Nivel Superior

Algunos Elementos del Álgebra Geométrica y el Origen de los Huracanes

Brenda Miranda O., Rafael Olivas E.,
Fátima G. Robles V., Arnulfo Castellanos-Moreno
Departamento de Física, Universidad de Sonora
Apartado 1626, Hermosillo, Sonora, México. 83000.

Resumen

El objetivo de este artículo es presentar algunas nociones del Álgebra Geométrica, haciendo énfasis en el espacio lineal generado por el espacio vectorial bidimensional $\boldsymbol{R}^2$*. También nos proponemos discutir las fuerzas inerciales que se miden en un sistema de referencia rotante con velocidad angular constante para explicar cómo se originan los huracanes. Veremos que esta herramienta matemática es muy clara desde el punto de vista de la física y que muchos de los cálculos usuales se ven simplificados.*

Introducción.

El objetivo de este artículo es presentar algunas nociones del Álgebra Geométrica al nivel más elemental posible. Con la intención de que pueda comprenderlo cualquier persona que únicamente tiene los conocimientos básicos del Álgebra Superior y del Cálculo Diferencial e Integral. Las razones por las cuáles deseamos presentar estas matemáticas son: 1) hacer notar que el Álgebra Geométrica reúne las características necesarias para convertirse en el lenguaje de la física del siglo XXI, porque se trata de un enfoque unificado de los números complejos, el álgebra lineal, los tensores y los espinores, así como las formas diferenciales; y 2) hacer ver que la interpretación geométrica directa de cada concepto convierte a este formalismo en una herramienta muy útil para estudiar Física desde cursos básicos.

El autor de este lenguaje es David Hestenes [1], quien retoma los trabajos de Grassmann de 1844 [4] y sienta las bases de estas matemáticas. Así, resulta que se recupera un camino abandonado en el siglo XIX debido a la sencillez de los vectores introducidos por Gibbs, que dominan el interés de los físicos. La obra original data de 1966 [1] y de allí en adelante, el esfuerzo por demostrar que el lenguaje es efectivamente universal absorbe el tiempo y la atención de un número cada vez mayor de investigadores que se dedican a la búsqueda y aplicación de este lenguaje a todas las teorías físicas (ver por ejemplo las referencias [2], [3] y [7]).

La frase álgebra geométrica tiene aquí dos significados: se usa como nombre de la herramienta matemática completa, a la cual nos referiremos en lo sucesivo como AG, y también, como sustantivo para un espacio lineal ampliado que resulta de operar sobre $\mathbf{R}^n$, dando lugar a otro espacio lineal que lo contiene: G_n, al cual llamaremos con las palabras: álgebra geométrica.

El artículo se organiza como sigue: en la primera sección presentaremos el producto geométrico entre dos vectores, veremos que está integrado por una parte simétrica y otra antisimétrica a las que se les denomina producto interior y producto exterior respectivamente y analizaremos las propiedades de cada uno de ellos, así como su interpretación geométrica. También presentaremos un panorama de las operaciones básicas del álgebra geométrica. En la segunda sección discutimos el álgebra geométrica G_2, generada por $\mathbf{R}^2$; introducimos el concepto de multivector y demostramos cómo los números complejos resultan ser un subconjunto de G_2. Presentamos el número $\boldsymbol{i}$, que aquí deja de ser imaginario porque se le asocia un elemento geométrico específico [5]. En la tercera sección aplicamos el álgebra geométrica a los sistemas de referencia rotando sin necesidad de introducir formas vectoriales complicadas ni matrices. En la cuarta sección se analiza un efecto de las fuerzas inerciales, los huracanes, como un ejemplo de un fenómeno natural que puede ser descrito con el uso de estas matemáticas. La última sección la dedicamos a exponer las tres conclusiones a que llegamos.

I. Multiplicando vectores.

Nuestro punto de partida es el espacio lineal E de dimensión finita n, en el cual se definirán nuevas operaciones que generarán un nuevo espacio al que se denominará álgebra geométrica y que también satisface las condiciones para ser un espacio lineal. La idea básica es la búsqueda de un nuevo producto de vectores que esté definido para cualquier valor de n (cálculos detallados se encuentran en la referencia [6]). La nueva operación producto debe ser tal que se cumpla la siguiente propiedad:

$$\boldsymbol{vv} = \boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}, \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, y $\boldsymbol{w}$ son elementos de un espacio lineal E. Haciendo $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$, las operaciones

$$\boldsymbol{vv} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{uw} + \boldsymbol{wu} + \boldsymbol{w}^2 \tag{2}$$

y

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{2u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w} \tag{3}$$

nos lleva a que pueden ser iguales si se cumple

$$\boldsymbol{uw} + \boldsymbol{wu} = 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}, \tag{4}$$

que es la condición que requerimos. Es decir el producto entre vectores cumplirá la propiedad (1) si se cumple la condición (4).

