GEOMETRÍA DINÁMICA Y SISTEMAS DE CÓMPUTO SIMBÓLICO EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA: EL CASO DE LA ELIPSE.

Ana Gpe. Del Castillo Bojórquez
Universidad de Sonora

Resumen

El propósito de este trabajo es el de explorar el papel que puede jugar la geometría dinámica y los sistemas de cómputo simbólico en la organización de una secuencia didáctica que tiene por objetivo el estudio de las cónicas en un curso de Geometría Analítica del nivel medio superior y superior. Se plantea la posibilidad de diseños didácticos diferentes a los habituales, considerando la utilización de la calculadora simbólica Voyage 200 de Texas Instruments como recurso didáctico. En particular, en este trabajo se aborda el estudio de la elipse a través de distintas representaciones, aprovechando los diferentes ambientes de la calculadora: de geometría dinámica, de cálculo simbólico y de graficación, creando un medio en el que el estudiante puede explorar, conjeturar, analizar, verificar ideas, etc. Se parte del hecho de que la visualización dinámica puede favorecer los procesos de abstracción, de generalización, y a través de distintas representaciones vinculadas dinámicamente, puede favorecerse el establecimiento de muchas y muy diversas funciones semióticas.

Introducción

Es indudable que el rápido avance tecnológico de la última década ha empezado a impactar la enseñanza de las matemáticas. Las experiencias con las nuevas tecnologías de profesores, investigadores y especialistas en Educación Matemática se presentan, analizan y discuten alrededor del mundo, en Jornadas, Seminarios, Congresos, Publicaciones, etc. El reto es incorporar de manera adecuada y eficiente estos nuevos recursos tecnológicos y didácticos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Lejos de pensar que la calculadora o computadora resolverán todos los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se busca explorar sus posibilidades funcionales y didácticas.

En este trabajo se exploran las posibilidades de la calculadora simbólica como herramienta tecnológica y didáctica en la enseñanza de la Geometría Analítica. En particular, se aborda el estudio de la elipse a través de múltiples representaciones, aprovechando las amplias oportunidades que ofrece este dispositivo para utilizar e integrar representaciones dinámicas a través de software de graficación, tabulación, de cálculo simbólico, de geometría dinámica. Por supuesto, se considera que es fundamental que los estudiantes trabajen con el mayor número posible de representaciones y sus transformaciones, desde uno y hacia otro sistema de representación, e incluso dentro del mismo sistema. Gracias a la calculadora simbólica es posible facilitar y simplificar algunas de estas posibles transformaciones pues puede ejecutarlas de manera automática, y es posible crear un medio en el que el estudiante puede explorar, conjeturar, analizar, verificar ideas, y desarrollar habilidades para la solución de problemas.

Aspectos Teóricos

En el marco de la teoría de R. Duval (1998) sobre registros de representación semiótica, se considera que no hay conocimiento que pueda ser movilizado por un sujeto sin una actividad de representación y que la utilización de varios sistemas de representación es esencial para el ejercicio y el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales.

Duval (1998) define las representaciones semióticas como producciones constituidas por el empleo de signos y que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias limitaciones de significación y de funcionamiento. Un sistema semiótico es un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas fundamentales:

1. La formación de una representación identificable dentro de un registro dado.
2. El tratamiento de una representación, que es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada.
3. La conversión de una representación, que es la transformación de esta representación en una representación dentro de otro registro.

Los trabajos de Duval (1998, 2000) se consideran de especial importancia pues se encuentra en ellos un desarrollo operativo de las transformaciones entre sistemas de representación semiótica (Contreras y Font, 2002).

Por otro lado, la noción de función semiótica (Godino, 2002) pretende tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática y de los procesos de difusión del conocimiento matemático. Se dice que se establece una función semiótica entre dos entidades, (lingüísticas, extensivas, actuativas, intensivas, conceptuales, argumentativas) cuando entre ambas se establece una dependencia representacional o instrumental, esto es, una de ellas se pone en lugar de la otra, o una de ellas es usada por la otra. Esta noción permite formular de manera generalizada las conexiones que se establecen entre representaciones desde uno y hacia otro sistema, e incluso dentro del mismo sistema.

