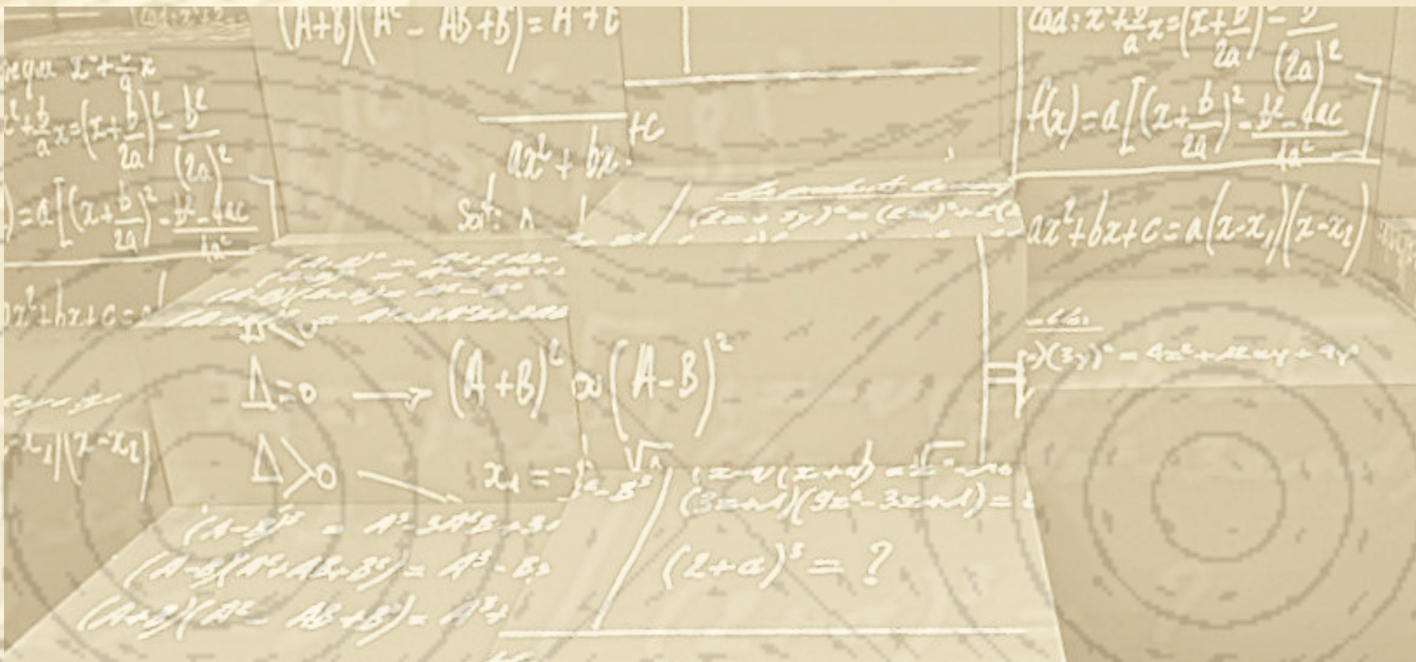
MEMORIAS

XXII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas

DICIEMBRE, 2012



Editores: Guillermo Dávila Rascón
Martín G. García Alvarado
Francisco C. García Durán

Departamento de Matemáticas
División de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Sonora

MEMORIAS

XXII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas

Diciembre de 2012

Editores: Guillermo Dávila Rascón
Martín G. García Alvarado
Francisco C. García Durán

"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Departamento de Matemáticas
División de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Sonora

QA11. A1
.S44
2012

Semana Investigación y Docencia en Matemáticas (20 : 2012 : Hermosillo, Sonora)

Memorias de la XXII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas; Hermosillo, Sonora, diciembre de 2012 / Guillermo Dávila Rascón, Martín G. García Alvarado, Francisco C. García Durán, Editores.- - Hermosillo, Sonora: Editorial Universidad de Sonora. División de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de Matemáticas,
c2012.

206 p.: Il., Fotog.; 27cm.
ISBN: En trámite
Incluye bibliografía.
1. Matemáticas - Investigaciones - Congresos, conferencias, etc.
2. Matemáticas - Ensenñanza, Congresos, conferencias, etc. I. Dávila Rascón, Guillermo, ed. II. García Alvarado, Martín Gildardo, ed.
III. García Durán Francisco Cándido, ed.

Area de Análisis Bibliográfico, Subdirección de Servicios de Apoyo Académico, DSU, Universidad de Sonora

Memorias de la Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas
Editada por Guillermo Dávila Rascón, Martían Gildardo García Alvarado y Francisco Cándido García Durán

ISBN: En trámite

Universidad de Sonora
Calle Rosales y Blvd. Luis Encinas
Hermosillo, Sonora
C. P. 83000
Teléfono (01-662) 2592155
Fax (01-662) 2592219

Diseño de Portada: Roberto Núñez González

Impreso en México
Printed in Mexico

Memorias de la XXII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas

PRESENTACIÓN

La Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas, es un evento anual organizado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, que es reconocido a nivel nacional y el cual se ha consolidado como un foro para la difusión y discusión de resultados de investigación en las diversas áreas de las matemáticas y sus aplicaciones, así como de la computación y de la didáctica de las matemáticas. Asimismo, la problemática en torno a la enseñanza de esta ciencia ha sido uno de los tópicos que siempre han estado presentes en este evento.

Desde sus inicios, la Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas ha mantenido vigentes sus objetivos, a saber:

- Dar a conocer trabajos en matemáticas y sus aplicaciones, en computación y en la docencia de las matemáticas, realizados por profesores e investigadores de diversas instituciones de educación superior y de nuestro departamento, en particular.
- Fomentar, entre los participantes, el interés por el estudio y la investigación en matemáticas, en sus diferentes aspectos.
- Propiciar un ambiente matemático que redunde en la superación de profesores y, por consiguiente, en un mejor aprovechamiento por parte de sus estudiantes.

Para cumplir con estos objetivos, en la Semana se realizan diversas actividades, tales como conferencias plenarias, conferencias por invitación, mesas redondas, cursos cortos y ponencias por solicitud, todas las cuales concilian un amplio espectro de intereses académicos de los participantes, generando con ello un impacto positivo en nuestra comunidad.

En la vigésima segunda edición de la Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas, aparte de las actividades usuales, también se tuvieron varias sesiones paralelas más especializadas: Se llevaron a cabo el Tercer Taller de Geometría y Sistemas Dinámicos, el Tercer Taller de Sistemas Dinámicos y Control, el Cuarto Seminario de Probabilidad y Estadística, así como una Sesión Especial de Matemática Educativa. Como consecuencia de ello, se tuvo una amplia participación de académicos provenientes de más de una veintena de instituciones nacionales, desde universidades hasta centros de investigación, así como de profesores de los diferentes niveles educativos del sistema escolar de nuestro estado.

Por otra parte, debemos señalar que la Semana se hace posible gracias al empeño y entusiasmo de profesores, estudiantes y personal administrativo de nuestro departamento, quienes realizan las diferentes tareas que la sustentan, desde la evaluación de las ponencias por solicitud, la impresión de materiales, el registro de participantes hasta la atención a los académicos invitados, por mencionar sólo algunas. Asimismo, es también oportuno señalar que este evento sería imposible sin el concurso de diversas instancias universitarias que siempre han brindado su apoyo, como es el caso de la Vicerrectoría de la Unidad Regional Centro, la División de Ciencias Exactas y Naturales, la Dirección de Comunicación y los Talleres Gráficos de la Universidad de Sonora.

Es por ello que el Comité Organizador de la XXII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas agradece profundamente a todas aquellas personas y a las instancias que contribuyeron, una vez más, a culminar con éxito este evento. Igualmente, expresamos nuestro agradecimiento a todos los participantes en esta edición de la Semana, especialmente a todas aquellas personas que con la presentación de sus trabajos han colaborado para lograr los objetivos de este foro.

Finalmente, es necesario dejar constancia sobre el trabajo realizado para editar estas Memorias, ya que la presente edición marca una diferencia importante con respecto a ediciones anteriores. En efecto, esta obra ha sido completamente formateada por medio del sistema LaTeX. Así, el lector podrá constatar una mayor uniformidad en todos los artículos publicados y nuestra expectativa es que se haya logrado una mejor presentación de toda la obra. De esta manera, con la edición de las Memorias se concluyen los trabajos de la vigésima segunda edición de la Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas, esperando que lo aquí publicado sea de utilidad y contribuya a fomentar, en nuestro entorno, un mayor interés por las matemáticas.

Los Editores
Hermosillo, Sonora,
Diciembre de 2012

CONTENIDO

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 1–9.

EXISTENCIA DE EQUILIBRIOS DE NASH PARA JUEGOS ESTOCÁSTICOS NO COOPERATIVOS

Alejandra Fonseca Morales **Fernando Luque Vásquez**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: fluque@gauss.mat.uson.mx

Resumen

El objetivo en este trabajo es presentar algunas condiciones suficientes en las componentes de un juego estocástico no cooperativo para la existencia de equilibrios de Nash. Se establecen condiciones para dos clases de juegos estocásticos con criterio de pago descontado; un modelo en el que el espacio de estados es numerable, los espacios de acciones admisibles son espacios métricos separables compactos y las funciones de pago para cada jugador no necesariamente son acotadas. El otro modelo representa un juego estocástico con estructura ARAT donde el espacio de estados es un espacio de Borel, los conjuntos de acciones son espacios métricos compactos y las funciones de pago no necesariamente son acotadas.

1 Introducción

El concepto de equilibrio fue introducido por John F. Nash para juegos estáticos de suma no cero y posteriormente extendido para juegos estocásticos no cooperativos. El estudio del problema de la existencia de equilibrios de Nash para juegos estocásticos se inició con los trabajos de M.J. Sobel [13], T. Parthasarathy [11], entre otros, en los que se consideró espacio de estados finitos. Posteriormente A. Federgruen en [1] establece condiciones para la existencia de equilibrios para juegos con espacio de estados numerable. Para juegos estocásticos con espacio de estados no numerable, el problema no se ha resuelto completamente y en la actualidad se sigue trabajando para establecer condiciones más generales que aseguren la existencia de equilibrios. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos en la tesis de maestría *Equilibrios de Nash para juegos estocásticos no cooperativos con criterio de pago descontado*, en donde se presentan condiciones suficientes para el caso en el que el espacio de estados es numerable y el caso en que el espacio de estados es un espacio de Borel (este último con estructura ARAT, de las siglas en inglés, *additive reward and additive transition*), y donde las funciones de pago de cada jugador no necesariamente son acotadas. Juegos con estructura ARAT se han estudiado en [2], [6], [9], [12] entre otros.

2 Juegos estocásticos no cooperativos

Definición 2.1 *Un modelo de juego estocástico no cooperativo de $N-$jugadores, es un sistema de la forma:*

$$G := \{X, (A_i, \{A_i(x) : x \in X\}, r_i)_{i=1,\dots,N}, Q\}$$

que consiste en:

(a) El conjunto X llamado, el espacio de estados.

(b) El conjunto $A_i, i \in I := \{1, ..., N\}$, es el espacio de acciones para el jugador i.

(c) El conjunto $A_i(x) \subset A_i$ $(i \in I)$, es el conjunto de acciones admisibles para el jugador i, cuando el sistema está en el estado x. Definamos la multifunción de X en $A := A_1 \times \cdots \times A_N$ por $A(x) := A_1(x) \times \cdots \times A_N(x)$ y denotemos su gráfica por, $\mathbb{K} := \{(x, a) : x \in X, a \in A(x)\}$.

(d) La función $r_i : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ es la función de pago o ganancia del jugador i.

(e) La ley de transición Q es un kernel estocástico en $\mathbb{P}(X|\mathbb{K})$.

Un modelo de juego estocástico representa un sistema que evoluciona en el tiempo de la siguiente manera. En el tiempo $t = 0$, el sistema se encuentra en un estado inicial x_0, entonces, cada jugador escoge independientemente una acción de su conjunto de acciones admisibles determinando así, $a_0 = (a_1^0, ..., a_n^0) \in A(x_0)$ y en consecuencia, el jugador i recibe un pago $r_i(a_0)$. En el tiempo $t = 1$, el sistema pasa a un nuevo estado x_1, de acuerdo a la ley de transición $Q(\cdot/x_0, a_0)$ y el proceso se repite indefinidamente.

Un juego estocástico de dos jugadores es ARAT, si la función de pago o ganancia r_i y la ley de transición Q tienen estructura aditiva, es decir, existen funciones $m_i : X \times A \to \mathbb{R}$ y $l_i : X \times B \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ tal que

$$r_i(x, a, b) = m_i(x, a) + l_i(x, b) \quad i = 1, 2,$$

y Q_1, Q_2 kernels subestocásticos tales que

$$Q(\cdot/x, a, b) = Q_1(\cdot/x, a) + Q_2(\cdot/x, b).$$

Para cada $t = 0, 1, 2, ...$, se define el conjunto de las $t-$historias por; $\mathbb{H}_0 = X$ y para $t \geq 1$, $\mathbb{H}_t = \mathbb{K}^t \times X$. Obsérvese que un elemento de $\mathbb{H}_t$ es de la forma;

$$h_t = (x_0, a_0, ..., x_{t-1}, a_{t-1}, x_t).$$

Una política o estrategia para el jugador i, es una sucesión $\pi_i = \{\pi_t^i : t = 0, 1, 2, ...\}$ de kernels estocásticos $\pi_t^i \in \mathbb{P}(A_i|\mathbb{H}_t)$ tal que

$$\pi_t^i(A_i(x)/h_t) = 1 \quad \forall h_t \in \mathbb{H}_t.$$

Se denota por Π_i al conjunto de todas las políticas para el jugador i y a cada elemento $\pi = (\pi_1, ..., \pi_N)$ en $\Pi := \Pi_1 \times \cdots \times \Pi_n$ se le llama una multiestrategia para los $N-$jugadores.

Definición 2.2 *Una estrategia $\pi_i = \{\pi_t^i : t = 0, 1, 2, ...\} \in \Pi_i$ es estacionaria, si existe $\phi_i \in \mathbb{P}(A_i|X)$ con $\phi_i(A_i(x)/x) = 1$ para toda $x \in X$ y tal que para cada $h_t = (x_0, a_0, ..., x_{t-1}, a_{t-1}, x_t)$ $\in \mathbb{H}_t, t = 0, 1, 2, ...$ y $B \in \mathscr{B}(A_i)$,*

$$\pi_t^i(B/h_t) = \phi_i(B/x_t).$$

Sea Φ_i el conjunto de todas las estrategias estacionarias del jugador i e identifíquese la estrategia $\{\phi, \phi, ...\}$ por ϕ. Se define el conjunto de las multiestrategias estacionarias por

$$\Phi \ := \ \prod_{i=1}^{N} \Phi_i,$$

y para $\pi \in \Pi$ y $\phi_i \in \Phi_i$, se usará la siguiente notación:

$$(\pi^{-i}, \phi_i) \ := \ (\pi_1, ..., \pi_{i-1}, \phi_i, \pi_{i+1}, ..., \pi_N).$$

Sea $((X \times A)^\infty, \mathscr{F})$ el espacio medible en el que $\mathscr{F}$ es la $\sigma-$álgebra producto en $(X \times A)^\infty$ y ν es una medida de probabilidad en X. Entonces por el Teorema de C. Ionescu-Tulcea (ver Proposición C.10 en [4]), para cada multiestrategia $\pi \in \Pi$ existe una medida de probabilidad P_ν^π y el proceso estocástico $\{(x_t, a_t) : t = 0, 1, 2, ...\}$ en $((X \times A)^\infty, \mathscr{F})$, donde x_t representa el estado y a_t representa el vector de acciones en el tiempo t tal que para cada $B \in \mathscr{B}(X), C \in \mathscr{B}(A)$ y $h_t \in \mathbb{H}_t, t = 0, 1, 2, ...$

$$\begin{aligned} P_\nu^\pi(x \in B) &= \nu(B), \\ P_\nu^\pi(a_t \in C/h_t) &= \pi_t(C/h_t), \\ P_\nu^\pi(x_{t+1} \in B/h_t, a_t) &= Q(B/x_t, a_t), \end{aligned}$$

En el caso particular donde ν es la medida de Dirac concentrada en un estado $x \in X$, la medida de probabilidad P_ν^π la denotaremos por P_x^π y el operador esperanza con respecto a P_x^π lo denotaremos por E_x^π.

Definición 2.3 *Sea $\alpha \in (0, 1)$. Para cada $i = 1, ..., N, x \in X$ y cada multiestrategia $\pi \in \Pi$, definimos la ganancia total esperada α-descontada para el jugador i, por*

$$V_i(x, \pi) \ := \ E_x^\pi(\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t r_i(x_t, a_t)).$$

En un juego estocástico la ganancia de cada jugador depende de las estrategias que elijan todos los jugadores lo que hace necesario introducir un concepto de equilibrio.

Definición 2.4 *(a) Una estrategia $\pi_i^* \in \Pi_i$ es una respuesta óptima del jugador i para $\pi \in \Pi$ si*

$$V_i(x, (\pi^{-i}, \pi_i^*)) \ = \ \max_{\tau \in \Pi_i} V_i(x, (\pi^{-i}, \tau)) \qquad \forall x \in X.$$

(b) Una multiestrategia $\pi^* = (\pi_1^*, ..., \pi_N^*) \in \Pi$ es un equilibrio de Nash para el juego si para cada $i = 1, 2, ..., N$, la estrategia π_i^* es una respuesta óptima del jugador i para π^*, es decir,

$$V_i(x, \pi^*) \ = \ \max_{\tau \in \Pi_i} V_i(x, (\pi^{-i}, \tau)) \qquad \forall x \in X, \ \ i = 1, ..., N.$$

(c) Para una distribución de probabilidad μ en X, la multiestrategia estacionaria $\phi^* = (\phi_1^*, ..., \phi_N^*)$ es un $\mu-$equilibrio si,

$$\mu\left\{x \in X : V_i(x, \phi^*) \geq V_i(x, ((\phi^*)^{-i}, \phi_i)) \quad \forall \phi_i \in \Phi_i, i \in I\right\} \;=\; 1.$$

Definición 2.5 *Sean X un espacio métrico y $W : X \to [1, \infty)$ una función medible. Para cada función $g \in \mathbb{M}(X)$ definimos la W-norma por,*

$$\|g\|_W \;=\; \sup_{x \in X} \frac{|g(x)|}{W(x)}.$$

En el caso en que $\|g\|_W < \infty$, a la función g se le llama función W-acotada. Sea $\mathbb{B}_W(X)$ el conjunto de todas las funciones $W-$acotadas, nótese que $\mathbb{B}_W(X)$ es un espacio de Banach con la $W-$norma. Además, es claro que $\mathbb{B}(X) \subset \mathbb{B}_W(X)$.

3 Juegos estocásticos con espacios de estados numerable

Consideremos el modelo de un juego estocástico no cooperativo de N-jugadores,

$$G := \{X, (A_i, \{A_i(x) : x \in X\}, r_i)_{i=1,...,N}, Q\} \tag{1}$$

donde el espacio de estados X es numerable y para cada $i \in I$, el conjunto de acciones A_i es un espacio métrico separable.

Hipótesis 3.1 *Existe una función $W : X \to [1, \infty)$ que satisface:*

(a) Para cada $x \in X, i \in I$,

$$\max_{a \in A(x)} |r_i(x, a)| \leq KW(x) \tag{2}$$

donde K es una constante positiva.

(b) Existe $\beta \in [1, \frac{1}{\alpha})$ tal que para cada $x \in X$ y cada $a \in A(x)$,

$$\sum_{y \in X} W(y) Q(y/x, a) \;\leq\; \beta W(x).$$

Hipótesis 3.2 *Para cada $i \in I$ y $x \in X$,*

(a) El conjunto de acciones admisibles $A_i(x)$ es compacto.

(b) La función $r_i(x, \cdot)$ es continua en $A(x)$.

(c) La función

$$a \;\mapsto\; \sum_{y \in X} u(y) Q(y/x, a) \tag{3}$$

es continua en $A(x)$ para toda función $u \in \mathbb{M}_b(X)$, (donde $\mathbb{M}_b(X)$ es el espacio de funciones medibles y acotadas en X) y también (3) se cumple con $u = W$, donde W es la función en la Hipótesis 3.1.

Teorema 3.3 *Bajo las Hipótesis 3.1 y 3.2, el juego estocástico no cooperativo G en (1) tiene un equilibrio de Nash en el conjunto de las estrategias estacionarias Φ.*

Demostrar la existencia de un equilibrio de Nash para el juego estocástico G, es equivalente a demostrar la existencia de un punto fijo de una multifunción definida adecuadamente en el espacio de las multiestrategias estacionarias. En las subsecciones 3.1 y 3.2 presentamos un bosquejo de la demostración del Teorema 3.3 en la cual se utiliza el teorema de punto fijo de Glicksberg (ver [3]). En el resto de la sección supóngase que se satisfacen las Hipótesis 3.1 y 3.2.

3.1 Estructura del espacio de las multiestrategias estacionarias

Obsérvese que para cada $i \in I$,

$$\Phi_i = \{\phi_i \in \mathbb{P}(A_i/X) : \phi_i(\cdot/x) \in \mathbb{P}(A_i(x))\} = \prod_{x\in X} \mathbb{P}(A_i(x)) \tag{4}$$

(ver Definición 2.2). En la demostración de que Φ es metrizable, se utiliza la representación (4) y el hecho que X es numerable. Como una consecuencia del teorema de Tychonoff y de la convexidad del conjunto $\mathbb{P}(A_i(x))$, se obtiene también que el espacio Φ es compacto y convexo. Además, para cada $x \in X$ y cada $i \in I$, se denota por $\mathscr{M}(A_i(x))$ el conjunto de medidas con signo finitas definidas en $\mathscr{B}(A_i(x))$. Por lo tanto, el espacio Φ es un subespacio metrizable compacto y convexo del espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo; $\prod_{x\in X}\prod_{i=1}^{N} \mathscr{M}(A_i(x))$.

3.2 Correspondencia semicontinua superiormente

Bajo las Hipótesis 3.1 y 3.2, para cada $\phi \in \Phi$ existe una estrategia $\eta_i \in \Phi_i$ tal que para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} &\max_{\mu\in\mathbb{P}(A_i(x))}[\bar{r}_i(x,(\phi^{-i},\mu)) + \alpha\sum_{y\in X} V_i(y,\phi)\bar{Q}(y/x,(\phi^{-i},\mu))] \qquad (5)\\ = \;& \bar{r}_i(x,(\phi^{-i},\eta_i(\cdot/x))) + \alpha\sum_{y\in X} V_i(y,\phi)\bar{Q}(y/x,(\phi^{-i},\eta_i(\cdot/x))). \end{aligned}$$

Sea $\Psi : \Phi \to 2^{\Phi}$ la multifunción definida por

$$\Psi(\phi) := \prod_{i=1}^{N} \{\eta_j \in \Phi_i : \eta_j \ \ satisface \ \ (5)\}.$$

La multifunción Ψ es semicontinua superiormente y para cada $\phi \in \Psi$ el conjunto $\Psi(\phi)$ es convexo.

Por el teorema de punto fijo de Glicksberg, existe $\phi = (\phi^1, ..., \phi^N)$ una multiestrategia estacionaria tal que se satisface la ecuación de optimalidad

$$V^i(x,\phi) = \max_{\mu \in \mathbb{P}(A_i(x))} [\bar{r}_i(x,(\phi^{-i},\mu)) + \alpha \sum_{y\in X} V_i(y,\phi)\bar{Q}(y/x,(\phi^{-i},\mu))].$$

Por el Teorema 8.3.6(c) en [5] p. 47, ϕ_i es una respuesta óptima para ϕ, es decir, ϕ es un equilibrio de Nash para el juego estocástico G.

4 Juegos estocásticos ARAT

Consideremos el juego estocástico ARAT de dos jugadores

$$G := (X, A, B, \{A(x) : x \in X\}, \{B(x) : x \in X\}, Q, r_1, r_2) \tag{6}$$

donde:

Condición 1(C1). El espacio de estados X es un espacio de Borel y los conjuntos de acciones A y B son espacios métricos compactos, además, $A = A(x)$ y $B = B(x)$ $\forall x \in X$.

Condición 2(C2). El espacio de estados X es un espacio de Borel compacto, los conjuntos de acciones admisibles $A(x)$ y $B(x)$ son conjuntos cerrados y los conjuntos de acciones A y B son espacios métricos separables y compactos.

Sea μ una medida de probabilidad sin átomos en X tal que Q es absolutamente continua con respecto a μ. Se denota por $z : \mathbb{K} \times X \to \mathbb{R}$ a la función de densidad de Q con respecto a μ.

Hipótesis 4.1 *Existe $W : X \to [1,\infty)$ una función μ-medible e integrable, tal que para cada $x \in X$ se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) Si $a_n \to a$ en $A(x)$ y $b_n \to b$ en $B(x)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |z(x,a_n,b_n,y) - z(x,a,b,y)| W(y)\mu(dy) = 0. \tag{7}$$

(b) Para una constante positiva K,

$$\max_{(a,b)\in A(x)\times B(x)} |r_i(x,a,b)| \leq KW(x) \;\; (i = 1,2). \tag{8}$$

(c) Existe $\beta \in [1, \frac{1}{\alpha})$ tal que

$$\int_X W(y)Q(dy/x,a,b) \leq \beta W(x) \;\; \forall (a,b) \in A(x) \times B(x). \tag{9}$$

Hipótesis 4.2 *(a) Para cada $(a,b) \in A(x) \times B(x)$ la función $r_i(\cdot,a,b)$ $(i = 1,2)$ es medible en X y para cada $x \in X$ la función $r_i(x,\cdot,\cdot)(i = 1,2)$ es continua en $A(x) \times B(x)$.*

(b) Para cada $C \in \mathscr{B}(X)$ y $x \in X$, las funciones $Q_1(C/x,\cdot)$ y $Q_2(C/x,\cdot)$ son continuas en $A(x)$ y $B(x)$ respectivamente.

Teorema 4.3 *Si un juego ARAT G satisface (C1) o (C2) y las Hipótesis 4.1 y 4.2, entonces existe un equilibrio de Nash para G en el conjunto de las multiestrategias estacionarias Φ.*

Por medio del teorema de punto fijo de Glicksberg, se demuestra la existencia de un $\mu-$equilibrio, el cual es necesario en la demostración del Teorema 4.3. Supóngase entonces que las Hipótesis 4.1 y 4.2 se satisfacen para el resto de la sección.

4.1 Estructura del espacio de las estrategias estacionarias

Proposición 4.4 *Bajo la condición (C1) o (C2), el espacio de las multiestrategias estacionarias Φ, es un espacio topológico metrizable y compacto.*

Para la condición (C1), definamos $\mathscr{B}_1$ como el espacio de todas las funciones $h : X \times A \to \mathbb{R}$ tal que para cada $a \in A, h(\cdot, a)$ es medible en X, para cada $x \in X$ $h(x, \cdot)$ es continua en A y

$$\max_{a\in A} |h(x,a)| \in \mathbb{L}_1(\mu).$$

donde $\mathbb{L}_1(\mu)$ es el espacio de funciones integrables en X. Obsérvese que podemos identificar $(\mu-c.d)$ a cada $\phi \in \Phi_1$ con un elemento de $\mathscr{B}_1^*$ el dual de $\mathscr{B}_1$. Por lo tanto, podemos suponer que (Φ_1, ω_1^*) es un subconjunto del espacio topológico $(\mathscr{B}_1^*, \omega_1^*)$, en donde ω_1^* es la topología débil estrella en $\mathscr{B}_1^*$. Análogamente, se define $\mathscr{B}_2$ para el espacio Φ_2 y por lo tanto, (Φ_2, ω_2^*) es un subconjunto del espacio topológico $(\mathscr{B}_2^*, \omega_2^*)$, en donde ω_2^* es la topología débil estrella en $\mathscr{B}_2^*$.

Para la condición (C2) ver Teorema 5.3.11 en [14]. El espacio $\mathscr{B}_i^*(i = 1, 2)$ definido anteriormente, es un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo.

4.2 Problemas de control de Markov asociados

Problema de Control de Markov. Si fijamos $\phi_2 \in \Phi_2$ una estrategia estacionaria para el jugador 2, entonces podemos considerar el Modelo de Control de Markov $(X, A, Q_{\phi_2}, r^1_{\phi_2})$, en donde

$$\begin{aligned}
r^1_{\phi_2}(x,a) &:= \bar{r}_1(x, a, \phi_2(\cdot/x)),\\
Q_{\phi_2}(\cdot/x,a) &:= \bar{Q}(\cdot/x, a, \phi_2(\cdot/x)),\\
V^1_{\phi_2}(x,\pi_1) &:= V_1(x, \pi_1, \phi_2),\\
V^1_{\phi_2}(x) &:= \sup_{\pi_1\in\Pi_1} V^1_{\phi_2}(x,\pi_1).
\end{aligned}$$

Entonces $V^1_{\phi_2}(\cdot)$ es un elemento de $\mathbb{B}_W(X)$. Similarmente, si fijamos $\phi_1 \in \Phi_1$, una política estacionaria para el jugador 1, entonces podemos considerar el correspondiente Modelo de Control de Markov $(X, B, Q_{\phi_1}, r^2_{\phi_1})$.

Definimos para cada $i = 1, 2$ y para cada $(\phi_1, \phi_2) \in \Phi$ el operador en $\mathbb{B}_W(X)$ por

$$T^i_{\phi_1,\phi_2} u(x) \;:=\; \bar{r}_i(x, \phi_1(\cdot/x), \phi_2(\cdot/x)) + \alpha \int_X u(y)\bar{Q}(dy/x, \phi_1(\cdot/x), \phi_2(\cdot/x)),$$

y la multifunción $\Psi : \Phi_1 \times \Phi_2 \twoheadrightarrow 2^{\Phi_1\times\Phi_2}$ por

$$\begin{aligned} \Psi(\phi_1, \phi_2) := \{(\phi_1^*, \phi_2^*) : \quad V^1_{\phi_2}(x) &= T^1_{\phi_1^*,\phi_2} V^1_{\phi_2}(x) \quad \mu - c.d. \;\; y \\ V^2_{\phi_1}(x) &= T^2_{\phi_1,\phi_2^*} V^2_{\phi_1}(x) \quad \mu - c.d.\}. \end{aligned}$$

Bajo las hipótesis 3.1 y 3.2, la multifunción Ψ es semicontinua superiormente en $\Phi^1 \times \Phi^2$. Por el Teorema de Glicksberg, existe (el $\mu-$equilibrio) un punto fijo $(\phi_1^*, \phi_2^*) \in \Phi^1 \times \Phi^2$ de Ψ, esto es,

$$V^1_{\phi_2^*}(x) = T^1_{\phi_1^*,\phi_2^*} V^1_{\phi_2^*}(x) \quad \mu - c.d. \quad y \quad V^2_{\phi_1^*}(x) = T^2_{\phi_1^*,\phi_2^*} V^2_{\phi_1^*}(x) \quad \mu - c.d. \tag{10}$$

Sea D_1 el conjunto donde (10) se satisface, y sean $f_1 \in \mathbb{F}_1$, $f_2 \in \mathbb{F}_2$ tal que para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} &\max_{a\in A(x)} [\bar{r}_1(x, a, \phi_2^*(\cdot/x)) + \alpha \int_X V^1_{\phi_2^*}(y)\bar{Q}(dy/x, a, \phi_2^*(\cdot/x))] \\ = \;& \bar{r}_1(x, f_1(x), \phi_2^*(\cdot/x)) + \alpha \int_X V^1_{\phi_2^*}(y) Q(dy/x, f_1(x), \phi_2^*(\cdot/x)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &\max_{b\in B(x)} [\bar{r}_2(x, \phi_1^*(\cdot/x), b) + \alpha \int_X V^2_{\phi_1^*}(y) Q(dy/x, \phi_1^*(\cdot/x), b)] \\ = \;& \bar{r}_2(x, \phi_1^*(\cdot/x), f_2(x)) + \alpha \int_X V^2_{\phi_1^*}(y)\bar{Q}(dy/x, \phi_1^*(\cdot/x), f_2(x)). \end{aligned}$$

Definimos

$$\hat{\phi}_1(\cdot/x) := \begin{cases} \phi_1^*(\cdot/x) & \text{si } x \in D_1 \\ f_1(x) & \text{si } x \in D_1^c, \end{cases}$$

$$\hat{\phi}_2(\cdot/x) := \begin{cases} \phi_2^*(\cdot/x) & \text{si } x \in D_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in D_1^c, \end{cases}$$

Utilizando pasos algebraicos se concluye que el par $(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \in \Phi^1 \times \Phi^2$ es un equilibrio de Nash para G, el juego estocástico ARAT.

Referencias

[1] A. Federgruen, *On n-person stochastic game with denumerabe state space*. Adv. Appl. Prob., 10 (1978), 452-471.

[2] M.K. Ghosh and A. Bagchi, *Stochastic games with average payoff criterion*. Appl. Math. Optim., 38 (1998), 283-301.

[3] L. Glicksberg, *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points*. Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1951), 170-174.

[4] O. Hernández-Lerma y J.B. Lasserre, *Discrete Time Markov Control Processes*. Springer-Verlag, New York (1996).

[5] O. Hernández-Lerma y J.B. Lasserre, *Further Topics on Discrete Time Markov Control Processes*. Springer-Verlag. New York., (1999).

[6] C.J. Himmelberg, T. Parthasarathy, T.E.S. Raghavan y F.S. Van Vleck, *Existence of p-equilibrium and optimal stationary strategies in stochastic games*. Proc. Amer. Math. Soc., 60 (1976), 245-251.

[7] J.F. Nash, *Non-cooperative games*. Ann. of Math., 54 (1951), 286-295.

[8] A.S. Nowak, *Existence of equilibrium stationary strategies in discounted noncooperative stochastic games with uncountable state space*. J. Optim. Theory Appl., 45 (1985), 591-602.

[9] A.S. Nowak, *Nonrandomized strategy equilibria in noncooperative stochastic games with additive transition and reward structure*. J. Optim. Theory Appl., 52 (1987), 429-441.

[10] A.S. Nowak, *On a new class of nonzero-sum discounted stochastic games having stationary Nash equilibrium points*. J. Game Theory., 32 (2003), 121-132.

[11] T. Parthasarathy, *Discounted, positive and noncooperative stochastic games* Internat. J. Game Theory., 2 (1973), 25-37.

[12] T. Parthasarathy, *Existence of equilibrium stationary strategies in discounted stochastic games*. Shankya: The Indian Journal of Statistics Series A., 44 (1982), 114-127.

[13] M.J. Sobel, *Noncooperative stochastic games.* Ann. Math. Statist., 42 (1971), 1930-1935.

[14] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Funtional Equations*. Academic Press, New York, (1972).

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 11–19.

Nivel: Reporte de Investigación

OPERADORES α-FREDHOLM

Gabriel Kantún Montiel **Slavisa Djordjevic**

Centro de Investigación en Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
e-mail: gabriel.kantun@cimat.mx

Resumen

Un operador lineal acotado T es de Fredholm si $\dim N(T) < \infty$ *y y* $\dim H/R(T) < \infty$. *En este artículo se explora el caso en que usamos diversos cardinales infinitos, de modo que un operador es α-Fredholm si* $\dim N(T) < \alpha$ *y y* $\dim H/R(T) < \alpha$, *donde α es un cardinal. Dada su importancia para ciertos cálculos prácticos, también se discute el caso finito.*

1 Introducción

Sea H un espacio de Hilbert. Denotemos mediante $B(H)$ el conjunto de los operadores lineales acotados en H. Las cantidades $\alpha(T) = \dim N(T)$ y $\beta(T) = \dim H/R(T)$ se conocen como la nulidad y el defecto de T respectivamente.

Un operador $T \in B(H)$ es llamado Fredholm si

$$\alpha(T) < \infty \quad \text{y} \quad \beta(T) < \infty.$$

Es conocido que $\beta(T) < \infty$ implica que $R(T)$ es cerrado (véase, por ejemplo, [1]). En el caso en que la dimensión del espacio de Hilbert subyacente H sea $\aleph_0$, es claro que esto significa $\alpha(T) < \aleph_0$ y $\beta(T) < \aleph_0$. Sea $\mathcal{J}_{\aleph_0}$ el conjunto de los operadores con rango menor que $\aleph_0$. Resulta que la cerradura en norma $\overline{\mathcal{J}_{\aleph_0}}$ de $\mathcal{J}_{\aleph_0}$ es el conjunto de operadores compactos. Aún más, si H es un espacio de Hilbert separable, entonces el conjunto de operadores compactos es el único ideal (bilateral) cerrado de $B(H)$ (véase [1, Corolario 5.4.23]). Esto es interesante a la luz de la caracterización de Atkinson: los operadores de Fredholm son precisamente aquellos que son invertibles módulo el ideal de los operadores compactos. Por supuesto, en el caso de un espacio de Hilbert separable no tenemos otro ideal (bilateral) cerrado, pero cuando estamos trabajando en espacios de Hilbert no separables tenemos varios otros ideales para escoger.

Cuando H es un espacio de Hilbert no separable tenemos varios cardinales infinitos, de manera que es natural preguntarnos si tiene sentido reemplazar $\aleph_0$ en nuestra discusión anterior por otro cardinal. Esta pregunta ha sido estudiada en varios artículos, por ejemplo [2], [3], [4]. A lo largo de esta sección usaremos α para denotar un cardinal. Hacia una caracterización de tipo Atkinson para este caso general, necesitaremos la noción de α cerradura.

Un subespacio $M \subset H$ es α *cerrado* si existe un subespacio cerrado N tal que $N \subset M$ y $\dim(M \cap N^{\perp}) < \alpha$. Es sencillo verificar que un subespacio M es cerrado si y sólo si es $\aleph_0$ cerrado si y sólo si es 1 cerrado (véase [3]).

Sea h la dimensión de H, y $1 \leq \alpha \leq h$. Decimos que $T \in B(H)$ es un operador α-Fredholm si

$$\alpha(T) < \alpha, \quad \beta(T) < \alpha \quad \text{y} \quad R(T) \text{ es } \alpha\text{-cerrado.}$$

Notemos aquí que cuando $\alpha < \aleph_0$ entonces $\mathcal{J}_\alpha$ no es un ideal, sin embargo, podemos trabajar con este caso hasta cierto punto.