Las consecuencias geométricas de haber forzado una operación con estas características son: 1) Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{w}$ son perpendiculares, se cumple que $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0$, de modo que de (4) se obtiene que ambos anticonmutan: $\boldsymbol{uw} = -\boldsymbol{wu}$. 2) Si ambos vectores son colineales $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{w}$ conmutan: $\boldsymbol{uw} = \boldsymbol{wu}$. En más de dos dimensiones le llamaremos condición de tangencialidad.

Este producto se puede reescribir como la suma de una parte simétrica más una antisimétrica: $\boldsymbol{ab} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba})$, tal que la parte simétrica es el producto interior: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba})$ y a la parte antisimétrica le llamaremos producto exterior: $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba})$, de modo que tenemos: $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$. A este producto se le llama "producto geométrico", proviene de la teoría de extensiones de Grassmann y es la base de la AG que estamos discutiendo.

Si E tiene norma euclideana, el producto de los vectores: $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ y $\boldsymbol{b} = (b_1,... , b_n)$ es:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n .$$

y definido así, sobre un espacio lineal nos permite introducir el concepto de norma de un vector que puede verse como una generalización del teorema de Pitágoras y de la métrica euclidiana.

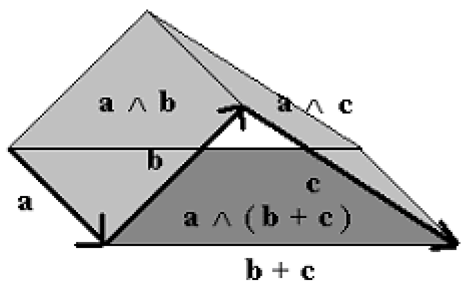
El producto exterior $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ se puede interpretar como el paralelogramo generado por los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tal que sus lados son estos vectores, con una dirección asociada al orden en que se operan. Semejante a un giro en el plano que los contiene. El orden contrario: $\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}$, produce el mismo paralelogramo pero asociándole la dirección contraria, de modo que se cumple $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a})$, o bien $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a}) = 0$. Tenemos entonces dos consecuencias importantes: 1) los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no necesariamente conmutan bajo el producto geométrico y 2) los productos exteriores definen paralelogramos dirigidos que al sumarlos como estamos indicando se pueden anular.

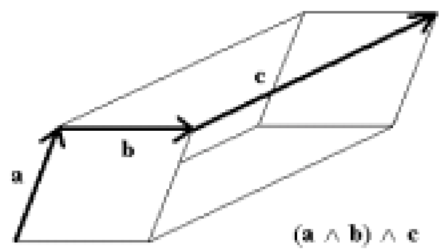
Por otra parte, en términos del producto exterior la condición de colinealidad o tangencialidad se puede escribir como: $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = 0$. La colinealidad de los vectores es también una manera de formalizar el concepto de independencia lineal, tal que la dependencia lineal ocurre si se cumple que: $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \neq 0$.

Otra propiedad importante es la distributividad bajo la suma del producto exterior dada por:

$$\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c},$$

que se traduce en una suma de paralelogramos como se muestra en la figura de la izquierda. Así mismo, el producto exterior de tres vectores, $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}$, en el espacio físico tridimensional se llama trivector y se puede interpretar geométricamente mediante la figura de la derecha, que representa un volumen dirigido.





Además, el producto exterior es asociativo: $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$.

Con las propiedades anteriores se puede demostrar que el producto geométrico es distributivo: $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$.