La elipse como objeto de enseñanza

Se busca, primeramente, producir una descripción estructurada y sistemática de la elipse desde la perspectiva didáctica centrando la atención en el uso de múltiples representaciones y la articulación de las mismas. Es posible identificar cinco registros de representación relevantes para su descripción, cada uno de los cuales activa diferentes procesos cognitivos: el de la lengua natural, analítico o simbólico, gráfico, geométrico y numérico.

El registro de representación de la lengua natural permite introducir la definición de la elipse:

> *Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos. Los dos puntos fijos se llaman focos de la elipse* (Lehmann, 1997),

así como hacer descripciones o designaciones nominales, o presentar y analizar problemas. Permite también introducir la terminología que se requiere para la articulación de las diferentes representaciones, es decir, el lenguaje está presente de manera intrínseca y constitutiva en la coordinación de las distintas representaciones.

En el registro de representación geométrico, es posible apreciar características de la elipse desde la perspectiva de su construcción geométrica.

En el registro de representación analítico o simbólico se considera, en este trabajo, la ecuación canónica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Esta expresión determina características particulares de la elipse, como longitud del eje mayor, longitud del eje menor, centro, posición en el plano, etc.

En el registro de representación gráfico se hacen patentes las características de la elipse. Allí se aprecian diversos elementos (puntos de corte con los ejes, ejes de simetría, posición en el plano, concavidad, curvatura, etcétera) que permiten apreciar el papel de los parámetros mencionados en el párrafo anterior.

En el registro de representación numérico o tabular, es posible apreciar algunas de las características y elementos identificados en las representaciones analíticas, gráficas y geométricas.

Además, a través del uso de la calculadora simbólica como recurso didáctico se facilitará el formar y transformar las distintas representaciones. Será posible manipular dinámicamente la representación geométrica a través de la aplicación Cabrí-Geometry, se dará tratamiento a la representación analítica o simbólica a través de su potente sistema de cómputo simbólico (CAS), se formarán representaciones tabulares a través de su editor de base de datos y matrices, se trabajará con la representación gráfica a través del editor de funciones y el editor de gráficas, e incluso podría manejarse su representación verbal, pues la calculadora cuenta también con un editor de textos.

Representación lingüística o verbal

La idea aquí es plantear primeramente un problema particular, para después estudiar el tipo de problemas que se genera, al variar sistemáticamente algunos de los componentes de dicho problema. Por ejemplo, podría plantearse la siguiente situación:

Encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los puntos (–3, 0) *y* (3, 0) *es igual a* 10, *así como la ecuación que lo representa.*

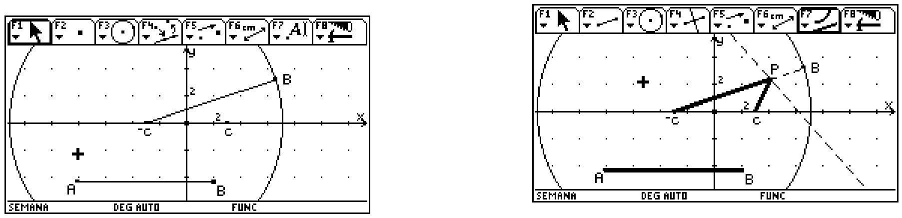
Una vez abordado el problema de forma geométrica, numérica, analítica, gráfica, podría explorarse el efecto de variar la posición de los dos puntos (conservando el hecho de que se encuentran sobre el eje *x* y están colocados simétricamente respecto al origen); o bien, de variar la suma de las distancias. Esto podría dar paso a una primera generalización del problema:

Encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a los puntos (–c, 0) *y* (c, 0) *es igual a una constante dada, así como la ecuación que lo representa.*

De esta manera puede avanzarse de una manera gradual hasta la definición de la elipse.