Teorema 1.1 ([3, Theorem 2.8]) *Sea H un espacio de Hilbert de dimensión h, sea $T \in B(H)$ y sea $1 \leq \alpha \leq h$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *T es invertible modulo $\mathcal{J}_\alpha$.*
2. *T es invertible modulo $\overline{\mathcal{J}_\alpha}$.*
3. *T es α-Fredholm.*

2 Operadores α-Fredholm generalizados

En últimas décadas ha habido un interés renovado en las inversas generalizadas. En vista del teorema 1.1, estas nociones generalizadas de invertibilidad llevan de manera natural a una teoría de Fredholm "generalizada". Este tema se ha tratado en varios artículos (por ejemplo, [5], [6]), sin embargo, se ha puesto muy poca atención en espacios de Hilbert no separables, lo cual es el propósito de esta sección.

Un operador $T \in B(H)$ es invertible Drazin de grado 1 si existe $S \in B(H)$ tal que

$$T = TST, \quad S = STS \quad \text{y} \quad TS = ST.$$

Por ejemplo, si P es idempotente, $P = P^2$ es invertible Drazin de grado 1. Como en la invertibilidad usual, un operador invertible Drazin de grado 1 conmuta con cualquier operador que conmute con su inversa Drazin.

Consideremos ahora nuestra primera clase de operadores α-Fredholm generalizados.

Definición 2.1 *Un operador $T \in B(H)$ es α-Fredholm generalizado si T es invertible Drazin de grado 1 modulo $\mathcal{J}_\alpha$.*

El conjunto de operadores α-Fredholm generalizados contiene propiamente el conjunto de operadores α-Fredholm, como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.2

1. *Ya que los operadores invertibles usuales son invertibles Drazin de grado 1, es claro que los operadores α-Fredholm son α-Fredholm generalizados.*
2. *Si $T \in \mathcal{J}_\alpha$, entonces T es α-Fredholm generalizado. Sea $T \in \mathcal{J}_\alpha$, tomando $S = T$ resulta $T - TST \in \mathcal{J}_\alpha$ y $TS - ST \in \mathcal{J}_\alpha$.*

3. Por supuesto, si T es invertible Drazin de grado 1, T es α-Fredholm generalizado.

También tenemos la siguiente relación útil entre α-Fredholm y α-Fredholm generalizado.

Teorema 2.3 *$T \in B(H)$ es α-Fredholm generalizado si y sólo si $T|_{R(T)}$ es α-Fredholm.*

Prueba. Supongamos que T es α-Fredholm generalizado. De $T - TST \in \mathcal{J}_\alpha$, obtenemos

$$(I - ST)T \in \mathcal{J}_\alpha,$$

así,

$$(I - ST)|_{R(T)} \in \mathcal{J}_\alpha.$$

Usando el Teorema 1.1, obtenemos que $T|_{R(T)}$ es α-Fredholm.

Recíprocamente, supongamos que $T|_{R(T)}$ es α-Fredholm. Por el Teorema 1.1 existe un operador $S' \in B(R(T))$ tal que

$$(S'T - TS')|_{R(T)} \in \mathcal{J}_\alpha, \qquad (I - S'T)|_{R(T)} \in \mathcal{J}_\alpha.$$

Sea $S \in B(H)$ el operador que concuerda con S' en $R(T)$ y es cero en otro caso. Entonces

$$ST - TS \in \mathcal{J}_\alpha \quad \text{y} \quad (I - TS)T \in \mathcal{J}_\alpha.$$

Por lo tanto, T es α-Fredholm generalizado. ■

Corolario 2.4 *Si $T \in B(H)$ es α-Fredholm generalizado, entonces T tiene rango α-cerrado.*

Prueba. Por el Teorema 2.3, $T|_{R(T)}$ es α-Fredholm. Así $R(T|_{R(T)})$ es α-cerrado, por lo que existe un subespacio cerrado $M \subset R(T|_{R(T)})$ y un subespacio $N = M^\perp \cap R(T|_{R(T)})$ tales que $R(T|_{R(T)}) = M + N$ y $\dim N < \alpha$. Como $d(R(T|_{R(T)})) < \alpha$, existe un subespacio L tal que $R(T) = L + R(T|_{R(T)})$ y $\dim L < \alpha$. Por lo tanto,

$$R(T) = L + N + M,$$

donde M es cerrado y $\dim(M^\perp \cap R(T)) \leq \dim L + \dim N < \alpha + \alpha = \alpha$. ■

El precio a pagar por usar la inversa Drazin en vez de la inversa usual se aprecia a la luz del siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5 *Existe un operador $T \in B(H)$ que es invertible Drazin de grado 1 modulo $\overline{\mathcal{J}_\alpha}$ tal que no es invertible Drazin grado 1 modulo $\mathcal{J}_\alpha$.*

Sea $H = \ell^2$ el espacio de Hilbert separable de sucesiones cuadrado sumables, y $\alpha = \aleph_0$. Entonces $\overline{\mathcal{J}_\alpha}$ es el ideal de los operadores compactos. Sea

$$Tx = (x_1, \tfrac{1}{2}x_2, \tfrac{1}{3}x_3, \ldots), \qquad x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^2.$$

Entonces $T \in B(H)$ es compacto, y como es invertible Drazin de grado 1, T es invertible Drazin de grado 1 modulo $\overline{\mathcal{J}_\alpha}$. Si T fuera invertible Drazin de grado 1 modulo $\mathcal{J}_\alpha$ entonces por el Corolario 2.4 tendríamos que $R(T)$ es $\aleph_0$-cerrado, es decir, $R(T)$ es cerrado, lo cual es falso.

Mientras que por el Teorema 1.1 podemos usar indistintamente los ideales $\mathcal{J}_\alpha$ o $\overline{\mathcal{J}_\alpha}$ para verificar si un operador es α-Fredholm, para las generalizaciones subsiguientes tendremos que restringirnos a usar el ideal $\mathcal{J}_\alpha$ ya que su cerradora no es adecuada para responder preguntas acerca de si un operador es α-Fredholm.

A continuación algunas propiedades de los operadores α-Fredholm generalizados.

Teorema 2.6 *Sea $T \in B(H)$ un operador α-Fredholm generalizado, entonces*

1. *T^n es α-Fredholm generalizado, para $n \in \mathbb{N}$.*
2. *El operador T^n tiene rango α-cerrado.*
3. *$T + F$ es α-Fredholm generalizado para todo $F \in \mathcal{J}_\alpha$.*
4. *$\dim(N(T) \cap R(T)) < \alpha$.*
5. *$\dim \frac{X}{R(T)+N(T)} < \alpha$.*

Prueba.

1. Se sigue del hecho de que si T es invertible Drazin de grado 1 con inversa Drazin S, entonces S^n es la inversa Drazin para T^n.
2. Se sigue de que T^n es α-Fredholm generalizado y el Corolario 2.4.
3. Sea $F \in \mathcal{J}_\alpha$. Entonces $T + F$ y T tienen la misma clase lateral modulo $\mathcal{J}_\alpha$, de donde se deduce el resultado.
4. Del Teorema 2.3, $T|_{R(T)}$ es α-Fredholm, por lo tanto, $\dim(N(T)\cap R(T)) = \dim N(T|_{R(T)}) < \alpha$.
5. Usando el Teorema 2.3, $T|_{R(T)}$ es α-Fredholm, por lo que $\dim \frac{X}{R(T)+N(T)} = \dim \frac{R(T)}{R(T^2)} = \mathrm{codim} R(T|_{R(T)}) < \alpha$.

■

Ejemplo 2.7 *existe un operador T para el cual T^m es α-Fredholm generalizado para algún $n \in \mathbb{N}$ pero T no lo es.*

Sea $H = \ell^2$, y $\alpha = \aleph_0$. Sea

$$Tx = (0, x_1, 0, \tfrac{1}{3}x_3, 0, \tfrac{1}{4}x_5, \ldots), \qquad x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^2.$$

Entonces $T^2 = O$ es el operador idénticamente cero, el cual es $\aleph_0$-Fredholm generalizado. Sin embargo, ya que T no es $\aleph_0$-cerrado no es $\aleph_0$-Fredholm generalizado.

Teorema 2.8 *Si* T_1, T_2 *son* α*-Fredholm generalizado y* $T_1T_2 - T_2T_1 \in \mathcal{J}_\alpha$ *entonces* T_1T_2 *es* α*-Fredholm generalizado.*

PRUEBA. Como T_i, $i = 1, 2$, son α-Fredholm generalizados, existen $S_i \in B(H)$ tales que $T_i - T_iS_iT_i \in \mathcal{J}_\alpha$, $T_iS_i - S_iT_i \in \mathcal{J}_\alpha$. Ya que los operadores invertibles Drazin conmutan con todo operador con el que su inversa Drazin conmuta, tenemos que T_i y S_i todos conmutan modulo $\mathcal{J}_\alpha$. Por lo tanto S_1S_2 es una inversa Drazin de grado 1 para T_1T_2 modulo $\mathcal{J}_\alpha$. ■

Ejemplo 2.9 *existen operadores* α*-Fredholm generalizados* T_1, T_2 *tales que* T_1T_2 *no es* α*-Fredholm generalizado.*

Sea $H = \ell^2$ *y* $\alpha = \aleph_0$. *Sea*

$$T_1x = (0, x_2, 0, x_4, 0, x_5, \ldots), \qquad x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^2,$$

$$T_2x = (x_1, x_1, x_3, \tfrac{1}{3}x_3, x_5, \tfrac{1}{5}x_5, \ldots), \qquad x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^2.$$

Entonces $T_1^2 = T_1$, *y haciendo* $S_1 = T_1$ *obtenemos que* S_1 *es la inversa Drazin de grado 1 para* T_1, *por lo tanto* T_1 *es invertible* α*-Drazin de grado 1. De la misma manera,* $T_2^2 = T_2$ *y* T_2 *es invertible* α*-Drazin de grado 1. Sin embargo,*

$$T_1T_2x = (0, x_1, 0, \tfrac{1}{3}x_3, 0, \tfrac{1}{5}x_5, \ldots)$$

es un operador compacto, de manera que su rango no es $\aleph_0$*-cerrado y resulta que* T_1T_2 *no es* α*-Fredholm generalizado.*

3 Operadores α-Drazin Fredholm

La inversa considerada en la sección anterior es un caso particular de la inversa Drazin.

Hay una relación muy útil entre la inversa Drazin de grado 1 yla inversa Drazin de grado arbitrario.

Teorema 3.1 *Un operador* T *es invertible Drazin si y sólo si* T^n *es invertible Drazin de grado 1 para algún* $n \in \mathbb{N}$.

Ahora procedemos de manera natural a una clase más amplia de operadores que contienen a los α-Fredholm.

Definición 3.2 *Un operador* $T \in B(H)$ *es* α*-Drazin Fredholm si* T *es invertible Drazin modulo* $\mathcal{J}_\alpha$.

Ejemplo 3.3 *Un operador nilpotente compacto* K *no será* $\aleph_0$*-Fredholm generalizado pero será* $\aleph_0$*-Drazin Fredholm ya que existe un* $n \in \mathbb{N}$ *para el cual* $K^n = 0$ *es invertible Drazin de grado 1.*

Teorema 3.4 *$T \in B(H)$ es α-Drazin Fredholm si y sólo si existe algún $n \in \mathbb{N}$ para el cual $T|_{R(T^n)}$ es α-Fredholm.*

Prueba. Sea $T \in B(H)$ un operador α-Drazin Fredholm. Sea n el grado Drazin para T modulo $\mathcal{J}_\alpha$. De $T^n - TST^n \in \mathcal{J}_\alpha$, resulta que

$$(I - ST)T^n \in \mathcal{J}_\alpha,$$

por lo que

$$(I - ST)|_{R(T^n)} \in \mathcal{J}_\alpha.$$

Usando el Teorema 1.1, obtenemos que $T|_{R(T^n)}$ es α-Fredholm.

Recíprocamente, supongamos que existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $T|_{R(T^n)}$ es α-Fredholm. Por el Teorema 1.1 existe un operador $S' \in B(R(T))$ tal que

$$(S'T - TS')|_{R(T^n)} \in \mathcal{J}_\alpha, \qquad (I - S'T)|_{R(T^n)} \in \mathcal{J}_\alpha.$$

Sea $S \in B(H)$ el operador que coincide con S' en $R(T)$ y es cero en otro caso. Entonces

$$ST - TS \in \mathcal{J}_\alpha \quad \text{y} \quad (I - TS)T \in \mathcal{J}_\alpha.$$

Así, T^n es invertible Drazin de grado 1 modulo J_α. Usando el Teorema 3.1 obtenemos que T es α-Drazin Fredholm. ■

Corolario 3.5 *Si T es α-Drazin Fredholm, entonces existe algún $n \in \mathbb{N}$ para el cual T^n tiene rango α-cerrado.*

Prueba. Se sigue de los teoremas 2.3 y 3.1. ■

Los operadores α-Drazin Fredholm se comportan muy bien con respecto a sus potencias.

Teorema 3.6 *Sea $T \in B(H)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*
(a) T es α-Drazin Fredholm.
(b) T^n es un operador α-Drazin Fredholm para todo $n \in \mathbb{N}$.
(c) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que T^n es un operador α-Drazin Fredholm.

Las siguientes propiedades son inmediatas de sus correspondientes para la inversa Drazin.

Teorema 3.7
1. *Si S, T son operadores α-Drazin Fredholm y $ST - TS \in \mathcal{J}_\alpha$, entonces ST es un operador α-Drazin Fredholm.*
2. *Si S, T son operadores α-Drazin Fredholm y $ST = TS$, entonces ST es un operador α-Drazin Fredholm.*
3. *Si ST es un operador α-Drazin Fredholm, entonces TS también es un operador α-Drazin Fredholm.*

4 Teoría Fredholm de rango finito

En los cálculos prácticos, los operadores sobre espacios de dimensión infinita son aproximados a menudo usando operadores de rango finito. Así, es interesante considerar el caso en que el cardinal α es finito. A lo largo de esta sección escribiremos n en lugar de α como en las secciones anteriores para enfatizar que estamos trabajando con cardinalidad finita.

Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita, y sea $\mathcal{J}_n$ el conjunto de los operadores de rango menor o igual a n.

Definición 4.1 *Un operador $T \in B(H)$ es n-*Fredholm *si es invertible modulo $\mathcal{J}_n$.*

Como es de esperar, tenemos una caracterización en términos de la nulidad y el defecto de un operador.

Teorema 4.2 *Las siguientes condiciones son equivalentes.*
(i) T es invertible por la izquierda modulo $\mathcal{J}_n$.
(ii) $\dim N(T) \leq n$ y $R(T)$ es cerrado.

Prueba. $(i) \Rightarrow (ii)$. Sea T invertible por la izquierda modulo $\mathcal{J}_n$. Entonces existe $S \in B(H)$, $S \neq O$ tal que $I - ST \in \mathcal{J}_n$.

Sea $M = N(I - ST)^{\perp}$, entonces $H = M \oplus N(I - ST)$. Como $\dim R(I - ST) \leq n$, entonces $R(I - ST)$ es cerrado y

$$(I - ST)|_M : M \to R(I - ST)$$

es inyectivo y sobreyectivo, así que $\dim M = \dim R(I - ST) \leq n$.

Ahora, para $x \in N(I - ST)$ tenemos $STx = x$ y

$$\|S\|^{-1}\|x\| \leq \|Tx\|.$$

Así, T es acotado por debajo en $N(I-ST)$, por lo que $N(T) \subseteq M$ y $\dim N(T) \leq \dim M \leq n$.

Como $T|_{M^{\perp}}$ es acotado por debajo tenemos que $T(M^{\perp})$ es cerrado, y como $\dim T(M) < \infty$, tenemos que $R(T) = T(M) + T(M^{\perp})$ es cerrado.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Sea T tal que $R(T)$ es cerrado y $\dim N(T) \leq n$. Entonces

$$T|_{N(T)^{\perp}} : N(T)^{\perp} \to R(T)$$

es inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto es invertible. Sea $S \in B(H)$ definida como el operador que coincide con dicha inversa en $R(T)$ y es 0 en $R(T)^{\perp}$. Entonces $ST|_{N(T)^{\perp}} = I|_{N(T)^{\perp}}$, $(I - ST)|_{N(T)^{\perp}} = O$. Así, $\dim R(I - ST) \leq \dim\{N(T)^{\perp}\} \perp = \dim N(T) \leq n$. Por lo tanto, $I - ST \in \mathcal{J}_n$. ■

Una diferencia importante con la teoría de las secciones anteriores es que ahora perdemos la estructura de semigrupo, porque ahora el producto de dos operadores n-Fredholm puede no ser n-Fredholm.

Ejemplo 4.3 $\dim N(TS) = \dim N(T) + \dim N(S)$

Sean M, N, X espacios de Hilbert y sea H el espacio de Hilbert $H = M \oplus N \oplus X$. Sea

$$Tx = \begin{cases} 0 & si\ x \in M \\ x & si\ x \notin M \end{cases}, \qquad Sx = \begin{cases} 0 & si\ x \in N \\ x & si\ x \notin N \end{cases}.$$

Entonces

$$STx = TSx = \begin{cases} 0 & si\ x \notin X \\ x & si\ x \in X \end{cases}$$

y $N(T) = M$, $N(S) = N$, $N(TS) = M \oplus N$.

Sin embargo, el producto de operadores n-Fredholm no se va muy lejos.

Teorema 4.4 *Si T, S son operadores n-Fredholm, entonces TS es $2n$-Fredholm.*

Prueba. La aplicación

$$S' : N(TS) \to R(S) \cap N(T), \qquad x \mapsto Sx,$$

es sobre y $N(S') = N(S)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \dim N(TS) &= \dim(R(S) \cap N(T)) + \dim N(S) \\ &\leq \dim N(T) + \dim N(S) \\ &= 2n. \end{aligned}$$

Por dualidad resulta que $\operatorname{codim}(TS) = \dim N(S^*T^*) < 2n$, de forma que T es $2n$-Fredholm. ■

Referencias

[1] Caradus, C.R., W.E. Pfaffenberger, y B. Yood, *Calkin Algebras and Algebras of Operators on Banach Spaces*, Boston: Marcel Dekker, 1974.

[2] Boulding, R., "Generalizations of semi-Fredholm operators", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12**, no. 123 (1995):3757-3764.

[3] Edgar, E., Ernest, E., y Lee, S.G., "Weighted operator spectra", *Indiana Univ. Math. J.*, no. 21 (1971):61-80.

[4] Ernest, J., "Operators with α-closed range", *Tohoku Math. Journ.*, no. 24 (1972):45-49.

[5] Schmoeger, C., "On a class of generalized Fredholm operators, I", *Demonstratio Math.*, **4**, no. 30 (1997): 829-842.

[6] Berkani, M., "Restriction of an operator to the range of its powers", *Studia Math.*, no. 140 (2000):163-175.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 21–27.

MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE ADOMIAN: SOLUCIONES ANALÍTICAS APROXIMADAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES NO LINEALES

Inna Shingareva* **Carlos Lizárraga Celaya†**

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: inna@gauss.mat.uson.mx

†Departamento de Física, Universidad de Sonora
e-mail: carlos.lizarraga@correo.fisica.uson.mx

Resumen

En el presente trabajo se considera la construcción de soluciones analíticas aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales mediante el método de descomposición de Adomian (ADM) y los métodos de álgebra computacional. En general, aplicando el método de descomposición de Adomian (y sus modificaciones), construimos una solución analítica aproximada en la forma de una serie infinita, la cual puede converger a una solución exacta (si existe). En particular, se consideran soluciones analíticas aproximadas que convergen a soluciones exactas y soluciones en la forma de series truncadas para su evaluación numérica y visualización. Se desarrolla el método analítico y algorítmico para obtener soluciones analíticas aproximadas y soluciones simbólicas de varias clases de ecuaciones diferenciales parciales no lineales con parámetros arbitrarios. En particular, se obtienen soluciones analíticas aproximadas y simbólicas (apoyados en el sistema Maple) de problemas de Cauchy y problemas de valor en la frontera para la ecuación de Burgers.

1 Introducción

El *método de descomposición de Adomian* es un método poderoso y efectivo para resolver una clase amplia de ecuaciones lineales y no lineales, deterministas o estocásticas (por ejemplo, ecuaciones algebraicas, diferenciales ordinarias, diferenciales parciales, algebraicas diferenciales, integrales, integro-diferenciales).

El método de descomposición de Adomian, fue propuesto por primera vez por George Adomian en 1983 (ver [1], [3], [4]). En la literatura científica existe una serie de trabajos de investigación dedicados a la aplicación de este método en una clase amplia de ecuaciones diferenciales e integrales lineales y no lineales (ver por ejemplo, [8]– [10]).

Este método enfoca el problema de una manera directa siguiendo un procedimiento simple sin necesidad de aplicación de métodos de linealización, perturbación o cualquier otro método restrictivo que pudiera modificar el comportamiento físico del modelo bajo consideración.

Para ecuaciones diferenciales parciales no lineales, la idea del método de descomposición de Adomian consiste en descomponer la función desconocida $u(x,t)$, solución de la ecuación en discusión, en una serie infinita de la forma

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x,t), \tag{1}$$

donde los componentes $u_i(x,t)$ son determinados recursivamente. El término no lineal $F(u)$ (por ejemplo, uu_x, u^p, $\operatorname{sen} u$, e^u, $\ln u$) se representa en forma de una serie infinita de *polinomios de Adomian* A_i:

$$F(u) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(u_0, u_1, \ldots). \tag{2}$$

Los polinomios de Adomian A_i se pueden evaluar para cualquier tipo de no linealidad. Describiremos los polinomios de Adomian en la siguiente sección.

2 Polinomios de Adomian

Existen varios esquemas para calcular los polinomios de Adomian. Consideramos el siguiente esquema, el cual fue introducido y justificado por Adomian y Rach [2] en 1983, para calcular los polinomios de Adomian para el término no lineal de forma general $F(u)$:

$$A_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\lambda^i} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0}, \quad i=0,1,2,\ldots.$$

Otros métodos alternativos, basados en identidades algebraicas, trigonométricas y series de Taylor, han sido desarrollados en [10].

Cálculo de los polinomios de Adomian para varios tipos de no linealidades. Aplicando los sistemas de álgebra computacional *Maple* y *Mathematica* [6], se pueden derivar los polinomios de Adomian para una forma general del término no lineal $F(u)$ y evaluar estos para varios tipos de no linealidades (por ejemplo, u^2, u^3, u_x^2, u_x^3, $uu_x = \frac{1}{2}(u^2)_x$, $\operatorname{sen} u$, $\cos u$, $\operatorname{senh} u$, $\cosh u$, e^u, $\ln u$). Las soluciones simbólicas se describen con más detalles en [7]. Ahora presentamos algunos polinomios de Adomian para una forma general del término no lineal $F(u)$

$$\begin{aligned}
&F(u_0),\\
&F'(u_0)u_1,\\
&\tfrac{1}{2}F''(u_0)u_1^2 + F'(u_0)u_2,\\
&\tfrac{1}{6}F'''(u_0)u_1^3 + F''(u_0)u_1u_2 + F'(u_0)u_3,\\
&\tfrac{1}{24}F^{(4)}(u_0)u_1^4 + \tfrac{1}{2}F'''(u_0)u_1^2u_2 + \tfrac{1}{2}F''(u_0)u_2^2 + F''(u_0)u_1u_3 + F'(u_0)u_4
\end{aligned}$$

y para la no linealidad $\cos(u)$

$$\begin{aligned}
&\cos(u_0),\\
&-\operatorname{sen}(u_0)u_1,\\
&-\tfrac{1}{2}\cos(u_0)u_1^2 - \operatorname{sen}(u_0)u_2,\\
&\tfrac{1}{6}\operatorname{sen}(u_0)u_1^3 - \cos(u_0)u_1u_2 - \operatorname{sen}(u_0)u_3,\\
&\tfrac{1}{24}\cos(u_0)u_1^4 + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(u_0)u_1^2u_2 - \tfrac{1}{2}\cos(u_0)u_2^2 - \cos(u_0)u_1u_3 - \operatorname{sen}(u_0)u_4.
\end{aligned}$$

3 Ecuaciones Diferenciales Parciales No Lineales

Es conocido [5] que si existe una solución exacta de una ecuación diferencial parcial dada, entonces la solución obtenida en forma de serie converge rápidamente a la solución exacta. Si no podemos obtener una solución en la forma cerrada, entonces podemos considerar una solución en forma de una serie truncada para una evaluación numérica, visualización o comparación. Si evaluamos algunos términos de la serie obtenida, tendremos una aproximación con alto grado de exactitud comparado con resultados obtenidos via métodos numéricos. Otras comparaciones con métodos tradicionales (por ejemplo, métodos de diferencias finitas) también aparecen en la literatura científica. Si comparamos el método de descomposición de Adomian y los métodos de perturbación, podemos observar la eficiencia del primer método comparado con los cálculos tediosos requeridos por el segundo método.

Ahora consideramos la ecuación diferencial parcial no lineal en dos variables independientes x, t y la condición inicial $u(x,0)=g(x)$. De acuerdo con el método de descomposición de Adomian, esta ecuación se puede reescribir en la forma de operadores

$$\mathcal{D}_x u+\mathcal{D}_t u+\mathcal{L}(u)+F(u)=f(x,t), \tag{3}$$

donde el operador $\mathcal{D}_x$ incluye las derivadas de u de mayor orden en x, el operador $\mathcal{D}_t$ incluye las derivadas de u de mayor orden en t, el operador $\mathcal{L}$ incluye los términos lineales de derivadas de u de orden inferior, $F(u)$ es un término no lineal, y $f(x,t)$ es un término no homogéneo. Es conocido que las soluciones para $u(x,t)$ obtenidas con respecto a los operadores $\mathcal{D}_x u$ y $\mathcal{D}_t u$ son equivalentes y convergen a la solución exacta [9]. Por ejemplo, si resolvemos la ecuación no lineal respecto a la variable t, obtenemos

$$\mathcal{D}_t u=f(x,t)-\mathcal{D}_x u-\mathcal{L}(u)-F(u).$$

Aplicando el operador inverso $\mathcal{D}_t^{-1}$ en los ambos lados de esta ecuación y utilizamos la condición inicial, obtenemos la solución

$$u(x,t)=\Phi-\mathcal{D}_t^{-1}f(x,t)-\mathcal{D}_t^{-1}\mathcal{D}_x u-\mathcal{D}_t^{-1}\mathcal{L}(u)-\mathcal{D}_t^{-1}F(u), \tag{4}$$

donde Φ es la función

$$\Phi = u(x,0)+\sum_{i=1}^{M=n-1}\frac{1}{i!}t^i\frac{\partial^M u}{\partial t^M}(x,0)$$

para

$$\mathcal{L}_t=\frac{\partial^n}{\partial t^n}.$$

Luego, representamos la solución $u(x,t)$ y el término no lineal $F(u)$ en la forma de las series (1) y (2), donde los polinomios de Adomian se pueden generar para todas las formas de no linealidades. Finalmente, los componentes $u_i(x,t)$ $(i\geq 0)$ de la solución $u(x,t)$ se pueden determinar recursivamente y entonces podemos obtener la solución en la forma de una serie.

4 Problemas de Cauchy

Ahora resolvemos algunos problemas de Cauchy utilizando el método de descomposición de Adomian para encontrar una solución analítica aproximada que converge a una solución exacta y una solución analítica aproximada en la forma de una serie truncada.

Ecuación de Burgers inviscida. Problema de Cauchy. Consideramos el problema de Cauchy para la ecuación de Burgers inviscida

$$u_t + uu_x = 0; \quad u(x,0) = x + a,$$

donde $\{x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ y a es un parámetro. Si aplicamos el método de descomposición de Adomian, mostramos que la solución de este problema de Cauchy tiene la siguiente forma

$$u(x,t) = (x+a)/(t+1)$$

y verificamos que esta solución es solución exacta de este problema.

Primero reescribimos la ecuación de Burgers inviscida en la forma de operador

$$\mathcal{D}_t u = -uu_x,$$

donde $\mathcal{D}_t = \partial/\partial t$. El operador inverso $\mathcal{D}_t^{-1}$ tiene la forma

$$\mathcal{D}_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot)\, dt.$$

Si aplicamos el operador inverso $\mathcal{D}_t^{-1}$ en ambos lados de la ecuación y utilizamos la condición inicial, obtenemos

$$u(x,t) - x - a = \mathcal{D}_t^{-1} uu_x.$$

Luego, si sustituimos las series de la solución (1) y del término no lineal (2) (donde los polinomios de Adomian se generan para la no linealidad uu_x), en la ecuación, obtenemos

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x,t)\Big) - x - a = \mathcal{D}_t^{-1}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\Big).$$

Como resultado, obtenemos la relación recursiva:

$$u_0(x,t) = x + a, \quad u_{k+1}(x,t) = -\mathcal{D}_t^{-1}(A_k).$$

Por ejemplo, los primeros dos componentes son: $u_0 = x + a$ y $u_1 = -(x+a)t$. Por lo tanto, la solución aproximdada analítica tiene la forma

$$u = (x+a)(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots),$$

la cual se puede reescribir en la forma cerrada $u(x,t) = (x+a)/(t+1)$, $|t| < 1$.

Ecuación de Burgers inviscida. Problema de Cauchy. Ahora consideramos la ecuación de Burgers inviscida con otra condición inicial:

$$u_t + uu_x = 0; \quad u(x,0) = \cos(ax),$$

donde $\{x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ y a es un parámetro. Si aplicamos el método de descomposición de Adomian, mostramos que la solución analítica aproximada de este problema de Cauchy es representada en términos de una serie de funciones

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & \cos(ax) + \tfrac{1}{2} at \operatorname{sen}(2ax) - [\tfrac{3}{8} a^2 \cos(3ax) + \tfrac{1}{8} a^2 \cos(ax)] t^2 \\ & - [\tfrac{1}{6} a^3 \operatorname{sen}(2ax) + \tfrac{1}{3} a^3 \operatorname{sen}(4ax)] t^3 + O(t^4). \end{aligned} \tag{5}$$

Para aproximaciones numéricas, la solución obtenida (5) es más práctica comparada con la *forma paramétrica* de la solución que se puede obtener utilizando el método de características.

Como antes, reescribimos la ecuación de Burgers inviscida en la forma de operador $\mathcal{D}_t u = -uu_x$, donde $\mathcal{D}_t = \partial/\partial t$. Si aplicamos el operador inverso $\mathcal{D}_t^{-1}$ en ambos lados de la ecuación y utilizamos la condición inicial, obtenemos

$$u(x,t) - \cos(ax) = \mathcal{D}_t^{-1} uu_x.$$

Luego, si sustituimos las series de la solución (1) y del término no lineal (2) (donde los polinomios de Adomian se generan para la no linealidad uu_x), a la ecuación, obtenemos

$$\Big(\sum_{i=0}^{\infty} u_i(x,t)\Big) - \cos(ax) = \mathcal{D}_t^{-1}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\Big).$$

Finalmente, obtenemos la relación recursiva:

$$u_0(x,t) = \cos(ax), \quad u_{k+1}(x,t) = -\mathcal{D}_t^{-1}(A_k).$$

Por ejemplo, los primeros dos componentes son: $u_0 = \cos(ax)$ y $u_1 = a\cos(ax)\operatorname{sen}(ax)t$. Por lo tanto, la solución analítica aproximada tiene la forma (5).

5 Problemas de Valor en la Frontera

Ahora resolvemos un problema de valor en la frontera mediante el método de descomposición de Adomian para encontrar una solución analítica aproximada que converge a una solución exacta.

Ecuación de Burgers. Problema de valor en la frontera. Consideramos el problema de valor en la frontera para la ecuación de Burgers

$$u_t + uu_x = u_{xx}; \quad u(0,t) = g_1(t), \ u_x(0,t) = g_2(t),$$

donde

$$g_1(t) = -\frac{2}{at}, \quad g_2(t) = \frac{1}{t} + \frac{2}{(at)^2},$$

y a es un parámetro ($a \in \mathbb{N}$). Si seguimos las ideas del método de descomposición de Adomian, mostramos que la solución de este problema de valor en la frontera tiene la forma

$$u(x,t)=\frac{x}{t}-\frac{2}{x+at}$$

y verificamos que esta solución es solución exacta de este problema.

Como antes, generamos los polinomios de Adomian para el término no lineal uu_x y reescribimos la ecuación de Burgers en la forma de operador $\mathcal{D}_x u=\mathcal{D}_t u+\mathcal{NL}u$, donde $\mathcal{D}_x=\partial^2/\partial x^2$, $\mathcal{D}_t=\partial/\partial t$, y $\mathcal{NL}$ es el operador no lineal. Puesto que en este problema tenemos las condiciones de frontera, resolvemos el problema en la variable x, es decir, si aplicamos el operador inverso

$$\mathcal{D}_x^{-1}(\cdot)=\int_0^x\int_0^x(\cdot)\,dx\,dx$$

en ambos lados de la ecuación y utilizamos la condiciones de frontera, obtenemos la ecuación:

$$u-\frac{2}{at}+\frac{x}{t}+\frac{2x}{a^2t^2}=\mathcal{D}_x^{-1}u_t+\mathcal{D}_x^{-1}(uu_x).$$

Si sustituimos las series de la solución (1) y del término no lineal (2) (donde A_i son los polinomios de Adomian para la no linealidad uu_x), en la ecuación

$$u-\frac{2}{at}+\frac{x}{t}+\frac{2x}{a^2t^2}=\int_0^x\int_0^x u_t\,dx\,dx+\int_0^x\int_0^x uu_x\,dx\,dx,$$

obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned}&u-\frac{2}{at}+\frac{x}{t}+\frac{2x}{a^2t^2}=\int_0^x\int_0^x u_{0t}+u_{1t}+u_{2t}+u_{3t}+u_{4t}\,dx\,dx\\&+\int_0^x\int_0^x W_0(W_{0x}+W_{1x}+W_{2x}+W_{3x}+W_{4x})+W_1(W_{0x}+W_{1x}+W_{2x}+W_{3x})+W_2(W_{0x}+W_{1x}+W_{2x})\\&\qquad+W_3(W_{0x}+W_{1x})+W_4W_{0x}\,dx\,dx.\end{aligned}$$

De acuerdo al método de descomposición de Adomian, determinamos las siguientes relaciones recursivas,

$$u_0=-2/(at)+x/t+2x/(a^2t^2),\qquad u_{k+1}=\mathcal{D}_x^{-1}u_{kt}+\mathcal{D}_x^{-1}A_k,$$

y obtenemos la solución analítica aproximada, la cual se puede reescribir en la forma cerrada $u(x,t)=x/t-2/(x+at)$. Finalmente, verificamos que esta solución es solución exacta de este problema.

6 Conclusiones

En el presente trabajo hemos considerado los métodos analíticos para la construcción de soluciones analíticas aproximadas y simbólicas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales mediante los sistemas de álgebra computacional. Desarrollamos nuevos algorítmos matemáticos para obtener soluciones analíticas aproximadas de varias clases de ecuaciones diferenciales parciales no lineales con parámetros arbitrarios. En particular, consideramos problemas de Cauchy y problemas de valor en la frontera para la ecuación de Burgers. Resolvemos estos sistemas deterministas mediante el método de descomposición de Adomian. En general, si aplicamos el método de descomposición de Adomian (y sus modificaciones), construimos una solución analítica aproximada en la forma de una serie infinita, la cual se puede converger a una solución exacta (si existe). En particular, consideramos soluciones analíticas aproximadas que convergen a soluciones exactas y soluciones en la forma de una serie truncada, las cuales se pueden evaluar numéricamente y visualizar.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias a financiamiento de CONACYT, proyecto No. 55463.

Referencias

[1] Adomian, G. *Stochastic Systems*. New York: Academic Press, 1983.

[2] Adomian, G., Rach, R. *Inversion of nonlinear stochastic operators*. *J. Math. Anal. Appl.,* 91, 39–46, 1983.

[3] Adomian, G. *Nonlinear Stochastic Operator Equations*. San Diego: Academic Press, 1986.

[4] Adomian, G. *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. Boston: Kluwer, 1994.

[5] Cherruault, Y. and Adomian, G. *Decomposition Methods: A New Proof of Convergence*. *Math. Comput. Modeling,* 18, 12, 103–106, 1993.

[6] Shingareva, I. and Lizárraga-Celaya, C. *Maple and Mathematica. A Problem Solving Approach for Mathematics. Second Edition*. Wien–New York: Springer, 2009.

[7] Shingareva, I. and Lizárraga-Celaya, C. *Solving Nonlinear Partial Differential Equations with Maple and Mathematica*. Wien–New York: Springer, 2011.

[8] Wazwaz, A. M. *A Reliable Modification of Adomian's Decomposition Method Appl. Math. Comput.,* 92, 1, 1–7, 1998.

[9] Wazwaz, A. M. *Partial Differential Equations: Methods and Applications*. Leiden: Balkema Publishers, 2002.

[10] Wazwaz, A. M. *The Modified Decomposition Method for Analytic Treatment of Differential Equations*. *Appl. Math. Comput.,* 173, 1, 165–176, 2006.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 29–33.

DETECCIÓN DEL CIBERBULLYING MEDIANTE EL ANÁLISIS DE CONTENIDO Y AGENTES SOFTWARE

Perla Janeth Castro Pérez* **Christian Javier Lucero Valdez†**
Maria de Guadalupe Cota Ortiz‡ **Juan Pablo Soto Barrera§**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: *anethkasztro@gmail.com
†crizlucero@gmail.com
‡lcota@gauss.mat.uson.mx
§jpsoto@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Existen varios esfuerzos por parte de las autoridades educativas relacionados con la búsqueda de alternativas que permitan identificar problemas relacionados con el bullying, sin embargo, aún no se ha considerado la perspectiva del ciberbullying, y por consiguiente, tampoco se han tomado medidas de control adecuadas desde el punto de vista de una aplicación. En este artículo se propone un modelo de seguridad para el análisis de mensajes intercambiados entre menores de edad (niños de 9 a 13 años de edad) a través de un chat centralizado, la cual utiliza tecnología de agentes software con el fin de proporcionar alertas sobre posibles amenazas o acosos que se pudieran presentar.

1 Introducción

El problema de *ciberbullying,* el cual se define por el hecho de que una persona sea maltratada, amenazada o acosada a través de medios electrónicos, ha generado gran controversia en los últimos meses ya que este tipo de violencia suele ir en aumento conforme avanza el uso de las nuevas tecnologías [1,2].

