Nivel: Medio Básico y Medio Superior

EL USO DE LA ANALOGÍA EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Marco Antonio Cervantes Aguilar
Instituto Tecnológico de Nogales

Resumen

La presente ponencia se refiere al uso de la Analogía en la resolución de ecuaciones de primer grado con una variable. Se hace énfasis en que el muchacho (y también el adulto) resuelve intuitivamente ecuaciones en su mundo cotidiano sin darse cuenta, aplicando axiomas de los cuales no tiene conocimiento. El objetivo de este trabajo consiste en mostrar al alumno que sí sabe resolver ecuaciones, y hacerle consciente del procedimiento que sigue (como si fuera un procedimiento del tipo de ISO 9000). Una vez que el alumno tome conciencia de lo que hace intuitivamente, formalizar con axiomas ese procedimiento para que pueda resolver ecuaciones más complicadas.

1. INTRODUCCIÓN

Cuando se habla de las matemáticas, es frecuente oír tanto a estudiantes como a los adultos las siguientes frases: ¡Las matemáticas son difíciles!; ¡las ecuaciones no se usan en la vida cotidiana!; ¿ eso me servirá más adelante ?

Las frases anteriores nos envían dos mensajes:

a) el alumno no percibe la aplicación de las matemáticas en la vida cotidiana,
b) el maestro enseña las matemáticas sin relacionarla con el mundo cotidiano; más bien las enseña usando axiomas o reglas que al alumno se le antojan difíciles de entender.

La intención de esta ponencia consiste en eliminar esa sensación de que las matemáticas no tienen mucha relación con las actividades cotidianas e impulsar en el docente el uso de situaciones de la vida común y corriente en la enseñanza de las matemáticas, en particular la resolución de las ecuaciones de primer grado.

Por supuesto que, una vez que el tema de la resolución de las ecuaciones se presenta con una situación de la vida cotidiana, no significa que hasta ahí se va a quedar el tema. Ya que se comprenda el procedimiento de solución de las ecuaciones, se puede generalizar a ecuaciones más complicadas que no necesariamente tengan una referencia con la vida común, sólo que a estas alturas, el alumno ya comprendió el procedimiento de solución de casos particulares y muy concretos, y es capaz de generalizarlo.

La técnica que se recomienda es la del uso del razonamiento analógico, entendiendo a éste como el razonamiento por el cual, a partir de comprender una situación de la vida cotidiana lo transferimos a una situación similar tanto en forma como en las relaciones de las variables que intervienen en el problema. Esta manera de abordar la solución de ecuaciones de primer grado se recomienda principalmente en el nivel de secundaria y preparatoria, aunque no se descarta en el nivel profesional, dado de que basándome en la experiencia de 29 años como docente, nuestros estudiantes no llevan apareado el desarrollo mental con su desarrollo físico.

2. PLANTEAMIENTO DE LA PROBLEMÁTICA

Cuando se aborda el tema de resolución de ecuaciones de primer grado con una variable, en los libros de texto de secundaria y de preparatoria se enuncian una serie de reglas que el alumno no propone ni descubre sino que simplemente se le dan. Enseguida se da un ejemplo donde se expondrá la manera en que se resuelven estas ecuaciones.

Encuentre el valor de la variable en la siguiente ecuación: $6x + 28 = 100$

Método 1. Se le dice al alumno que siga estas reglas:

a) Los números deben pasarse a la derecha y las letras a la izquierda.
b) Cuando un número pasa del primer miembro al segundo y viceversa, se cambia la operación que estaba haciendo a la operación contraria.

Si está sumando, pasa restando; si está restando, pasa sumando; si está multiplicando, pasa dividiendo; si está dividiendo, pasa multiplicando. ¿Por qué es así? Porque así es y ¡Ya!

Así pues, la ecuación se resolvería de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 6x + 28 &= 100 \\ 6x &= 100 - 28 && \text{(el 28 estaba sumando, pasa restando)} \\ 6x &= 72 \\ x &= \frac{72}{6} && \text{(el 6 estaba multiplicando, pasa dividiendo)} \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Por supuesto que si la ecuación se le presenta como $28 + 6x = 100$, el estudiante primero pasa el 6 dividiendo al 100 y luego pasa el 28 restando. Es el problema de las reglas: no sabe qué aplicar primero.

Método 2. Sin averiguar si el alumno tiene un alto desarrollo de pensamiento formal matemático, se le exige que siga los axiomas de la igualdad:

a) Los números deben quedar a la derecha y las letras a la izquierda.
b) Si a ambos miembros se le suma o resta un mismo número, la igualdad no se altera.
c) Si a ambos miembros se les multiplica o divide por un mismo número, la igualdad no se altera.

Este procedimiento es más formal, pero en la vida cotidiana no se aplica, como lo explicaremos más adelante.