Representación geométrica: Uso de Cabrí-Geometry

Se mostrará primeramente una manera de abordar el problema desde la perspectiva de la construcción geométrica, utilizando la aplicación Cabrí-Geometry de la calculadora simbólica Voyage 200 de Texas Instruments. Se abre un nuevo archivo Cabri y se activan los ejes cartesianos y la retícula con la herramienta F8:9:*Format.* Se arrastra la unidad 0.5 del eje *x* hacia el origen para modificar la escala en los ejes. Con la herramienta F2:1:*Point* se construye el punto (3, 0) sobre la retícula. Con la herramienta F5:5:*Symmetry* se construye el simétrico de ese punto con respecto al origen, con lo cual se obtiene el punto (– 3, 0). Con la herramienta F2:5:*Segment*, se construye un segmento AB de longitud 10, utilizando como referencia los puntos de la retícula. La construcción en este tipo de archivos es dinámica: los puntos y el segmento pueden arrastrarse para cambiar su posición y longitud, respectivamente. Con la herramienta F4:8:*Compass*, se construye una circunferencia con centro en uno de los focos y de radio, la longitud del segmento. Con la herramienta F2:1:*Point*, se coloca un punto sobre la circunferencia y con la herramienta F2:5:*Segment* se traza el segmento del centro a ese punto sobre la circunferencia (Ver **Fig. 1a.**). Se tiene entonces un segmento de longitud 10 anclado a uno de los focos. Lo siguiente es encontrar un punto que divida al segmento en dos, de tal modo que al "doblarlo", el extremo libre "coincida" con el otro foco. Esto se logra utilizando la herramienta F4:4:*Perpendicular Bisector* (Mediatriz) entre el extremo libre del segmento y el foco al que se quiere conectar. Con la herramienta F2:1:*Point* se marca la intersección de esta mediatriz con el segmento y se tiene el punto P, el cual satisface las condiciones geométricas del problema (Ver **Fig. 1b.**).



(a) (b)

Fig. 1. Construcción de la elipse a partir de su definición.

Las imágenes en este documento son estáticas y no se aprecia cabalmente el gran potencial de esta representación que, en la calculadora, es dinámica. En esta fase, el estudiante puede manipular el punto B sobre la circunferencia para cambiar la posición del segmento y observar cómo se mueve el punto P en consecuencia. Este punto P es el que satisface las condiciones geométricas del problema. Con la herramienta F7:1:Hide/Show se recomienda ocultar algunos trazos auxiliares como la circunferencia y la mediatriz.

También se recomienda activar la herramienta F7:2:Trace On/Off sobre el punto P para ver la huella que deja este punto cuando B se mueve. (Ver **Fig. 2**.)

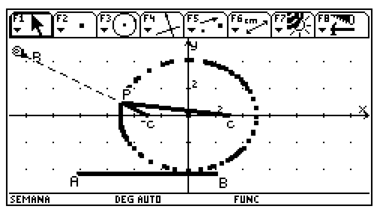


Fig. 2. Traza del punto P cuando el punto B se mueve

Posteriormente, se recomienda desactivar la herramienta F7:2:Trace On/Off para activar la herramienta F4:A:*Locus* para que el software muestre el lugar geométrico de manera estable (Ver **Fig. 3**), ya que la traza puede borrarse cuando manipulamos algunos objetos de la construcción. Este lugar geométrico se transforma dinámicamente cuando modificamos algunos de sus elementos constitutivos como la posición de los focos o la longitud del segmento. En una etapa posterior, puede utilizarse este archivo para que los estudiantes exploren el efecto de cambiar la posición de los puntos mientras se mantiene fija la longitud del segmento de referencia; y viceversa, mantener fija la posición de los puntos mientras se varía la longitud del segmento. Es importante también explorar hasta dónde pueden llevarse a cabo estas variaciones sin que se pierda el lugar geométrico.