Dado que existen varias formas de *ciberbullying,* en este trabajo se propone un modelo centrado en la detección de amenazas y agresiones verbales a las que un menor de edad suele estar expuesto, tomando como base el comportamiento de las víctimas y agresores con el fin de detectar amenazas, utilizando técnicas de análisis de contenido de la información [4-6], así como, el uso de una arquitectura de agentes llamado ARSEC-AMS [3].

Para efectos de organización, el presente trabajo se estructura de la siguiente manera: en la sección 2 la descripción del modelo antes mencionado, los componentes del análisis de contenido y la arquitectura ARSEC-AMS. Por último, las conclusiones y referencias bibliográficas son presentadas.

2 Modelo para la detección de amenazas

Este modelo está enfocado en la detección de amenazas y agresiones verbales a las que un menor de edad está expuesto, por lo tanto, está compuesto del análisis de contenido y tecnología de agentes software con la arquitectura ARSEC-AMS [3], la cual permite implementar conceptos de seguridad computacional para medir la peligrosidad del mensaje.

2.1 Arquitectura ARSEC-AMS

El modelo propuesto se basa en la arquitectura ARSEC-AMS [3] (véase figura 1), la cual contempla el uso de cuatro módulos: reactivo, deliberativo-cognitivo, de seguridad y de control de pizarra, de tal forma que las señales que se reciben en el sistema de agentes a través de sensores, son filtradas por un intérprete que se encarga de actuar en forma coordinada, y dar un seguimiento al conjunto de acciones a realizar para alcanzar los objetivos correspondientes, aplicando esto en el modelo para detectar la peligrosidad de los mensajes intercambiados a través de un sistema de Mensajería Instantánea (MI), para una referencia amplia de la arquitectura mencionada se encuentra descrita en la referencia [3].

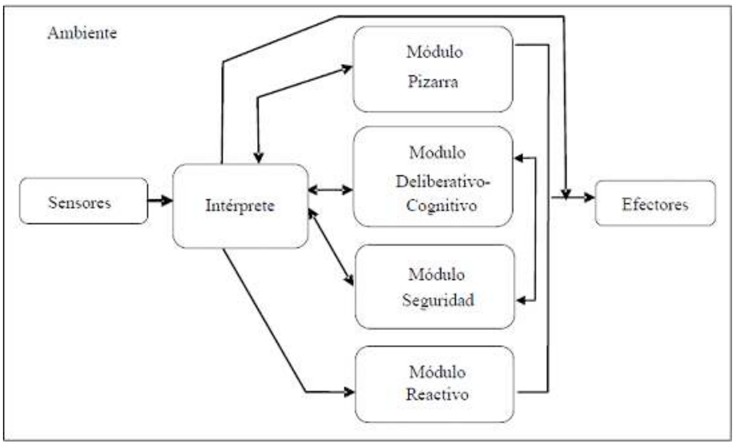


Figura 1: Arquitectura ARSEC-AMS

2.2 Modelo de Agentes

Para llevar un buen seguimiento a las acciones que se realizaran se implementan tres agentes, a continuación se describe la función de cada uno de ellos:

- *Agente Coordinador:* Es el agente software encargado del flujo de las transacciones que permiten aplicar niveles de seguridad en el sistema y en el trabajo de los agentes locales y de red. Además, se encarga de analizar el contenido de los mensajes, y en su caso registrar las alertas correspondientes para el administrador.
- *Agente Local:* Es el agente software encargado de analizar y revisar los mensajes de los usuarios de forma local.
- *Agente de Red:* Es el agente encargado de monitorear los mensajes enviados por el usuario y de hacerlos llegar al sistema ya cifrados.

Para mostrar el control que tendrán los agentes en el sistema se decidió incluir el diagrama de secuencia para el análisis de contenido con el fin de modelar el funcionamiento de la aplicación (véase diagrama 1).

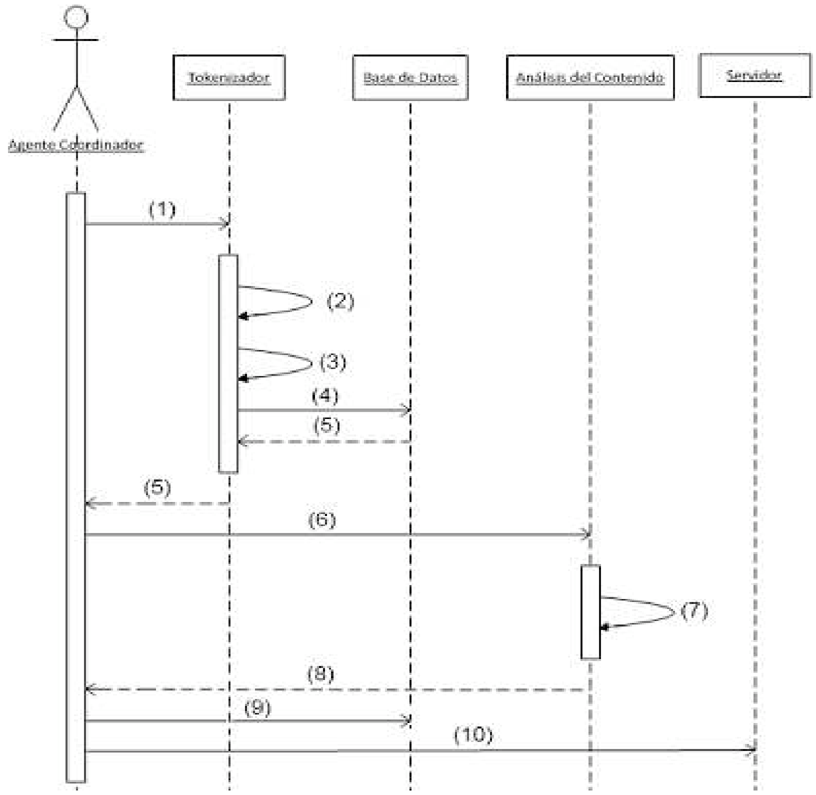


Diagrama 1: Análisis del Contenido

A continuación se detallan los pasos que realiza el agente coordinador en el diagrama 1 presentado anteriormente:

(1). Pasa Mensaje original.

(2). Divide el Mensaje en componentes léxicos.

(3). Codifica componentes léxicos.

(4). Busca Palabras.

(5). Regresa Palabras Clave.

(6). Envía Palabras Clave.

(7). Búsqueda de patrones de coincidan con amenazas de *ciberbullying.*

(8). Regresa la Peligrosidad de las palabras clave.

(9). Almacena información del usuario y el mensaje original.

(10). Muestra mensaje de alerta.

2.3 Análisis de Contenido

En el análisis de contenido se encuentran dos componentes o módulos que ayudan a detectar si la frase es dañina para otro usuario, dichos componentes son el analizador léxico (tokenizador) y la programación del conocimiento.

Analizador léxico: Descompone la frase analizada en tokens para procesarlos según la tabla 1, después es comparado con las palabras contenidas en la base de datos, por medio de consultas se determina si es una palabra clave. Programación del Conocimiento: Evalúa a partir de reglas tipo Prolog si las palabras claves son amenazantes o agresivas para otros usuarios.

Estos componentes se utilizan ya que proporciona un medio rápido y exacto para el análisis de los mensajes y brinda la posibilidad de evaluar la información tal como lo hace un ser humano.

Sustituto	**Letras o Silabas**
0	b,v
1	ce,ci,si,se,zi,ze
2	d,de
3	g,j
4	i,y,ll
5	ca,co,cu,ka,ko,ku
6	qui,qi,ki,que,qe,ke,q,k
7	t,te
8	u,w
9	x,cs,xh,cc,sh,zh
*	sa,so,su,za,zo,zu
ˆ	s,es
+	pe,p
n	Ñ
−	R
Se omite	Primera letra 'h'

Tabla 1: Sustitución de Palabras

En la tabla 2 se presentan ejemplos de algunas palabras que están contenidas en la base de datos.

Palabra	**Núcleo**	**Procesada**
Golpear	Golp	3ol+
Tonto	Tont	7on7
Matar	Mata	ma7a
Pegar	Peg	+3

Tabla 2: Ejemplo de palabras contenidas en la base de datos.

3 Conclusión

Con el modelo propuesto se pretende ayudar a detectar a tiempo los casos de *ciberbullying,* evitando casos de amenazas y agresiones que puede estar sufriendo el niño o el joven en la escuela. El hecho de que haya un interés en los niños el usar herramientas basadas en las tecnologías de información y las comunicaciones, los hace sentir parte de la ola tecnológica de la cual nadie se quiere quedar atrás. Dichas herramientas dan pie a canales de comunicación que no están excentos de amenazas o agresiones por parte de usuarios hacia personas con baja autoestima y altos niveles de vulnerabilidad.

Por tales motivos es importante contar en los centros de cómputo de las escuelas de nivel básico una herramienta que pueda detectar el *ciberbullying* por medio de un sistema con agentes software que interactúe en tiempo real, apoyándose de las técnicas del análisis de contenido de la información que intercambian los usuarios como niños o jóvenes.

Referencias

[1] El Universal, "*Bullying, riesgo para 18 millones de niños: CNDH*" `http://www.eluniversal.com.mx/notas/779963.html`, Julio 2011.

[2] Slonje, Robert; Smith, Peter K. "*Cyberbullying: Another main type of bullying?*" *Scandinavian Journal Of Psychology,* Volume 492, p. 147-154, DOI: 10.1111/j.1467-9450.2007.00611.x, April 2008.

[3] Cota O., María de Guadalupe & Soto B. J. Pablo. "*Architecture for design and development of security Systems based on agent technology*". WorldComp'11 - The 2011 World Congress in Computer Science, Computer Engineering, an Applied Computing (ICAI'11 - International Conference on Artificial Intelligence). Las Vegas, Nevada USA. Julio 2011. (`http://www.world-academy-of-science.org/worldcomp11/ws`)

[4] Piñuel Raigada, José Luis, "*Epistemología, metodología y técnicas de análisis de contenido*". `http://web.jet.es/pinuel.raigada/A.Contenido.pdf`.

[5] AngelFire, Análisis de contenidos, `http://www.angelfire.com/tv2/tesis/Analisisdecontenido.htm`.

[6] Berelson, Bernard, *Content Analysis in Communication Research* (New York: The Free Press (1952), p. 18. `http://devcompage.files.wordpress.com/2007/12/17-content_analysis.pdf`.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 35–48.

ALGORITMO GENÉTICO ESTOCÁSTICO MODIFICADO (STGA2) APLICADO A COMUNICACIONES MÓVILES

Claudio A. López-Miranda* **Carlos A. Brizuela-Rodríguez†**
David H. Covarruvias-Rosales‡

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: claudio@gauss.mat.uson.mx

†Departamento de Computación,
Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, México
e-mail: cbrizuel@cisese.mx

‡Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones,
Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, México
e-mail: dacoro@cisese.mx

Resumen

En este trabajo proponemos una modificación novedosa del Algoritmo Genético Estocástico (StGA) presentado por Krishnakumar et al, para optimizar funciones multimodales. El algoritmo modificado es nombrado StGA2 para el cual utilizamos una tasa variable de mutación por bit basada en la aptitud y controlado por una subtasa, con la idea de mejorar su capacidad para escapar de óptimos locales. Dicha capacidad es ilustrada analizando la convergencia y precisión del algoritmo desde dos hasta 30 dimensiones. La convergencia se discute desde el punto de vista típico generacional de la función de aptitud pero también de las variables de decisión; se utiliza elitismo con los cuatro mejores individuos y agregamos un análisis de convergencia poblacional que muestra como el mecanismo de mutación dirigido, de acuerdo a una longitud de paso, permite contraer la población hacia un óptimo local, o bien, expandir la búsqueda hacia un mejor óptimo local en caso necesario. Además, presentamos una aplicación del StGA2 en conjunción con el algoritmo de estimación de fuentes MUSIC (Multiple Signal Clasification) Multidimensional con el fin de estimar, en presencia de multitrayectorias, la dirección de arribo (DOA) de las señales que provienen de usuarios activos en un sistema de comunicaciones móviles de tercera generación con antenas inteligentes en la estación base.

1 Introducción

El Algoritmo Genético Estocástico (StGA) fue presentado originalmente por Krishnakumar et al [1], como un algoritmo robusto para resolver problemas de optimización multimodal con restricciones de intervalo [2]. Dichos problemas aparecen en aplicaciones como detectar la dirección de arribo (DOA) de una señal en telefonía celular. Las funciones multimodales presentan gran cantidad de óptimos locales y necesario proponer modificaciones que mejoren la capacidad de los algoritmos para escapar de estos óptimos locales. En este trabajo proponemos variantes de cómo dirigir el proceso de mutación para controlar la longitud del salto, además de seleccionar la conveniencia de mutar o no una variable de decisión mediante la elección de tasas adecuadas por cromosoma (cadena) o variable de decisión (subcadena).

2 Antecedentes y justificación

Existe una gran variedad de técnicas evolutivas como son algoritmos genéticos [3]-[4], búsqueda tabú y recocido simulado [5], conglomerado de partículas [6], programación evolutiva y estrategias evolutivas. Entre ellas el StGA resulta ser el más prometedor según [2] y ha sido aplicado a problemas de diseño aerodinámico [6]. Posteriormente Tu Zhenguo y Lu Yong muestran la robustez del StGA para problemas difíciles de optimización global en [2], usando 20 funciones de prueba de tamaño moderado con 30 y hasta 100 variables. Para estas funciones el algoritmo muestra mejor desempeño (mucha menor complejidad en el número promedio de evaluaciones de la función objetivo y mejor calidad de solución) en comparación con las técnicas heurísticas de Algoritmo Genético (AG) convencional, recocido simulado [4], estrategias evolutivas, programación evolutiva [7], conglomerado de partículas [5] y el algoritmo TGA (Taguchi Genetic Algorithm) [8]. Además, en [2] se menciona que el método de conglomerado de partículas (swarm intelligence) tiene un desempeño pobre comparado con el StGA, al no lograr encontrar el óptimo global de las funciones de prueba. Aunque existe otro método prometedor denominado ARGAs (Adaptive Range Genetic Algorithms) [9] y [10], tanto para codificación real como binaria, sin embargo su robustez no ha sido tan justificada como la del StGA, aún cuando éste último se ha implementado sólo para representación binaria, dejando abierta la posibilidad de mejorar su complejidad usando representación real. Algunas referencias recientes para optimizar funciones multimodales mediante enjambres artificiales de abejas se pueden encontrar en [11]; o bien a través de conservación de especies usando algoritmos genéticos en [12]; además, Idoumghar (2011) presenta un método híbrido muy reciente que combina la técnica de optimización mediante cúmulo de partículas y recosido simulado [13]. Por otro lado, el problema de estimar las DOAs de señales coherentes a través del algoritmo MUSIC Multidimensional, en adelante algoritmo MDM (Multidimensional MUSIC), es un problema de optimización multivariable [14], cuya función objetivo es maximizar el espectro angular de señal, sujeta únicamente a restricciones de intervalo. Para más detalles, el problema del DOA es presentado ampliamente en [15]-[16]. El espectro de señal resulta altamente multimodal, ya que conforme el número de dispersores (postes, edificios, etc.) crece, el número de óptimos locales aumenta considerablemente, dependiendo también del número de elementos de antena, de la separación espacial en términos del ancho de haz y del nivel de ruido [14]. Por ejemplo, para 2 dimensiones con dos usuarios, tenemos hasta 25 óptimos locales tres señales incidentes.

3 Algoritmo StGA2

Por cuestión de espacio, sólo mostramos los detalles técnicos del StGA. Una discusión más amplia se puede encontrar en [2]. El StGA utiliza una cadena binaria de longitud total L_{tot} para representar el vector de m variables de decisión. Dicha cadena está dividida en m subcadenas de L bits, una subcadena para cada variable x_i. La longitud L determina la precisión en la estimación, dependiendo de los intervalos de variación de las incógnitas, pudiendo ser entre 8 y 12 bits. A diferencia del AG tradicional donde cada cromosoma representa un solo individuo, en el StGA el cromosoma representará una región estocástica R de individuos con distribución normal multivariada. Así, el cromosoma decodificado en realidad estará descrito por un vector de medias (variables de decisión) que determinan el centroide de la región R (que puede interpretar como un elipsoide) y un vector de m varianzas reales utilizadas para generar una selección local de N hijos asexuales por cromosoma dentro de R. La selección local se utiliza con dos propósitos: para actualizar el centroide cuando uno de los hijos resulte con mejor aptitud, y para actualizar las varianzas de acuerdo a la regla de 1/5, i.e. si el cromosoma C_j es mejorado por al menos uno de sus $N = 5$ hijos asexuales C_{jk} $(k = 1, \ldots, N)$, entonces el mejor hijo C_{jk} toma el lugar del cromosoma C_j, y cada varianza V_{ji} (j-ésimo cromosoma, i-ésima variable) se disminuye por un incremento lineal δ_i, o en caso contrario se aumenta. Los valores iniciales de las varianzas V_{ji} y del valor δ_i son seleccionados uniformemente en los siguientes intervalos

$$I_V^i = \left(\frac{1}{120} \sim \frac{1}{80}\right)[b_i - a_i] \quad \text{y} \quad \delta_i = \left[\frac{2}{100}V, \frac{5}{100}V\right] \tag{1}$$

donde I_V^i es el intervalo de la varianza de x_i cuyo dominio es $[a_i, b_i]$, y V es un valor aleatorio uniforme dentro de I_V^i. La ecuación (1) es una regla empírica que debe ajustarse dependiendo de la aplicación. La población inicial se genera aleatoriamente, seleccionando las medias (variables de decisión) uniformemente en el dominio de cada variable. Después de actualizar la población con la selección local, se aplica selección global por torneo binario elitista del 10%. Dicho elitismo consiste en llevar un registro actualizado de los K mejores individuos (súper individuos) obtenidos hasta la generación actual, donde el valor K representa al 10% de la población, luego el 10% de los peores padres seleccionados para apareamientos en el torneo son reemplazados con estos K súper individuos, los cuales son actualizados después de la selección local. El cruzamiento es de un punto y la mutación es uniforme bit a bit. El mecanismo de supervivencia es generacional. El diagrama de flujo del StGA se presenta en la figura 1.

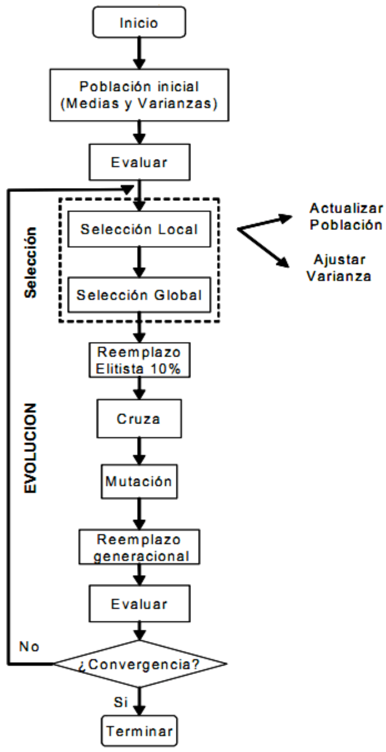


Figura 1: Diagrama de Flujo de StGA

4 Desempeño y modificación StGA: Algoritmo StGA2

Una ventaja de las modificaciones que aquí se presentan es que se pueden aplicar a cualquier AG que utilice un mecanismo de mutación. Una función multimodal típica es similar a la hiper-superficie de la conocida función de prueba $F8$ [2], figura 4, cuya ecuación para para dimensión n viene dada por (2).

Analizaremos primeramente la eficiencia del StGA2 para minimizar $F8$ con 10 variables de decisión, y una vez probada su eficiencia, se aplicará al problema del DOA desde el espectro de señal para 2 y 30 multitrayectorias. Al implementar el StGA tal como se establece originalmente, éste se quedaba atrapado constantemente en un óptimo local, por lo que realizamos ciertas modificaciones para obtener el StGA2. En [2] se propone mutación simple uniforme bit a bit, con tasa de mutación 0.02; sin embargo, nosotros proponemos una nueva variante de mutación integrada por tres conceptos: la aptitud del individuo, el orden del bit y el nivel de subcadena.

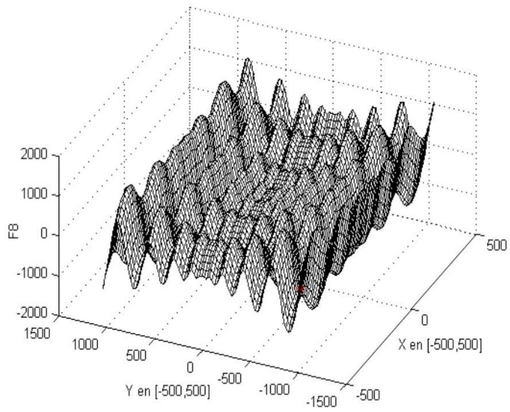


Figura 2: Superficie $F8$ en dimensión dos ($m = 2$)

$$F8(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} -x_i \operatorname{sen}\sqrt{|x_i|}, \quad x_i \in [-500, 500], \quad i = 1, \ldots m. \tag{2}$$

Aunque todavía no se tienen resultados concluyentes, podemos decir de manera preliminar que este esquema de mutación para diversificar la búsqueda es una estrategia que logra un desempeño superior al alcanzado por el esquema de mutación constante propuesta originalmente en el StGA.

La tasa de mutación variable para cada bit se implementa de principio a fin, aunque puede ser recomendable aplicarla en la primera mitad o cierto porcentaje de generaciones o hasta la segunda mitad. Para corregir asignamos mayor tasa al bit más significativo, esto permite grandes saltos en la población. La tasa de mutación resulta variable y está en función de la aptitud de cada individuo, de esta forma podemos decidir si preferimos mutar los mejores o los peores individuos, y en cualquiera de los casos se puede regular la mutación con una subtasa, ya que antes de decidir si se muta cualquier bit en una subcadena, se verifica con base en la aptitud del individuo si la subcadena es sujeta de mutación, controlando así la conveniencia de mutar o no una variable de decisión. En nuestro caso, consideramos que a mejor aptitud (menor valor caso de minimización) mayor probabilidad de mutar la subcadena, con la idea de corregir aquéllas variables que aún no convergen a su valor óptimo. Las reglas de mutación se establecen en (3)-(6), donde se considera que el primer bit ($k = 1$) a la izquierda de la subcadena es el más significativo y el bit más a la derecha ($k = L$) es el menos significativo (ver [4]):

$$f_{\text{nor}}(i) = (f_i - f_{\min})\,(f_{\max} - f_{\min})\,, \tag{3}$$

$$tsc(i) = [1 - f_{\text{nor}}(i)]\,(t_{\max} - t_{\min}) + t_{\min}, \tag{4}$$

$$T = f_{\text{nor}}(i)(t_{\max} - t_{\min}) + t_{\min}, \tag{5}$$

$$tasa\_bit(k) = \frac{L - k + 1}{L} \times T, \quad k = 1, \ldots L, \tag{6}$$

donde $f_{\text{nor}}(i)$ representa la aptitud normalizada entre $(0,1)$ del individuo i; T es un factor para favorecer en este caso a los peores individuos; $f_{\min}$ y $f_{\max}$ son las aptitudes mínima y máxima de la población actual; $t_{\min}$ y max son las tasas mínimas y máximas permitidas de mutación, respectivamente. La ecuación (4) sirve para asignar una tasa de mutación por subcadena (tsc) basada en la aptitud normalizada en (3), y sirve para controlar el porcentaje de mutaciones ya que antes de mutar cualquier bit en una subcadena, se pregunta si dicha subcadena es sujeta de mutación, si la respuesta es no, la mutación se sigue a la siguiente subcadena. La $tasa\_bit(k)$ en (6) es la tasa de mutación para el k-ésimo bit en la subcadena, la cual asignará mayor tasa al bit más significativo.

Alternativamente se puede usar (7) para asignar mayor tsc a los peores individuos (caso minimización), o bien usar (8) y (9) para asignar a los mejores individuos una tasa variable mayor para el bit menos significativo:

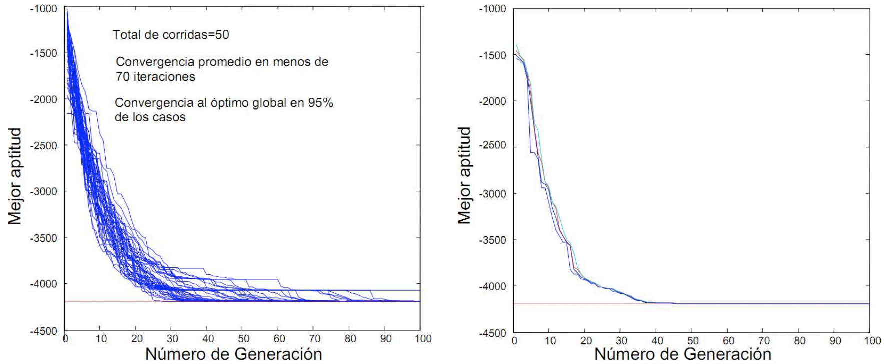
$$tsc(i) = f_{\text{nor}}(i)(t_{\max} - t_{\min}) + t_{\min}, \tag{7}$$

$$T = [1 - f_{\text{nor}}(i)]\,[(t_{\max} - t_{\min}) + t_{\min}, \tag{8}$$

$$tasa\_bit(k) = \frac{1}{L-k+1} \times T, \quad k = 1, \ldots L. \tag{9}$$

Antes de implantar alguna de las estrategias anteriores, debemos preguntarnos ¿Qué individuos conviene mutar: los mejores o los peores? ¿Qué tamaño de salto se quiere: grande o pequeño? y ¿Qué variables debo cambiar: la de un individuo bueno o uno malo? La tasa por bit controla el tamaño de los saltos y la probabilidad de mutar los peores o mejores individuos, mientras que la tsc controla la conveniencia de mutar una variable. A continuación presentamos un análisis de la ejecución del algoritmo StGA2 para $F8$ con 10 variables y 50 corridas, generando una población inicial diferente por corrida. El óptimo teórico [2] se encuentra en $x_i = 420.967$ para toda $i = 1, \ldots, 10$, con valor mínimo $-4,189.86$. En la figura 3a se muestra el comportamiento de la mejor aptitud por generación en 50 corridas, se observa que la convergencia al óptimo global (línea punteada horizontal inferior) se da en general entre las primeras 30 a 70 iteraciones. Este hecho se corrobora con las cuatro mejores soluciones de una corrida típica mostradas en la figura 3b.

Por otro lado, la figura 4 que presenta el valor óptimo al final de cada corrida, se muestra que 49 de las 50 corridas fueron exitosas al encontrar el óptimo global, y que sólo una (la tercera) no convergió al óptimo global. La figura 5 muestra la distribución final del StGA2 por corrida; aunque sólo se aprecia un punto, a cada abscisa le corresponden en realidad 10 puntos en el eje vertical representado los valores óptimos obtenidos de las 10 variables en $[-500, 500]$. Observe que únicamente en la tercera corrida, sólo una de las 10 variables de la solución se encuentra alejada de su línea óptima de 420.96 al quedar atrapada en un óptimo local en -300. Esto deja claro la capacidad del StGA2 para escapar de óptimos locales a razón de $49:50$ éxitos.



(a) Mejor aptitud por generación en 50 corridas

(b) Cuatro mejores aptitudes (elitismo) de una corrida típica del StGA2 con 100 generaciones.

Figura 3

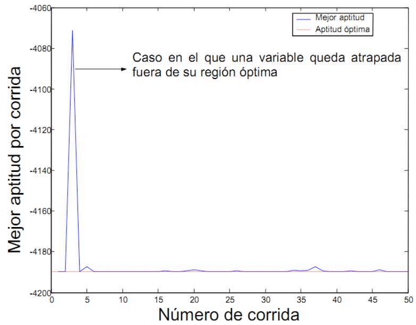


Figura 4: Mejor aptitud por corrida usando 10 variables

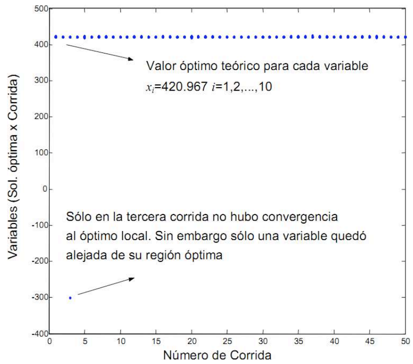


Figura 5: Distribución óptima por corrida

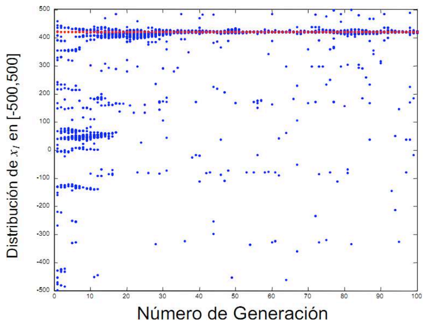


Figura 6: Convergencia de x_i por generación

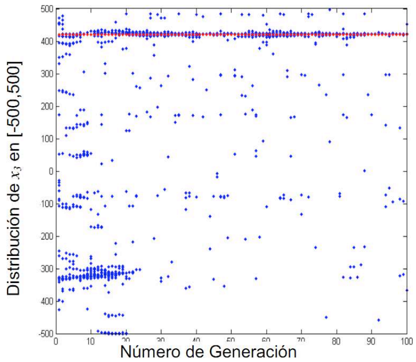


Figura 7: Convergencia de x_i por generación

El comportamiento generacional analiza la distribución de la variable x_1 en la figura 6; a cada abscisa le corresponderán 40 valores (tamaño de la población). Note que la búsqueda está basada en un concepto de bloques constructores y no en una simple búsqueda aleatoria, ya que la diversidad disminuye conforme aumentan las iteraciones. Lo mismo se cumple para el resto de variables. La figura 7 muestra la convergencia para x_3, la cual pudo escapar del óptimo local -300 en las primeras 20 iteraciones. La convergencia al óptimo global se dio en menos de 50 iteraciones para todas las variables. El promedio de la mejor aptitud en las 50 ejecuciones fue -4187.2 (muy cercano al óptimo teórico $-4,189.8$), la desviación estándar fue 16.74, la mejor solución final fue (421.32, 421.07, 421.01, 420.95, 420.89, 420.71, 420.89, 420.83, 421.07, 421.19) y la mejor aptitud fue el óptimo teórico.

5 Aplicación del StGA2 a comunicaciones móviles

Estimar la dirección de arribo (DOA) de las fuentes activas en comunicaciones móviles, es un problema central en el procesamiento de señales de un arreglo de antenas. Conociendo los DOAs de interés es posible dirigir electrónicamente el haz principal de cada patrón de radiación de manera eficiente, por un lado para dar mayor ganancia en recepción o transmisión a los usuarios, y por otro lado para buscar cancelar interferentes. La figura 8 representa la transición de los sistemas actuales con radiación omnidireccional hacia los sistemas con antenas inteligentes con patrones directivos.

A. Algoritmo MUSIC

Para estimar las DOAs existen métodos como el algoritmo MUSIC [16] de alta resolución para clasificación de señales recibidas en un arreglo de antenas. MUSIC está basado en el modelo de la señal incidente al arreglo (figura 9), el cual explota la eigen-estructura de la matriz de correlación para determinar la DOA de las fuentes de interés de usuarios activos. De acuerdo a la figura 9, el modelo de la señal incidente $\boldsymbol{u}$ viene dado por (10), [14]-[15], donde s_k es la señal incidente correspondiente a la fuente k (usuario de interés ó interferente), $\boldsymbol{a}_k$ es conocido como el vector de direccionamiento del arreglo debido a los desfasamientos, α_{ik}, $(i = 1, \ldots, M)$ y $\boldsymbol{N}$ el vector de ruido en cada rama.

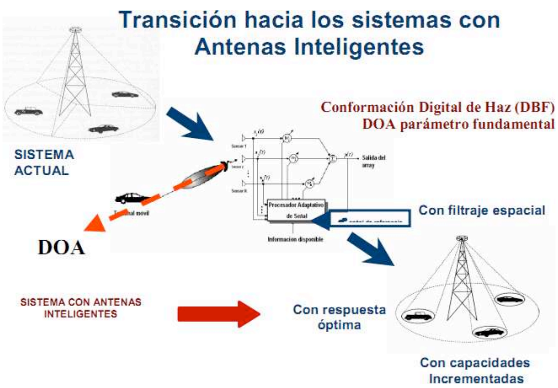


Figura 8: Transición hacia los sistemas con antenas inteligentes con direccionamiento de haz hacia la dirección angular DOA.

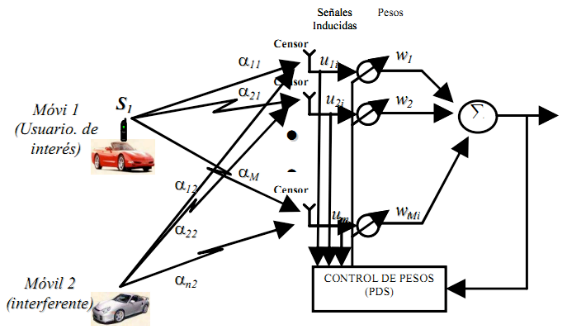


Figura 9: Modelo de señal para un arreglo lineal uniforme.

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix} = s_d\boldsymbol{a}_d + \sum_{k=1}^{L} s_k\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{N}, \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{Mk} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

En particular, para un arreglo lineal de antenas uniforme con M sensores separados uniformemente entre sí una distancia d, el vector de dirección es

$$\boldsymbol{a}(\phi) = \left[1,\, \mathrm{e}^{j\beta d \operatorname{sen}\phi}, \ldots,\, \mathrm{e}^{j\beta d(M-1)\operatorname{sen}\phi}\right]^T, \tag{11}$$

donde ϕ es la DOA de la señal con respecto a la normal del arreglo tomando como origen el primer elemento, $\beta = 2\pi/\lambda$ la constante de fase, con λ la longitud de onda. $\boldsymbol{a}(\phi)$ son los desfasamientos de la señal debido a la ubicación relativa de los elementos de antena. El modelo (10) se expresa matricialmente como

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}s + \boldsymbol{N}, \tag{12}$$

donde $\boldsymbol{A}$ es la matriz de vectores de dirección. Así, la matriz de correlación resulta

$$\begin{gathered} \boldsymbol{R}_{uu} = E[\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^H] = \boldsymbol{A}E[\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^H]\boldsymbol{A}^H + E[\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^H], \\ \boldsymbol{R}_{uu} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_{ss}\boldsymbol{A}^H + \sigma_n^2\boldsymbol{I} \end{gathered}, \tag{13}$$

con $\boldsymbol{R}_{ss} = E[\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^H]$ la matriz de covarianza de la señal.

La descomposición de los vectores propios sugiere que dado un vector de la matriz $\boldsymbol{R}_{uu}$, los ángulos eléctricos de las señales que arriban al sistema se determinan buscando vectores $\boldsymbol{a}_k$ que sean ortogonales al subespacio de ruido, el cual está determinado por los $M-D$ eigen-vectores de la matriz $\boldsymbol{V}_n$ dada por $\boldsymbol{V}_n = [\boldsymbol{q}_D, \boldsymbol{q}_{D+1}, \ldots, \boldsymbol{q}_{M-1}]$, cuyas columnas son los vectores propios $\boldsymbol{q}_i$ asociados con los $M-D$ valores propios λ_i más pequeños de $\boldsymbol{R}_{uu}$. En [16] el espectro MUSIC se expresa como

$$P_{MUSIC}(\phi) = \frac{1}{\boldsymbol{a}^H(\phi)\boldsymbol{V}_n\boldsymbol{V}_n^H\boldsymbol{a}(\phi)}. \tag{14}$$

Los D picos más grandes corresponderán a las DOAs reales de las señales. Por tanto, el problema de estimación de DOAs es un problema de optimización multimodal de la función (14).

B MUSIC Multidimensional (MDM)

En la presencia de multitrayectorias el modelo de señal se basa ahora en el concepto de *firmas espaciales,* que representan una combinación de las señales asociadas a un usuario de interés, la señal directa más sus multi-trayectorias. La firma espacial $\boldsymbol{v}_i$ o combinación de señales está dada por [14]

$$v_i = [\boldsymbol{a}(\phi_i), \boldsymbol{a}(\phi_1), \ldots, \boldsymbol{a}(\phi_L)] \begin{bmatrix} s_i \\ s_{1i} \\ \vdots \\ s_{Li} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$v_i = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{s}_i = \sum_{k=0}^{L_i} \alpha_{ki}\boldsymbol{a}(\phi_i + \theta_{ki}) \tag{16}$$

donde

ϕ_i = DOA del i-ésimo usuario,

$\phi_i + \theta_{ki}$= Ángulos de Arribo (AOA) de la k-ésima, multi-trayectoria del i-ésimo usuario,

θ_{ki}= Ángulo con respecto al DOA ϕ_i,

α_{ki}= Amplitud de la k-ésima multi-trayectoria del i- ésimo usuario,

s_i la señal directa del i-ésimo usuario,

s_{ki} la k-ésima réplica de la señal i.

Es decir, cada firma espacial $\boldsymbol{v}_i$ se forma con una matriz $\boldsymbol{A}_i$ de vectores de dirección, con un vector correspondiente al DOA del i-ésimo usuario (ϕ) y L vectores de dirección correspondientes a los AOAs de las L multi-trayectorias (θ_l's), multiplicada por el vector amplitudes $\boldsymbol{s}_i$, de las múltiples señales incidentes asociadas a cada señal de usuario $s_i(t)$.

Si la i-ésima señal es $s_i(t) = \alpha_{1i}\,\mathrm{e}^{j2\pi f_i t}$ cuya frecuencia portadora es f_i, entonces el vector $\boldsymbol{s}_i$ se puede expresar como

$$\boldsymbol{s}_i = \begin{bmatrix} 1\,\mathrm{e}^{j2\pi f_i \tau_{0i}} \\ \frac{a_{1i}}{a_{0i}}\,\mathrm{e}^{j2\pi f_i \tau_{1i}} \\ \vdots \\ \frac{a_{Li}}{a_{0i}}\,\mathrm{e}^{j2\pi f_i \tau_{Li}} \end{bmatrix} s_i(t) = \boldsymbol{s}_{\mathrm{in}} \cdot s_i(t), \tag{17}$$

donde α_{i0} es la amplitud de la señal directa o en línea de vista (LoS) del usuario i. $\boldsymbol{s}_{in}$ es el vector de amplitudes complejas normalizado por α_{i0}, los retardos o tiempos de llegada (TOA) de las multitrayectorias son representados por τ_{ki}.