El producto geométrico de un vector $\boldsymbol{a}$ por un bivector $\boldsymbol{B}$; es

$$\boldsymbol{aB} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{B} \qquad (5)$$

con $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{aB} - \boldsymbol{Ba})$ y $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{aB} + \boldsymbol{Ba})$, de manera que para este caso se cumplen las siguientes relaciones:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{a}.$$

II. El álgebra geométrica generada por $\mathbf{R}^2$.

Para comprender mejor lo anterior ejemplificamos con el álgebra geométrica generada por $\mathbf{R}^2$ usando coordenadas. La base más simple de un plano está formada por los vectores $\mathbf{i} = (1,0)$[1] y $\mathbf{j} = (0,1)$ que aquí serán simbolizados como $\{\boldsymbol{\sigma_1}, \boldsymbol{\sigma_2}\}$. Así, dos vectores cualesquiera se escriben como:

$$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y) = b_x\boldsymbol{\sigma_1} + b_y\boldsymbol{\sigma_2}, \text{ y } \boldsymbol{c} = (c_x, c_y) = c_x\boldsymbol{\sigma_1} + c_y\boldsymbol{\sigma_2}$$

El producto exterior de los dos vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ es:

$$\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = (b_x c_y - b_y c_x)\, \boldsymbol{\sigma_1}\boldsymbol{\sigma_2}$$

donde $(b_x c_y - b_y c_x)$ es un escalar que indica el área del paralelogramo generado por $\boldsymbol{\sigma_1}\boldsymbol{\sigma_2}$.

Un estudio sistemático nos permite comprender que desde $\mathbf{R}^2$ se ha generado otro espacio lineal, que denotaremos G_2 y llamaremos álgebra geométrica. Cada uno de sus elementos tiene la forma: $\boldsymbol{F} = a_0 + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{A}$ y recibe el nombre de multivector. Se puede demostrar que G_2 cumple

[1] No confundir este vector con el bivector que estamos denotando como $\boldsymbol{i}$.

con las propiedades de un espacio lineal normado, aunque no entraremos en más detalle aquí. En G_2 el producto geométrico sí es una operación cerrada. Más aún, cada escalar, vector o bivector, diferente de cero, tiene un inverso $\boldsymbol{x}^{-1}$ que es $\boldsymbol{x}^{-1} = \boldsymbol{x} / |x|^2$. La existencia del inverso es importante porque amplía las opciones al desarrollar un cálculo diferencial e integral más rico en propiedades que el que se desarrolla para funciones definidas de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$, con n, m números naturales.

Restringiéndonos a $\mathbf{R}^2$, tenemos la siguiente representación para $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) = x_1 \boldsymbol{\sigma_1} + x_2 \boldsymbol{\sigma_2},$$

El bivector $\boldsymbol{\sigma_1 \sigma_2} = \boldsymbol{i}$ tiene otras propiedades interesantes: 1) su cuadrado es -1 :

$$(\boldsymbol{\sigma_1 \sigma_2})(\boldsymbol{\sigma_1 \sigma_2}) = \boldsymbol{\sigma_1}(-\boldsymbol{\sigma_1 \sigma_2})\boldsymbol{\sigma_2} = -1,$$

de modo que tiene las mismas propiedades que el número imaginario i de los complejos, sólo que éste es imaginable como un segmento de área dirigido. El Álgebra Geométrica no se limita a redescubrir el álgebra de los números complejos, pues este trabajo también se puede llevar a cabo para $\mathbf{R}^n$. 2) El número imaginable $\boldsymbol{i}$ actúa como un operador de rotación de $-90°$ cuando actúa sobre $\mathbf{x}$, esto es:

$$\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\sigma_1 \sigma_2})(x_1\boldsymbol{\sigma_1} + x_2\boldsymbol{\sigma_2}) = x_2\boldsymbol{\sigma_1} - x_1\boldsymbol{\sigma_2}.$$

3) Se puede definir la función exponencial siguiente: $exp(\boldsymbol{i}t) = cos\, t + \boldsymbol{i}\, sen\, t$, que actúa como un operador de rotación cuando se opera como sigue:

$$exp(\boldsymbol{i}t)\boldsymbol{x} = (cos\, t + \boldsymbol{i}\, sen\, t)(x_1\boldsymbol{\sigma_1} + x_2\boldsymbol{\sigma_2}) =$$
$$=(x_1 \cos t + x_2\, sen\, t)\,\boldsymbol{\sigma_1} + (x_2 \cos t - x_1\, sen\, t)\,\boldsymbol{\sigma_2}.$$

La aplicación de la exponencial $exp(\boldsymbol{i}t)$ equivale a usar las bien conocidas matrices de rotación.