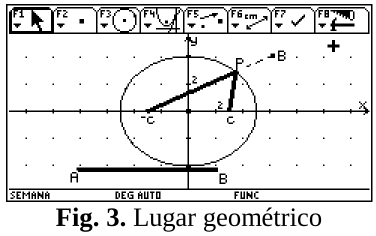
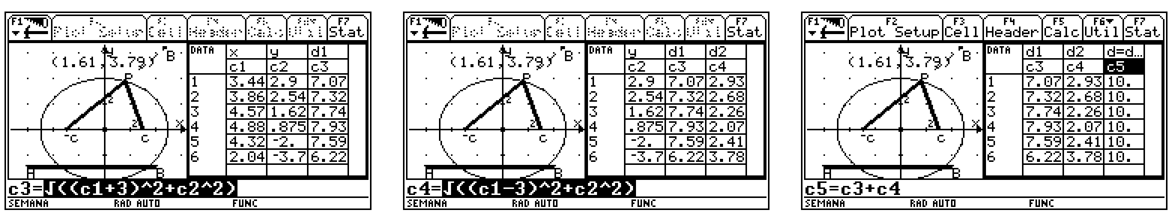


Fig. 3. Lugar geométrico

Una representación tabular asociada a la representación geométrica

Es posible obtener datos numéricos de un archivo Cabrí de la calculadora y transferirlos al editor de base de datos y matrices, con lo cual se estará vinculando esta representación geométrica a una representación de otro registro: el tabular o numérico. Se requiere conocer las coordenadas del punto P, por lo que se utiliza la herramienta F6:5:*Equation & Coordinates*. Con la herramienta F6:7:*Collect Data*,2:*Define Entry* se selecciona primero la coordenada *x* del punto P, y después la coordenada *y*. Se activa la herramienta F6:7:*Collect Data*,2:*Store Data* y las coordenadas actuales del punto P se almacenan en el archivo Sysdata. Se activa la herramienta F1:1:*Pointer* y se arrastra el punto B sobre la circunferencia, de modo que el punto P cambia su posición, y por lo tanto, cambian sus coordenadas. De nuevo se activa la herramienta F6:7:*Collect Data*,2:*Store Data* para almacenar las nuevas coordenadas en el archivo mencionado. El proceso se lleva a cabo varias veces para formar una tabla. Con la herramienta F8:B:*Data View* se divide la pantalla en dos y se trabaja con el archivo Cabrí y con la tabla. La primera columna de la tabla corresponde a la coordenada en *x* del punto P y la segunda columna, corresponde a la coordenada en *y*. Es posible escribir los títulos de las columnas al activar esta aplicación con las teclas *2nd. Apps*. En la columna tres se escribe como título d1, y en el encabezado se introduce la fórmula para calcular la distancia del punto P al foco (-3,0) (Ver **Fig. 4a**). Asimismo, en el título de la columna 4, se escribe d2, y en el encabezado se introduce la fórmula para calcular la distancia del punto P al foco (3,0) (Ver **Fig. 4b**). Finalmente, en el título de la columna 5, se escribe d=d1+d2, y en el encabezado se introduce la fórmula para sumar las dos distancias calculadas, es decir, las entradas de las columnas 3 y 4. Se observa entonces, en esta última columna la cantidad constante 10, que representa la suma de las distancias de los puntos sobre la elipse a los focos.



(a) (b) (c)

Fig. 4. Utilizando el editor de base de datos.

Una representación analítica: la ecuación del lugar geométrico

Al abordar el problema de encontrar una ecuación que represente el lugar geométrico encontrado, se busca vincular las representaciones anteriores, con una representación en el registro analítico o simbólico. Para ello se requieren laboriosas manipulaciones algebraicas y por lo tanto, se estará utilizando el sistema de cómputo simbólico incorporado en la calculadora Voyage 200. Se recomienda dividir la pantalla utilizando la opción *Top Bottom* del menú Mode, seleccionando en la parte superior el editor de base de datos, y en la parte inferior la aplicación Home. Se trata de relacionar los contenidos de las columnas 3, 4 y 5 y obtener una expresión analítica (ver **Fig. 5**). Así, se obtiene paso a paso una ecuación que expresa analíticamente las condiciones geométricas que satisface cada punto (*x*, *y*) del lugar geométrico: la suma de las distancias del punto (*x*, *y*) a los puntos (-3, 0) y al (3, 0) es igual a 10.