Así, la señal $\boldsymbol{u}$ recibida en el arreglo para cada instante de tiempo t se puede expresar como:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{u} = [\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{s}_{1n}, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{s}_{2n}, \ldots, \boldsymbol{A}_D\boldsymbol{s}_{Dn}]\boldsymbol{s} + \boldsymbol{N}, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{N} \end{array}, \tag{18}$$

donde $\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{s}_{in}]$ es la matriz de firmas (normalizadas) y $\boldsymbol{s}$ el vector de señales de usuarios.

Si, de nuevo, $\boldsymbol{s}$ es un vector de señales no coherentes como en (12), cuyos DOAs generan vectores linealmente independientes, las multi-trayectorias generadas con amplitudes diferentes generarán firmas espaciales independientes, haciendo que $\boldsymbol{F}$ sea de rango completo (como la matriz $\boldsymbol{A}$ para MUSIC normal). Así, es posible obtener la matriz de covarianza de (13) con el que generaremos el espectro MDM, al proyectar las firmas espaciales (en vez de los vectores de dirección) sobre el espacio de ruido. Debemos notar que para generar una firma espacial v_i en (18), es necesario conocer (o simular) un vector de amplitudes normalizadas $\boldsymbol{c}_N$ y un vector de $L+1$ ángulos de arribo $(\phi_i, \theta_1, \ldots, \theta_L)$ correspondientes a un DOA_i y L AOA_s de multi-trayectorias. El espectro multidimensional, P_{MDM}, está dado por la ecuación (19)

$$P_{MDM}(\phi, \theta_1, \ldots, \theta_L) = \frac{1}{F^H(\phi, \theta_1, \ldots, \theta_L)V_N V_N^H(\phi, \theta_1, \ldots, \theta_L)}. \tag{19}$$

Los D picos mayores corresponderán a las D firmas espaciales de usuarios de interés. Así, hay que encontrar los ángulos que maximizan el espectro MDM. El recíproco de (19) se conoce como el espectro de señal, sólo que la matriz V se forma con los vectores propios del subespacio de señal en vez de los vectores propios del subespacio de ruido.

C Estimación de DOAs aplicando StGA2

En esta sección presentamos una aproximación al problema de optimizar el espectro MDM mediante el StGA2. Analizamos la convergencia y precisión del StGA2 para el espectro de señal en dos y 30 dimensiones[1].

Caso para dos dimensiones y dos usuarios: Simulamos un escenario con dos usuarios y asignamos a cada uno un dispersor de acuerdo al modelo Gaussiano [15]. El usuario U1 está situado a 800 m de la EB en dirección 50° y cuya multi- trayectoria resultó en 38.75°, mientras que el segundo usuario U2, se encuentra a 600 m de la EB ubicado a -30 grados y con una multi-trayectoria en -34.2°. Las combinaciones de amplitud y fase fueron $\boldsymbol{c}_{N1} = [1, 0.9\,\mathrm{e}(j25\pi/180)]$ y $\boldsymbol{c}_{N2} = [1, 0.8\,\mathrm{e}(j120\pi/180)]$. El espectro de señal usuario U1 se muestra en la figura 10. La figura 11 presenta el comportamiento de las cuatro mejores aptitudes en 50 generaciones, usando el espectro de señal (figura 10) como función de aptitud (19). Note que la convergencia ocurre entre las iteraciones 10 y 20. La aproximación y rapidez del algoritmo es muy buena y en general la desviación de la estimación es menor de medio grado, tal como resultaron las estimaciones 49.94° y 38.75°. A pesar de que el espectro de señal es multimodal, con crestas de óptimos locales muy cercarnos a su máximo global pero cuyas coordenadas pueden resultar lejos de los ángulos reales, el StGA2 es capaz de escapar de dichos óptimos locales y converger rápidamente.

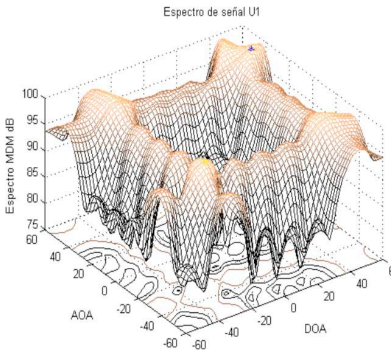


Figura 10: Espectro de señal para usuario U1

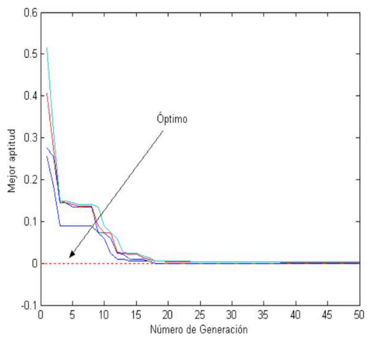


Figura 11: Cuatro mejores aptitudes por generación usuario U1

La convergencia del StGA2 desde el punto de vista poblacional se analiza en las figuras 12-15, las cuales muestran la evolución de la poblacional en distintas generaciones. La figura 12 representa la población inicial totalmente diversificada sobre las curvas de nivel del espectro de señal U1. En la generación 10 (figura 13) se han localizado dos grandes nichos, incluso la "firma" del segundo usuario U2 parece más prometedor, sin embargo, en la iteración 20 (figura 14) se escapa hacia la "firma" del usuario U1 que representa el óptimo global. Una vez que se da la convergencia, la población poco a poco tiende a diversificarse y contraerse de nuevo como ilustra la generación final de la figura 15

[1] dimensiones 2 y 30

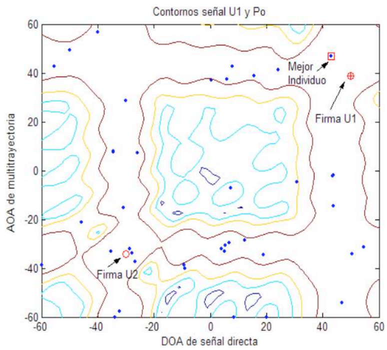


Figura 12: Distribución de la población inicial (P0) usuario U1

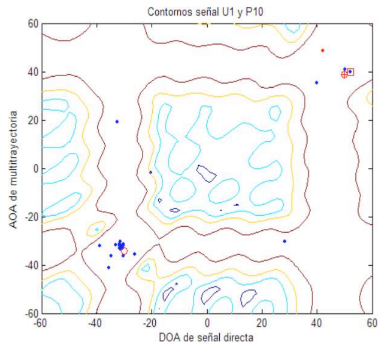


Figura 13: Población después de 10 generaciones

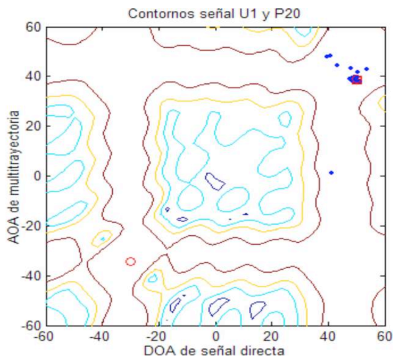


Figura 14: Población después de 20 generaciones

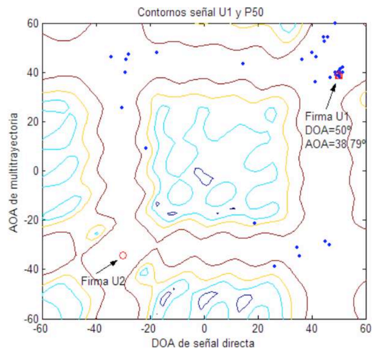


Figura 15: Población final en 50 generaciones

Espectro MDM para 30 multi-trayectorias: En este caso se aumenta el número de generaciones debido al tamaño del espacio de búsqueda. El escenario con usuario y dispersores que generan la multi-trayectorias se muestra en la figura 16; el comportamiento de la mejor aptitud por generación, la distribución de la solución final y el corte del espectro multidimensional se muestran en las figuras 17, 18 y 19, respectivamente. De nuevo, el algoritmo exhibe convergencia hacia el óptimo global (0 dB en este caso), pero aún cuando está muy cerca de dicho punto, la distribución estimada de ángulos difiere de la distribución real esperada. Esto sucede debido a que el algoritmo está diseñado para encontrar el mejor valor de la función objetivo (espectro de señal), indistintamente del punto que lo defina. En la figura 18 aproximadamente ocho variables coinciden prácticamente con su valor correcto, mientras que el resto presenta desviación; la mejor aptitud fue 0.0060 muy cercano al óptimo

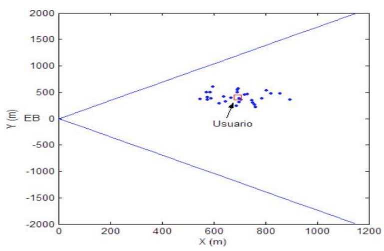


Figura 16: Escenario con 30 multi-trayectorias

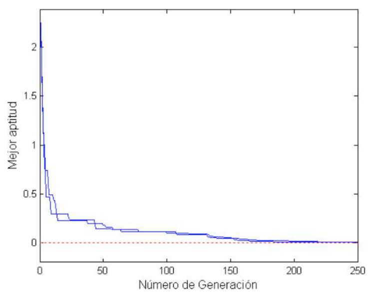


Figura 17: Mejor aptitud por corrida, 30 multi-trayectorias

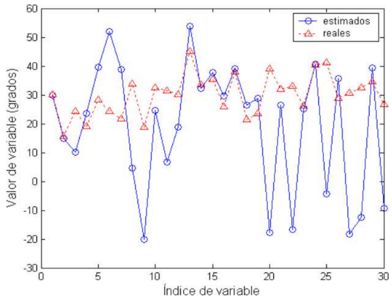


Figura 18: Soluciones reales vs. Estimadas, 30 variables

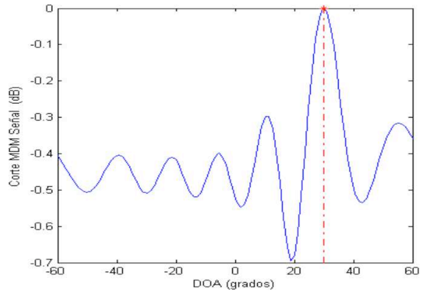


Figura 19: Corte en DOA del espectro de señal MDM-30D

6 Resumen y conclusiones

Presentamos una modificación del Algoritmo Genético Estocástico (StGA), denominado StGA2, en conjunción con el algoritmo de estimación de fuentes MUSIC Multi-dimensional, con el fin de estimar las DOAs en presencia de multi-trayectorias en sistemas de comunicaciones móviles. Se analiza la convergencia del algoritmo, desde el punto de vista generacional y poblacional, para el caso de dos y 30 dimensiones, mostrando que el StGA2 converge con precisión y rápidamente. Para dimensiones de hasta treinta multi-trayectorias se mostró empíricamente que el algoritmo converge al óptimo global, aunque no necesariamente es la combinación de DOAs reales. El problema para lograr una estimación correcta no se debe al algoritmo, sino a la complejidad geométrica del espectro multidimensional MDM, el cual contiene generalmente múltiples crestas en el paisaje que dificultan discriminar la combinación correcta.

Referencias

[1] Krishnakumar K., Swaminathan R., Garg S. y Narayanaswamy S. Solving large parameter optimization problems using genetic algorithms. *Proc. Guidance, Navigation, Contr. Conf, Baltimore,* pp. 449-460, 1995.

[2] Zhenguo Tu and Yong Lu, “A Robust Stochastic Genetic Algorithm (StGA) for Global Numerical Optimization”, *IEEE Transaction on Evolutionary Computation,* vol. 8, no. 5, pp. 456-470, Octubre 2004.

[3] Sareni B.y Krahenbuhl L. 1998. Fitness Sharing and Niching Methods Revisited. *IEEE Trans. On Evolulutionary Computation,* 2(3): 97-106.

[4] Pham D. T. y Karaboa D. 2000. *Intelligent Optimisation Techniques: Genetic Algorithms, Tabu Search, Simulated Annealing and Neural Networks.* Springer. London.

[5] Parsopoulos K. E. y Vrahatis M. N. 2004. On the computation of all global minimizers through particle swarm optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation.* 8(3): 211-224.

[6] Mulgund S., Harper K., Krishnakumar K. y Zacharias G.1998. Aircombat tactics optimization using stochastic genetic algorithms. *Proc. IEEE Int. Conf. Systems, Man, Cybern.* 4: 3136-3141.

[7] Yao X., Liu Y . y Lin G. M. 1999. Evolutionary programming made faster. *IEEE Trans. Evol. Comput.* 3: 82- 102.

[8] Tsai J. T., Liu T. K. y Chou J. H. 2004. Hybrid Taguchi- Genetic algorithm for global numerical optimisation. *IEEE Trans. Evolutionary Computation.* 8(4): 365-377.

[9] Oyama A., Obayashi S. y Nakahashi K. 2000. Real-Coded Adaptive Range Genetic Algorithm And Its Application to Aerodynamic Design. *Applied Soft Computing,* 1: 179-187.

[10] Arakawa M. y Hagiwara I. 1997. Nonlinear Integer, Discrete and Continuous Optimization Using Adaptive Range Genetic Algorithms. *Proc. of ASME Design Engineering Technical Conference.*

[11] Karaboga, Dervis; Basturk, Bahriye. A 2007. Powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: artificial bee colony (ABC) algorithm. *Journal of Global Optimization.* 39-3, pp: 459-471.

[12] Li, Jian-Ping; Balazs, Marton E.; Parks, Geoffrey T.; Clarkson, P. John. 2002. A Species Conserving Genetic Algorithm for Multimodal Function Optimization. *Evolutionary Computation,* 10-3, pp: 207-234.

[13] Lhassane Idoumghar, Mahmoud Melkemi, René Schott, and Maha Idrissi Aouad. 2011. Hybrid PSO-SA Type Algorithms for Multimodal Function Optimization and Reducing Energy Consumption in Embedded Systems. Applied Computational *Intelligence and Soft Computing.* Volume 2011, Article ID 138078, 12 pages doi:10.1155/2011/138078.

[14] Zoltowski M. y Haber F. 1986. A vector space approach to direction finding in a coherent multipaht environment. *IEEE Trans. on Antenas and Propagation.* 34(9): 1069-1079.

[15] Claudio A. López Miranda, *"Estimación de la Dirección de Arribo y Desplazamiento Doppler en un Ambiente Gaussiano de Dispersores"*, Tesis de doctorado, Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Abril 2006.

[16] R. O. Schmidt. 1986. "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation," *IEEE Trans. on Antennas and Propagation,* vol. 34, no. 3, pp. 276-280.

Apéndice

PARÁMETROS UTILIZADOS POR EL STGA2

$MaxGen = 20$ a 200	Máximo No. de Generaciones
$NP = 40$ a 100	Tamaño de la población
$N = 5$	Número de hijos asexuales
Gap= 0.1*NP	Porcentaje de elitismo = 10
$L = 5$ u 8	Longitud de subcadena, 5-12 bits
$p_c = 0.85$	Probabilidad de cruzamiento
$p_m = 0.2$	Probabilidad de mutación
tasa_max = 0.35	Tasa máxima de mutación
tasa_min = 0.02	Tasa mínima de mutación
$Tn = 2$	Tamaño del torneo
$[-60^\circ, 60]$	Dominio de las variables θ_i
$I_V^i = [0.2^\circ, 4^\circ]$	Intervalo para las variazas V_{ji}
$V = V_i + \text{rand}(1, M)(V_u - V_l)$ en I_V^i	para calcular δ_i

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 49–56.

MODELO DE SEGURIDAD PARA DETECTAR *PHISHING* Y *BOTS* EN EL CORREO ELECTRÓNICO APLICANDO ANÁLISIS DE CONTENIDO Y SISTEMA MULTIAGENTES

Christian Javier Lucero Valdez* **Perla Janeth Castro Pérez†**
Maria de Guadalupe Cota Ortiz‡ **Juan Pablo Soto Barrera§**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: *crizlucero@gmail.com
†anethkasztro@gmail.com
‡lcota@gauss.mat.uson.mx
§jpsoto@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En este artículo se presenta un modelo de seguridad basado en la arquitectura ARSEC-AMS que implementa un sistema multi-agente para el análisis de contenido. El sistema propuesto utiliza reglas tipo Prolog para la detección de patrones que coincidan con el contexto de un conjunto de mensajes comunes previamente obtenidos, que han sido utilizados para confundir al receptor y ser víctima de fraudes o engaños.

1 Introducción

En la actualidad, el correo electrónico sigue siendo uno de los medios de comunicación más utilizados para intercambiar información de manera electrónica. Cabe mencionar que mantener un intercambio constante de información puede representar un riesgo tanto para los usuarios como para el propio sistema.

Existen varios métodos de robo de información, siendo uno de ellos el *phishing*, el cual se caracteriza por ser utilizado para obtener información confidencial de las personas de forma fraudulenta a través del engaño [1]. Otro método comúnmente utilizado son los *bots* (abreviatura de robots), el cual es un programa informático que simula a un ser humano para interactuar con las personas y engañarlas [2], dicho programa suele utilizarse para enviar archivos infectados por algún tipo de medio electrónico a través de una frase común, por ejemplo, el correo electrónico.

Con el fin de buscar una alternativa que contribuya a disminuir dicha problemática, en este trabajo, se propone un modelo de seguridad basado en la tecnología de agentes que analiza el contenido de la información intercambiada en el correo electrónico. Dicho análisis, permite la detección de amenazas de tipo *phishing* y *bot.*

Para efectos de organización, el documento se ha integrado en 4 secciones, presentándose en la sección 2 las herramientas actualmente utilizadas para atacar esta problemática. Por otro lado, en la sección 3, se describe el modelo de seguridad propuesto, y por último, las conclusiones y referencias bibliográficas son presentadas.

2 Herramientas actuales

Hoy en día, existen varias herramientas que son utilizadas por programas de clientes de correo con el fin de ofrecer cierto grado de seguridad para el usuario. Las aplicaciones de escritorio más utilizadas para el correo electrónico son: Microsoft Outlook [3], Mozilla Thunderbird [4], Windows Mail [5], etc. Por otro lado, existen otras aplicaciones basadas en la web para revisar el correo electrónico, tales como: Windows Live Hotmail [6], Gmail [7], Yahoo! Mail [8], etc., que al igual de las aplicaciones de escritorio, tienen su propio método de detección de mensajes maliciosos.

Además de este tipo de herramientas existen otras externas que ayudan a filtrar los mensajes, por ejemplo: ESET, Symantec, Avast Software, Panda Security, Kaspersky Antivirus y McAfee Secure [9-14].

A pesar de de la amplia variedad de propuestas, en la literatura no se encontró una aplicación de correo electrónico que implementara análisis de contenido al recibir o intercambiar mensajes a través de este medio. Tampoco se detectó una empresa o institución que se encuentre estudiando o desarrollando algún modelo parecido al propuesto en este trabajo.

3 Metodología

Como una alternativa para resolver esta problemática, se presentará una propuesta de desarrollo de un sistema basado en agentes, tomando como base la arquitectura ARSEC-AMS [15] que se ilustra a continuación (Figura 1).

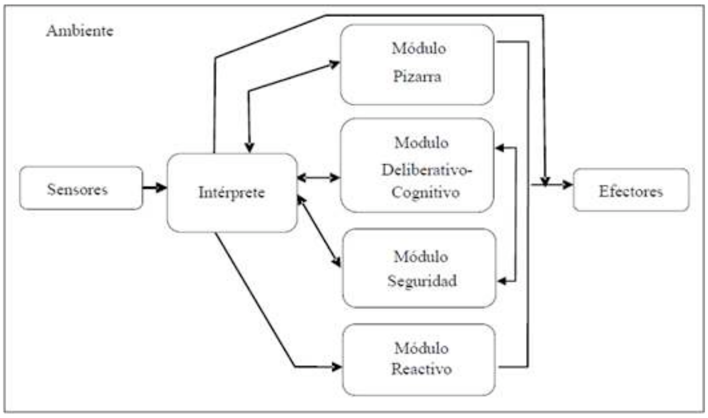


Figura 1: Arquitectura ARSEC-AMS

La arquitectura ARSEC-AMS se compone de módulos que permiten implementar un sistema multi-agente aplicando conceptos de seguridad y que será aplicada para detectar la peligrosidad de los mensajes intercambiados mediante el correo electrónico.

3.1 Detalles de la implementación

En cuanto a la programación del conocimiento, se aplicarán reglas tipo Prolog y técnicas de análisis de contenido. Por otra parte, y con el fin de proteger la información que se intercambia a través de la red se utilizarán las librerías OpenSSH y OpenSSL, los cuales hacen la conexión del usuario con el sistema y la transacción de información de forma segura.[16 - 17]. Además se diseñó un analizador léxico (*tokenizador*), el cual descompone la frase en *tokens* para un manejo más sencillo en el análisis de contenido, una base de datos para el control de sesiones de agentes, un glosario con una clasificación ontológica de las palabras que son consideradas con un grado de peligrosidad para el usuario, y una pizarra para el control de las ocurrencias de eventos que son considerados como una amenaza a la seguridad del sistema.

3.2 Análisis de Contenido

El análisis de contenido es un conjunto de técnicas, que permiten distinguir el significado simbólico de los mensajes con respecto al modo de producción. Estos mensajes por lo regular no tienen un único significado, ya que en ocasiones cambia su semántica según el contexto en que se presenta cierta información [18-19].

3.2.1 Componentes del análisis de contenido

- **Objetivo**

  Realizar una inspección en las frases para identificar aquellas que representen un peligro para el sistema o para el usuario.

- **Universo**

  a) Solicitud de datos personales

  b) Solicitudes de datos de tarjetas bancarias.

  c) Engaños sobre falsos premios y ofertas.

Hay infinidad de temas que se pueden abordar, sin embargo, nos enfocaremos al universo descrito anteriormente, ya que es importante reconocer que el idioma español es muy extenso, lo cual hace que el análisis de la información sea complejo. Para efecto de prueba se tomaron frases relacionadas con los temas planteados en párrafos anteriores [20-23].

Del estudio realizado sobre las frases se hizo una selección de las palabras claves que pueden proporcionar información significativa en la interpretación del mensaje enviado, a fin de poder detectar patrones que permitan identificar alguno de los problemas que se mencionan en el universo planteado en el sistema.

Dado que una oración se compone de sustantivos, verbos y adjetivos, las palabras fueron clasificadas siguiendo dicho esquema, para después obtener los núcleos de estas mismas y cambiar por símbolos cada letra del núcleo, de esta manera, se evitan problemas de repetición de palabras. Además se agregaron las palabras que llevan mala ortografía, ya que es común que este problema se presente en este tipo de comunicaciones de mensajería instantánea.

3.3 Tokenizador

Un tokenizador es un programa que separa las palabras, toma cada palabra y la compara con las contenidas en la base de datos, por medio de consultas se determina si la palabra pertenece al conjunto de verbos, sustantivos o adjetivos.

Después de ordenar las palabras, éstas son evaluadas con reglas tipo Prolog, y así analizar los mensajes para determinar la peligrosidad.

Con la clasificación de las palabras claves bajo el esquema de verbos, sustantivos y adjetivos, se clasifican en función al problema con el fin de tener un mayor control e identificar la amenaza que se detecte.

3.4 Programación del Conocimiento

Después de clasificar las palabras, éstas son enviadas al módulo de programación del conocimiento donde son evaluadas a partir de reglas tipo Prolog, ya que proporciona un medio fácil para el análisis de los mensajes y así determinar la peligrosidad de estos.

Con la clasificación de las palabras claves bajo el esquema de verbos, sustantivos y adjetivos se procedió a clasificarlas según el problema en el que se abordara esto con el fin de tener controlada e identificada la amenaza que se estará detectando.

A continuación se describe un ejemplo de clasificación para las amenazas de "solicitudes de falsos premios" y "solicitudes de datos de tarjetas bancarias". Cabe recordar que en los siguientes ejemplos, las palabras claves no han sido modificadas, esto es para tener un mejor entendimiento de las reglas por utilizar.

Solicitudes de falsos premios:

```
verbo_f(ganado).
adjetivo_f(gastos).
sustantivo_f(premio).
```

A continuación se presenta un ejemplo estructurado de reglas tipo Prolog para detectar la amenaza de solicitudes de falsos premios:

```
foto(X,Y):- verbo_f(X),sustantivo_f(Y).
foto(X,Y):- adjetivo_f(X), sustantivo_f(Y).
foto(X,Y,Z):- verbo_f(X), adjetivo_f(Y), sustantivo_f(Z).
foto(X,Y,Z):- verbo_f(X), adjetivo_f(Z), sustantivo_f(Y).
foto(X,Y,Z):- verbo_f(X), adjetivo_f(Y), sustantivo_f(Z).
```

3.5 Modelo de Agentes

La arquitectura ARSEC-AMS define los siguientes perfiles de agentes (ver figura 2):

- **Agente Coordinador:**

"Realiza una actividad especializada, orientada a la coordinación de transacciones que permiten aplicar niveles de seguridad en el sistema, y a la coordinación del trabajo de agentes locales y de red" [11].

- **Agente Local:**

  Tiene asignadas como principales actividades, la de vigilar los mensajes enviados y recibidos, revisar el comportamiento de los usuarios de forma local en el sistema. Estos mismos agentes harán el análisis de contenido del mensaje.

- **Agente de Red:**

  Tiene como función monitorear los mensajes enviados por un usuario y hacerlos llegar al sistema.

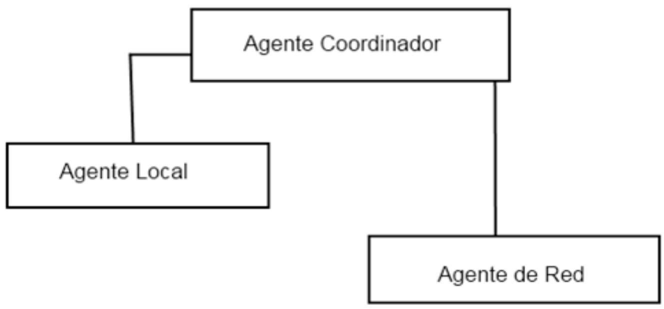


Figura 2: Jerarquía de Agentes

3.6 Manejador de Pizarra

"En base al análisis realizado se ha decidido implementar la arquitectura de pizarra especificada como uno de los módulos de ARSEC-AMS que ha sido denominada BLACKBOARD-ECRE, tomando en cuentas las siguientes especificaciones" [15]:

La arquitectura de pizarra sirve como medio de comunicación en un sistema de agentes a través de sus componentes:

- Pizarra
- Fuentes de conocimiento
- Mecanismo de Control

En este proyecto la pizarra se ha diseñado de tal manera que ésta llevara un registro de los diversos eventos que están ocurriendo los cuales serían:

- Tener un seguimiento de los mensajes que se consideren peligrosos
- Registro de los usuarios que envíen mensajes considerados peligrosos

Con la pizarra se pretende tener un registro general de los eventos y un control de la información que se va generando al usar el modelo. En la figura 3 se muestra el control de la pizarra.

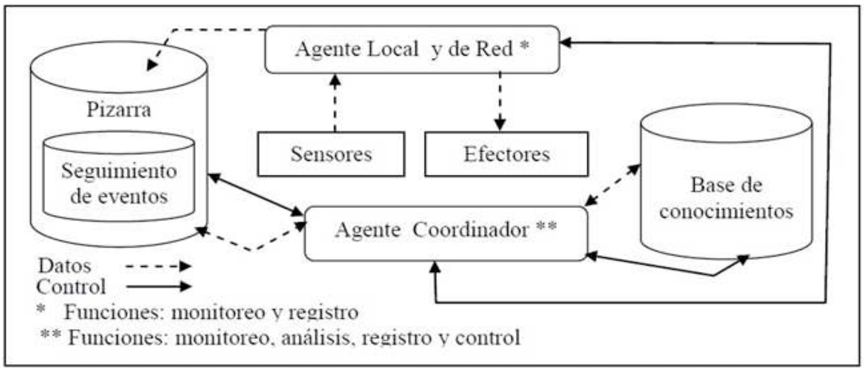


Figura 3: Módulo Blackboard-Ecre

4 Conclusiones

El correo electrónico ha sido un gran impacto para el ámbito social como el empresarial, por tal motivo es uno de los recursos más utilizados, en América Latina, para hacer fraudes y engaños a los usuarios por medio de mensajes de doble intención, donde el usuario no es capaz de percatarse fácilmente de la intención del mensaje, ya que son frases usadas comúnmente por el lenguaje coloquial.

La motivación de este trabajo nace del hecho de que aunque hay muchos tipos de aplicaciones para la detección de *bots* y *phishing*, estas no son un tanto por ciento seguras porque solo guardan registro de las actividades que se tiene conocimiento y no de patrones que tienen algunas aplicaciones dañinas a los sistemas o a los usuarios. El sistema se enfoca a las vulnerabilidades llamadas *bots* y *phishing*, ya que es donde se tiene un mayor impacto a los usuarios, al robar su identidad y generar fraudes sin que el usuario se percate de lo que pasa.

Por tal motivo en el sistema se analizan los correos electrónicos que el usuario recibe y por medio del análisis de contenido se puede obtener la verdadera intención mensaje. Esto es posible con la ayuda de la programación del conocimiento, apoyada por agentes que intercambian información, para así tener mayor seguridad con ciertos patrones de mensajes malintencionados y no confiar en solo actividades ocurridas con anterioridad.

Por último cabe mencionar que el sistema es una propuesta de solución para la seguridad en el correo electrónico implementado en Microsoft Outlook 2010, en el ambiente Windows-NT y que fácilmente puede extenderse a otras plataformas en base al modelo planteado.

Referencias

[1] Panda Security, 2012, *Phishing | Información | Evolución | Protección-Información sobre Seguridad-Panda,* 20 de Enero 2012, http://www.pandasecurity.com/spain/homeusers/security-info/cybercrime/phishing/

[2] ALEGSA.com.ar, 2011, *Definición de Bot - ¿Qué es un Bot?*, 20 de Enero 2012, http://www.alegsa.com.ar/Dic/bot.php

[3] Microsoft, 2012, *Microsoft Outlook 2010 - Office.com*, 20 de Enero 2012, http://office.microsoft.com/es-es/outlook/

[4] Mozilla, 2012, *Thunderbird - Software hecho para hacer el correo más fácil*, 20 de Enero 2012, http://www.mozilla.org/es-ES/thunderbird/

[5] Microsoft, 2012, *Windows Live Essentials: Otros programas - Introducción*, 20 de Enero 2012, http://explore.live.com/windows-live-essentials-other-programs?T1=t2

[6] Microsoft, 2012, *Hotmail*, 20 de Enero 2012, http://www.hotmail.com

[7] Google, 2012, *Gmail: correo electrónico de Google*, 20 de Enero 2012, http://mail.google.com/?hl=es

[8] Yahoo, 2012, Yahoo! Mail México - Correo electrónico gratis en español, 20 de Enero 2012 http://mx.mail.yahoo.com/

[9] ESET Latinoamérica, 2012, *Descargar Gratis ESET Smart Security - Protección Antispyware, Antimalware, Antitroyanos, Antispam | Hogar | ESET Latinoamérica*, 20 de Enero 2012, http://www.eset-la.com/hogar/smart-security

[10] Symantec, 2012, *Seguridad Online | PC Firewall | Online Backup | Norton America Latina*, 20 de Enero 2012, http://mx.norton.com/

[11] Avast be free, 2012, *Avast! Internet Security: antivirus y anti-spyware con cortafuegos*, 20 de Enero 2012, http://www.avast.com/es-ww/internet-security

[12] Panda Security, 2012, *Tecnología de Panda Security | Inteligencia Colectiva | Antivirus | Antivirus | Firewall | Backup | Cloud | Seguridad*, 20 de Enero 2012, http://www.pandasecurity.com/mexico/technologies/

[13] Kaspersky Lab, 2012, *Internet Security | Kaspersky Lab América Latina*, 20 de Enero 2012, http://latam.kaspersky.com/productos/productos-para-el-hogar/internet-security

[14] McAfee, 2012, *Email & Web Security | Productos McAfee*, 20 de Enero 2012, http://www.mcafee.com/mx/products/email-and-web-security/index.aspx

[15] Cota Ortíz, María de Guadalupe. Elementos básicos para diseño y desarrollo de sistemas de seguridad basados en agentes para equipos de cómputo con ambiente Windows-Tecnología NT, Tesis Doctoral, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Centro de Investigación en Tecnologías de Información y Sistemas. Pachuca de Soto, Hidalgo, México, Junio 2009.

[16] OpenSSH. 2004, *OpenSSH*, 20 de Enero 2012, `http://www.openssh.com/es/index.html`

[17] OpenSSL, 2009, *OpenSSL: The Open Source toolkit for SSL/TLS*, 20 de Enero 2012, `http://www.openssl.org`

[18] José Luis, Piñuel Raigada, *"Epistemología, metodología y técnicas de análisis de contenido"*. `http://web.jet.es/pinuel.raigada/A.Contenido.pdf`

[19] AngelFire, *Análisis de contenidos*, 20 de Enero 2012, `http://www.angelfire.com/tv2/tesis/Analisisdecontenido.htm`

[20] Federal TradeCommission, 2007, *Hablemos Claro Sobre Telemercadeo*, 20 de Enero 2012, `http://www.ftc.gov/bcp/edu/pubs/consumer/telemarketing/stel15.shtm`

[21] AulaFacil S.L., 2009, *Curso gratis de Seguridad Informática en Internet - Phishing*, 20 de Enero 2012 `http://www.aulafacil.com/seguridad_informatica/phishing.htm`

[22] Microsoft, 2012, *Estafas por correo electrónico y vínculos fraudulentos | Seguridad de Microsoft*, 20 de Enero 2012, `http://www.microsoft.com/es-es/security/online-privacy/phishing-symptoms.aspx`

[23] Gusanito, 2012, *Gusanito - Postales y juegos de Cowco, Wippo, Wero, Wamba, Wákala, Wibbit y Warache*, 20 de Enero 2012, `http://www.gusanito.com/esp/advertencia/`

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 57–66.

Nivel: Medio Superior y Superior

SAGE, SOFTWARE LIBRE PARA LA INVESTIGACIÓN Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

José Antonio Cárdenas Haro* **Gabriel M. Ramírez Arizaga†**
Luis R. Ramírez Avelar

Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California, Mexicali
e-mail: *antonio.cardenas@uabc.edu.mx
†gabriel.ramirez@uabc.edu.mx

Resumen

Se explican aquí las características fundamentales del software libre Sage. Se muestra a través de ejemplos, cómo ejecutar algunas funciones de esta herramienta considerando algunos problemas matemáticos. Sage es una gran herramienta para la investigación, estudio y aplicación de las matemáticas en general. Se busca además con este artículo difundir el uso de Sage y de todo el software libre como herramienta para la investigación y la enseñanza de las matemáticas en las instituciones de educación media superior y superior. Esto redunda en un gran beneficio tanto para los estudiantes y profesores, como para las instituciones y el país.

1 Introducción y ventajas con Sage

Sage es un programa y conjunto de librerías o bibliotecas que sirven como herramienta para hacer investigación en matemáticas o para la enseñanza de las mismas. Sage es software libre bajo la licencia GPL, es decir, es gratis con acceso a todo el código fuente y sin limitaciones para su instalación. La misión principal con Sage es convertirlo en una excelente o mejor alternativa a los programas comerciales como son Mathematica®, MATLAB®, Maple™ o Magma entre otros [5] [4] [1]. Sage está diseñado y enfocado para la investigación y enseñanza en geometría, cómputo numérico, teoría de números, álgebra, cálculo, criptografía, combinatoria y demás áreas relacionadas. Sage es relativamente nuevo y apenas se empieza a conocer en el mundo académico. Es muy sencillo convertir los programas de Mathematica® para correrlos en Sage ya que este último cuenta con una gran cantidad de funciones equivalentes. Hay varias ventajas a enumerar en Sage y no solo el costo que en estos días ya es mucho decir. Con Sage tenemos una mayor flexibilidad e integración para trabajar en la investigación y/o enseñanza de las matemáticas de una manera más interactiva.

1.1 Los inicios

La primer versión de Sage apareció el 2005, su creador y actual líder del proyecto es el doctor William Stein que es profesor de matemáticas en la universidad de Washington. Sage nació como software libre bajo la licencia GPL, lo cual significa que todo mundo tiene acceso total a su código fuente y que no hay que pagar por usarlo. Actualmente Sage cuenta con cientos de desarrolladores alrededor del mundo y hasta con una fundación para continuar financiando el proyecto. Desde antes de Sage ya existían programas en software libre para matemáticas como SciLab, RLab o GNU/Octave entre otros. Sin embargo, ninguno tiene la visión o cumple con las expectativas de Sage. Por ejemplo, GNU/Octave es solo un clon de

MATLAB® y sus objetivos se limitan a solo eso. Una copia no podrá nunca llegar a ser igual que el original. La visión y misión de Sage van mucho mas allá, Sage no es clon de ningún otro, es un programa original que busca ser una alternativa mejor que cualquier programa de licencia comercial para matemáticas.

1.2 Sage y Python

En Sage se usa Python como lenguaje de programación base, lo cual es otra gran ventaja para los investigadores y estudiantes. Python es un lenguaje estándar de programación y también es software libre. Es muy usado en la ciencia por su gran soporte y por ser fácilmente integrable con otros lenguajes y herramientas; es un lenguaje de alto nivel, orientado a objetos, de propósito general y fácil de aprender que aumenta la productividad en sus usuarios. No por nada es que Python es usado en la NASA y en muchas otras instituciones públicas o privadas que se dedican a la ciencia. En el software comercial para matemáticas cada fabricante usa su propio lenguaje particular para la interfaz de usuario, lo cual es una desventaja ya que el esfuerzo y tiempo empleado para aprender dicho lenguaje exclusivo, solo sirve para trabajar en dicho software comercial. Python es además un lenguaje más maduro, más desarrollado y más flexible que cualquiera de esos lenguajes exclusivos.

1.3 Desventajas con el software comercial para matemáticas

Unas de las mayores desventajas en el software comercial para matemáticas, además de los precios elevados por licencia de uso, es que son como una caja negra ya que los usuarios no tienen acceso al código fuente y no se sabe exactamente que algoritmo es el que se está utilizando en las operaciones y cálculos. Es decir, no se le puede hacer un escrutinio al código para saber como el programa llegó a determinado resultado. Para los investigadores, el no poder revisar el código o algoritmo utilizado en el programa de computadora es como publicar un teorema y no hacer su demostración o validación. Con Sage tenemos una transparencia total en las operaciones, el código fuente está a la vista de todo mundo. Además de ser libre y gratis, Sage también es multiplataforma, se puede instalar y correr en Microsoft Windows, en Macintosh, en Linux o en otros ∗NIX.

