = 0$ y $-id\bar{x} = dz$ resulta

$$0 = \oint_{\gamma} dz f(z)$$

que es el teorema de Cauchy.

Este resultado es muy interesante porque es una muestra de que la variable compleja se encuentra contemplada en el cálculo geométrico.

Bibliografía

- [1] H. Grassmann, “*Linear Extension Theory*”, traducción al inglés en L. C. Kannenberg, “The Ausdehnungslehre of 1844 and other works” Chicago, La Salle: Open Court Publ. (1995).
- [2] M. Riesz, “*Clifford Numbers and Spinors*”, (notas de curso desarrollado en el ciclo escolar 1957-8). Editado por E. Folke Bolinder and P. Lounesto, Luwer Academic Publisher (1993).
- [3] D. Hestenes, “*New Foundations for Classical Mechanics*” 2nd. Ed., Kluwer (1999)
- [4] D. Hestenes and G. Sobczyk, “*Clifford Algebra to Geometric Calculus*”, Kluwer (1992).
- [5] A. Castellanos-Moreno, “*Introducción al Álgebra y al Cálculo Geométrico*”, notas de curso (2003).
- [6] C. Doran y A. Lasenby, “*Geometric Algebra for Physicists*”, Cambridge University Press (2003)
- [7] D. Hestenes, *Neural Networks*, 7, No. 1, 1994, 65-77. D. Hestenes, *Neural Networks*, 7, No. 1, 1994, 79-88.
- [8] E. Bayro-Corrochano y G. “*Advances in Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering. Automatic theorem proving, computer vision, quantum and neural computing and robotics.*”, Sobczyk (eds.), Birkhauser, New York, February, ISBN 0-8176-4199-8, 2001
- [9] B. Miranda, R. Olivas, F. G. Robles y A. Castellanos-Moreno, “*Algunos Elementos del Álgebra Geométrica y el Origen de los Huracanes*”, enviado a la XIV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas (2004).