III. Sistemas de referencia rotando.

El objetivo es encontrar la relación entre las velocidades, aceleraciones y fuerzas medidas en un sistema de referencia en rotación, con las medidas en un sistema de referencia inercial. Para este fin consideramos dos sistemas cuyo origen coincide, pero de tal manera que los ejes forman un ángulo θ. Llamamos S al sistema de referencia que tiene sus ejes en orientación horizontal y vertical, con (x,y) las coordenadas asignadas a un punto respecto a este sistema. De la misma manera llamaremos S′ al sistema de referencia que tiene los ejes formando un ángulo θ respecto a los ejes del sistema S, y cuyas coordenadas serán (x', y'). La relación algebraica entre estas parejas ordenadas es

$$x(t) = x'(t)cos\theta - y'(t)sen\theta, \qquad y(t) = x'(t)sen\theta + y'(t)cos\theta$$

El sistema S′ es la plataforma que rota en contra de las manecillas del reloj con velocidad angular ω, constante. El sistema de referencia anclado en ella será un sistema no inercial, en tanto que el sistema de ejes fijos puede ser considerado como inercial. La relación entre las posiciones que miden el observador en S y la del observador en S′ es la de arriba pero con $\theta = \omega t$.

Supongamos una partícula de masa m moviéndose sobre la plataforma, en AG la relación entre las posiciones que miden ambos observadores es simplemente

$$\mathbf{x}(t) = exp(-\boldsymbol{i}\omega t)\, \mathbf{x'}(t).$$

Esta ecuación es la transformación de las magnitudes medidas en el sistema rotante para obtener las magnitudes medidas en el sistema inercial. La relación entre las velocidades que miden los dos sistemas se encuentra calculando la primera derivada respecto al tiempo, se obtiene

$$d\mathbf{x}(t)/dt = exp(-\boldsymbol{i}\omega t)\{(\boldsymbol{i}\omega)\,\mathbf{x'}(t) + d\mathbf{x'}(t)/dt\}.$$

El término entre llaves es la velocidad de la partícula pero medida en el sistema de referencia rotante. La relación entre las aceleraciones medidas por ambos sistemas se encuentra calculando la segunda derivada respecto al tiempo, resulta

$$d^2\mathbf{x}(t)/dt^2 = exp(-\boldsymbol{i}\omega t)\{-\omega^2\,\mathbf{x'}(t) - 2\boldsymbol{i}\omega\, d\mathbf{x'}(t)/dt + d^2\mathbf{x'}(t)/dt^2\},$$

de modo que el termino entre llaves es la aceleración de la partícula medida en el sistema de referencia rotante. Invertir la transformación no es tan complicado como cuando se usan matrices, basta multiplicar por $exp(\boldsymbol{i}\omega t)$ para saber cuál es la relación entre las aceleraciones medidas en el sistema inercial y el sistema rotante y reacomodar, resulta

$$exp(\boldsymbol{i}\omega t)d^2\mathbf{x}(t)/dt^2 = -\omega^2\,\mathbf{x'}(t) - 2\boldsymbol{i}\omega\ d\mathbf{x'}(t)/dt - \omega^2 d^2\mathbf{x'}(t)/dt^2.$$

Las derivadas $d\mathbf{x}(t)/dt$ y $d\mathbf{x'}(t)/dt$ son las velocidades medidas a la partícula por el observador inercial y no inercial, respectivamente. Las denotaremos como: $\boldsymbol{v}\ (t)$ y $\boldsymbol{v}_R(t)$. Así mismo, las segundas derivadas son la aceleración de la partícula como se mide desde cada sistema de referencia, éstas las denotaremos como $\boldsymbol{a}_I(t)$ y $\boldsymbol{a}_R(t)$. Por último, la posición que se mide desde el sistema que rota la denotaremos como $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{R}}(t)=\boldsymbol{x'}(t)$. Enseguida resolvemos a favor de $\boldsymbol{a}_R(t)$ en la expresión anterior y multiplicamos por la masa de la partícula, tenemos:

$$m\boldsymbol{a}_R(t)= exp(\boldsymbol{i}\omega t)m\boldsymbol{a}_I(t)+ 2\boldsymbol{i}m\omega\,\mathbf{v}_R(t) + m\omega^2\boldsymbol{a}_R(t),$$

que es una relación entre la fuerza $\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}= m\boldsymbol{a}_I(t)$ medida en el sistema de referencia inercial y las fuerzas en la plataforma rotante. Resulta entonces que en el sistema no inercial se mide una fuerza $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}= m\boldsymbol{a}_R(t)$ que consta de tres fuerzas distintas:

- La expresión $exp(\boldsymbol{i}\omega\ t)m\boldsymbol{a}_I(t)$, que es la fuerza $\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}= m\boldsymbol{a}_I(t)$ pero transformada al sistema rotante.
- La fuerza $2\boldsymbol{i}m\omega\,\mathbf{v}_R(t)$, productora de una tendencia a girar y que analizaremos en seguida, se llama fuerza de Coriolis.
- La fuerza $m\omega^2\boldsymbol{a}_R(t)$ apunta radialmente, de modo que se manifiesta como una tendencia de la partícula a salir de la plataforma. Se llama fuerza centrífuga.