1.4 Sage en el supercómputo

El cómputo de alto rendimiento es actualmente una gran herramienta para hacer investigación y desarrollar tecnología en prácticamente todas las áreas de la ciencia. Esto a través de la minería de datos, cálculo intensivo o simulaciones. Las supercomputadoras son máquinas que cuentan con cientos o miles de procesadores interconectados entre sí y trabajando coordinadamente. Sage cuenta con un módulo llamado *dsage* donde la letra *d* viene de "distribuido". Este módulo permite a Sage dividir el trabajo en partes que pueden ser computadas separadamente para después ensamblar esos resultados parciales y obtener así la solución. El beneficio es obviamente en tiempo. Hay casos donde la cantidad de datos y operaciones son tal que llevarlas a cabo en un solo procesador tomaría varias horas, días, meses o hasta años terminarlas. Un ejemplo sencillo de esto es el buscar o descubrir nuevos números primos.

1.5 Sage y LaTeX

Sage tiene también integrado LaTeX y BibTeX para el manejo de fórmulas y referencias bibliográficas. Cuenta además con una interfaz gráfica muy amigable conocida como *"Notebook"* que se beneficia de esto. Mas datos sobre *Notebook* en la sección 2.3.

1.6 Documentación y la comunidad

Sage cuenta con muy buena documentación que se puede descargar gratis también desde su página oficial [8] [7]. Gracias a la gran comunidad de usuarios que crece día a día, es fácil encontrar ayuda en los foros para resolver cualquier duda en su manejo. Similarmente, cualquier falla se resuelve rápidamente ya que todo mundo tiene acceso al código fuente.

2 Sage en la enseñanza de las matemáticas

El uso de las herramientas adecuadas para coadyuvar en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas es pieza clave para facilitar este proceso. Actualmente cada vez mas gente tiene acceso a recursos de cómputo e Internet lo cual trae grandes beneficios para maestros y alumnos para que todo sea más interactivo y las matemáticas más fáciles de enseñar y también de asimilar. A continuación agregamos unos ejemplos ilustrativos del uso de Sage.

2.1 Sage interactivo

Con Sage podemos de manera interactiva resolver ecuaciones, al llamar al programa por terminal, este nos da acceso para entrada de comandos. Aquí algunos ejemplos bajo la versión 3.1.4:

```
sage: 3^2
9
sage: integral(sin(x),x)
-cos(x)
sage: integral(sin(x), x, 0, pi/2)
1
```

Lo que Sage nos resolvió fueron las siguientes ecuaciones:

$$3^2 = 9$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 1$$

Procedamos ahora a resolver una función periódica dadas las siguientes características:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \texttt{si} \quad -\pi \leqslant x < 0 \\ 1 & \texttt{si} \quad 0 \leqslant x < \pi \end{cases} \qquad \texttt{además} \;\; f(x) = f(2\pi + x)$$

Esto es obviamente una señal periódica de onda cuadrada. Para expresar dicha señal en forma de ecuación requerimos determinar los coeficientes de las series de Fourier [2] [6] [3] de acuerdo a su definición que agregamos aquí con fines prácticos.

Definición 1 *Sea $f(x)$ una sección de una función periódica en el rango $[-\pi,\pi]$. Entonces, las series de Fourier de $f(x)$ están dadas por la serie:*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Donde los coeficientes a_n y b_n en la serie están dados por:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

En Sage procedemos de la siguiente manera:

```
sage: f1 = lambda x:0
sage: f2 = lambda x:1
sage: f = Piecewise([[(-pi,0),f1],[(0,pi),f2]])
sage: x = var("x")
sage: n = var("n")
sage: assume(n, 'integer')
sage: assume(n > 0)
sage: f.fourier_series_value(0,pi)
1/2
sage: f.fourier_series_cosine_coefficient(n,pi)
0
sage: f.fourier_series_sine_coefficient(n,pi)
(1 - (-1)^n)/(pi*n)
sage: f.fourier_series_partial_sum(9,pi)
2*sin(7*x)/(7*pi)+2*sin(5*x)/(5*pi)+2*sin(3*x)/(3*pi)+2*sin(x)/pi+1/2
```

Lo que Sage nos dice es que los coeficientes de las series de Fourier son los siguientes:

$$a_0 = 1/2 \;\;, \texttt{ y para } \; n \geqslant 1 \;\;, \quad a_n = 0 \;\;, \quad b_n = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} 0 \;\; \texttt{si} \;\; n \;\; \texttt{es par} \\ \frac{2}{n\pi} \;\; \texttt{si} \;\; n \;\; \texttt{es impar} \end{cases}$$

También el último comando nos da la suma parcial de los primeros nueve elementos, aparecen solo cinco ya que omite los ceros de la función de cosenos. La serie de Fourier de la señal periódica de onda cuadrada es entonces:

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cdots \;\; + b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \cdots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \frac{2}{7\pi}\sin 7x + \cdots \end{aligned}$$

Obviamente en Sage también podemos dibujar esta señal usando el siguiente comando:

```
sage: show(f.plot_fourier_series_partial_sum(50,pi,-10,10))
```

Lo que le estamos diciendo a Sage con el comando anterior es que queremos la gráfica evaluada en los primeros cincuenta términos de la serie y la muestra en el rango de -10 a 10 en el eje de las equis. El segundo valor es para indicar cual es la mitad del período de la señal que en este caso es π. La gráfica que Sage nos devuelve se observa en la figura 1.

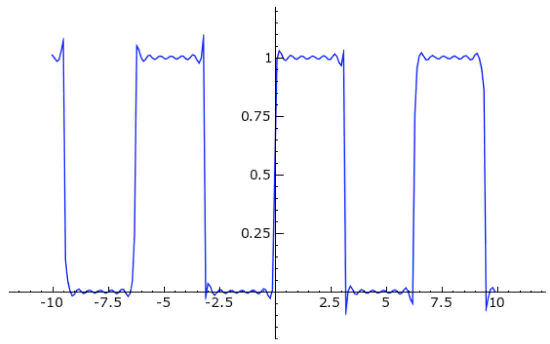


Figura 1: Onda cuadrada periódica resultado de la evaluación de los primeros 50 términos de la serie de Fourier.

Podemos usar un filtro también para suavizar la salida de la suma parcial de la serie. En Sage hay varios filtros para las series de Fourier, vamos a usar el filtro de Hann que es un filtro pasa-bajas utilizado para remover ruido de altas frecuencias. En Sage damos el comando:

```
sage: show(f.plot_fourier_series_partial_sum_hann(50,pi,-10,10))
```

La gráfica que obtenemos se muestra en la figura 2 y como puede apreciarse, la salida está suavizada. Con Sage se puede trabajar también en la solución de ecuaciones diferenciales, transformadas de Laplace, transformadas de Fourier, transformada Z, transformadas y polinomios de Legendre, funciones y polinomios de Chebyshev, series de potencias, matrices, números complejos, probabilidad y estadística, combinatoria, teoría de grafos, criptografía, etc., etc.

2.2 Gráficas 2D y 3D en Sage

Con Sage podemos dibujar o trazar funciones como ya vimos en el ejemplo de las series de Fourier. Podemos generar gráficas polares como se muestra con el siguiente comando. Sage nos dibuja la mariposa que se observa en la figura 3.

```
sage: polar_plot(exp(sin(x))-2*cos(4*x)+(sin(x/12)^5), 0, 24*pi, rgbcolor='orange')
```

Procedamos ahora con el trazado en 3D de la ecuación $(x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ donde la gráfica de salida se aprecia en la figura 4 desde diferentes ángulos. La figura puede rotarse usando

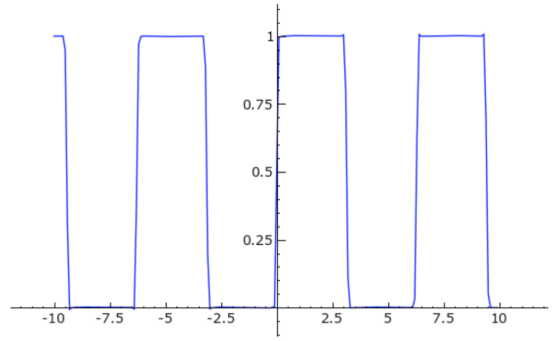


Figura 2: Onda cuadrada periódica resultado de la evaluación de los primeros 50 términos de la serie de Fourier y pasada a través del filtro Hann.

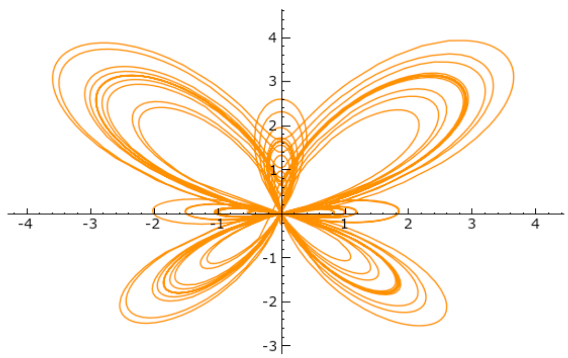


Figura 3: Gráfica polar de la ecuación $e^{\sin x} - 2\cos 4x + \sin^5 \frac{x}{12}$ evaluada de 0 a 24π.

el ratón de la computadora, nótese como tiene efectos de sombra. Los comandos usados son los siguientes:

```
sage: x, y = var('x,y')
sage: plot3d((x^2 + 3*y^2)*exp(1-x^2-y^2), (x,-2,2), (y,-3,3), adaptive=True, \
    color=['red','yellow','green'], max_depth=10)
```

Sage nos permite también hacer proyecciones paramétricas en 3D de vectores de ecuaciones. En el siguiente ejemplo usaremos las ecuaciones $f(x) = (2 + \frac{4}{5}\cos u)\cos v$, $f(y) = (2 + \frac{4}{5}\cos u)\sin v$ y $f(z) = \frac{4}{5}\sin u + \frac{v}{2}$ que nos producen un serpentín o tubo en espiral. A continuación se señalan la serie de comandos que utilizamos en Sage para esto y l a imagen 3D de salida se muestra en la figura 5. La imagen se puede rotar con el ratón de la computadora y nótese como con el comando "opacity=.5" la hicimos semitransparente.

```
sage: u, v = var('u,v')
sage: fx = (2+0.8*cos(u))*cos(v)
sage: fy = (2+0.8*cos(u))*sin(v)
sage: fz = 0.8*sin(u)+v/2
```

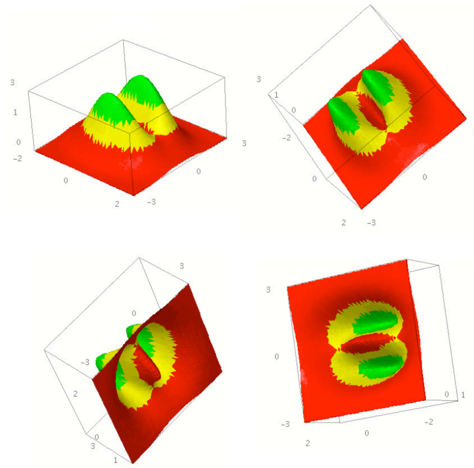


Figura 4: Gráfica en 3D de la ecuación $(x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$

```
sage: parametric_plot3d([fx,fy,fz], (u,0,2*pi), (v,-3*pi,3* pi), frame=False, opacity=.5, \
      mesh=True, color="orange")
```

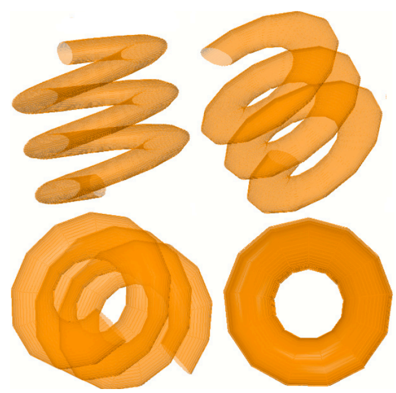


Figura 5: Imagen paramétrica en 3D generada por el vector de ecuaciones
$[(2+\frac{4}{5}\cos u)\cos v\ ,\ (2+\frac{4}{5}\cos u)\sin v\ ,\ \frac{4}{5}\sin u+\frac{v}{2}]$

2.3 La interfaz *Notebook* en Sage

Una de las más grandes ventajas de Sage respecto del software comercial, además del precio, es su interfaz gráfica para Internet que se puede acceder desde cualquier navegador. Esta característica es la que le da una gran versatilidad y es de gran ayuda en la enseñanza de las matemáticas ya que Sage puede ser instalado en un servidor de Internet y los usuarios o alumnos acceder el recurso desde cualquier parte. Esta cualidad, a la fecha, no la tiene ningún software comercial en la competencia. Un ejemplo de uso de *Notebook* se muestra en la figura 6, y este se invoca desde Sage con el comando: **sage: notebook()**

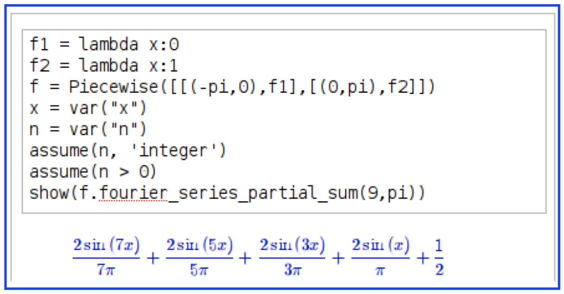


Figura 6: Cálculo de la serie de Fourier del ejemplo de la sección 2.1 usando el *Notebook* de Sage.
Nótese como la lectura del resultado es más amigable.

Esto abre automáticamente el navegador de Internet en la dirección http://localhost:8000 para trabajar localmente en Sage. También se puede configurar el *Notebook* como servidor de Internet para trabajar en red o remotamente, uno o mas usuarios.

Otro forma muy didáctica en como usar Sage de manera interactiva para la enseñanza de las matemáticas, en este caso para ilustrar la teoría del caos, se muestra en el programa para trazar el modelo de Lorenz (figura 8) en el *Notebook*. Como resultado obtenemos el applet que se muestra en la figura 7.

3 Como obtener e instalar Sage

El software de Sage puede descargarse totalmente gratis a través de su página oficial que se encuentra en la dirección http://sagemath.org en donde se redirecciona a diferentes sitios espejo. Sage está diseñado para correr de forma nativa en sistemas operativos Linux/Unix, como es el caso de las distribuciones Ubuntu, Debian, CentOS, entre otras de Linux; y Mac OS X, Solaris, OpenSolaris, FreeBSD, entre otras de Unix. Normalmente se descarga el código fuente para compilarlo, aunque también existen paquetes ya precompilados (binarios) para ciertas distribuciones de Linux o versiones específicas de Mac OS X o de Solaris. En el caso de los diferentes sistemas operativos de Microsoft Windows, Sage tiene que correrse de manera virtualizada para lo cual se recomienda instalar la herramienta VirtualBox (también gratis) y dentro de esta instalar Linux/Unix y después Sage. En el mismo sitio oficial se encuentra una guía de instalación detallada según sea el caso.

4 Conclusiones

El futuro de Sage es muy prometedor, en poco tiempo ha mejorado bastante y ha captado la atención de mucha gente, organizaciones e instituciones alrededor del mundo. Esto se debe no solo a que sea gratis sino a que es un software muy bueno e innovativo y de código abierto, de gran flexibilidad y programable mediante un lenguaje estándar universal. Esto entre otras cosas es lo que lo hace muy atractivo para los investigadores. La interfaz gráfica para acceso por Internet es otro de los atributos de Sage que ninguno de los programas comerciales para matemáticas poseen. Esto capta la atención de los profesores de matemáticas e ingeniería

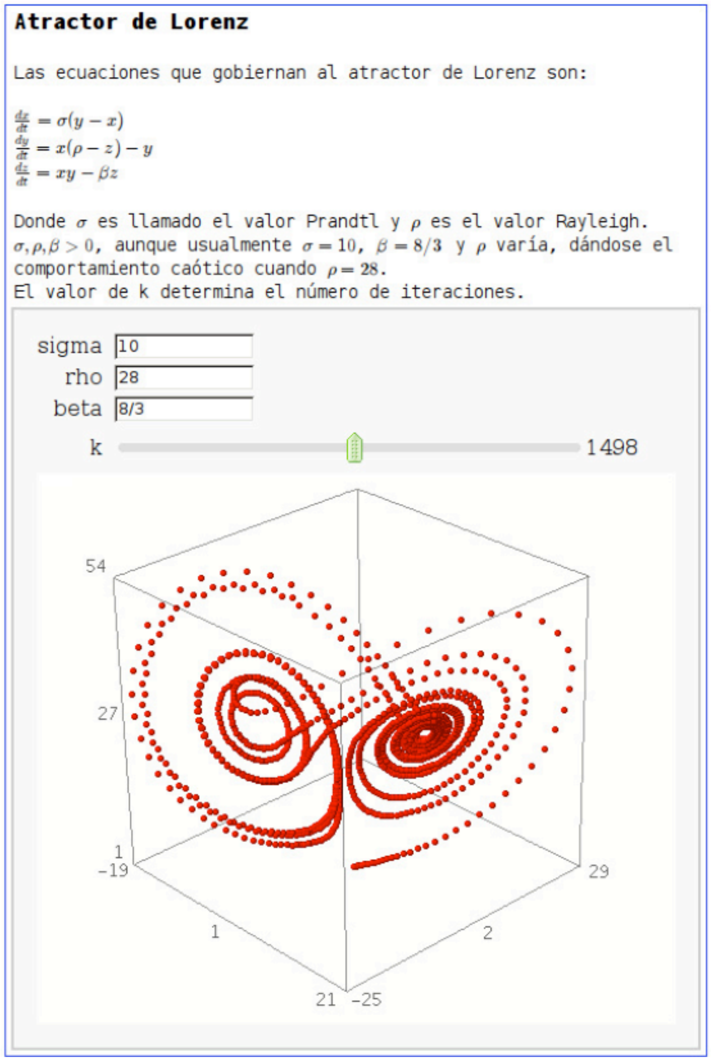


Figura 7: Modelo (o “Atractor”) de Lorenz interactivo en 3D con cubo rotatorio.

para usarlo como herramienta de apoyo para facilitar la enseñanza y la asimilación en las clases. De continuar esta tendencia, en poco tiempo Sage podría desplazar al software comercial para matemáticas comúnmente usado en la educación, en los laboratorios y centros de investigación en general. Precisamente el proyecto Sage lo inició un investigador inconforme con las limitaciones impuestas por el software comercial y en poco tiempo muchos otros investigadores se unieron a la causa y lograron que el proyecto despegara. Actualmente existe ya la fundación Sage y reciben apoyo económico de diversas instituciones y gente alrededor del mundo para que se siga trabajando en el proyecto y que Sage sea mejor cada día en beneficio de todos.

Referencias

[1] Bosma, Wieb and Cannon, John. (2006). *Discovering mathematics with Magma : re-*

Figura 8: Programa usado en el *Notebook* de Sage para dibujar el modelo (también conocido como "atractor") de Lorenz.

ducing the abstract to the concrete. Berlin, Germany; New York, USA. Springer.

[2] Brown, James Ward y Churchill, Ruel V. (2008). *Fourier series and boundary value problems. 7th Ed.* Boston. McGraw-Hill Higher Education.

[3] Dyke, P. P. G. (2001). *An introduction to Laplace transforms and Fourier series.* London, UK; New York, USA. Springer.

[4] Gander, Walter and Hřebíček, Jiří. (1995). *Solving problems in scientific computing using Maple and MATLAB.* Berlin, Germany; New York, USA. Springer.

[5] McMahon, David and Topa, Daniel M. (2006). *A beginners guide to Mathematica.* Boca Raton, Fla. Chapman & Hall/CRC.

[6] Pinkus, Allan and Zafrany, Samy. (1997). *Fourier series and integral transforms.* New York, USA. Cambridge University Press.

[7] Stein, William. (2010). *Sage Reference Manual.* `http://www.sagemath.org/pdf/reference.pdf`

[8] The Sage Group. (2010). *The Sage Tutorial.* `http://www.sagemath.org/pdf/SageTutorial.pdf`

Memorias de la XXII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 67–72.

DISEÑO DE REACTIVOS EN LÍNEA PARA LA FUNCIÓN CUADRÁTICA USANDO MAPLE T. A.

Elda Gabriela Martínez Noriega* **Martha Cristina Villalba Gutiérrez†**
Maricela Armenta Castro‡

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: *eldamtz14@hotmail.com
†mcris@gauss.mat.uson.mx
‡maricela@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Se presenta el siguiente avance de tesis de Maestría, el cual consiste en el diseño de reactivos en línea sobre la función cuadrática que se estudia en el nivel superior del área económico-administrativa. Se utilizan las herramientas del sistema de evaluación y entrenamiento en línea "Maple, T.A". Se consideran para la estructuración de la propuesta elementos teóricos de Raymond Duval, el cual se basa en el uso de los registros de representación semiótica algebraico, gráfico, tabular y lenguaje natural. Se reportan los antecedentes, justificación, el contexto tecnológico, objetivo, la estructura para el diseño que se construyó con base en las consideraciones teóricas, un ejemplo y conclusiones.

1 Introducción

La propuesta que se aborda en el presente reporte se enmarca en el proyecto denominado "Tareas y Exámenes en línea para Matemáticas II usando el Maple T.A." el cual tiene como antecedentes los proyectos: "Seguimiento de la impartición de los cursos de Álgebra bajo el esquema del Nuevo Modelo Curricular de los programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora" y "Diseño e implementación de tareas y exámenes estandarizados en línea para el curso de Álgebra de los programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora".

El proyecto mencionado inicialmente se refiere al curso de Matemáticas II que se ofrece a estudiantes de la División de Ciencias Económicas y Administrativas de la Universidad de Sonora, cuyos temas se refieren al Cálculo Diferencial. Particularmente, en el tema de funciones se estudia la función cuadrática como modelo matemático de situaciones de interés en el área, por ejemplo, funciones que modelan ingreso, demanda, oferta, costo, utilidad, entre otros. En esta propuesta se muestran avances en el diseño de reactivos sobre el modelo matemático que representa esas situaciones de variación cuadrática.

El sistema en el que han sido diseñados los reactivos es, como se ha mencionado es el Maple T.A., el cual cuenta con herramientas matemáticas propias software matemático Maple, asimismo tiene una diversidad de formatos para generar reactivos, por mencionar algunos: de complementación, selección múltiple, opción múltiple, de relación, preguntas abiertas, fórmulas matemáticas, numéricas, falso y verdadero. En todos ellos es posible generar una amplia variedad de opciones para cada reactivo por contar con la posibilidad de programar dinámicamente cada uno de ellos. Con esta potencialidad se pueden construir tareas, exámenes, actividades de repaso y estudio con una estructura común, pero con diferentes presentaciones para cada usuario. Adicionalmente el sistema permite que los reactivos puedan ser automáticamente evaluados, inmediatamente después de haberse realizado una práctica o examen.

Algunas consideraciones tomadas del en cuenta en la construcción de los diseños son las siguientes:

✓ Del modelo curricular de la Universidad de Sonora,

- La incorporación de algún recurso tecnológico como apoyo en las propuestas didácticas, sobre todo aquellas que requieren de cálculos numéricos, análisis gráficos, estadísticos, etc.
- Importancia y necesidad de evaluación significativa por parte de los docentes, aunado con la elaboración de tareas que contribuyan en la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes.

✓ De algunos reportes sobre errores y dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje del concepto de *función* y que alertan sobre:

- Las consecuencias negativas de un proceso de enseñanza repetitivo, que en el caso de las funciones consiste en partir siempre de la expresión algebraica para el aprendizaje de un objeto matemático.
- Que los estudiantes interpretan las funciones solamente como funciones continuas.
- La falta de coordinación de los diferentes registros de representación para la *función.*

Atendiendo a lo expuesto hasta este momento, se propone como objetivo el siguiente:

> *Diseñar e implementar reactivos dinámicos en línea para su disponibilidad en el sistema Maple T.A. sobre la función cuadrática que se propone para su estudio en el curso de Matemáticas II de la División de Ciencias Económicas y Administrativas.*

El avance de tesis que aquí se reporta, considera los elementos teóricos de Raymond Duval sobre el uso de los registros de representación semiótica para la aprehensión conceptual de un objeto matemático.

Duval (1998) define a las representaciones semióticas como producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, estas pueden ser: lenguaje natural, figuras geométricas o gráficas, algebraicas, tabular. El autor lo señala en los siguientes términos: "*Para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades ligadas a la semiosis:*

- *La formación de una representación identificable: la enunciación de una frase, composición de un texto, escritura de una fórmula,*
- *El tratamiento: es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formado. El tratamiento es una transformación interna a un registro, es importante mencionar que existen reglas de tratamiento propias de cada registro, como por ejemplo las distintas formas de la ecuación de la recta.*
- *La conversión: es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial.* "

Uno de los principales planteamientos en dicho enfoque teórico enfatiza el uso de los diferentes registros de representación semiótica, ya que según el mismo autor, el tratamiento en cada registro y la conversión entre ellos, permite aprehender el objeto matemático de estudio y así llegar a su conceptualización.

También afirma que no puede existir noesis sin semiosis, considerando a la semiosis como el producto o aprehensión de una representación semiótica y la noesis a la aprehensión conceptual del objeto matemático.

Además, Duval (1998) muestra que algunas de las dificultades reflejadas en diversas investigaciones se deben a la imposibilidad de los estudiantes para leer información proveniente de algún registro específico de representación, por ejemplo, el gráfico. Duval menciona que dichas dificultades se originan por el desconocimiento de las reglas de correspondencia semiótica entre los diferentes registros de representación, es decir, por desconocer la existencia de una asociación entre un registro y otro.

2 Descripción de la propuesta

Para poder realizar el diseño de dichos reactivos, primeramente se partió del análisis de las variables visuales propias de la función cuadrática en su expresión gráfica como lo son: simetría, vértice, concavidad, amplitud o apertura, posición de la parábola respecto al eje x, traslación vertical, traslación horizontal, intersección de la parábola con el eje y, intersecciones de la parábola con el eje x (raíces), dominio, rango, entre otras.

Esto sirve para observar globalmente el gráfico cuando variamos cada uno de los parámetros de la función en su expresión algebraica, para ello tomamos en consideración cada uno de los siguientes casos:

I. $y = x^2$ $(a = 1, b = c = 0)$

II. $y = -x^2$ $(a = -1, b = c = 0)$

III. $y = x^2 + c$ (Tres casos: $c > 0, c = 0, c < 0$).

IV. $y = -x^2 + c$ (También tres casos: $c > 0, c = 0, c < 0$).

V. $y = ax^2$ (Tres casos: $|a| > 1, |a| = 1, 0 < |a| < 1$)

VI. $y = ax^2 + c$

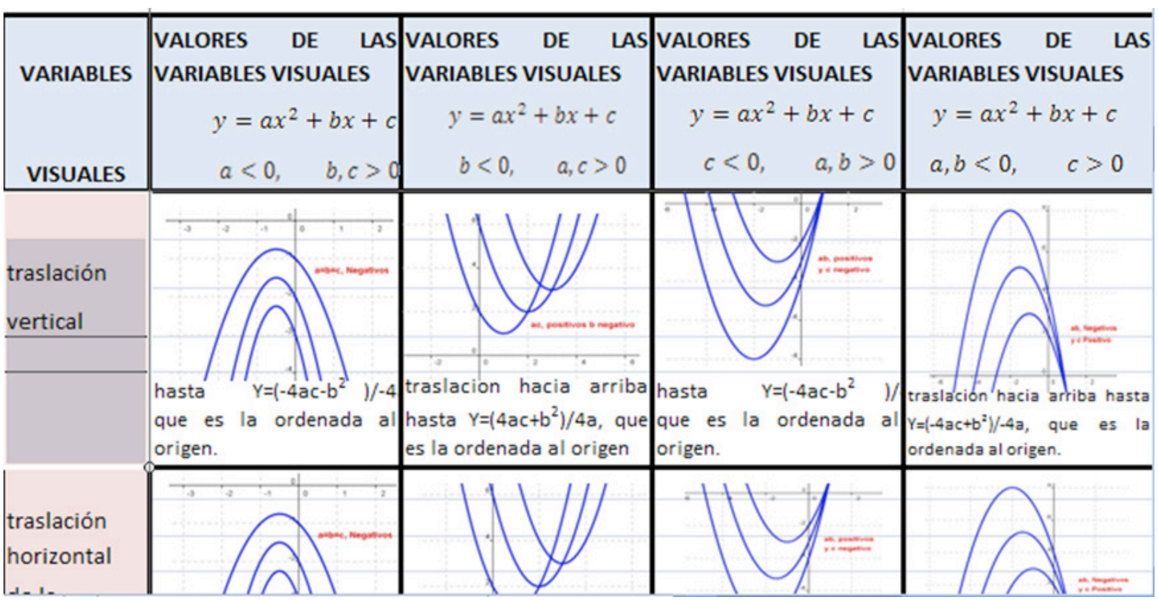
VII. $y = x^2 + bx$ (Tres casos: $b > 0, b = 0, b < 0$)

VIII. $y = -x^2 + bx$ (También tres casos: $b > 0, b = 0, b < 0$)

IX. $y = ax^2 + bx$ (ocho casos : $ab > 0, ab < 0, a < 0$ y $b > 0, a > 0$ y $b < 0, a = \pm 1$ y $b > 0, a = \pm 1$ y $b < 0$)

X. $y = ax^2 + bx + c$

Con base en estos casos se construyó una extensa tabla en la que se desglosan las distintas variables visuales y que sirvió como guía para el diseño de los reactivos. Una parte de ella se muestra a continuación en la Figura 1 con el fin de mostrar el formato.



VARIABLES VISUALES	VALORES DE LAS VARIABLES VISUALES $y = ax^2 + bx + c$ $a < 0,\ b, c > 0$	VALORES DE LAS VARIABLES VISUALES $y = ax^2 + bx + c$ $b < 0,\ a, c > 0$	VALORES DE LAS VARIABLES VISUALES $y = ax^2 + bx + c$ $c < 0,\ a, b > 0$	VALORES DE LAS VARIABLES VISUALES $y = ax^2 + bx + c$ $a, b < 0,\ c > 0$
traslación vertical	hasta Y=(-4ac-b^2)/-4 que es la ordenada al origen.	traslacion hacia arriba hasta Y=(4ac+b^2)/4a, que es la ordenada al origen	hasta Y=(-4ac-b^2)/ que es la ordenada al origen.	traslación hacia arriba hasta Y=(-4ac+b^2)/-4a, que es la ordenada al origen.
traslación horizontal de la...				

Figura 1

Se planteó que para el diseño de los reactivos de dicha función se debe de considerar cada una de estas variables visuales con los valores de los parámetros determinados anteriormente, pero tomando en cuenta las bondades del Sistema Maple, T.A., con respecto a la aleatoriedad de los parámetros e implementación de gráficas entre otros, se redujo el número de reactivos a diseñar. Con la intención de mostrar la lista de reactivos, en los que se realiza la variación de los parámetros de la función y el tipo de reactivo que se contempla para cada variable visual, se desarrollo otra tabla. De la cual se muestra en la siguiente Figura 2 un pequeño extracto:

REACTIVOS DE CONCAVIDAD	FUNCIÓN	RANGOS DE LOS PARÁMETROS
PROPOSICIÓN SOBRE CONCAVIDAD: FALSA O VERDADERA	$y = ax^2 + bx + c, \quad b = c = 0$	
PROPOSICIÓN FALSA	a positivo, entero o fraccionario	$1 < a < 5, \quad b = c = 0$
PROPOSICIÓN VERDADERA	a negativo, entero o fraccionario	$-5 < a < -1, \quad b = c = 0$
SELECCIONAR TIPO DE CONCAVIDAD	$y = ax^2 + bx + c,$ b y c positivo o negativo	
SELECCIONAR CONCAVIDAD HACIA ARRIBA	a positivo, entero o fraccionario	$1 < a < 4, \quad -3 < b < 3, -3 < c < 3$
	a negativo, entero o fraccionario	$-4 < a < -1, \quad -3 < b < 3, -3 < c < 3$
CARACTERÍSTICA COMÚN	$y = ax^2 + bx + c,$ b y c positivo o negativo	
CONCAVIDAD HACIA ARRIBA	a positivo, entero o fraccionario	$1 < a < 4, \quad -3 < b < 3, -3 < c < 3$
CONCAVIDAD HACIA ABAJO	a negativo, entero o fraccionario	$-4 < a < -1, \quad -3 < b < 3, -3 < c < 3$
SELECCIONAR GRÁFICAS SEGÚN SU CONCAVIDAD	$y = ax^2 + bx + c,$ $b = c = 0$ o positivo o negativo	
SELECCIONAR GRÁFICA CONCAVA HACIA ABAJO	a positivo, a, b, c enteros o fraccionarios	$1 < a < 5, \quad -4 < b < 4, -3 < c < 3$
SELECCIONAR GRÁFICA CONCAVA HACIA ARRIBA	a negativo, a, b, c enteros o fraccionarios	$-5 < a < -1, \quad -4 < b < 4, -3 < c < 3$

Figura 2

En el trabajo de tesis se hace una minuciosa descripción de los reactivos, señalando su correspondencia con los elementos del marco teórico que respalda su diseño. En este resumen se muestra a continuación, en la Figura 3, una imagen de la organización de los reactivos de *concavidad* en el sistema Maple T.A.

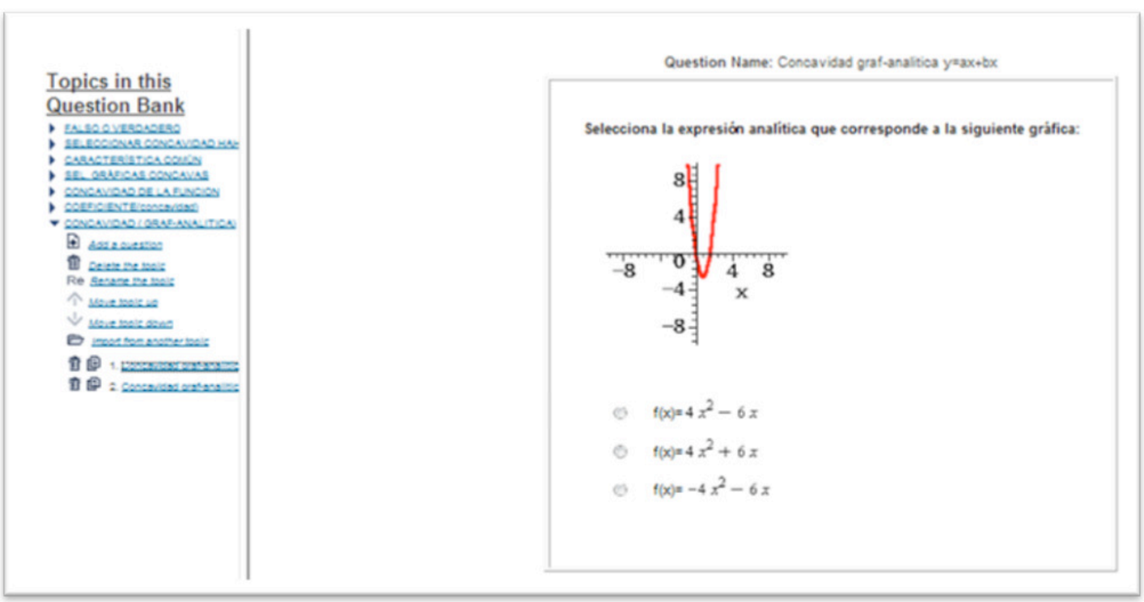


Figura 3

3 Conclusiones

El presente trabajo es un avance sustancial de proyecto de tesis, del cual aún no se tienen las conclusiones correspondientes, sin embargo, se puede adelantar que ya se dispone de algunos bancos de reactivos que se estarán trabajando a manera de pilotaje durante el inicio del semestre 2012-1, y del cual se espera obtener resultados para saber si es necesario realizar correcciones a los reactivos elaborados, enriquecerlos, o bien, elaborar otros reactivos que complementen aspectos de interés en el estudio del objeto matemático en cuestión.

Referencias

[1] Budnick, F. S. (2007). *Matemática aplicada para administración, economía y ciencias sociales.* México, D.F.: Mc Graw Hill.

[2] Córdova Gómez, F. J. (2004). "*La evaluación de los estudiantes : una discusión abierta*". Revista Iberoamericana de Educación , Vol. 9.

[3] Duval. (1998). *Registro en representacion semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*, investigación en matemática educativa II,Grupo Editorial iberoamérica.

[4] Hitt, Fernando(Enero 2003).*Dificultades del aprendizaje del cálculo.Departamento de Matemática Educativa del cinvestav-IPN*

[5] Jagdish C., A., & Lander, R. W. (2002). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía.* México: Pearson Educación.

[6] Robin, A. J., *Matemáticas aplicadas para la administración y economía.* Pretice Hall Iberoamericana.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 73–79.

"ESTADÍSTICA PARA LLEVAR" MEDIANTE LA ELABORACIÓN DE OBJETOS DE ENSEÑANZA/APRENDIZAJE DE ESTADÍSTICA PARA DISPOSITIVOS MÓVILES

Francisco J. Tapia Moreno* **Héctor A. Villa Martínez†**
Claudio A. López Miranda‡

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: *ftapia@gauss.mat.uson.mx
†hvilla@gauss.mat.uson.mx
‡claudio@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En este artículo se mencionan los avances generados en el desarrollo del proyecto "Elaboración de herramientas de aprendizaje de estadística para dispositivos móviles". Hasta el momento, se han diseñando seis MIDlets que los alumnos pueden incorporar a sus teléfonos celulares y complementar el aprendizaje de la estadística descriptiva. El primer MIDlet construye un histograma o un diagrama de barras. El segundo calcula las medidas de centralización. El tercero calcula las medidas de dispersión y ecuación de regresión lineal. El cuarto calcula las medidas de forma de Pearson y Fisher. El quinto y el sexto MIDlets permiten enviar y recibir archivos desde y a un teléfono celular equipado con Java. Como trabajo futuro se probará la pertinencia del Módulo I y realizaremos estudios acerca de la eficacia de los dispositivos móviles en relación a la conectividad dentro del campus universitario.