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=10$$

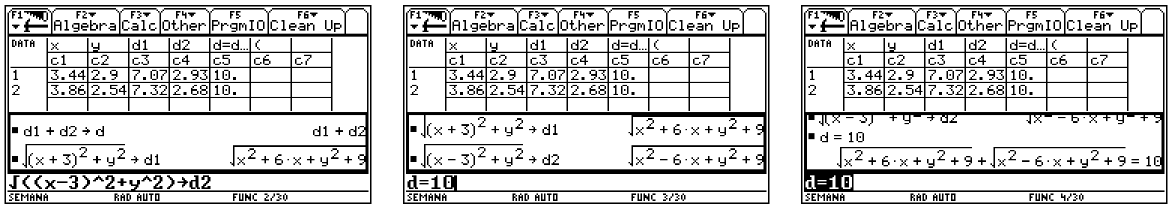
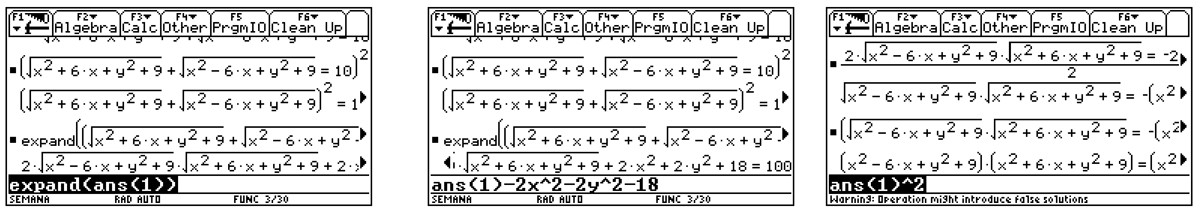
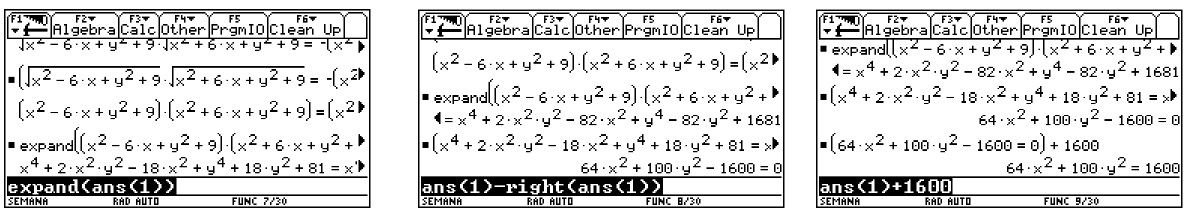


Fig.5 Una representación analítica

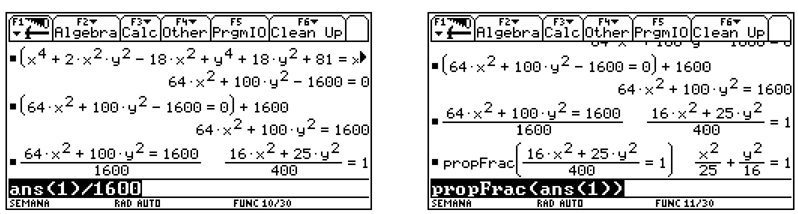
A través de una serie de transformaciones que el estudiante mismo debe ir proponiendo, se simplifica la expresión hasta llegar a su forma canónica. Una secuencia adecuada de instrucciones se muestra en la **Figura 6**.



a) Elevar al cuadrado la expresión y desarrollar el binomio al cuadrado b) Pasar del lado derecho los términos fuera del radical c) Dividir entre dos y elevar al cuadrado



d) Desarrollar el producto e) Obtener una ecuación cuyo miembro derecho es cero. g) Sumar el término independiente



j) Dividir entre el 1600 k) Obtener fracciones propias

Fig. 6 Simplificación de la ecuación

Si se cree que el procedimiento es largo y complicado, inténtese hacerlo a lápiz y papel. Por supuesto, en este punto se requiere que el estudiante haya manejado previamente las transformaciones de ecuaciones utilizando la calculadora. En los textos de geometría analítica el desarrollo algebraico se hace solamente una vez, considerando el caso general donde los focos tienen como coordenadas (–c, 0) *y* (c, 0) y la distancia fija es $2a$. Incluso las transformaciones para simplificar la ecuación se llevan a cabo de una manera muy especial para facilitar en la medida de lo posible, la manipulación algebraica a lápiz y papel. Con el sistema de cómputo simbólico incorporado a la calculadora, este procedimiento, además de llevarse a cabo de diferentes maneras, se puede ejecutar varias veces para distintos casos concretos rápidamente. También puede llevarse a cabo, considerando los parámetros de manera general. (Ver **Fig 7**.)