A las dos últimas de la lista se les llama fuerzas inerciales porque aparecen cuando realizamos la descripción desde un sistema de referencia rotante. Para analizar la fuerza de Coriolis analizaremos una partícula que se aleja del centro de la plataforma viajando radialmente. El sistema inercial S describe un movimiento rectilíneo uniforme, mientras que el sistema no inercial mide la fuerza $2\boldsymbol{i}m\omega\,\mathbf{v}_R(t)$. Como hemos señalado previamente, el bivector $\boldsymbol{i}$ aplicado a $\mathbf{v}_R(t)$ genera un vector rotado 90° a favor de las manecillas del reloj, por lo tanto, la partícula que se aleja radialmente del centro sufre una fuerza hacia su derecha. En cambio, para una partícula que viaja con velocidad radial opuesta, $-\ \mathbf{v}_R(t)$, la fuerza apuntará en sentido contrario a la anterior. Así, la fuerza de Coriolis cambia de signo cuando la velocidad $\mathbf{v}_R(t)$ gira 180°, por lo tanto, dos partículas que se mueven con velocidades $\boldsymbol{v}^1{}_R(t)$ y $\boldsymbol{v}^2{}_R(t)=-\ \boldsymbol{v}^1{}_R(t)$, tenderán a girar en forma opuesta. Éste es un hecho que se manifiesta en la tierra porque en realidad es un sistema de referencia rotante. Cuando se trabaja en el laboratorio lo podemos tratar como un sistema inercial sólo para tiempos muy cortos.

IV. Un efecto de las fuerzas inerciales: los huracanes.

Un efecto macroscópico impresionante se vive también cuando en las zonas tropicales hay grandes masas de agua que alcanzan temperaturas del orden de 30° grados centígrados y producen evaporación considerable. Las moléculas que suben se mueven radialmente al giro de la tierra, lo cual da lugar a condiciones que permiten la aparición de la fuerza de Coriolis. Como consecuencia, el movimiento ascendente es el de una espiral en contra de las manecillas del reloj, simultáneamente, producen una disminución de la presión atmosférica que se puede medir con un barómetro. El efecto general es el de las tormentas tropicales, que pueden crecer hasta formar huracanes. El caso de los tornados es semejante. Un huracán es una zona de baja presión atmosférica, alrededor de la cual los vientos realizan un movimiento circular; este movimiento es contrario al de las manecillas del reloj en el hemisferio norte (en el hemisferio sur el movimiento es al revés, es decir, en el sentido de las manecillas del reloj). A causa de la baja presión el viento fluye de las áreas de mayor presión hacia las de menor presión generando un proceso de retroalimentación del fenómeno.

V. Conclusiones.

1. Estas nuevas matemáticas pueden ser construidas y utilizadas en muchos cálculos sin necesidad de usar coordenadas, lo cual es de mucha utilidad en Física cuando se desea generalizar los conceptos.
2. La introducción de un nuevo espacio, G_2, que contiene a $\mathbf{R}^2$; abre la posibilidad de desarrollar un álgebra y un cálculo mucho más rico en propiedades, lo que se traduce en una nueva herramienta mucho más potente para desarrollar las teorías físicas.
3. Por último, hemos podido apreciar que con este formalismo se ven simplificados muchos de los cálculos que desarrollamos con la teoría vectorial tradicional.

Bibliografía.

[1] D. Hestenes, *Space-Time Algebra*, Gordon & Breach, (1966).
[2] D. Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics* 2nd, Kluwer (1999).
[3] D. Hestenes and G. Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus*, Kluwer (1992).
[4] H. Grassmann, *Linear Extension Theory*, traducción al Inglés en L. C. Kannenberg, *The Ausdehnungslehre of 1844 and other works*, Chicago, La Salle: Open Court Publ. (1995).
[5] S. F. Gull, A. N. Lasenby and C. J. L. Doran. Imaginary Numbers are not Real - the Geometric Algebra of Spacetime, *Found. Phys.* 23(9), 1175-1201 (1993).
[6] A. Castellanos-Moreno, *Notas de curso* (2003).
[7] C. Doran y A. Lasenby, *Geometric Algebra for Physicists*, Cambridge University Press (2003).