1 Introducción

En la Universidad de Sonora, los estudiantes de las licenciaturas en Matemáticas, Física y Ciencias de la Computación toman un curso obligatorio de introducción a la estadística. El objetivo del curso es enseñar a los estudiantes herramientas estadísticas básicas y familiarizarlos con el análisis estadístico usando software estadístico. Estas herramientas corren solamente en computadoras de escritorio o en laptops, lo que implica que los alumnos deben estar en el laboratorio de cómputo o cargando sus laptops.

Por otra parte, tomando en cuenta que en 2009 había casi 80 millones de subscriptores celulares en México [1], que una gran parte de estos teléfonos está en manos de los estudiantes y que mundialmente alrededor del 50% de los teléfonos celulares están habilitados para Java [2], estamos interesados en saber si podemos utilizar todo el potencial de la tecnología móvil y usarla para resolver problemas estadísticos, ayudando a los alumnos a aprender estadística a cualquier hora y en cualquier lugar y liberándolos de tener que cargar una laptop o de tener que estar en un centro de cómputo. De esta manera, tratamos de aprovechar el papel que juega la comunicación y la interacción en el proceso de aprendizaje y que puede llegan a convertirse en un factor de éxito. Es dentro de este contexto, donde el aprendizaje electrónico (e-learning) y el aprendizaje móvil (m-learning), pueden contribuir en gran medida a mejorar la calidad en la educación, porque eso es lo que proporcionan una buena comunicación y los ambientes de interacción.

En febrero de 2010 el proyecto "Elaboración de herramientas de aprendizaje de estadística para dispositivos móviles" fue propuesto a la División de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Sonora con el objetivo de producir herramientas para la enseñanza/aprendizaje de estadística en teléfonos celulares utilizando Java ME (edición micro). Java ME fue seleccionado porque casi todos los celulares de rango medio y alto están habilitados para Java, lo que significa que los programas escritos en Java ME, conocidos como "MIDlets", son portables entre los distintos sistemas operativos móviles.

En este artículo se presentan los principales avances que se han generado en el desarrollo del proyecto antes nombrado, después de ocho meses de su aceptación por la instancia antes citada y que han dejado grandes logros satisfactorios, diseñando seis MIDlets que los alumnos pueden incorporar a sus teléfonos celulares y usarlos para complementarse en el aprendizaje de la estadística descriptiva ofrecida en sus áreas de estudio, además de poder enviar archivos al facilitador del aprendizaje (maestro), y a sus compañeros desde su dispositivo móvil, asimismo de recibir archivos de los mismos a manera de retroalimentación. El resto de este documento se compone como sigue: la sección 2 presenta la definición del aprendizaje móvil y sus principales ventajas con respecto a otro tipo de aprendizaje. La sección 3 detalla el lenguaje Java ME, y lo que se puede crear en dispositivos móviles con el uso de este lenguaje. La sección 4 muestra los resultados obtenidos en el desarrollo del proyecto antes mencionado. La sección 5 presenta las conclusiones este avance y las pesquisas futuras de investigación. Por último, en la sección 6 se muestran las referencias bibliográficas.

2 Aprendizaje Móvil

El aprendizaje móvil (m-learning) es algo novedoso en la actualidad y proporciona oportunidades de aprendizaje a la persona que lo desee, a la hora exacta y en lugar dónde éste se encuentre mediante los dispositivos electrónicos móviles. En un futuro próximo, este tipo de aprendizaje podría ser desarrollado por personas autodidactas las cuales buscan contenidos "justo a tiempo", "a su medida", que se ajusten de manera muy concreta a su perfil, que puedan usarse en el momento en que él o ella elija, y que sean lo suficientemente breves y manejables. El aprendizaje móvil es la adquisición de conocimiento por medio de alguna tecnología de cómputo móvil [3]. Por dispositivos móviles entendemos teléfonos celulares y agendas personales digitales (PDAs). Con los dispositivos antes mencionados y los recursos educativos siempre disponibles, el aprendizaje móvil ofrece grandes opciones para la personalización del aprendizaje de acuerdo a las necesidades reales del alumno.

Las diferencias del aprendizaje móvil con otros tipos de aprendizaje se pueden estudiar desde dos puntos de vista: el tecnológico y el de la experiencia educacional. Respecto a la tecnología, el aprendizaje móvil se distingue por el uso de equipo portátil que permite al estudiante tener acceso a los objetos de aprendizaje a cualquier hora y desde cualquier lugar. Con respecto a la experiencia educacional, Traxler [4] define el aprendizaje móvil usando palabras clave. De esta forma, el aprendizaje móvil es 'personal', 'espontáneo', 'oportunista', 'informal', 'ubicuo', 'privado', 'sensible al contexto', 'segmentado' y 'portátil'. El mismo autor remarca que algunas de estas características pueden desaparecer conforme la tecnología móvil avance, pero propiedades como informalidad, movilidad y contexto permanecerán. Las principales ventajas del aprendizaje móvil son:

- Eliminación de restricciones de tiempo y espacio. El aprendizaje está disponible a cualquier hora y en cualquier lugar.
- Permite la comunicación entre pares y con el profesor sin necesidad de contacto físico.
- Permite recibir instrucción que dependa del lugar donde el alumno se encuentra.
- Permite diseñar tareas y exámenes y que el alumno reciba retroalimentación instantánea.
- Permite recibir objetos de aprendizaje con video y audio integrado.
- En aquellos dispositivos con cámara integrada, las fotografías y videos se pueden utilizar como formas alternativas de aprendizaje.

3 Java ME

Java es un lenguaje de programación orientado a objetos que se compila a un código de bytes que corre en una máquina virtual. La máquina virtual de Java (JVM) es una computadora simulada que ejecuta los códigos de bytes ya sea interpretándolos o convirtiéndolos a instrucciones reales que son ejecutadas en el acto. La JVM permite a los programadores escribir un programa y correrlo en distintos sistemas operativos sin necesidad de cambios. El lenguaje Java ha evolucionado y ahora consta de cuatro ediciones, cada una de las cuales está orientada al desarrollo de aplicaciones en equipo computacional a distinta escala. Java EE (edición empresarial) para servidores, Java SE (edición estándar) para computadoras personales, Java ME (edición micro) para dispositivos móviles y Java Card para tarjetas inteligentes. Java ME permite diseñar programas, llamados MIDlets [5] que pueden ser cargados y ejecutados en dispositivos móviles habilitados para Java. Las librerías disponibles en Java ME permiten escribir MIDlets con interfaces gráficas de usuario, almacenamiento persistente y comunicación con otros dispositivos o servidores. Sin embargo, por seguridad un MIDlet necesita permiso del usuario para tener acceso a información personal almacenada en el dispositivo o comunicarse con otro equipo móvil o con un servidor.

Por lo general, los MIDlets se distribuyen como parte de una suite, que es un conjunto de MIDlets que realizan tareas semejantes y que comparten recursos tales como bases de datos e imágenes. Las principales ventajas de programar en Java ME son:

- La JVM es gratis y fácil de instalar. En el caso de los teléfonos celulares habilitados con Java y de algunas PDAs, la JVM ya viene instalada de fábrica.
- NetBeans, un ambiente de desarrollo para Java ME, con editor, compilador y simulador incluidos, es gratis.
- Los manuales de referencia y los tutoriales son gratis.
- Los programas son portables entre distintos sistemas operativos móviles.

La portabilidad es especialmente importante en aplicaciones móviles porque en este segmento no existe un sistema operativo dominante como lo es Windows en el mercado de las computadoras personales. En cómputo móvil, los sistemas operativos más populares son siete, que en orden alfabético son: Android, BlackBerry, iOS, Linux, PalmOS, Symbian y Windows Mobile [6, 7].

4 Resultados

Hasta el momento, y con ocho meses de haber iniciado nuestro proyecto, hemos logrado desarrollar objetos de aprendizaje para Estadística Descriptiva mediante una suite de seis MIDlets que nombramos Módulo 1. Escribimos, además el respectivo manual de usuario e instalamos la suite en cinco teléfonos celulares habilitados con Java propiedad de la Universidad de Sonora. A continuación describimos la suite Módulo 1 y su instalación.

a) Al correr la suite aparece la pantalla que se muestra en la Figura 1 con el menú principal que permite seleccionar alguno de los seis MIDlets del módulo 1. Cada uno de los primeros cuatro MIDlets presenta una primera pantalla en dónde el usuario puede capturar y procesar los datos necesarios. A continuación se describen brevemente cada uno de los seis MIDlets. Los datos de entrada se escriben en parejas separadas por espacios o brincos de línea (es indistinto). El primer dato de cada pareja representa una categoría y el segundo dato es un número asociado con esa categoría. Un ejemplo de la salida del MIDlet se muestra en la Figura 2.

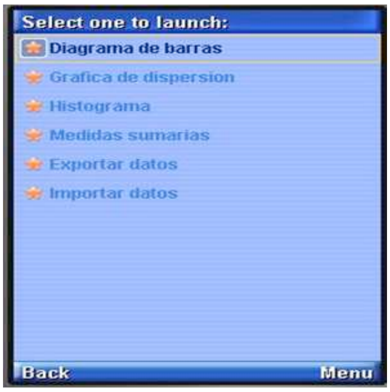


Figura 1

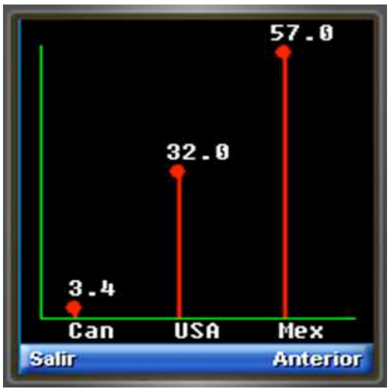


Figura 2

b) Gráfica de dispersión. Este MIDlet permite ver la gráfica de dispersión, calcular el índice de regresión de Pearson y calcula la ecuación de regresión lineal además de graficar la recta correspondiente sobre la gráfica de dispersión original. Los datos de entrada se escriben en parejas de números separadas por espacios o brincos de línea. La pareja de números representan los valores de dos variables para un conjunto de datos. Por lo general, el primer número de la pareja es el valor de la variable independiente, mientras que el segundo número es el valor de la variable dependiente. En caso de que no exista una relación de dependencia, entonces el orden se puede intercambiar. Un ejemplo de la salida del MIDlet se muestra en la Figura 3.

(a) (b) (c)

Figura 3

c) Histograma o diagrama de barras. Este MIDlet permite visualizar un histograma o un diagrama de barras. Los datos de entrada se capturan en parejas de números separados por espacios o por brincos de línea. El primer número de la pareja es el límite inferior del rango, y el segundo número es el valor asociado al rango. La última pareja puede estar completa o incompleta dependiendo de si el último rango es abierto o cerrado. Un ejemplo de la salida del MIDlet se muestra en la Figura 4.

d) Medidas sumarias. Este MIDlet permite calcular varias medidas sumarias para una secuencia de números reales que se reciben como entrada. A la salida, el MIDlet presenta los números ordenados de mayor a menor y de menor a mayor, además de las siguientes medidas sumarias: cuartiles, deciles, moda, máximo y mínimo, promedio, mediana, desviación estándar de la muestra y de la población, varianza de la muestra y de la población. Un ejemplo de la salida del MIDlet se presenta en la Figura 5.

e) Medidas de forma. Con este MIDlet se calculan los coeficientes de asimetría de Pearson y de Fisher, así como el coeficiente de curtosis de Fisher Un ejemplo de la salida del MIDlet se muestra en la Figura 6.

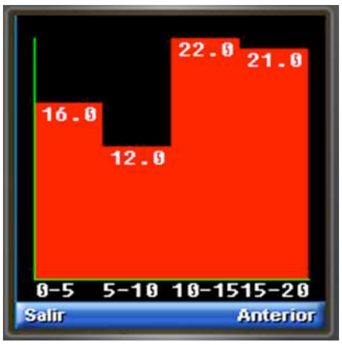


Figura 4

Figura 5

Figura 6

f) Exportar datos. Este MIDlet permite exportar los datos contenidos en las bases de datos internas de los cuatro MIDlets antes mencionados, a un archivo de texto que se puede copiar a una computadora personal para su posterior procesamiento.

g) Importar datos. Este MIDlet permite importar datos desde un archivo de texto, a alguna de las bases de datos internas de los cuatro primeros MIDlets mencionados. Cabe aclarar que estos dos últimos MIDlets funcionan sólo si la implementación de Java ME del dispositivo móvil, soporta el paquete opcional JSR-75.

5 Conclusiones y pesquisas futuras

Se han presentado los principales avances del proyecto "Elaboración de herramientas de aprendizaje de estadística para dispositivos móviles". Hemos diseñado seis objetos de aprendizaje con los cuales, se colabora con el aprendizaje intuitivo de los conceptos estadísticos de diferentes áreas del conocimiento, haciendo uso única y exclusivamente de un teléfono celular, aprovechando la ubicuidad de la tecnología personal con propósitos educativos, específicamente, las posibilidades de la telefonía celular para enseñar y aprender estadística. También, se ha creado el manual del usuario que permite a los alumnos y maestros: 1) realizar las instalaciones del software necesario que requiere su dispositivo móvil, para el procesamiento de datos estadísticos y 2) aprender el manejo de cada uno de los MIDlets a fin de obtener el mayor beneficio en el proceso enseñanza/aprendizaje.

Como segunda etapa de este proyecto, se tiene contemplado probar la pertinencia de la suite Módulo 1 en los dispositivos móviles de los alumnos. Es decir, estudiaremos la facilidad con que los estudiantes pueden usar el teléfono celular, con el propósito de alcanzar un objetivo específico, dada una actividad de aprendizaje de estadística descriptiva. Para ello, se levantará una encuesta basados en una muestra representativa de la población universitaria que usa teléfono celular. De los resultados de dicha encuesta se conocerá: la proporción de teléfonos celulares, propiedad de los estudiantes y que están equipados con Java, la proporción de alumnos que saben instalar aplicaciones Java en su dispositivo móvil, y la proporción de los estudiantes que estarán dispuestos a recibir un curso corto y aprender a realizar este tipo de instalaciones. Asimismo, conoceremos la opinión de los estudiantes los cuales están en continuo contacto con los dispositivos móviles, que han hecho suyos, y que finalmente son los que decidirán si el aprendizaje móvil de la estadística es un método apropiado o no.

Por último, dado que la Universidad de Sonora, pone a disposición de los universitarios una red móvil con áreas de cobertura Wi-Fi (Wireless Fidelity) dentro del campus que permite a los usuarios de equipos móviles: iPad, iPhone, notebooks, PDAs (HP iPAQ), agendas electrónicas, teléfonos celulares y otros dispositivos móviles, tener acceso a la mayor parte de todos los servicios que brinda la red universitaria, no podemos omitir la realización de estudios experimentales acerca de la eficacia de los dispositivos móviles en relación a la conectividad dentro del campus universitario a fin de optimizar el envío y recepción de información con propósitos meramente educativos.

Referencias

[1] Aguilar M. L. (2009). El Semanario. Prensa de Negocios ®, S de R.L. de C.V. `http://www.elsemanario.com.mx/news/news_display.php?story_id=23488`. U. V. 15/Dic./

2011.

[2] Uclue (2007). Uclue researchers. http://uclue.com/?xq=1180. Última visita: 15/Dic./ 2011.

[3] Traxler, J. (2005). Defining mobile learning. International Conference Mobile Learning. Malta. 261- 266.

[4] Traxler J. (2007). Defining, Discussing, and Evaluating Mobile Learning: The moving finger writes and having writ. International Review of Research in Open and Distance Learning, 8, 2, 1 - 12.

[5] Weizman A. (2011). Math4Mobile (http://www.math4mobile.com/). U. V. 13/Dic./ 2011.

[6] Wikipedia (2011). Mobile Operating System. http://en.wikipedia.org/wiki/Mobile_operating_system. Última visita 15/Dic./2011.

[7] Wikipedia (2011). Smartphone. http://en.wikipedia.org/wiki/Smartphone. Última visita 15/Dic./2011.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 81–87.

DETERMINACIÓN DE LOS FACTORES QUE INFLUYEN EN LA REPROBACIÓN DE LOS ALUMNOS DE CÁLCULO INTEGRAL EN EL PERÍODO AGOSTO-DICIEMBRE DEL AÑO 2011 EN EL INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHIHUAHUA

Luis Hernán Arellano Ulloa* **Luis Arnulfo Guerrero Chávez†**
Rosana Morales Torres **Cynthia Liliana Guzmán González**

Instituto Tecnológico de Chihuahua
e-mail: *lharellano@itch.edu.mx
†luisroller64@hotmail.com

Resumen

La investigación consiste en determinar qué factores influyen de manera benéfica o perjudicial en la calificación del alumnado del ITCH específicamente en la materia de Calculo Integral, con el apoyo de maestros de la Academia de Matemáticas, psicólogos y alumnos se realiza una búsqueda y selección que considere las variables importantes. Después de determinar las teorías se creará una encuesta para ser aplicada a los alumnos que incluya: preguntas personales de opción múltiple, preguntas abiertas por si algún alumno incluye algún factor no considerado en la encuesta y una valuación diagnóstica para identificar el conocimiento previo. Los datos serán correlacionados con las calificaciones del curso, se analizan resultados y se exponen los hallazgos.

1 Introducción

Los Estudiantes, son seres con comportamientos, educación, necesidades y razonamientos que varían de una persona a otra, inclusive una persona cambia dichas características en un breve lapso de tiempo, por lo que se torna complicado identificar las deficiencias en un grupo numeroso. Los alumnos con bajo rendimiento académico pueden tener algunas características en común y se les puede atender de manera específica, buscando que esto no complique la clase del docente. Por lo cual es importante conocer primero las necesidades, debilidades y fortalezas del alumnado para poder tener un panorama claro y actuar eficazmente. Al conocer las necesidades del grupo con una encuesta que puede ser aplicada por internet, se obtienen datos de manera rápida.

2 Antecedentes

En la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM) los alumnos que más reprueban se registran en las Ingenierías (Civil, Mecánica, Electrónica y en Computación), así como en la carrera de Médico Cirujano impartida por la Facultad de Medicina, según datos proporcionados por la institución vía transparencia [1].

Según un estudio realizado en el Instituto Tecnológico de Milpa Alta [2], las materias con más índice de reprobación se alojan en las matemáticas. Se expresó que estas materias son unas de las que no se entiende con claridad o que no se le pone interés ya que no son de agrado de los alumnos. El alumno dice que es más pesado la forma de evaluación de la ingeniería en sistemas que la de las otras ingenierías por eso se da el caso de que en un segundo semestre u tercer semestre el alumno se decide a cambiar de ingeniería.

CAUSAS POR LAS QUE REPRUEBAN

Los alumnos en algunos de los casos encuestados expresaron que:

- Frecuentemente al maestro no le enseñaba bien.
- Le faltaba al maestro explicarse un poco mejor en su materia o en su rama.
- Ellos no ponían de su parte para el mejor aprovechamiento de los recursos que se les brindaba por parte del profesor.
- En algunas de las encuestas expresaron que preferían no entrar ya a esa clase.

SOLUCIONES A ESTE PROBLEMA

Los alumnos con mejor aprovechamiento académico, mencionan las siguientes buenas prácticas como sugerencia para los alumnos de menor rendimiento.

- Compartir y recibir información de algunos temas.
- Usar más la web para estudiar y obtener información faltante en clases, ya que en la red se pueden encontrar muchos temas que a veces en clase no se ven, aunque en muchos de los casos nada más se utiliza la red como un método de distracción.
- Crear grupos de trabajo en donde todos los integrantes participen resolviendo las tareas asignadas en la web, buscando la guía de algún maestro.
- Existen asesorías en la Web de diferentes asignaturas.
- Creer en su total concepto que se es estudiante, y a estudiar se deben dedicar, ser consciente del nivel en el que se encuentran, un estudiante que cree en su desarrollo académico no tiene descansos, siempre debe buscar, encaminarse, adelantarse a esa información que su profesor le va a dar en el aula, volverse investigador nato autónomo y buscando esas habilidades que le hacen falta para que sea un alumno de éxito y no el mediocre que quiere ser estudiante.

3 Marco teórico

Terminado el curso Enero-Junio del 2011 se realizó el taller "Planeación de estrategias didácticas por parte de los maestros de la academia de Matemáticas", participando los docentes: Mireya Díaz, Ma. Isabel Manzanera, Blanca Limas Frescas, Rosana Morales Torres, Jesús Juárez Martínez, Amalia Aguirre y Gilberto Aguilar, donde se analizaron las listas

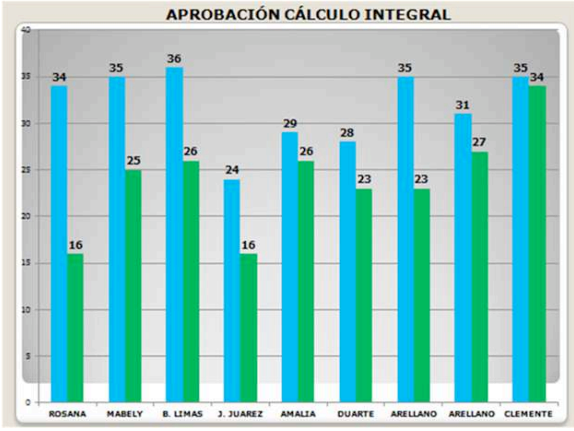


Figura 1: En las horizontales los nombres de los maestros, verticales el número de alumnos, la barra azul indica la cantidad total de alumnos en el grupo de cada maestro y la verde indica el número de alumnos aprobados.

finales del curso de cada maestro en todas las materias de Matemáticas, observándose los siguientes datos.

La materia de cálculo integral está programada en las retículas para cursarse en 2do. Semestre y se considerará como base de la investigación. Conociendo que como resultado aprobatorio en la materia se requiere como mínimo de calificación un 70/100 y que la materia requiere de conocimiento previo de cálculo diferencial, algebra y trigonometría principalmente. La materia se imparte a alumnos del sistema escolarizado del programa por competencias.

4 Objetivos

- Identificar los posibles factores según antecedentes, conocimiento de los profesores de la academia de cálculo integral y psicólogos que se tiene creencia que influyen en los alumnos de cálculo integral del semestre Ago-Dic 2011 del ITCH.

- Realizar una encuesta a los alumnos de cálculo integral del semestre Ago-Dic del 2011 por medio de la plataforma.

- Realizar correlación de los factores que afectan la calificación contra las calificaciones de fin de curso, se realizará con el cálculo del coeficiente R de Pearson.

5 Metas

- Identificar al menos 10 factores que influyen en los alumnos de cálculo integral del semestre Ago-Dic 2011 del ITCH.

- Realizar una encuesta a los alumnos de cálculo integral del semestre Ago-Dic del 2011 por medio de la plataforma que contenga al menos 30 preguntas.

- El resultado de la correlación del coeficiente R de Pearson debe de ser al menos de 0.7 [3].

6 Justificación

Determinar los factores que influyen en el resultado aprobatorio de la materia de cálculo integral en los alumnos del periodo Agosto-Diciembre del 2011 aporta el conocimiento para indicar como actuar y buscar influir de manera positiva en la calificación de los estudiantes, considerando que no sólo el conocimiento en la materia influye, sino también aspectos sociales, económicos, psicológicos y de salud abre el panorama para una mejora en el aprovechamiento del alumnado y se apega al pensar y actuar en base al sistema por competencias.

7 Metodología

- Identificar los principales factores que afectan al alumnado del Instituto Tecnológico de Chihuahua en la materia de cálculo integral mediante una búsqueda de información en la web, reunión extraordinaria de academia de Matemáticas, consulta a psicólogos y maestros de tutorías, solicitar antecedentes en el departamento de desarrollo académico del ITCH.

- Realizar un instrumento que identifique los factores que afectan a los alumnos. Incluir evaluación diagnóstica. Una vez determinados los factores realizar una encuesta con preguntas abiertas y de opción múltiple para obtener datos del sujeto de investigación. La evaluación diagnóstica será establecida por un acuerdo en una academia de los profesores de cálculo integral del ITCH.

- Aplicar el instrumento en la totalidad de los grupos de cálculo integral del ciclo Ago-Dic 2011. Procurando que sea bajo las mismas condiciones.

- Recopilar datos de las calificaciones de los alumnos encuestados.

- Correlación de los resultados de las encuestas con los resultados de fin de curso.

- Cálculo de los valores del coeficiente R de Pearson para cada factor considerado.

- Identificar los principales contribuyentes en la reprobación de la materia de cálculo integral.

8 Resultados

Al correlacionar los factores considerados con la variable: Índice de reprobación, se obtuvieron los siguientes resultados:

No. de preg.	**Factor correlacionado con Reprobación**	R^2	r **de Pearson**	**Criterios**
52	CENEVAL (Calculo-Diagnóstico)	0.9953	0.9976	Relación alta de dependencia
25	Frecuencia de consumo de tabaco	0.9803	0.9901	Relación alta de dependencia
53	CENEVAL (Matemáticas-Diagnóstico)	0.9239	0.9611	Relación alta de dependencia
54	Evaluación Diagnóstico ITCH	0.8874	0.942	Relación alta de dependencia
31	Horas de sueño	0.8421	0.9158	Relación alta de dependencia
8	Horario de clases	0.8096	0.8997	Relación alta de dependencia
29	Nivel socioeconómico	0.7896	0.8885	Relación alta de dependencia
36	Horas de estudio diario	0.7772	0.8816	Relación alta de dependencia
50	CENEVAL (R Log Mat-Selección)	0.7287	0.8536	Relación alta de dependencia
44	Idea propia de las Matemáticas	0.6765	0.8225	Relación alta de dependencia
37	Hrs. x semana de estudio de cálculo	0.6731	0.8204	Relación alta de dependencia
33	Tiempo de traslado a la escuela	0.6147	0.784	Relación entre moderada y acentuada
45	Dominio de las matemáticas	0.5531	0.7437	Relación entre moderada y acentuada
24	Frecuencia de consumo de alcohol	0.49	0.7	Relación entre moderada y acentuada
10	1ra opción educativa	0.5008	0.7076	Relación entre moderada y acentuada
32	Horas de trabajo	0.463	0.68	Relación entre moderada y acentuada
51	CENEVAL (Matemáticas-Selección)	0.4593	0.6777	Relación entre moderada y acentuada
17	Asistencia a clase	0.422	0.6496	Relación entre moderada y acentuada
35	Horas de diversión	0.3377	0.5811	Mediana relación
2	Cuidad de origen	0.219	0.467	Mediana relación
11	Carrera	0.1787	0.4227	Mediana relación
6	Comunicación con padres	0.1743	0.417	Mediana relación
46	Atribución de las habs. matemáticas	0.1738	0.4168	Mediana relación
49	ICNE (CENEVAL Global)	0.1302	0.3608	Ligera relación
3	Estado civil	0.0914	0.302	Ligera relación
1	Edad	0.051	0.225	Ligera relación
23	Motivación de matemáticas	0.0457	0.2137	Ligera relación

47	Opinión hacia los maestros de Nivel Medio Superior	0.044	0.2097	Ligera relación
22	Factor que cree alumno afecta estudios	0.0128	0.1131	Relación fortuita ó insignificante
9	Escuela de procedencia	0.0062	0.078	Relación fortuita ó insignificante
34	Horas extraescolares	0.0056	0.074	Relación fortuita ó insignificante
5	Vive con:	0.0033	0.0574	Relación fortuita ó insignificante
4	Tiene hijos	-	-	No aplica
7	Apoyo familiar	-	-	No aplica
12	Primer opción carrera	-	-	No aplica
13	Conoce de cálculo integral	-	-	No aplica
14	Curso semestre de capacitación	-	-	No aplica
15	Calculo ordinario o repetición	-	-	No aplica
16	Cursa materia de repetición o especial	-	-	No aplica
18	Puntualidad	-	-	No aplica
19	Tiene laptop	-	-	No aplica
20	Acceso a internet	-	-	No aplica
21	Ingresos suficientes	-	-	No aplica
26	Alimentación en mal horario	-	-	No aplica
27	Horario de alimentación	-	-	No aplica
28	Alimentación balanceada	-	-	No aplica
30	Tiene beca	-	-	No aplica
38	Dejó otra escuela y entró al ITCH	-	-	No aplica
39	Opinión de hábitos de estudio	-	-	No aplica
40	Deja para al último el estudio	-	-	No aplica
41	Tiene lugar de estudio	-	-	No aplica
42	Tiene libro de estudio	-	-	No aplica
43	Piensa: No vale la pena estudiar	-	-	No aplica
48	Pertenece a algún grupo ó asociación	-	-	No aplica

Tabla 1. Enlistados los factores en la columna 2, el coeficiente de determinación R^2 en la tercer columna, en la cuarta columna se aprecia el valor del coeficiente de correlación r de Pearson

y en la última columna la interpretación del valor r de Pearson.

Referencias

[1] Adriana Uribe/Toluca Milenio Online, Nov. 2008, Solo 6 de cada 10 inscritos termina su educación, `http://impreso.milenio.com/node/8109929`.

[2] Siker, 27 de mayo de 2010, Resultados de la encuesta aplicada por alumnos de ingeniería en sistemas, `http://indicereprobatorio.blogspot.com/`.

[3] Guerrero Chávez Luis Arnulfo, Marzo 2005, *Modelo integral y dinámico para el desarrollo de grupos de trabajo,* Universidad Autónoma de Chihuahua, pp.74 y 75.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 89–95.

ANÁLISIS Y VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA EL TEMA DE MUESTREO

Eleazar Silvestre Castro* **Irma Nancy Larios Rodríguez†**
Manuel Alfredo Urrea Bernal‡

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: *eleazar.silvestre@gmail.com
†nancy@gauss.mat.uson.mx
‡maurr@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En el trabajo se presenta el análisis y valoración de la idoneidad didáctica de una secuencia de actividades didácticas para el tema de muestreo del programa del curso de Estadística II (Estadística Inferencial) del Área Económico Administrativo de la Universidad de Sonora.

1 Introducción

El trabajo que se presenta se enmarca en una tesis de desarrollo docente titulada "Actividades didácticas para promover un acercamiento intuitivo a algunos tipos de muestreos aleatorios" [1] con el cual se obtuvo el grado en el Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemáticas Educativa de la Universidad de Sonora. Como referencia se señala que los avances de este trabajo de tesis han sido presentados durante la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas ("Diseño de actividades introductorias para el desarrollo de la noción de muestreo") [2] y en la XXI Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas ("Una propuesta de actividades didácticas para el tema de muestreo, del área de Económico Administrativo") [3], los cuales están publicados en las memorias de dichos eventos. El objetivo general del trabajo de tesis fue el diseño de una propuesta de actividades didácticas que permita promover un acercamiento intuitivo a algunos tipos de muestreo. Los objetivos particulares que el estudiante identifique la diferencias entre un muestro aleatorio y uno no aleatorio, así como valorar la pertinencia de aplicar cierto tipo de muestreo ante una situación dada. Por cuestiones de espacio no se presentan las actividades didácticas diseñadas (Ejemplo de estas pueden ser consultadas en las memorias de los eventos antes señalados), ya que el trabajo se centra en el análisis de idoneidades didácticas *a priori* y *a posteriori* de dicha propuesta.

2 Consideraciones teóricas

Para el diseño, análisis y valoración de las actividades didácticas se retomaron algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemáticas (EOS) desarrollados por J.D. Godino [4]. Particularmente para el diseño de las actividades didáctica se realizó un análisis del significado institucional de referencia, basado en el programa de materia del curso de Estadística II del Área económico-administrativa, así como dos textos que están sugeridos en dicho programa y dos textos más que fueron sugeridos por profesores del área, este análisis se complementó con algunas posturas de investigaciones en educación estadística. También se realizó un análisis del *significado institucional pretendido,* esto es la selección del contenido matemático que se incluirán en las actividades de enseñanza y aprendizaje (lecciones para el curso, material didáctico, libros de texto, etc.) e *implementado,* es decir, se describen todas aquellas prácticas que suceden a lo largo del proceso de instrucción matemática (considerando las planeadas y no planeadas). Además de considerar los significados institucionales en el diseño de la propuesta, se contempla también el último nivel de análisis didáctico propuesto dentro del EOS, esto es, los criterios de idoneidad ([1], [5] y [6]). Esta herramienta permite diseñar y valorar un proceso de instrucción (textos, secuencias didácticas, episodio de clase, etc.) diseñado o implementado y se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes: 1) *Idoneidad epistémica,* se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia; 2) *Idoneidad cognitiva,* que expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados; 3) *Idoneidad interaccional,* un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las *configuraciones* y *trayectorias didácticas* permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar *a priori*), y, por otra parte, permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción; 4) *Idoneidad mediacional,* grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje; 5) *Idoneidad afectiva,* grado de implicación (interés, motivación, etc.) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen directamente del alumno y de su historia escolar previa; 6) *Idoneidad ecológica,* grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

3 Características generales de la secuencia de actividades didácticas

A continuación se describen las principales características de la propuesta:

- ✓ *Organización de las actividades.* En la propuesta se incluyen tres tipos de actividades: de introducción, de desarrollo y de cierre. Cada actividad tiene objetivos específicos de acuerdo a lo que se pretende promover en el estudiante respecto al tema de muestreo; en la actividad de introducción se busca que el estudiante tenga los primeros acercamientos intuitivos con el objeto muestreo, en la de desarrollo que el estudiante interactúe con dicho objeto tomando muestras y analizando la variación muestral; y, finalmente, en el cierre se pretende que identifique y aplique diferentes tipos de muestreo en situaciones que así lo requieran.

✓ *Situaciones planteadas en contextos del área económico-administrativa.* Todas las actividades planteadas están ambientadas en contextos del área económico-administrativa, es decir, ninguna situación se trabaja dentro de un contexto puramente matemático. La intención de esto es mostrar potenciales situaciones a las cuales los profesionistas de estas áreas podrían enfrentarse en un futuro; además, los objetos involucrados en la resolución de estas situaciones problema adquieren una mayor "sentido" al poder ser contextualizados.

✓ *Utilización de hojas de trabajo.* En todas las actividades se utilizan hojas de trabajo con la intención de plantear las situaciones problema y brindar espacios para que los estudiantes registren sus respuestas a los diferentes cuestionamientos; además, mediante el análisis de éstas es posible identificar conflictos que surjan a lo largo de la realización de las actividades. En la actividad de desarrollo se utilizan hojas de trabajo y Excel.

✓ *Uso de Excel en actividad de desarrollo.* Para la realización de la actividad de desarrollo, es necesario el uso de Excel para manipular información, realizar cálculos (medias, proporciones, etc.), generar números aleatorios, seleccionar muestras, generar registros tabulares, etc. El uso de esta herramienta permite no sólo seleccionar muestras en un tiempo menor, sino que brinda la posibilidad al estudiante de disponer de diferentes objetos relacionados con el muestreo, lo cual facilita la emergencia de los objetos de interés del muestreo.

✓ *Institucionalización.* Se pretende que el profesor no haga explícitos los objetos matemáticos de interés en un primer momento, ya que la intención es que éstos emerjan a través de la resolución de las situaciones problema planteadas. La explicitación e institucionalización de estos objetos se considera para la parte final de cada situación problema planteada.

✓ *Estrategias didácticas de trabajo en equipo y discusión grupal.* Se realiza trabajo en equipo para las actividades de introducción y desarrollo mientras que en las de cierre se trabaja de forma individual. En diferentes momentos se realizan discusiones grupales para consensar lo realizado e institucionalizar los objetos de interés.

La implementación de la propuesta se llevó a cabo con un grupo de 23 estudiantes de un curso de Estadística II del cuarto semestre de la Licenciatura en Informática Administrativa de la Universidad de Sonora. Asimismo, la aplicación de las actividades se realizó durante ocho sesiones de clase de una hora cada una.

Conforme se desarrolló la aplicación de la propuesta, se recabaron como evidencias las hojas de trabajo y los archivos de Excel de la actividad de desarrollo. También se realizó una grabación de video de las sesiones de trabajo en las actividades de introducción y desarrollo, como apoyo para la revisión de aquellos momentos o circunstancias donde las hojas de trabajo no brindaron suficiente información. Esta recopilación de evidencia se realizó con la intención de contar con información suficiente para la valoración de los significados personales desarrollados a lo largo de la aplicación de la propuesta.

4 Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de la secuencia de actividades didácticas

El *análisis y valoración de la idoneidad didáctica a priori*. Una vez que se tiene la versión final de la propuesta se realiza una valoración *a priori* de la idoneidad de la misma, es decir, previo a una experimentación, con la intención de evaluar la funcionalidad de ésta como instrumento que forma parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El *análisis y valoración de la idoneidad didáctica a posteriori* se realiza concluida la implementación de la propuesta y la descripción de sus principales resultados. Esta segunda valoración de la idoneidad didáctica, *a posteriori,* se realiza con la intención de ser contrastada con la valoración *a priori* para determinar aquellos aspectos de la propuesta que necesitan ser evaluados y modificados con el propósito de contar con una propuesta didáctica que atienda de forma más efectiva sus objetivos.

Los análisis y valoraciones anteriores se realizan a través de examinar los seis criterios o *idoneidades parciales* que componen la idoneidad didáctica señalados en el apartado anterior. A continuación se describen de manera resumida.

1. *Idoneidad epistémica. A priori* fue considerada alta partiendo de que las situaciones problemas diseñadas y la propuesta de interacción que se hace entre el estudiante y el objeto muestreo (manipulación de la información, generación de gráficas para observar sesgo, estimación, etc.) permite la emergencia de los elementos de interés acerca de este objeto. *A posteriori* es valorada como alta ya que se observó en gran medida que la implementación de la propuesta permitió abordar todos los contenidos estadísticos de interés al brindar al estudiante constantes momentos de trabajo, discusión, reflexión y consenso; que como resultado de esto y apoyándonos en la evidencia analizada de la implementación de la propuesta, mostraron un grado aceptable de apropiación de los significados pretendidos.

2. *Idoneidad interaccional. A priori* fue considerada alta tomando como base que los distintos momentos de trabajo colectivo entre estudiantes, el monitoreo y orientación del profesor, las actividades de evaluación y discusiones grupales, establecen condiciones que favorecen el diálogo y comunicación entre estudiantes y profesor que provocan un ambiente apropiado para el trabajo en el aula y permiten la detección y resolución de conflictos. *A posteriori* es valorada como alta ya que a través de la implementación de la propuesta se pudo constatar que se cuenta con suficientes espacios de interacción entre estudiantes y profesor que establecieron un ambiente que favoreció la comunicación y permitieron identificar y resolver distintos conflictos que surgieron a lo largo de la resolución de las actividades.

