

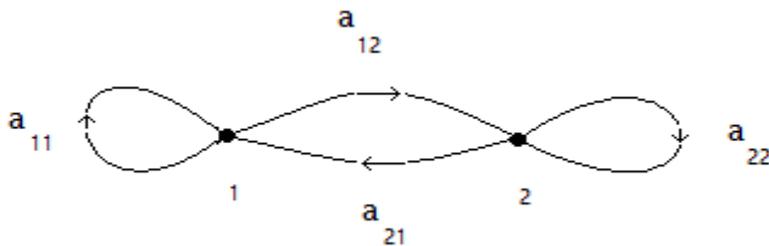
Matrices y Gráficas
José Luis Cisneros Molina
 Universidad Nacional Autónoma de México
Martín Eduardo Frías Armenta
 Universidad de Sonora

Resumen

Existen métodos algebraicos o numéricos para elevar una matriz a una potencia dada pero no existen fórmulas explícitas para calcularla. Se han encontrado fórmulas para matrices de dos por dos elevadas a una potencia k usando una idea de conteo sobre una multigráfica de dos vértices. Creemos que estas fórmulas se pueden generalizar para matrices de mayor dimensión.

1. Matrices de dos por dos.

Primeramente vemos que si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ entonces $A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{pmatrix}$ y se ve de aquí que la entrada ij es la suma abstracta de todos los caminos de longitud dos, de la multidigráfica, que van del vértice i al vértice j . Lo mismo podemos decir para A^1 : la entrada ij son todos los caminos de longitud uno de la multidigráfica que van del vértice i al vértice j .



Probaremos por inducción que la afirmación es válida para k natural, es decir, que la entrada ij de la matriz A^k son todos los caminos de longitud k que van del vértice i al vértice j . Suponemos pues la afirmación válida para $k-1$. Y llamemos $a_{ij}^{(r)}$ a la entrada ij de A^r . Luego al multiplicar A^{k-1} por A la entrada ij estará dada por $a_{i1}^{(k-1)}a_{1j}^{(1)} + a_{i2}^{(k-1)}a_{2j}^{(1)}$ pero por hipótesis de inducción $a_{ir}^{(k-1)}$ es la suma abstracta de todos los caminos de longitud $k-1$ que van de i a r además $a_{ij}^{(1)}$ sería la arista rj de la multigráfica. Entonces $a_{ij}^{(k)} = a_{i1}^{(k-1)}a_{1j}^{(1)} + a_{i2}^{(k-1)}a_{2j}^{(1)}$ representa la suma abstracta de todos los caminos de longitud k que van del vértice i al vértice j .

En cuanto al número de términos que va a tener la fórmula de $a_{ij}^{(k)}$, este obviamente será 2^{k-1} pero algunos términos se van a repetir, estos términos tendrán un coeficiente que dependerá de

las veces que aparece cada una de las ij . Llamémosle α_{ij} al número de veces que aparece a_{ij} en un término dado de la entrada $a_{11}^{(k)}$ de la matriz A^k , por tomar un caso.

Lo primero que se observa en este caso es que para cualquier término, α_{12} es igual al α_{21} , ya que si el camino empieza y termina en el vértice 1, las veces que “entra” al vértice 2 es igual al número de veces que “sale” del vértice 2. Por esta misma razón nos damos cuenta que un camino de longitud k de la entrada $a_{11}^{(k)}$, va estar dado por $a_{12}a_{21}a_{12}a_{21}\dots a_{12}a_{21}$ con α_{11} veces el camino a_{11} , que puede ir al principio, al final o entre un a_{21} y un a_{12} . El número de maneras de intercalar los caminos a_{11} se puede determinar por separadores¹

$$\binom{\alpha_{12} + \alpha_{11}}{\alpha_{11}}$$

De igual manera el número de maneras de intercalar los caminos a_{22} es

$$\binom{\alpha_{12} + \alpha_{22} - 1}{\alpha_{22}}$$

Y así la fórmula para calcular la entrada α_{11}^k de A^k estará dada por:

$$\sum_{\alpha_{11}=0}^k \sum_{\alpha_{12}=0}^{k-\alpha_{11}} \binom{\alpha_{12} + \alpha_{11}}{\alpha_{11}} \binom{\alpha_{12} + \alpha_{22} - 1}{\alpha_{22}} a_{11}^{\alpha_{11}} a_{12}^{\alpha_{12}} a_{21}^{\alpha_{12}} a_{22}^{\alpha_{22}}$$

donde $\alpha_{22} = k - \alpha_{11} - 2\alpha_{12}$.

De manera análoga se calculan las otras tres entradas de

$$A^k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Las fórmulas que resultan son:

$$a_{11}^{(k)} = \sum_{\alpha_{11}=0}^k \sum_{\alpha_{12}=0}^{k-\alpha_{11}} \binom{\alpha_{12} + \alpha_{11}}{\alpha_{11}} \binom{k - \alpha_{12} - \alpha_{11} - 1}{k - \alpha_{11} - 2\alpha_{12}} a_{11}^{\alpha_{11}} a_{12}^{\alpha_{12}} a_{21}^{\alpha_{12}} a_{22}^{k - \alpha_{11} - 2\alpha_{12}}$$

$$a_{12}^{(k)} = \sum_{\alpha_{11}=0}^k \sum_{\alpha_{12}=0}^{k-\alpha_{11}} \binom{\alpha_{12} + \alpha_{11} - 1}{\alpha_{11}} \binom{\alpha_{12} + \alpha_{22} - 1}{\alpha_{22}} a_{11}^{\alpha_{11}} a_{12}^{\alpha_{12}} a_{21}^{\alpha_{12}} a_{22}^{k - \alpha_{11} - 2\alpha_{12} + 1}$$