Así pues, la ecuación se resolvería de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 6x + 28 &= 100 \\ \underline{-28 \quad} & \underline{\;\; -28} && \text{(a ambos miembros se les resta 28 para que a la} \\ 6x &= 72 && \text{izquierda quede solamente el término } 6x \text{)} \\ \frac{6}{6}x &= \frac{72}{6} && \text{(a ambos miembros se les divide entre 6 para} \end{aligned}$$

que a la izquierda quede sola la variable *x*)

$x \quad = 12$

En cualquiera de los dos métodos enunciados, el alumno tiene dificultades para resolver ecuaciones de este tipo o más complicadas, porque siente que estos métodos están fuera de su contexto. Y por supuesto se pregunta: y esto, ¿ para qué me sirve ?

3. DESARROLLO DE LA PROPUESTA

El procedimiento didáctico que recomendamos consiste en enseñar la resolución de ecuaciones de primer grado relacionándolas con situaciones comunes, en donde la tarea del maestro consiste en resaltar las operaciones que mentalmente lleva a cabo el alumno. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Suponiendo, se le dice al alumno, que tú y tu novia comen 6 tacos; pagas con un billete de $100 y te regresan $28. Si el maestro le pregunta al grupo que en cuánto cobró el taco, casi todo el grupo hará las operaciones mentalmente y dirá: el taco costó 12 pesos .

En este momento toca al maestro descubrir cómo fue que el grupo llegó al resultado.

Esta transacción comercial se puede plantear como una ecuación: el dinero que tú das al comerciante es un miembro de la ecuación, y lo que el comerciante te da es el otro miembro de la ecuación. Observa, pues, que toda transacción comercial es una ecuación.

Lo que tú das al comerciante es igual a lo que el comerciante te da.

$$100 \text{ pesos} = 6 \text{ tacos} + 28 \text{ pesos}$$
$$100 = 6t + 28$$

¿Qué fue lo que hicieron para llegar al resultado?

Paso 1. A 100 pesos le restaron los 28 pesos de cambio, para determinar el costo de los 6 tacos.

$$100 - 28 = 6t$$
$$72 = 6t$$

Pregunte al grupo por qué pasaron restando los *28 pesos* : ¿quién les dio esa regla?

Por supuesto que el grupo dirá: es que así es; esto significa que es intuitivo.

Paso 2. Para saber el costo de un taco, dividieron 72 entre 6.

$$\frac{72}{6} = t$$

Pregunte al grupo por qué el 6 dividió a 72; ellos dirán que simplemente así es y ya.

En este momento, la función del maestro es reafirmar los pasos que el grupo hizo, sin que nadie les mencionara ninguna regla. Ellos hicieron lo que el sentido común les dice lo que debe ser.

El problema se puede presentar más complicado.

Ejemplo 2. Supongamos que tres amigos, Hugo, Paco y Luis fueron a comer tacos. Hugo se comió 3; Paco, 4 y Luis, 2. Hugo pagó con un billete de 100 pesos y otro de 50 pesos. Le dieron de cambio un billete de 20 pesos y 4 monedas de un peso. ¿Cuál es el precio del taco?

Se le pide al grupo que lo resuelva, primero mentalmente y después el docente escribe en el pizarrón lo que el grupo hizo.

$$100 \text{ pesos} + 50 \text{ pesos} = 3 \text{ tacos} + 4 \text{ tacos} + 2 \text{ tacos} + 20 \text{ pesos} + 4 \text{ pesos.}$$

Insistirle al grupo que toda transacción comercial es una ecuación, con el propósito de que vayan comprendiendo que las ecuaciones tienen una aplicación continua en la vida ordinaria.

Veamos los pasos que se hicieron para que el grupo los visualice:
Paso 1. Los tacos que se comieron se escriben con un solo número; de la misma manera los pesos que le dieron de cambio.

$$150 = 9\,t + 24$$

Paso 2. Los 24 pesos los restan de 150 para saber lo que costaron los 9 tacos.

$$150 - 24 = 9\,t$$
$$126 = 9\,t$$

Paso 3. El 126 es dividido entre 9 para determinar el costo de un taco.

$$\frac{126}{9} = t$$
$$14 = t$$

Ejemplo 3. Supóngase que vas con tu novia a un puesto de tacos donde el dueño es tu amigo. Tú te comes 3 tacos y tu novia se come 2. Solamente llevas un billete de 50 pesos y otro de 20 pesos. Al pagar, el taquero te dice: me debes cinco pesos. Como no traes más dinero, le dices que luego se los pagas. ¿Cuánto costó cada taco? Otra vez el grupo puede hacer las operaciones mentalmente y dará como resultado la cantidad de 15 pesos el taco.

La tarea del maestro es reescribir esta situación con símbolos matemáticos y con una ecuación:

$$3\,t + 2\,t - 5 = 50 + 20$$

Los pasos que se hacen son los siguientes:
Paso 1. Reducir la ecuación a su forma más simple.

$$5\,t - 5 = 70$$

Paso 2. Los 5 pesos que debes los sumas a los 70 pesos que pagaste, para saber el costo de los 5 tacos.

$$5\,t = 70 + 5$$
$$5\,t = 75$$

Paso 3. Divides los 75 pesos entre los 5 tacos para saber el costo de uno.

$$\frac{75}{5} = t$$
$$15 = t$$

A estas alturas, el docente puede enumerar las acciones llevadas por el grupo para resolver las ecuaciones.