3. *Idoneidad mediacional. A priori* fue considerada como media alta ya que se disponen de los recursos y materiales necesarios en la institución (aulas disponibles, pizarrón, centro de cómputo, etc.) y que el diseño y utilización apropiada de las hojas de trabajo así como del software, permiten el desarrollo y comprensión del objeto muestreo. También se espera que se requiera de un tiempo un poco mayor al regular para realizar la

implementación, motivo por el cual no se valora esta idoneidad parcial como alta. *A posteriori* es valorada como media ya que se presentaron algunas dificultades en la comprensión de los cuestionamientos planteados a los estudiantes en las hojas de trabajo. También se presentaron mayores dificultades técnicas de las esperadas con el manejo del Excel, particularmente durante la realización del muestreo aleatorio estratificado y por conglomerados. Se observó que la gran mayoría de estas dificultades técnicas fueron ocasionadas por la falta de manejo de los datos o bien, a falta de una mayor automatización en la realización de estos procedimientos. Estas dificultades impactaron en los tiempos estimados de la realización de las actividades, requiriendo un tiempo mayor al planificado.

4. *Idoneidad emocional. A priori* fue valorada como alta con base en que los contextos seleccionados para el diseño de las situaciones problemas resultan atractivos y de interés ya que éstos plantean potenciales situaciones a las que un profesionista del área de interés se enfrentaría en un futuro; que la utilización de Excel genera motivación e interés, así como el hecho de que el trabajo en equipo, discusiones grupales y de consenso, promueven el diálogo entre estudiantes y profesor en condiciones de igualdad y respeto. *A posteriori* es valorada como media alta ya que a causa de las dificultades técnicas observadas con el manejo de Excel durante la actividad de desarrollo, el tiempo dedicado a estas actividades generó desmotivación (causada quizás por la falta de contextos diferentes) en los estudiantes.

5. *Idoneidad cognitiva. A priori* fue valorada como alta partiendo de que los conocimientos previos necesarios para la realización de las actividades fueron atendidos en un curso previo y son de carácter básico en la materia (variable estadística, proporción y media aritmética), de tal forma que los significados pretendidos e implementados están al alcance de los estudiantes y se contemplan actividades que permiten evaluar los significados desarrollados por los estudiantes (actividad de cierre). *A posteriori* es valorada como media alta ya que, a pesar de que las evidencias muestran un buen grado de apropiación de significados pretendidos a lo largo de la secuencia, se considera que las dificultades técnicas con el manejo de Excel interfirieron en buena medida en la avance de los contenidos de la parte final de la actividad de desarrollo; dificultando así alcanzar el grado de comprensión esperado de todos los objetos de interés de esta actividad. Sin embargo, el uso de Excel permitió a los estudiantes seleccionar la mayoría de las muestras y observar la variación que éstasproducían, lo que les permitió conjeturar lo apropiado de los muestreos aleatorios al momento de estimar la media poblacional, esto último es algo que consideramos como uno de los propósitos centrales en la propuesta.

6. *Idoneidad ecológica. A priori* fue valorada como alta tomando como base que se atienden los contenidos delimitados en el programa de la materia referentes al muestreo, que se plantean situaciones ambientadas en contextos que se suponen como potenciales situaciones a las que se enfrentarían profesionistas de estas áreas, que se hace uso de tecnología de forma innovadora y se abordan temas relacionados con el muestreo, como

lo es la estimación y variación muestral. *A posteriori* es valorada como alta ya que a través de la implementación de la propuesta se pudieron corroborar los aspectos anteriormente mencionados a pesar de las dificultades técnicas presentadas; la utilización de Excel permitió en gran medida la interacción con muestreos y sus implicaciones en contextos que resultaron de interés para los estudiantes.

Con base en los análisis descritos anteriormente, en la figura siguiente se muestra la valoración global de la idoneidad didáctica de la propuesta *a posteriori* en relación a la valoración de la idoneidad *a priori*.

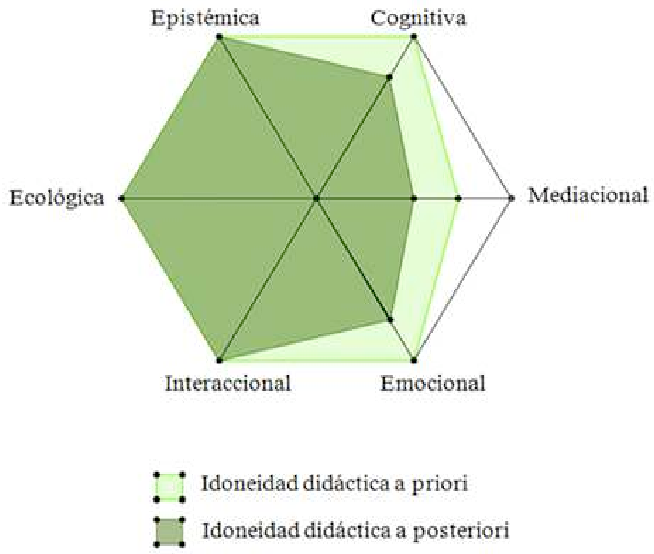


Figura 1

5 Conclusiones

A manera de conclusión se realiza un resumen del análisis de idoneidades *a priori* y *a posteriori* de la secuencia de actividades didácticas.

a) En el análisis de idoneidades *a priori* se valoró a todas las dimensiones altas, excepto la idoneidad mediacional que fue valorada como media alta.

b) Del análisis de idoneidades *a posteriori* se concluyó lo siguiente: idoneidad epistémica alta, idoneidad cognitiva media, idoneidad mediacional media, idoneidad emocional media, idoneidad interaccional alta e idoneidad ecológica alta.

Las razones por las cuales no se consideraron alta algunas idoneidades son las siguientes: i) En el caso de la idoneidad cognitiva, los estudiantes tuvieron dificultades al identificar una situación donde el muestreo aleatorio por conglomerados era lo mas apropiado (tercera situación de la actividad); ii) En la idoneidad mediacional, los tiempos para desarrollar la actividad fueron mayores que los planeados además de presentarse algunos conflictos técnicos con el manejo del Excel para la selección de las unidades del muestreo aleatorio estratificado y por conglomerados; iii) En algunos estudiantes se observó falta de interés por invertir tiempos prolongados en la selección de las unidades de muestreo. Evidentemente, estos resultados nos permiten retroalimentar el diseño y la estrategia de la actividad para lograr la emergencia de concepto de muestreo de manera adecuada en los estudiantes.

Referencias

[1] Silvestre, C. (2011). Actividades didácticas para promover un acercamiento intuitivo a algunos tipos de muestreos aleatorios. Tesis de maestría del Programa de maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa.

[2] Silvestre, C., Larios, L. y Urrea, M (2011). Diseño de actividades introductorias para el desarrollo de la noción de muestreos. Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas.

[3] Silvestre, C., Larios, L. y Urrea, M (2012). Una propuesta de actividades didácticas para el tema de muestreo, del área de Económico Administrativo. Memorias de la XXI Semana de Investigación y Docencia de las matemáticas. En prensa.

[4] Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en `http://www.ugr.es/local/jgodino`.

[5] Font, V.; Planas, N.; Godino, J. D. (2010) Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. Infancia y Aprendizaje, 33(2), págs. 89-105.

[6] Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en `http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm`.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 97–102.

ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA PROMOVER EL SENTIDO DE LA VARIABILIDAD ESTADÍSTICA

Felipe de Jesús Castro Lugo* **Enrique Hugues Galindo†**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: *felipecastrolugo@htomail.com
†ehugues@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En el presente trabajo se reporta parte de los avances alcanzados en un proyecto de tesis para obtener el grado de Maestría en Matemática Educativa, en la Universidad de Sonora, cuyo título tentativo da nombre a esta propuesta. En él se desarrolla una secuencia de actividades didácticas con el objetivo promover, entre estudiantes de carreras de ingeniería del Instituto Tecnológico de Sonora, el sentido de la variabilidad en el contexto de un curso de Probabilidad y Estadística, por lo cual clasificaríamos a la tesis como una de desarrollo docente. El reporte se centra en la ubicación de la problemática, su justificación y la presentación a grandes rasgos de una de las actividades incluidas en la secuencia.

1 Introducción

En el Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON), desde el año 2001, se ha adoptado un modelo curricular basado en competencias a fin de dar respuesta a cuestionamientos que plantea la necesidad de actualización planteada al ramo educativo de nuestro país a partir de evaluaciones que se le han venido realizando. Entre las principales características del nuevo modelo resaltamos un cambio de énfasis, de una educación centrada en la enseñanza priorizando la adquisición de conocimientos, hacia una centrada en el aprendizaje de conocimientos, destrezas y habilidades que proporcionen una educación más significativa [1].

A pesar del tiempo que ha transcurrido, nos parece que estos lineamientos aún no son el denominador común en el trabajo docente y que, frecuentemente, el profesorado se apega al modelo con el cual se siente más familiarizado, el modelo tradicional. Este otro modelo lo caracterizamos por privilegiar la actividad del profesor y orientar la organización de cursos de modo tal que el profesor presente a los estudiantes los conceptos, definiciones y resultados claves que intervienen en el tema a ser desarrollado, posteriormente los ilustra mediante ejemplos y la resolución adicional de ejercicios tipos y, finalmente, pide a los estudiantes que ellos resuelvan algunos ejercicios pensando que con este método los estudiantes aprenderán lo que se pretende. Precisamente esto último es lo que diversas evaluaciones han venido mostrado que no ocurre y que lo indicado no es un proceso tan simple.

En lo que a educación estadística se refiere y según recomendaciones realizadas por diversas instancias, necesitamos capacitar a los estudiantes en el desarrollo del pensamiento estadístico, en la comprensión conceptual por encima del simple conocimiento de procedimientos, así como también en fomentar el aprendizaje activo en el salón de clases.

2 Justificación

De manera general podemos ubicar a la Estadística como la ciencia de la incertidumbre o como la ciencia de los datos, y señalar que en los últimos años ha tomado un gran auge debido al importante papel que ha estado jugando en el desarrollo de las sociedades modernas. Proporciona herramientas metodológicas generales para analizar la variabilidad, herramientas para determinar relaciones entre variables, orienta en forma óptima el diseño de estudios y experimentos y proporciona el soporte para mejorar las predicciones y toma de decisiones en situaciones de incertidumbre [2].

Dando por sentado que los datos en gran parte de las situaciones de interés presentarán variabilidad, esta resulta ser la característica más relevante en ellos dado que su explicación proporciona el eje de la práctica estadística así como pautas de análisis. La variabilidad se presenta en diferentes condiciones: los datos varían entre sí, los integrantes de las muestras varían de un muestreo a otro aún dentro de una misma población y por ende las distribuciones, las medias y demás estadísticos resultantes de estas muestras varían; lo que constantemente hace necesario reconocer la variabilidad, interpretarla, medirla, explicarla así como también el describirla y representarla [3]. De hecho en esto resalta el por qué el elemento fundamental de la existencia de la estadística viene a ser la variabilidad, que su funcionamiento no tiene mejor forma de ser entendido que mediante la explicación de esta última y que por esto es que la variabilidad debe ser experimentada por los aprendices.

Así mismo desde tiempo atrás ha habido una creciente atención a la importancia del desarrollo de la comprensión y la apreciación de la variabilidad como una componente central del pensamiento estadístico, paralelamente a la comprensión de las ideas de distribución, de localización y de dispersión que constituyen ideas mediadoras. Estas ideas se deben atender conjuntamente a lo largo del currículo de los cursos de Probabilidad y Estadística dada la importancia que estas tienen y dado que pueden ser abordadas desde el inicio del curso primero de manera informal y posteriormente de manera formal [4].

En tal iniciativa y para abonar a la comprensión del sentido de la variabilidad estadística, se cree necesario la elaboración de una serie de actividades didácticas que muestren los diferentes contextos reales y condiciones en que se presenta la variabilidad, además de recurrir a diversos contextos de uso, como: generación de datos, representación de los datos, análisis y comparación de conjuntos de datos, simulación de datos y así como situaciones de muestreo [4].

Subrayamos la importancia de tal comprensión en nuestro medio bajo la consideración de que fenómenos con variabilidad se presentaran en la vida profesional a todo estudiante de ingeniería en sus labores futuras y la compresión y control de estos permite en su caso optimizar recursos como: tiempo, materia prima o materiales, personal, etc. y por ende incidir en la mejora de los procesos productivos donde se desempeñe.

3 Actividad didáctica

La propuesta de secuencia de actividades didácticas está siendo diseñada para promover el *sentido de la variabilidad estadística* entre estudiantes de ingeniería, concebido este como una conceptualización fundamental, y por tanto necesaria, al introducirlos en los tópicos de la Estadística y que tenemos entre nuestras metas el incidir en el desarrollo de su *pensamiento estadístico*. Para los estudiantes de ingeniería del ITSON, con quienes se planea explorar la propuesta con fines de prueba y de retroalimentación, esta oportunidad se presenta en la asignatura de Probabilidad y Estadística que por lo general cursan durante su segundo semestre y que contempla el tema de estadística descriptiva donde se insertaría.

En la actividad a mostrar, se pretende que los estudiantes aprecien aspectos fundamentales de la variabilidad y del razonamiento o reflexión sobre ella que se ponen juego al percibirla, describirla, cuantificarla y explicarla. En ella se utiliza una situación problema con contexto real para que los estudiantes la asocien a su futuro campo profesional y por lo tanto capte su interés, pero además para que les proporcione experiencias que resulten un medio para cumplir su propósito como actividad de aprendizaje.

La actividad se ha diseñado con tres etapas o momentos. El primer momento será de *introducción* o presentación de la situación problema y en él se intenta problematizar a los estudiantes a través de cuestionárseles algún(os) aspecto(s) de la situación; luego estaría el momento de *desarrollo,* donde los estudiantes utilizaran las estrategias necesarias para la resolución de la situación problema; y, finalmente, el momento de *cierre* en el cual los estudiantes serán capaz de concluir y argumentar.

En la actividad se dará oportunidad para que los estudiantes reflexionen en torno a las situaciones planteadas, en un primer momento, trabajando colectivamente a nivel de todo el grupo, compartiendo sus ideas y respuestas con el fin de generar una dinámica de discusión. Luego, en un segundo momento se utilizara la estrategia de trabajo en equipo, con el objetivo de que los estudiantes puedan afinar ideas y concretar respuestas como para defenderlas y/o contrastarlas con los integrantes del equipo. Finalmente, en el tercer momento, los estudiantes trabajaran individualmente, para posteriormente hacer una reflexión de nuevo colectivamente a nivel de todo el grupo, al compartir sus respuestas.

Actividad: Amplitud de brazos y estaturas

En esta actividad se planteará una situación problemática en torno al cuerpo humano, la importancia de conocer sus medidas y algunas de sus aplicaciones en diferentes áreas de la ingeniería, teniendo como referencia el dibujo del Hombre del Vitruvio plasmado por Leonardo Da Vinci en el siglo XV, donde se representa la "perfección del cuerpo humano" a como se concebía en aquella época. Con esto se pretende iniciar una problematización entre los estudiantes alrededor de su conocimiento de tales aplicaciones así como de su opinión acerca de una serie de relaciones cuantitativas expresadas en el dibujo. Principalmente aquella afirmación que dice que la amplitud de los brazos extendidos de una persona es igual a su estatura.

Además se pretende que los estudiantes sientan la necesidad de contar con datos para tratar de resolver la cuestión específica de si la afirmación de Da Vinci acerca de que la amplitud o longitud de los brazos extendidos de un ser humano es igual a su estatura puede ser considerada válida actualmente. Más adelante, contando ya con datos, se espera que los estudiantes emprendan un análisis comparativo de los datos para valorar la afirmación y que esto los lleve a enfrentar aspectos fundamentales de la variabilidad en su intento de responder a la cuestión. Digamos que perciban la variabilidad existente en los datos, la cuantifiquen, busquen explicaciones, la describan y hagan representaciones convenientes para visualizarla.

Objetivo de la actividad: Que los estudiantes perciban la variabilidad de los datos, la manipulen en diferentes formas, intenten encontrar patrones o regularidades y traten de explicarla para obtener conclusiones.

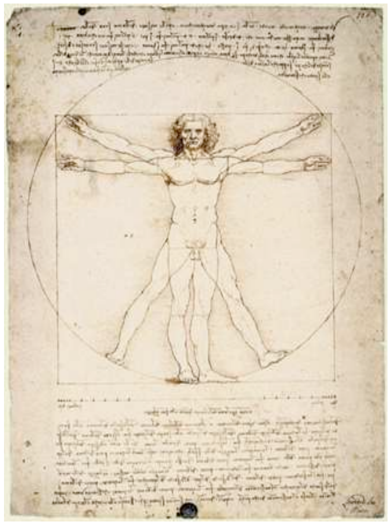
Momento de Inicio.

Como parte del primer momento se presenta el dibujo de Leonardo Da Vinci acompañado de la información básica proporcionada por un arquitecto de su época, Marco Vitrubio, lo que reproducimos abajo, en recuadro como “HOJA 1”. Enseguida el profesor pregunta a sus estudiantes si conocen el dibujo y les pide que expresen lo que conozcan de él. Seguido de esto el profesor debe ampliar lo comentado por los estudiantes, así como también hablar del uso y la aplicación de las medidas del cuerpo humano en diferentes áreas de la ingeniería como el diseño de instalaciones y edificios, el diseño de mobiliario doméstico e industrial, así como para la confección de prendas de vestir y de calzado, etc.

HOJA 1, ACTIVIDAD 1.

“El Hombre del Vitruvio” es un dibujo de Leonardo Da Vinci, realizado a fines del siglo XV a partir de un ensayo del arquitecto Marco Vitruvio, de ahí su nombre. En él, Da Vinci representa la perfección del cuerpo humano. Este hombre ideal fue dibujado inscrito en un círculo y en un cuadrado: “el círculo se relacionaba con la divinidad y la espiritualidad mientras que el cuadrado significaba el mundo físico y lo terrenal”. Además en esta representación simultánea del hombre, el círculo y el cuadrado, Leonardo da Vinci consigue plasmar el equilibrio, la armonía y el dinamismo del cuerpo humano, que llega a cuantificar para expresar objetivamente su hombre ideal. Entre las afirmaciones cuantitativas de Da Vinci acerca del hombre ideal, se encuentran:

Una palma es la anchura de cuatro dedos.
Un pie es la anchura de cuatro palmas.
Un antebrazo es la anchura de seis palmas.
La altura de un hombre son cuatro antebrazos, (24 palmas).
La longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura.



Con lo anterior y con la serie de preguntas reproducidas más adelante como “HOJA 2”, se espera que los estudiantes se problematicen y que sugieran algunas otras variables que se deberían de tomar en consideración para la resolución de la problemática planteada. Además, se espera que los estudiantes sientan la necesidad tener datos y pasen a la obtención de medidas tomándose a ellos mismos como unidades experimentales, para poder responder al planteamiento principal y describir razones de por qué debe contarse con algunos lineamientos de medición y postura al medirse. En esta parte se deben de establecer las reglas de medición que se usaran en dicho proceso, para lo cual el profesor debe de contar con el material necesario para llevar a cabo esta parte.

HOJA 2, ACTIVIDAD 1.
1. ¿Crees que la afirmación: "la amplitud o longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura", es verdadera?, ¿Esta afirmación se aplicara a todas las personas del mundo?, ¿Será válida para las personas de México?, ¿Será cierta para personas de Sonora?, ¿Será validad para los estudiantes del ITSON? o ¿Aplicará para los estudiantes de estadística del grupo? 2. ¿Cómo podemos corroborar esta afirmación? ¿Qué consideraciones adicionales se tendrían que hacer? 3. ¿Será necesario tomar alguna(s) otra(s) variable(s) en consideración? No, Sí, ¿Cuál o cuáles más? 4. Si en las preguntas anteriores se respondió que había que tomar mediciones de las variables involucradas, tomemos datos del grupo. ¿Cómo recabar datos y cuántos será necesario para intentar corroborar esta afirmación? ¿Por qué? Invitamos pasar a tomar los datos reales.

Momento de desarrollo.

Contando con los datos recolectados, se solicitará a los estudiantes que reflexionen acerca de la variabilidad en los datos, primero de manera informal y después de manera formal, utilizando todo lo que esté a su alcance. A partir de dicha reflexión y organizando al grupo en equipos de máximo tres personas, se procederá al intercambio de reflexiones por equipo para pasar luego a responder individualmente preguntas, preparadas para este momento y que aparecen más adelante en recuadro como "HOJA 3", con las conclusiones a las que haya arribado el equipo, asegurándose de que queden anotados argumentos claros y convincentes.

HOJA 3, ACTIVIDAD 1.
5. Si revisas detenidamente los datos: a) ¿Qué puedes decir acerca de las amplitudes?, ¿qué puedes decir de las estaturas? de ellos? y ¿Qué puedes decir de la afirmación que se intenta corroborar? b) ¿Qué puedes decir acerca de la variabilidad que presentan los datos recabados? ¿en qué te basas para decirlo? 6. ¿Cómo revisar y/o comparar los datos de otra forma? a) ¿Gráficamente? Tomando primeramente la amplitud y luego las estaturas, propón alguna forma de graficar los datos, explica por qué la seleccionas y realiza la gráfica que propones. b) ¿Numéricamente? Propón alguna(s) medida(s) estadística(s) de los datos, explica por qué la(s) seleccionas y realiza los cálculos convenientes. 7. De lo obtenido en el punto anterior ¿Qué puedes decir de la afirmación de Da Vinci analizando la representación gráfica y/o representación numérica. ¿Puedes concluir algo acerca de esta? ¿Por qué?

Momento de cierre.

El momento de cierre girara en torno a que los estudiantes puedan concluir y argumentar acerca de la situación dada y de las diferentes formas de representar a la variabilidad. Enseguida, en el recuadro que aparece como "HOJA 4", se presentan las preguntas preparadas para este momento de la actividad.

HOJA 4, ACTIVIDAD 1.

8. ¿Qué puedes decir acerca de la variabilidad que presentan el conjunto de datos, recabados y/o presentados?

9. ¿Cuántos formas de representar la variabilidad utilizaste?

10. ¿Cuál de las diferentes representaciones que utilizaste te permite tener más argumentos acerca de la variabilidad que tienen los datos? ¿Por qué?

11. Si se te proporcionan otros 30 datos adicionales de una muestra ya existente de medidas, ¿Qué crees que pase con la gráfica que resultaría agregando los datos adicionales? Argumenta.

Tanto en la parte de desarrollo como en la parte de cierre el maestro juega un papel importante en el proceso didáctico, mediando y guiando la actividad por lo cual es necesario que esté constantemente monitoreando el avance de los estudiantes así como guiándolos para que se alcancen el objetivo planteado para la actividad. Cuestionando el por qué en la elección tanto de los estadísticos como de las representaciones gráficas empleadas por los estudiantes.

4 Conclusiones

Como se dijo al principio de la presentación, éste reporte muestra parte del acercamiento a una problemática educativa que se planea abordar mediante una secuencia de actividades con la cual se pretende incidir específicamente en el desarrollo del significado que los estudiantes le atribuirán al objeto estadístico variabilidad. Algunas acciones adicionales se han realizado aunque quedan pendientes otras tareas para completar la secuencia de actividades, tareas como: afinar la incorporación de la tecnología como herramienta de apoyo de un desarrollo cognitivo, preparar instrumentos de observación de los estudiantes que experimentan la secuencia, explorar con estudiantes la secuencia completa, efectuar el análisis de observaciones y retroalimentar la secuencia.

Referencias

[1] ITSON (2004) Modelo curricular basado en competencias, Cd. Obregón Sonora. Recuperado del sitio: `http://antiguo.itson.mx/cda/innovacioncurricular/documentosbasicos/Modelo%20Curricular%20Itson.pdf`

[2] Batanero, Carmen. (2002). Los retos de la cultura estadística. Conferencia inaugural de las Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires. Recuperado del sitio: `http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm`

[3] Reading, C.; Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[4] Ben-Zvi, D.; Garfleid, J. B.; Chance, B.; Medina, E.; Roseth, C.; Zieffler, A. (2008) *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice.* Springer-Verlag, USA.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 103–109.

EL SIGNIFICADO DE OBJETOS MATEMÁTICOS EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE BACHILLERATO

Carol Yaneth Corral López* **Silvia Elena Ibarra Olmos**[†]

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: *caroly.corrall@correoa.uson.mx
[†]sibarra@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Se presentan los avances de una tesis de Maestría en Matemática Educativa, la cual consiste en una investigación que tiene como objetivo general la descripción del significado de objetos matemáticos de profesores de matemáticas de bachillerato. Para realizar tal descripción se toma como referente teórico la noción de significado que se plantea en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.

1 Introducción

En busca de la creación de un sistema nacional de bachillerato en un marco de diversidad, se implementó en México, a partir del ciclo escolar 2009-2010, la llamada Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS). Entre sus propósitos está el elevar la calidad de la educación, para que los estudiantes de este nivel mejoren su nivel de logros educativos y cuenten con las herramientas necesarias para tener acceso a un mayor bienestar y contribuyan al desarrollo nacional. La RIEMS sugiere, entre otras cosas, una serie de competencias que los jóvenes egresados de este nivel deben poseer, las cuales les permitirán desplegar su potencial, tanto para su desarrollo personal como para contribuir al de la sociedad.

Un elemento clave para alcanzar los propósitos de la Reforma, es el papel que desempeñará el docente. En el documento "Reforma Integral de la Educación Media Superior" emitido por la Subsecretaría de Educación Media Superior de la SEP en 2008, se menciona que "la actualización y profesionalización de los maestros es un requisito indispensable para que la Reforma Integral de la Educación Media Superior en México sea exitosa. Se requiere que los profesores, además de dominar sus materias, cuenten con capacidades profesionales que exige el enfoque por competencias".

El trabajo que se sugiere para el profesor en el aula es distinto al tradicional, dado que ahora se pretende que los profesores sean facilitadores del proceso de aprendizaje de los alumnos, teniéndose la expectativa, entre otras cosas, que los profesores participen en los diseños curriculares y toma de decisiones, de manera que sus experiencias contribuyan a la Reforma Integral.

Sin duda alguna los cambios que se produzcan en la enseñanza en este nivel educativo, y en particular en la enseñanza de las matemáticas, dependerán en gran medida de los profesores. En parte, los avances dependen de los cambios que se producen en el profesor a nivel individual, sus valores, formación, sus creencias y percepciones de los objetos matemáticos puestos en escena en el salón de clases.

Aún cuando se cuenta con planes y programas de estudio para nivel medio superior en el área de matemáticas, en los cuales se presentan los contenidos y objetivos a alcanzar en los cursos, de todas formas se realiza por cada docente previo a estar en el aula, un proceso de selección, organización y desarrollo de cada tema, que en mucho está permeado por sus concepciones, sus puntos de vista, sus experiencias, su trayectoria formativa y por los significados que se tengan del objeto matemático tratado. Definitivamente, en la medida en que las creencias y concepciones que los docentes de nivel medio superior tienen de los objetos matemáticos intervengan directamente en sus decisiones sobre su práctica docente, entonces resulta un problema de interés identificarlas y describirlas.

Otro aspecto que nos parece importante destacar es la formación profesional que poseen los docentes de matemáticas de nivel medio superior en México, la cual es muy diversa, debido a que para ocupar el puesto de docente en el bachillerato, no es necesario contar con preparación pedagógica. Esto está consignado en el documento oficial de perfiles profesionales de la Dirección General de Bachillerato (DGB). Se considera entonces que éste es otro elemento que impacta lo que un docente piensa sobre lo que es la matemática, su enseñanza y su aprendizaje.

El tema de *creencias y concepciones* de profesores y el impacto en su práctica docente ha sido estudiado con anterioridad. Así, es posible encontrar en la literatura de la especialidad, que se han asignado diversas definiciones de cada término y se han abordado en los diferentes niveles y ramas de la educación. Por ejemplo, Llinares y Pajares (citado en Moreno & Azcárate, 2003) dan las siguientes definiciones:

> "*Las creencias son conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicarse y justificar muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales. Las creencias no se fundamentan sobre la racionalidad, sino más bien sobre los sentimientos, las experiencias y ausencias de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo*".
> "*Las concepciones son organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, etc., que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan. El carácter subjetivo es menor en cuanto se apoyan sobre un sustrato filosófico que describe la naturaleza de los objetos matemáticos.* "

En Matemática Educativa, al igual que en otras áreas, consideramos que es también importante conocer las creencias y concepciones que los profesores tienen de los objetos matemáticos, pero en matemáticas el estudio de los objetos matemáticos implica más que las creencias y concepciones, más que los conceptos y la forma en la que un individuo puede expresar lo que para él es un objeto matemático. "Se pudiera argüir que el uso de un objeto queda implícito en el concepto que se tiene del objeto, sin embargo ello no es así, en especial con los objetos matemáticos" (Serrano, 2005). Por lo tanto, para complementar dichas concepciones, es importante estudiar también el uso que se haga de dicho objeto, es decir, lo que se es capaz de hacer con el objeto matemático tratado.

Un término relacionado con lo que estamos mencionando, es el de *significado,* término que ha tomado diversas aceptaciones no sólo en Matemática Educativa, sino también en teorías sobre el lenguaje, filosofía del lenguaje, psicología y pedagogía. Son también muy diversas las maneras como los profesores de matemáticas entienden este término, en particular en las discusiones sobre el aprendizaje, enseñanza, evaluación o currículo (Serrano, 2005).

En este contexto, nos interesa desarrollar una investigación centrada en estudiar los significados que profesores de matemáticas de bachillerato tienen sobre objetos matemáticos y encontrar cuál es la influencia que esos significados tienen en las prácticas de enseñanza de esos docentes.

Formalmente, declaramos que el objetivo general de este trabajo de tesis es: Identificar el significado que tienen, de los objetos matemáticos seleccionados, docentes de matemáticas de bachillerato y conocer cuál es el impacto que dicho significado tiene en su práctica docente.

2 Consideraciones teóricas y metodológicas

El marco teórico en el que se apoyará esta investigación es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). La literatura sobre el tema refiere que dicho enfoque teórico ha desarrollado una serie de herramientas para analizar, describir, explicar y valorar los procesos de instrucción matemática. Además, posee también herramientas para analizar el conocimiento tanto matemático como didáctico del profesor de matemáticas (Godino, 2009).

En términos metodológicos, se está planteando realizar una investigación de carácter cualitativo, más concretamente, se trata de un estudio descriptivo, en donde las técnicas principales que se utilizarán para recabar información serán entrevistas, cuestionarios y la observación no participante en el salón de clases.

Las entrevistas tienen como propósito conocer lo que piensan los profesores sobre aspectos nodales en su formación y ejercicio profesional. Los cuestionarios nos proporcionarán información sobre sus significados personales sobre algunos objetos matemáticos; finalmente la observación de su accionar en el aula, aportará datos sobre la manera en cómo esos significados personales permean su quehacer didáctico.

Los sujetos de estudio serán profesores de matemáticas del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Se seleccionó esta institución por considerar que se trata de un subsistema que es representativo del nivel educativo donde se está desarrollando esta investigación.

3 Avances

Los avances que se tienen al momento, consisten en la realización de una entrevista a tres profesores de matemáticas de la institución seleccionada. A continuación, a manera de ilustración, se presenta en la Tabla 1 la información que se obtuvo en una de las entrevistas.

Como se puede observar, la entrevista consta de tres bloques:

a) Un primer bloque donde se buscar tener información sobre la formación profesional del entrevistado, así como de su experiencia docente. Además de lo anterior, interesa conocer acciones de actualización disciplinar y didáctica recientes.

b) Un segundo bloque, donde las interrogantes están centradas en saber qué tanto conoce el profesor sobre los aspectos principales de la Reforma Integral de la Educación Media Superior.

c) Un tercer bloque en el cual se busca conocer las concepciones que el entrevistado tiene sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje.

BLOQUE 1. Información sobre la formación profesional, experiencia y acciones de actualización del profesor	
¿Cuál es su formación profesional? (licenciaturas y/o posgrados, aún si éstos son parciales).	Licenciatura y maestría en ciencias en matemáticas.
¿Cuántos años de experiencia docente tiene y en qué niveles educativos?	8 años en el bachillerato y 6 en el nivel superior.
Mencione tres cursos de actualización didáctica que haya tomado en los últimos dos años.	Es constante la capacitación que nos están brindando. El último fue un curso sobre diseño de reactivos de evaluación
Mencione tres cursos de actualización disciplinar que haya tomado en los últimos dos años.	Cursos sobre tutorías a los estudiantes, como tratarlos, para entender los cambios físicos y sicológicos que tienen, su impacto en el aprendizaje y las diferentes maneras de aprendizaje que tienen: visual, kinestésico, auditivo.
BLOQUE 2. Conocimiento sobre la Reforma Integral de la Educación Media Superior	
¿Cuál es su opinión general de la Reforma Integral de la Educación Media Superior?	La siento un poco compleja, primero porque tenemos que adecuarlo al modelo educativo que existe en nuestro país y esta reforma que se supone ya dio en el nivel básico, sin embargo los resultados no los veo favorables. Los estudiantes de secundaria a preparatoria no llegan muy bien que digamos.
Podría mencionarme algunos de los ejes básicos de dicha Reforma?	Risas, eje formativo, disciplinar, mmm. La verdad no recuerdo.

Desde su punto de vista, ¿en qué consiste el enfoque por competencias?	Siento que se trata más de vincular al estudiante con la sociedad, que no estamos ajenos de trabajar grupalmente, o sea cuando los estudiantes egresen no trabajarán de manera individual, sino que se tienen que conectar, por decirlo de alguna manera al mundo y a la sociedad en la que viven. Muchos nos aislamos, sobre todos los matemáticos, tenemos la idea de que nada más somos nosotros, pero en realidad debería de ser algo multidisciplinario en lo que se esté trabajando.
¿Qué entiende como una competencia?	No es tanto el nivel académico con el que el estudiante cuente, sino qué tan competente es la persona o el estudiante para desarrollar cierta actividad.
¿Podría mencionar algunas competencias?	No, no.
¿Cuál es el papel del profesor contemplado en esta reforma?	El de ser un tutor o un guía, es tratar que el estudiante descubra, con la guía del estudiante los conocimientos que debe de adquirir, pero esto no es fácil, se tienen 50 o 55 estudiantes, 50 minutos y tres días a la semana, es difícil por la cantidad de estudiantes y el tiempo que se tiene. Esta reforma estaría adecuada para grupos pequeños y donde todos tuvieran las ganas de aprender.
BLOQUE 3. Concepciones básicas sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje	
¿Qué es para usted la matemática?	¿Qué son para mí las matemáticas? Ehh, siento que las matemáticas son sumamente importantes, no solamente por la parte abstracta que manejan, sino todo el razonamiento lógico que nos dejan para poder resolver un problema de la vida cotidiana. No hablo solamente de la formalidad, sino la manera de estructurar un problema y dar respuesta, eso permite que se haga más sencillo. Siento que la matemática es muy importante no solamente para la formación de exactas y naturales, sino también para otras áreas. Porque si bien no está aplicado de manera directa, el razonamiento que eso les va a dejar para

¿Qué entiende por enseñar matemáticas?	Es algo complejo el proceso de enseñanza aprendizaje, son muchos factores lo que influyen el proceso de enseñanza aprendizaje. Yo le voy a dar las herramientas al estudiante, o no dárselas, quiero decir, es algo que va a lograr dentro del curso... hacer consciente al estudiante de un problema y que vea las diferentes maneras en que lo va a poder abordar.
¿Cuándo se podría decir que un alumno aprendió matemáticas?	La evaluación es un punto muy difícil, no es algo trivial ni sencillo, se tiene que dar porque uno tiene que ponderar a través de un número de lo que más o menos él trabajo, pero así como para detectar que tan bien o qué tan mal trabajó, pues no. En el momento en que ellos utilicen todo este razonamiento lógico para resolver un problema en su vida cotidiana, en esos momentos diré que aprendieron.
¿Podría mencionarme algunas competencias matemáticas?	Vuelvo a lo mismo. Para mí que sea competente será en la medida en la que pueda razonar cualquier problema que se le presente en la realidad, ya sea laboral o del tipo que sea.

Tabla 1. Entrevista con el profesor A.

Referencias

[1] Godino, J.D, Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.* Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 del artículo Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135.

[2] Flores Martinez P., Rico Romero L. Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje: Investigación durante las prácticas de enseñanza. 2003. Granada, España.

[3] SEP. Subsecretaría de Educación Media Superior de la Secretaría de Educación Pública de México, 2008. Reforma de la educación media superior en México: la creación de un sistema nacional de bachillerato en un marco de diversidad. Educación Media Superior, México, SEP.

[4] Subsecretaría de Educación Media Superior y la Dirección General del Bachillerato de México, 2003. Perfiles profesionales del personal docente. Educación Media Superior, México, SEP.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 111–116.

ANÁLISIS DE REACTIVOS DE MATEMÁTICAS DE LA PRUEBA ENLACE DESDE LA PERSPECTIVA DEL PROGRAMA DE ESTUDIOS EN LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Luis Enríquez Chapa* **Manuel Alfredo Urrea Bernal†**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: *luisenriquezchapa@yahoo.com.mx
†maurr@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Se presenta la estructura para el trabajo de investigación de la elaboración de tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora, el propósito de este estudio es realizar el análisis de reactivos de matemáticas de la prueba ENLACE que es aplicada a los estudiantes del último grado en la Educación Media Superior; considerando el contenido matemático que pretende evaluar el reactivo, así como el contenido matemático correspondiente del Programa de Estudio de este nivel educativo. EL análisis se centra en varios aspectos: claridad en el enunciado del reactivo, pertinencia de los distractores, aprendizajes que se quieren evaluar, debilidades de quienes no responden correctamente el reactivo (de acuerdo a lo que señala enlace).

1 Introducción

Las evaluaciones estandarizadas actualmente se están aplicando en diferentes niveles del sistema educativo mexicano, entre otras cosas con el propósito de conocer las debilidades que nuestro sistema tiene, algunas de estas evaluaciones son diseñadas por dependencias de carácter estatal, nacional o internacional. Una de las que tiene mayor incidencia sobre nuestro medio en la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Educativos (ENLACE), la cual evalúa, de acuerdo a sus planteamientos, la capacidad de poner en práctica, ante situaciones del mundo real, conocimientos y habilidades básicas (lectora y matemática) adquiridas a lo largo de la trayectoria escolar [1].