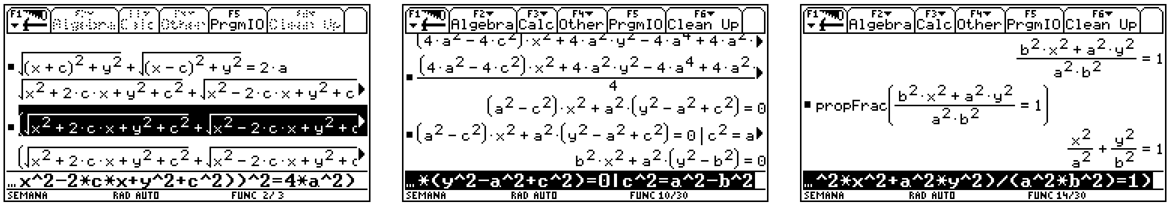


Fig. 7. Una forma canónica de la ecuación de la elipse.

Representación gráfica

Una vez obtenida la ecuación para el lugar geométrico en consideración, es posible utilizar el editor de funciones y de gráficas, como medio para verificar los resultados obtenidos. Para graficar es necesario expresar *y* en función de *x*, por lo que será necesario graficar dos funciones. Para despejar *y* de la ecuación, se pueden aplicar transformaciones sucesivas a la ecuación, o bien, es posible utilizar el comando *Solve* de la aplicación Home y resolver para *y*. Se ilustra esta última posibilidad en la **Fig 8**.

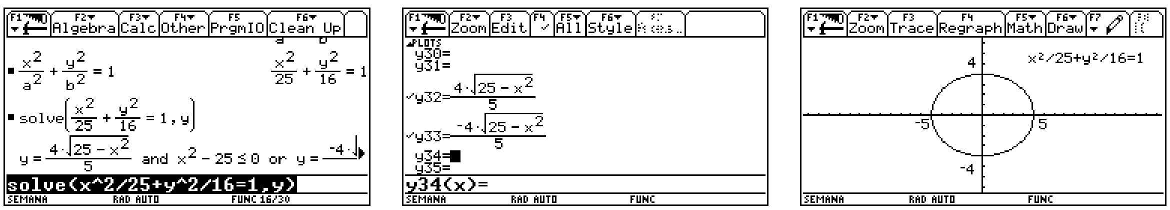


Fig. 8. El editor de funciones y de gráficas

Consideraciones finales

Lo que se ha presentado aquí es sólo una pequeña muestra de lo que puede hacerse en el aula de matemáticas cuando se incorpora este tipo de instrumentos como recurso didáctico. Por supuesto, los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no están resueltos cuando se cuenta con este tipo de dispositivos, pero es indudable que las oportunidades para explorar, conjeturar, analizar y verificar ideas se ven aumentadas.

Referencias

Contreras, A.; Font, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? Ponencia presentada a las XVIII Jornadas de la SI-IDM del 19 al 21 de abril del 2002. Universitat "Jaume I" de Castelló. Organizadas por el grupo de trabajo: *La Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica* (DMDC). Sociedad Española de Investigadores en Educación Matemática (SEIEM).

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica: México

Duval, R. (1999) Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, Colombia

Godino, J. (2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3)

Laborde, J.M.; Bellemain, F. (1994). *Cabrí-Géomètre II* (software), Dallas, Tex.: Texas Instruments.

Lehmann, CH. (1997) Geometría Analítica. Ed. Limusa.

Riddle, D. (1997) Geometría Analítica, sexta edición. International Thomson Editores, S.A. de C.V.