¹ Digamos que un camino a_{11} “separa” a un camino a_{21} de un a_{12} o a subconjuntos de estos, de tal manera que entrada se colocan caminos a_{11} en las posibles posiciones para definir tales subconjuntos. Adicionalmente agregamos que, como es usual, se adoptan las convenciones de que $\binom{n}{k} = 1$ si $k=0$ aún en el caso en que $n < 0$ y de

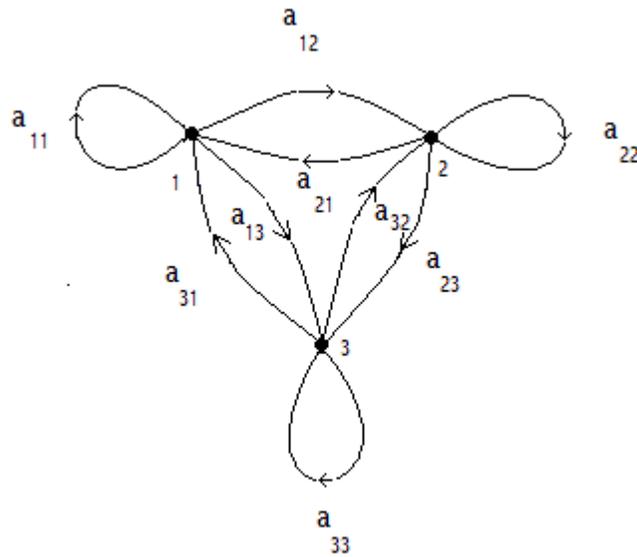
que $\binom{n}{k} = 0$ en los casos en que $n < k$.

$$a_{21}^{(k)} = \sum_{\alpha_{11}=0}^k \sum_{\alpha_{12}=0}^{k-\alpha_{11}} \binom{\alpha_{12} + \alpha_{11}}{\alpha_{11}} \binom{k - \alpha_{12} - \alpha_{11} - 1}{k - 2\alpha_{12} - \alpha_{11} - 1} a_{11}^{\alpha_{11}} a_{12}^{\alpha_{12}} a_{21}^{\alpha_{12}} a_{22}^{k - \alpha_{11} - 2\alpha_{12} - 1}$$

$$a_{22}^{(k)} = \sum_{\alpha_{11}=0}^k \sum_{\alpha_{12}=0}^{k-\alpha_{11}} \binom{\alpha_{12} + \alpha_{11} - 1}{\alpha_{11}} \binom{k - \alpha_{12} - \alpha_{11}}{k - \alpha_{11} - 2\alpha_{12}} a_{11}^{\alpha_{11}} a_{12}^{\alpha_{12}} a_{21}^{\alpha_{12}} a_{22}^{k - \alpha_{11} - 2\alpha_{12}}$$

2. Matrices de $n \times n$.

Creemos que este resultado se puede generalizar a matrices de $n \times n$. De hecho no es difícil probar que cada término de la entrada ij de la matriz $(a_{ij})_{n \times n}^k$ es un camino de longitud k . Calcular los coeficientes adecuados es un problema abierto. Analicemos un poco el caso $n = 3$. La multidigráfica correspondiente es



De nuevo supondremos α_{ij} el número de veces que aparece la arista a_{ij} en un término dado. Colocar las aristas de la forma a_{ii} es problema relativamente fácil, sólo es cuestión de aplicar separadores varias veces.

Describiremos a continuación dos intentos que se han tenido para calcular los coeficientes, restringiéndonos al caso de la entrada $a_{11}^{(k)}$.

1. Se colocan primero los caminos a_{12} y a_{13} , esto se hace de

$$\binom{\alpha_{12} + \alpha_{13}}{\alpha_{12}}$$

maneras. Y luego, usando separadores, se colocan los caminos a_{21} y a_{31} , lo que a su vez se hace de

$$\binom{\alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{21} - 1}{\alpha_{21}}$$

maneras. Ahora para colocar los caminos a_{23} se tienen α_{12} lugares, pero no en todos ellos tiene que ir un a_{23} sino sólo en los lugares en los que a continuación esté un a_{31} . Y en los lugares donde no está a continuación el camino a_{31} pueden ir cadenas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & a_{23}a_{32} \\ & a_{23}a_{32}a_{23}a_{32} \\ & \dots \end{aligned}$$

2. En lugar de hacer cadenas de a_{ij} haremos cadenas de 1's, 2's y 3's y así los a_{ij} quedan determinados por cualesquier dos números consecutivos. Primero se ponen todos los 1's y 2's en línea recta, lo que se hace de

$$\begin{pmatrix} \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{21} + \alpha_{23} - 1 \\ \alpha_{21} + \alpha_{23} \end{pmatrix}$$

maneras. Ahora ponemos 3's donde hallan quedado juntos dos 2's o dos 1's. Aquí el problema está en que no sabemos cuantos 3's se colocarán de esta manera, y por lo tanto cuantos faltan por poner. Una variante de esta forma de contar es hacerlo por casos, primero suponer que no hay ningún par de 2's juntos (o ningún par de 1's dependiendo de los que haya menos), luego suponer que hay un solo par juntos, y así sucesivamente. Para esta variante lo difícil es manejar tantos casos.

3. Conclusiones

Se han desarrollado fórmulas explícitas para calcular las entradas de la potencia de una matriz de 2×2 , estamos trabajando en una posible generalización a matrices $n \times n$ y cualquier colaboración será bienvenida.