Acción 1. Cuando una ecuación tiene muchos términos, la reduces sumando los términos semejantes.

Acción 2. El término que tiene letra lo dejas solo, pasando al otro lado el término numérico, siguiendo el procedimiento que ustedes hicieron intuitivamente: si está sumando, lo pasas restando; si está restando, lo pasas sumando.
Acción 3 El número que acompaña a la letra, lo pasas al otro lado haciendo la operación contraria: si está multiplicando, lo pasas dividiendo; si está dividiendo, lo pasas multiplicando.

Veamos otro ejemplo donde se note la última acción.
Ejemplo 4. Cuatro amigos van a comer a un restaurante. Piden la comida corrida con las mismas bebidas. Al final, uno de ellos pide la cuenta. La observa, les avisa que le va a agregar 40 pesos de propina a la cuenta total y que cada uno debe pagar 75 pesos. La pregunta es: ¿cuánto costaba la comida corrida?

De nueva cuenta, el grupo puede hacer las operaciones mentalmente y dará el resultado: 65 pesos.

Veamos cómo le hicieron:

Paso 1. Plantear la ecuación. $\dfrac{4\ comidas\ corridas + 40}{4} = 75$

Paso 2. El 4 que está dividiendo, lo pasan multiplicando al 75, para conocer el total más la propina.

$$4\ comidas\ corridas + 40 = 75 \times 4$$
$$4\ comidas\ corridas + 40 = 300$$

Paso 3. El 40 que está sumando, lo pasan restando.

$$4\ comidas\ corridas = 300 - 40$$
$$4\ comidas\ corridas = 260\ \ (es\ la\ cuenta\ total)$$

Paso 4. El 4 que está multiplicando, pasa dividiendo.

$$comida\ corrida = \frac{260}{4}$$
$$comida\ corrida = 65$$

En muchas situaciones, el alumno no sabe cuándo el número que está dividiendo, debe pasar multiplicando. Se le presenta otra situación donde haya un divisor pero no de todo el primer miembro. El siguiente ejemplo muestra una situación de ese tipo.

Ejemplo 5. Cuatro amigos fueron a comer. Pidieron la comida corrida. Al momento de pagar, dividieron la cuenta entre 4 , pero usted dejó 15 pesos de propina, por lo que la cantidad que pagó fue de 70 pesos. ¿ A cuánto ascendió la cuenta total de las comidas corridas?

Paso 1. Plantear la ecuación. $\dfrac{cuenta\ total}{4} + 15 = 70$

Paso 2. Por supuesto que en este problema, nadie dudará en pasar primero el 15 antes que el 4. Así que, el 15 que está sumando, pasa restando para saber lo que cada uno pagó.

$$\frac{\textit{cuenta total}}{4} = 70 - 15$$

$$\frac{\textit{cuenta total}}{4} = 55$$

Paso 3. Finalmente, el 4 que está dividiendo, pasa multiplicando, para conocer la cuenta total.

$$\textit{cuenta total} = 55 \times 4$$

$$\textit{cuenta total} = 220$$

A estas alturas, el docente puede decir algunas regla, pero no como si fueran bajadas del cielo, sino dándole más formalidad a lo que intuitivamente hicieron. En el ejemplo de los tacos, la letra *t* inicialmente se le da el significado de *taco*, pero después que comprenden el procedimiento, se hace la aclaración que su significado real es *el costo del taco*.

Enseguida, les puede poner ecuaciones donde la variable aparezca tanto en el miembro derecho como en el izquierdo. De igual manera les puede poner ecuaciones donde haya paréntesis y algunos divisores, pero siempre aplicando la intuición antes que reglas ajenas a los estudiantes.

4. CONCLUSIONES

Cuando se presenta el tema de las ecuaciones usando el razonamiento analógico como se ha expuesto aquí, se tienen dos ventajas:

- El alumno se da cuenta de que las ecuaciones se aplican en la vida cotidiana y no es algo ajeno a él.
- La técnica para resolver las ecuaciones no es algo complicado ni consiste en la utilización de reglas o axiomas que nos vienen del cielo. Simplemente son procedimientos lógicos usados por él pero que no los formaliza.

De la misma manera se pueden presentar más temas matemáticos usando lo que algunos sicólogos educativos llaman *aprendizaje por transferencia analógica* (ATA), en donde la analogía es el mecanismo principal para aprender.

5. FUENTES CONSULTADAS

Diagnóstico y estimulación del razonamiento analógico en los escolares. Implicaciones para el aprendizaje

Mario Rodríguez-Mena García; e-mail cips@ceniai.inf.cu (Licenciado y maestro en Psicopedagogía; investigador del Centro de Investigaciones Psicológicas y Sociológicas (CIPS) del Ministerio de Ciencia, Tecnología y Medio Ambiente de Cuba)