La prueba es aplicada a los estudiantes de nivel básico y del bachillerato que cursan el último grado de estudios ya sean de instituciones de carácter públicas o privado con reconocimiento de validez oficial por parte de la Secretaría de Educación Pública o por las entidades federativas, en escuelas de carácter autónomo y las que a ellas estén incorporadas. En este trabajo nos centramos en la prueba ENLACE que se aplica a estudiantes de bachillerato, los resultados más recientes que se tienen disponibles en este momento, con los resultados de la prueba que se aplicó en el mes de abril del año 2011, ésta fue la cuarta edición de la prueba ENLACE a 912,878 estudiantes de 12,755 escuelas.

2 Problemática de la educación matemática que se aborda

De los problemas que se presentan en la educación matemática, hay uno que es de suma importancia, la evaluación de los aprendizajes, y es en esta área donde podemos ubicar el presente trabajo, centrando la atención en una de las evaluaciones estandarizadas que se aplica a los estudiantes de tercer grado de bachillerato ENLACE. ENLACE es un examen que contiene reactivos de la materia de matemáticas, que pretenden ser problemas provenientes de actividades de la vida cotidiana del ser humano, y que el estudiante de nivel medio superior debe resolver. Para su resolución se supone que los estudiantes deben poner en juego las competencias desarrolladas a lo largo de los tres años de bachillerato, ya que la instrucción que recibe en ese nivel educativo está basada en el desarrollo de competencias.

Tal como se ha mencionado líneas arriba consideramos que la evaluación de los aprendizajes es uno de los temas más complejos del quehacer educativo, porque en él intervienen múltiples factores desde los relacionados con el docente quien es el responsable de organizar y planificar las acciones que debe desarrollar el estudiante para lograr los aprendizajes esperados, en base a los programas de estudio institucionales; por otra parte está el estudiante que es el sujeto sobre el que se centra la atención en el aula, cuya actuación está sujeta a una serie de factores en muchos casos que no dependen de él. Pretendemos analizar los reactivos de ENLACE a partir de los siguientes aspectos:

- Lo que ENLACE pretende evaluar.
- Lo que ENLACE realmente evalúa.
- La correspondencia del contenido del reactivo con el contenido de lo que marca el programa de estudios.
- Lo que argumenta el alumno que resuelve el problema.

Los temas matemáticos que se presentan en este análisis corresponden a los que están contenidos en los reactivos seleccionados para el análisis, de acuerdo a la estructura de la prueba los contenidos que se evalúan son: cantidad, cambios y relaciones, y espacio y forma.

3 Características del análisis

Las principales características del análisis de reactivos de la prueba ENLACE son las observaciones referidas a:

a) Claridad en la redacción del reactivo.
b) Consistencia acerca de la debilidad marcada por ENLACE a los estudiantes que no pudieron resolver satisfactoriamente el reactivo
c) Cómo resuelve el profesor el reactivo.
d) La consistencia de lo que evalúa el reactivo y lo que se enseña en clase.
e) Pertinencia de los distractores.

f) Contenidos y procesos que utiliza la prueba y comparación con los que normalmente usamos en clase

g) ¿Cómo resuelve el alumno el reactivo?

Revisando la información que se deriva de la aplicación, publicación y presentación de resultados de la prueba ENLACE, existen algunos aspectos susceptibles de análisis: es un instrumento que se utiliza como parámetro de evaluación de los centros educativos, confiabilidad de los resultados obtenidos y consistencia entre los contenidos que evalúa ENLACE y el de los programas oficiales de las asignaturas de matemáticas.

La importancia de la prueba ENLACE es que hace una evaluación en los centros educativos a nivel nacional, y con ello se dispone de información que nos permite tener indicios de las debilidades que tenemos en los centros educativos y así poder realizar acciones que coadyuven a realizar mejoras en los aspectos que corresponda. Por el impacto que dicho instrumento tiene es importante conocerlo a fondo, lo anterior nos permitirá tener una idea del grado de confiabilidad que se puede tener de los resultados que se obtienen de la aplicación de dicha prueba.

El contenido del reactivo y el programa de estudio

Para los contenidos y procesos que se evalúan en esta prueba; los reactivos están distribuidos por grupo de procesos a evaluar y por contenido matemático tal como se muestra en la tabla 1[1].

Tabla 1

CONTENIDOS	Procesos a evaluar			
	Reproducción	**Conexión**	**Reflexión y evaluación**	**Total**
Cantidad	6	7	7	20
Cambios y relaciones	5	8	7	20
Espacio y forma	6	8	6	20
Total	17	23	30	60

En la información que se presenta en la página de la prueba ENLACE se elaboran las siguientes preguntas ¿Qué mide y que no mide ENLACE?, centrándose en el nivel medio superior, y la respuesta que proporcionan es la siguiente:

Para valorar en qué medida los jóvenes egresados de este nivel educativo son capaces de aplicar a situaciones del mundo real conocimientos y habilidades básicas adquiridas a lo largo de la trayectoria escolar que les permitan hacer un uso apropiado de la lengua -habilidad lectora y la habilidad matemática[1].

ENLACE dentro del desarrollo de sus propósitos, y relacionándose con el contenido del programa de estudio, en el que se involucran las competencias genéricas y disciplinares basadas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior, maneja los siguientes aspectos referentes a los jóvenes egresados:

- ENLACE considera que los jóvenes egresados, serán capaces de aplicar a situaciones del mundo real los conocimientos y habilidades básicas adquiridas a lo largo de su trayectoria escolar.

- Se hace además una mención de los conocimientos y habilidades que el estudiante adquiere en el nivel medio superior deben considerarse como conocimientos específicos y que estén en concordancia con los ejes temáticos del programa de estudios del bachillerato, que corresponden a Razonamiento Matemático, Resolución de Problemas y Orientación Espacial, cada uno de ellos con sus respectivas habilidades y capacidades para desarrollar.
- De las materias que se estudian en este nivel educativo, los conocimientos básicos son referidos a lo que el ser humano requiere para solucionar situaciones de su sobrevivencia, de atención de las necesidades básicas, En la sociedad, la persona interactúa con otras personas, y se siguen patrones de conducta sociales, uno de ellos es la trayectoria escolar para la educación del individuo, y en la escuela se adquieren conocimientos que se incrementan al transcurrir los periodos escolares, de tal forma que la persona acumula estos conocimientos . Las situaciones del mundo real sólo se resuelven cuando el estudiante está en determinado grado comprometido con su estudio y su superación personal. Para la elaboración de reactivos de la prueba, deben considerarse situaciones a las que el estudiante enfrentará en sus actividades normales, de la vida cotidiana.
- En la prueba ENLACE se pretende que se midan tanto el dominio como habilidades desarrolladas, como para enfrentar un problema de la vida cotidiana.

En el programa de estudios para la Educación Media Suprior están contenidas las competencias que ha de desarrollar el joven bachiller, las aptitudes y habilidades, los atributos de cada competencia genérica; además se menciona que se requiere desarrollar en los jóvenes habilidades para la vida y que éstas se pueden medir. Dentro de las competencias señaladas en los programas de estudio se destacan las competencias matemáticas que deben desarrollar los estudiantes del nivel medio superior, entre ellas destacan aspectos importantes como el análisis y resolución de problemas, así como observación y análisis de una determinada situación para matematizarla. En el programa de estudios para el nivel medio superior se pretende promover las competencias matemáticas, que se presentan en general como capacidades y habilidades, clasificadas según se indica en la tabla 2[3].

Como parte de lo que se pretende en este análisis es revisar la concordancia de las competencias matemáticas que se indican en el programa de estudios, con las que se insertan en la prueba ENLACE para el nivel medio superior, procedemos a relacionar ambas estructuras en lo que es el trabajo medular de esta tesis.

Los conocimientos básicos podrán ser suficientes para poder enfrentar y resolver los reactivos de la prueba ENLACE, aunque algunas de las habilidades parecieran descartarse para la práctica de la resolución de los reactivos, no se pueden aislar, por ejemplo la que refiere "expone trabajos" podrá tener relevancia ya que el objeto matemático aprendido y expuesto en ese trabajo llega a ser de tal magnitud que es lo que ayuda a resolver el ejercicio, siempre a partir de las experiencias y conocimientos previa del estudiante. En alguna ocasión expuso frente a un grupo de personas, pudiéndose reducir a un equipo de trabajo en el aula, sin olvidar que pudo ser el punto de vista aportado por el estudiante o por algún miembro del equipo y que resulta en lo esencial para dar la respuesta acertada, tal como lo señala G.

Tabla 2

RAZONAMIENTO MATEMATICO	RESOLUCION DE PROBLEMAS	ORIENTACION ESPACIAL	EXPRESION ORAL Y ESCRITA
Analizar	Comprender	Relacionar	Exponer trabajos
Clasificar	Identificar	Representar mentalmente	Expresar con coherencia
Realizar inferencias y deducciones	Interpretar	Situar objetos	Expresar por medio de fórmulas
Aplicar	Representar	Representar gráficamente	Utilizar terminología y notación matemática
Resolver problemas	Relacionar		Expresar gráficamente
Evaluar	Elaborar estrategias de solución		Plantear problemas
	Resolver		Sintetizar
	Comprobar		
	Evaluar		
	Transferir		

Polya, (1978), "Si llegamos a recordar algún problema ya resuelto que esté estrechamente relacionado con nuestro problema actual, podemos considerarnos con suerte".

4 Comentarios finales

La prueba ENLACE está "Integrada por reactivos de opción múltiple, que con diseños apropiados, facilitan la exploración de conocimientos, habilidades y competencias, la aplicación de reglas y procedimientos, el análisis de casos específicos o la vinculación de situaciones, entre muchas otras" [1], en cada caso el estudiante tiene cuatro opciones para seleccionar una se supone que en todos los casos existe respuesta correcta y que es sólo una respuesta correcta, pero una primer revisión a los reactivos nos ha permitido encontrar algunos que no tiene respuesta correcta o bien que hay más de una respuesta correcta.

Otro aspecto que se destaca en la prueba ENLACE es la interpretación que se hace de las debilidades que muestran los estudiantes que no responden correctamente un reactivo, también en una primer revisión que se ha hecho de los reactivos y de la forma en que lo resuelven los estudiantes y profesores, hemos identificado que la debilidad que está presente no necesariamente corresponde con lo dicho por ENLACE.

En el desarrollo de esta tesis, se trabajará en el análisis de la relación de los contenidos matemáticos y procesos que evalúa ENLACE con respecto a las competencias matemáticas que ha de desarrollar el estudiante de acuerdo a lo que se establece en los programa de estudios del Nivel Medio Superior [3]. Por otra parte se está trabajando con los estudiantes en la resolución de los reactivos de pruebas pasadas, con el propósito de que hagan explicitas las estrategias que utilizan al resolverlos y de esa información poder identificar las debilidades que están presentes cuando los estudiantes no responder correctamente, y compararla con las debilidades que presenta ENLACE.

Un aspecto del trabajo que se está iniciando está relacionado con la identificación de los aspectos teóricos que deberán sustentar el trabajo.

Referencias

[1] Secretaría de Educación Pública. (2011). Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Educativos. Recuperado el 2 de diciembre de 2011de `http://www.enlace.sep.gob.mx/`

[2] Cázares, Leslie. (2008). Planeación y evaluación basada en competencias. México D.F.: Editorial Trillas.

[3] Secretaría de Educación Pública. SEMS. (2008). Programa de estudios de Matemáticas. México: SEP.

[4] Polya, Gyorgy. (1978). Cómo plantear y resolver problemas. México D.F.: Editorial Trillas

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 117–123.

ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA ÁLGEBRA DE VECTORES

Ángel García Velázquez* **María Guadalupe Amado Moreno†**
Reyna Arcelia Brito Páez‡

*†Departamento de Ciencias Básicas, Instituto Tecnológico de Mexicali
e-mail: *angel.g20@hotmail.com
†lupitaamado@yahoo.com.mx

‡Departamento de Desarrollo Académico, Instituto Tecnológico de Mexicali
e-mail: reynabrito59@gmail.com

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta de actividades didácticas para álgebra de vectores cuyo objetivo es proporcionar al profesor herramientas que complementen el proceso de enseñanza y aprendizaje de sus estudiantes. Las actividades didácticas están elaboradas en hojas de Excel con el propósito que el profesor guíe el descubrimiento de los estudiantes para que adquieran las competencias básicas del álgebra de vectores que forma parte del contenido inicial de la asignatura de cálculo de varias variables de las carreras de ingeniería del Subsistema de Institutos Tecnológicos.

1 Introducción

El propósito de este trabajo es proporcionar a los profesores del Instituto Tecnológico de Mexicali (ITM), una propuesta de actividades didácticas que permitan complementar en los estudiantes las competencias necesarias para desarrollar habilidades en álgebra de vectores.

El proyecto incluye el diseño y elaboración de actividades didácticas de álgebra de vectores y la validación en los grupos de cálculo vectorial del ITM. Se presenta la primera parte que comprende la propuesta de actividades didácticas para los temas de interpretación geométrica de un vector en dos dimensiones, vectores paralelos y perpendiculares, conceptos básicos de magnitud, dirección y componentes de un vector, vector unitario y operaciones de suma y producto escalar entre vectores, utilizando la hoja de cálculo de Excel. La segunda parte del proyecto será la validación en un grupo control y otro piloto de cálculo vectorial del ITM.

2 Fundamentación

Aún y cuando se cuenta con diversas herramientas tecnológicas para apoyar el aprendizaje de las matemáticas, todavía existen profesores que siguen enseñando de manera tradicional. Por lo que estas actividades didácticas favorecen el uso de Microsoft Excel y permite que los estudiantes visualicen la representación numérica y gráfica de álgebra de vectores. Todo esto en un contexto interactivo y compartido entre el profesor y el estudiante, como lo señala Díaz-Barriga y Hernández (2002).

Para Fernando Hitt (2009) las experiencias matemáticas en el aula a través de actividades didácticas bajo el contexto de aprendizaje colaborativo, debate científico y auto-reflexión favorecen el aprendizaje tanto para el estudiante como para el profesor.

Las actividades didácticas que se presentan están creadas considerando que serán un complemento de enseñanza y los estudiantes deberán participar junto con el profesor en las acciones señaladas en cada actividad, de tal forma que se dé un debate y auto-reflexión. Algunas actividades están diseñadas de forma que el estudiante pueda reproducirlas fuera del aula y en otras deberá ir descubriendo el conocimiento a adquirir (Pimienta, 2005).

El contenido de álgebra de vectores se desarrolla a través de 6 actividades didácticas que fueron diseñadas en 6 hojas de cálculo de Excel, que permiten al profesor guiar al estudiante en la manipulación de diferentes celdas de la hoja de cálculo complementando el proceso de enseñanza del álgebra de vectores (Zorzoli, 2004). Se presentan dos de las 6 actividades didácticas desarrolladas.

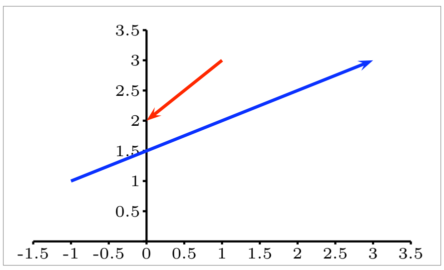
3 Actividades didácticas representativas de la propuesta

La hoja 1 de Excel corresponde a graficación de dos vectores. La actividad didáctica está compuesta por 10 acciones en las cuales el estudiante, guiado por el profesor, traduce representaciones numéricas en gráficas de vectores en dos dimensiones, caracteriza el paralelismo y la perpendicularidad entre vectores y tiene la posibilidad de modificar la hoja de cálculo de Excel y realizar sus propias interpretaciones del tema.

A continuación se describe la actividad didáctica de graficación de dos vectores.

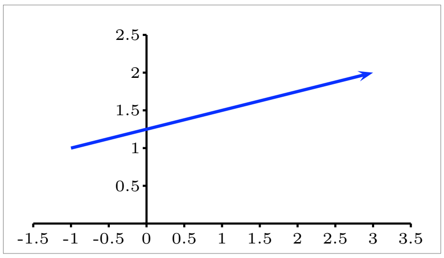
Acción 1: Asigne valores cualesquiera a las coordenadas de los puntos iniciales y finales de los dos vectores.

	VECTOR 1	VECTOR 2
Coordenadas del punto inicial	(−1 , 1)	(1 , 3)
Coordenadas del punto final	(3 , 3)	(0 , 2)



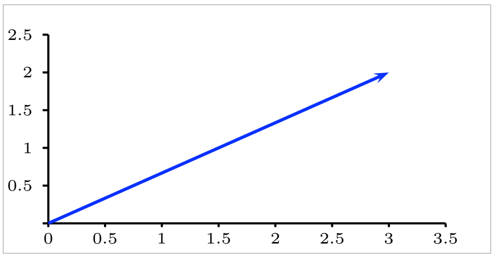
Acción 2: Escriba las coordenadas del punto inicial y final del vector 2 igual a cero. Por el momento, solo se manipulará al vector 1.

	VECTOR 1	VECTOR 2
Coordenadas del punto inicial	(-1 , 1)	(0 , 0)
Coordenadas del punto final	(3 , 2)	(0 , 0)



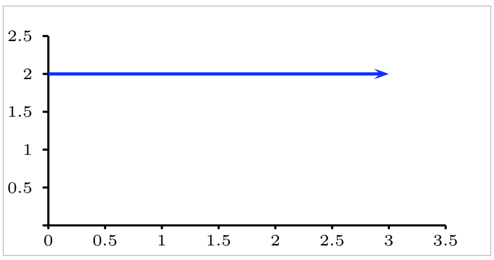
Acción 3: Escriba las coordenadas del punto inicial del vector 1 como (0,0) y las coordenadas del punto final como (3,2). El profesor favorece un debate sobre el vector obtenido.

	VECTOR 1	VECTOR 2
Coordenadas del punto inicial	(0 , 0)	(0 , 0)
Coordenadas del punto final	(3 , 2)	(0 , 0)



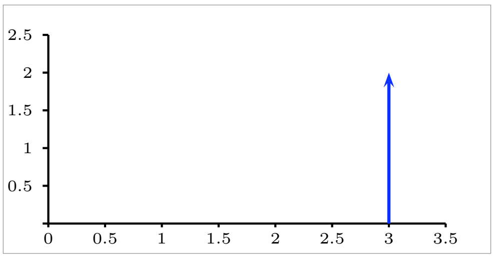
Acción 4: Escriba las coordenadas del punto inicial del vector 1 como (0,2) y conserve las coordenadas del punto final. El estudiante hace una auto-reflexión y explica lo que observa.

	VECTOR 1	VECTOR 2
Coordenadas del punto inicial	(0 , 2)	(0 , 0)
Coordenadas del punto final	(3 , 2)	(0 , 0)



Acción 5: Modifique las coordenadas del punto inicial del vector 1 escribiendo (3,0) conservando las coordenadas del punto final. Después de la auto-reflexión el estudiante explica las diferencias observadas respecto al vector que se obtuvo en la acción 4.

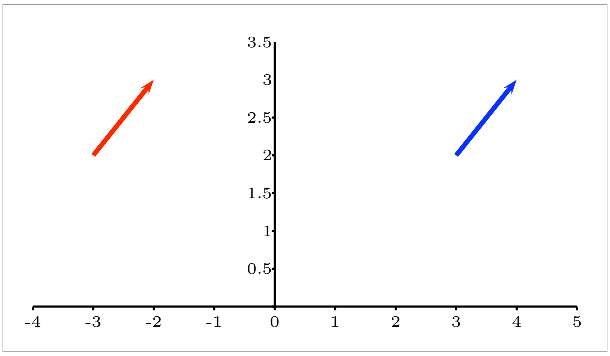
	VECTOR 1	VECTOR 2
Coordenadas del punto inicial	(3 , 0)	(0 , 0)
Coordenadas del punto final	(3 , 2)	(0 , 0)



Acción 6: De lo observado en las acciones 4 y 5, el profesor genera un debate que permita que los estudiantes concluyan sobre la magnitud del vector vertical y horizontal.

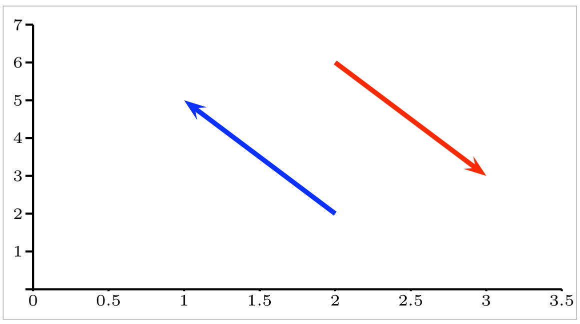
Acción 7: Represente el vector con coordenadas iniciales (3,2) y finales (4,3), trace un vector paralelo en cada uno de los cuadrantes. ¿Qué puede concluir de las relaciones $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y $\dfrac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$?

	VECTOR 1	VECTOR 2
Coordenadas del punto inicial	(3 , 2)	(−3 , 2)
Coordenadas del punto final	(4 , 3)	(−2 , 3)



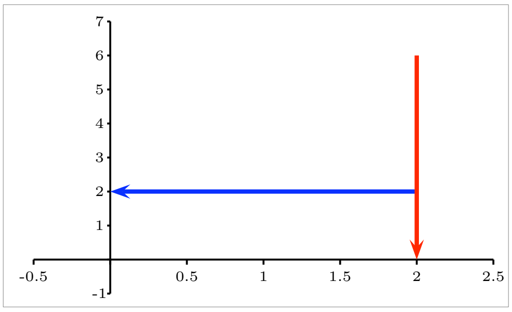
Acción 8: Dado el vector con coordenadas $(x_1, y_1) = (2, 2)$ y $(x_2, y_2) = (1, 5)$ trace un vector antiparalelo (dirección opuesta). Sean (x_1', y_1') y (x_2', y_2') las coordenadas del vector antiparalelo, ¿Qué puede concluir de las relaciones $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y $\dfrac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$?

	VECTOR 1	VECTOR 2
Coordenadas del punto inicial	(2 , 2)	(2 , 6)
Coordenadas del punto final	(1 , 5)	(3 , 3)

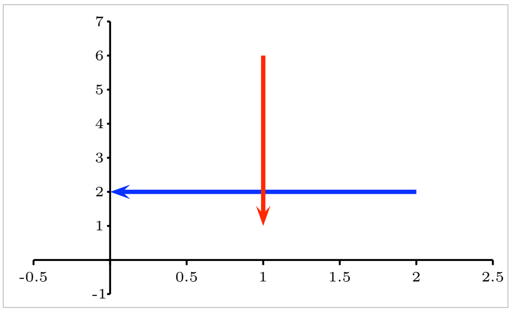


Acción 9: Utilizando las coordenadas de los puntos iniciales (2,2) y finales (0,2), obtenga las coordenadas de un vector perpendicular a este. ¿Qué puede concluir de las relaciones $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y $\dfrac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$?

	VECTOR 1	VECTOR 2
Coordenadas del punto inicial	(2 , 2)	(2 , 6)
Coordenadas del punto final	(0 , 2)	(2 , 0)



	VECTOR 1	VECTOR 2
Coordenadas del punto inicial	(2 , 2)	(1 , 6)
Coordenadas del punto final	(0 , 2)	(1 , 1)



Acción 10: El profesor genera un debate que permita contestar si la aseveración hecha en la acción 9 es válida para vectores perpendiculares que no son verticales ni horizontales.

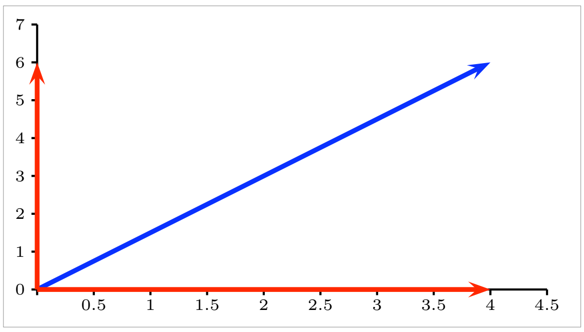
La hoja 2 de Excel corresponde al tema de componentes de un vector. La actividad didáctica está compuesta por 6 acciones que permitirán deducir al estudiante el cálculo de las componentes y la magnitud de un vector.

Acción 1: Estableciendo las coordenadas del punto inicial (0,0) y las del punto final (4,6) se le pide al estudiante observar el vector obtenido y contestar si existe una relación entre las componentes horizontales y verticales del vector respecto a las coordenadas del punto inicial, de ser así que describa esta relación y la compruebe colocando diferentes valores en la coordenada final del vector.

	VECTOR 1		
		COMPONENTE HORIZONTAL	4
Coordenadas del punto inicial	(0 , 0)	COMPONENTE VERTICAL=	6
Coordenadas del punto final	(4 , 6)	Magnitud del vector=	7.21

REPRESENTACIÓN DEL VECTOR

A = ⟨ 4 , 6 ⟩



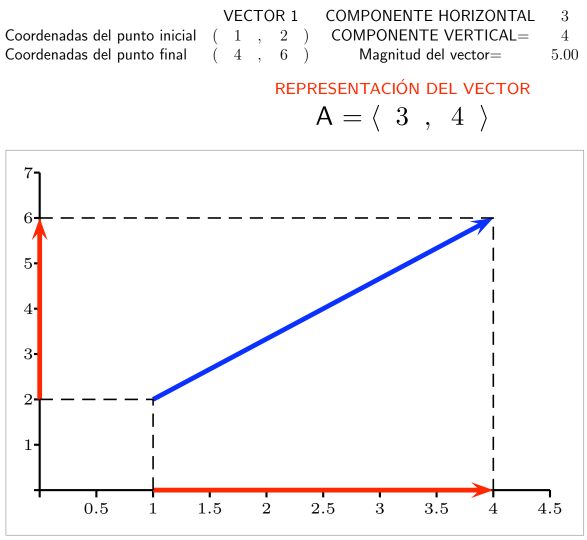
Acción 2: El profesor genera un debate entre los estudiantes y les cuestiona primeramente si es posible afirmar que al tener un vector que inicia en el origen sus componentes son iguales

a las coordenadas del punto final, para cualesquier vector. Después qué pueden afirmar sobre la magnitud de un vector que inicia en el origen y termina en cualesquier punto sobre el eje horizontal y finalmente qué pueden afirmar sobre la magnitud de un vector que inicia en el origen y termina en cualesquier punto sobre el eje vertical.

Acción 3: El profesor solicita a los estudiantes que investiguen por qué a las componentes a lo largo de los ejes, se les da el nombre de componentes rectangulares y que utilice el teorema de Pitágoras para obtener una ecuación que exprese la magnitud de los vectores en función de sus componentes. Posteriormente discuten lo investigado en el aula.

Acción 4: El profesor cuestiona a los estudiantes si la ecuación obtenida en la acción 3 es válida para cualesquier vector, posteriormente solicita que comprueben la ecuación colocando diferentes valores en las coordenadas del punto inicial y final del vector.

Acción 5: El profesor indica que modifiquen las coordenadas iniciales a (1,2) y las coordenadas finales a (4,6) y que observen la figura y obtengan una relación entre las coordenadas dadas y los valores de las componentes obtenidas.



Acción 6. El profesor solicita al estudiante que modifique la ecuación obtenida en la acción 3 para calcular la magnitud del vector que no inicia en el origen, que escriba la ecuación obtenida y fomenta un debate para que respondan si es válida para vectores que inician y/o terminan en cualesquier cuadrante.

4 A manera de conclusiones

El cálculo de varias variables se contempla en la formación de los estudiantes de ingeniería, permite la definición de diferentes herramientas geométricas que facilitan el análisis, modelación y solución de problemas de diversas áreas del conocimiento. Además del conocimiento matemático, el profesor requiere buscar actividades didácticas que faciliten el aprendizaje de los estudiantes y que se apoye en el uso de herramientas tecnológicas.

Actualmente la mayoría de las computadoras cuenta con Microsoft Excel, por lo que, el uso de las hojas de cálculo en la enseñanza de las matemáticas es otra herramienta que el profesor puede utilizar para despertar el interés en los estudiantes. Se espera que las actividades propuestas en la hoja de cálculo faciliten la enseñanza y el aprendizaje del álgebra vectores.

Es importante que el profesor promueva debates y auto-reflexión entre los estudiantes que permitan reafirmar los conocimientos adquiridos, realizar las modificaciones pertinentes en la hoja de cálculo de Excel y lo motiven a realizar sus propias investigaciones.

Referencias

[1] Díaz-Barriga, A. F., & Hernández, R. G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo.* México. Editorial McGrawHill.

[2] Pimienta, P. J. (2005). *Metodología constructivista.* México. Editorial Pearson/Prentice Hall.

[3] Hitt F. (2009). *Resolución de situaciones problema y desarrollo de competencias matemáticas en ambientes de aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión (ACODESA).* Memorias del Primer Seminario Internacional sobre Resolución de Problemas y Uso de la Tecnología Computacional. México.

[4] Zorzoli G., (2004). *Aprendiendo Álgebra y Geometría con Microsoft Excel.* Argentina. Grupo Guía. Omicron System.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 125–130.

EVALUACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL CURSO DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA DE LA LICENCIATURA EN TRABAJO SOCIAL EN UN AMBIENTE A DISTANCIA

Irma Nancy Larios Rodríguez* **María Elena Parra Ramos†**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: *nancy@gauss.mat.uson.mx
†meparra@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En el presente trabajo se muestran los resultados obtenidos en un curso de Estadística Descriptiva en un ambiente virtual, el cual fue implementado durante el semestre 2011-1 con estudiantes de la Licenciatura en Trabajo Social de la Universidad de Sonora con el fin de complementar lo presentado en un estudio previo titulado "Consideraciones para el diseño de un curso de estadística en ambiente virtual o a distanci" [1], expuesto en la XXI Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas en el cual se indicaba que, se abordaría lo referente a la etapa de evaluación y revisión que es la que permite la restructuración del diseño [2] posteriormente.

1 Introducción

La Universidad de Sonora; en el ciclo 2010-2 ofertó por vez primera, programas educativos de licenciatura bajo el esquema de modalidad a distancia, iniciando con la Licenciatura en Trabajo Social. El presente trabajo se circunscribe dentro de este contexto; la enseñanza de la Estadística bajo un ambiente virtual, ya que el plan de estudios de la licenciatura en mención considera un curso de Estadística Descriptiva, siendo las que suscriben el presente trabajo las responsables del diseño del curso. Durante el semestre 2011-1, se impartió por primera vez el curso, de tal forma que en este trabajo se presentan los resultados obtenidos y se plantean, en base a los resultados y/o evaluación de la implementación una serie de recomendaciones para la restructuración del mismo. Como antecedente de este trabajo se tiene el trabajo titulado "Consideraciones para el diseño de un curso de estadística en ambiente virtual o a distancia" [1], presentado previamente. Para el diseño del curso se consideraron las siguientes interrogantes: ¿Cómo lograr una interacción eficiente y/o oportuna entre asesor-estudiante, entre pares (estudiante-estudiante) y estudiante-recursos?; para lograr desarrollar aprendizajes significativos en el estudiante ¿Qué recursos es pertinente incorporar al diseñar el Curso de Estadística Descriptiva en la modalidad a distancia? ¿Cómo organizar los recursos? ¿Cómo evaluar?

Después de llegar a ciertos acuerdos alrededor de los cuestionamientos; teniendo en cuenta los elementos teóricos descritos en el trabajo señalado en [1], se procedió a la elaboración del guion instruccional. Para el guion instruccional fue necesario considerar, incorporar y/o diseñar los siguientes recursos y/o elementos: Programa del curso de Estadística Descriptiva modalidad presencial, uso de Plataforma Moodle, creación de Foros, Chat y Cuestionarios, uso de Excel, uso de PowerPoint, uso de Applets Estadísticos, elaboración de actividades de aprendizaje por unidad temática, elaboración de notas de apoyo, desarrollo de talleres integradores por unidad temática e impulsar trabajo de investigación por parte de los estudiantes.

2 Elementos teóricos para la evaluación y revisión del curso

La etapa de evaluación y revisión que es la que permite la restructuración del diseño de un curso modalidad a distancia, es una parte muy importante a considerar lo cual es abordado por varios autores entre los que se encuentran Molina y Molina [2] quienes señalan que una revisión de experiencias de aplicación de modelos a distancia nos permite darnos cuenta de que la aplicación de las nuevas tecnologías no siempre resulta exitosa y a veces está lejos de ser satisfactoria en términos de logros, señala que las razones son diversas y que muchos de estos fracasos se deben a los siguientes factores los que considera deben tomarse en cuenta al reestructurar el curso:

- Aspectos meramente técnicos entre los que se encuentra fallas en el equipo, en la señal entre otros.
- Cuestiones sociales como el de no contar aún con una cultura de esta modalidad de educación persistiendo el método presencial.
- Poca o nula importancia a la parte psicopedagógica, entre otros.
- Además recomiendan que las características del medio tecnológico que será utilizado deben ser consideradas para el diseño y planeación de los medios didácticos y dan un especial énfasis a la conformación de equipos de trabajo encargados de plasmar tanto lo relativo al contenido, como los aspectos psicopedagógicos, didácticos y tecnológicos implicados en el proceso

Por su parte Mc. Anally [3] menciona que la instrumentación exitosa de un curso en línea no depende únicamente de factores técnicos relacionados con el diseño operativo y/o estético, ya que involucra factores humanos y pedagógicos determinantes. Algunos de los aspectos que considera a tomar en cuenta son el diseño del ambiente de aprendizaje, su estructura, las tareas rutinarias, y el modelo instruccional adoptado.

Díaz [4] caracteriza a los estudiantes a distancia que pueden tener éxito en los estudios bajo la presente modalidad, lo que puede tomarse en cuenta al momento de seleccionarlos:

- Están altamente motivados.
- Son independientes.
- Son estudiantes activos.
- Tiene habilidades para administrar su tiempo y organizarse.
- Tiene la disciplina para estudiar sin recordatorios externos.
- Puede adaptarse a ambientes de estudio nuevos.

3 Descripción de los resultados obtenidos, comentarios y recomendaciones

Inicialmente en el curso sólo participaron siete estudiantes del total de 13 que estaban inscritas en la plataforma. El curso se desarrolló del 21 de abril al 20 de marzo del 2011, sin embargo la mayoría de los estudiantes finalizaron sus actividades con tres semanas de retraso. Al finalizar el curso cinco estudiantes aprobaron y dos de ellas abandonaron el curso prácticamente al iniciar.

Para la acreditación del curso, se consideraron los siguientes elementos: realización de las actividades de aprendizaje, participación en foros, tres evaluaciones y la realización de trabajos de investigación.

La participación de los estudiantes en los foros fue pobre, el recurso de chat no fue utilizado e incluso la comunicación vía correo electrónico no fue utilizada en los tiempos pertinentes, que permitiera una real retroalimentación.

3.1 Comentarios sobre el diseño del curso

a) El curso constó de demasiadas actividades de aprendizaje que deben ser evaluadas por el asesor, esto hace que el trabajo del asesor sea muy extenuante, si además se considera que es necesario realizar algunas retroalimentaciones a las actividades de aprendizaje, vuelve más pesada esta actividad.

b) Algunas de las actividades de aprendizaje no funcionaron como se esperaba, por lo cual es necesario modificarlas, eliminarlas o sustituirlas por otras.

c) Los objetivos planteados en los foros, no fueron alcanzados, hubo una casi nula participación en ellos.

d) Las actividades de aprendizaje fueron diseñadas con la intensión de cubrir tanto los cálculos estadísticos, como aspectos de interpretación de los cálculos realizados en el contexto de las problemáticas planteadas, así como toma de decisiones, sin embargo las actividades realizadas por casi todo los estudiantes estuvieron centradas en el cálculo, dejando a un lado los aspectos cualitativos.

3.2 Sugerencias generales

a) Es necesario realizar modificaciones al curso de tal forma que este más centrado en los procesos y menos en los contenidos, esto puede lograse, por ejemplo, si se vincula con algún taller integrador o otra materia especifica de la licenciatura de Trabajo Social, donde la materia de Estadística fuera de apoyo o diseñando una práctica integradora que se desarrolle a lo largo del curso. Lo anterior también consideramos impacta en la motivación de los estudiantes.

b) Se requiere que los estudiantes manejen el software Excel o algún software estadístico para realizar cálculos, graficas, tablas, funciones estadísticas. Lo anterior permite que el curso se centre más en los aspectos cualitativos que en los cuantitativos. En el diseño de curso se dio por hecho que los estudiantes manejaban al menos un poco de Excel, pero en la mayoría de los casos no fue así.

c) El curso fue valorado por los estudiantes como difícil, más aún porque los medios de comunicación sincrónicos y asincrónicos de la plataforma no resultaron útiles. Es necesario buscar estrategias para lograr un mayor uso de éstos recursos por parte de los estudiantes.

d) Hay que incorporar el uso de Wikis, como una estrategia de trabajo colaborativo entre los participantes.

e) Como parte del rediseño del curso se debe separar en las actividades a aprendizaje los procedimientos de cálculos, de los aspectos cualitativos que permita que la plataforma evalué los aspectos cuantitativos y el asesor los aspectos cualitativos. En ese sentido se puede incorporar en el rediseño del curso el software MapleTA, este último como un recurso que ayude al profesor a realizar el trabajo de evaluación, así como para que los estudiantes puedan conocer los resultados de las actividades de cálculo de manera instantánea.

f) En definitiva la enseñanza en un ambiente virtual es muy demandante, ya que el trabajo que se realiza es prácticamente individualizado, en ese sentido no es recomendable trabajar con grupos numerosos. Creo que aún realizando las modificaciones antes señaladas, un curso bajo esta modalidad debiera tener a lo más veinte estudiantes, de otra forma se corre riesgo de que la atención a los estudiantes no sea de calidad.

g) El curso no debiera programarse en forma tan intensiva, ya que no permite la maduración de los conceptos fundamentales.

h) Por lo novedoso que puede ser para los estudiantes el trabajo en un ambiente virtual, en este primer momento (de pilotaje) es pertinente tener consideraciones en relación a los plazos de envío de actividades de aprendizaje y/o participación en los foros a los estudiantes, sin embargo hay que tener cuidado con ese aspecto, porque puede ocasionar una forma disfuncional de trabajo. Todos los participantes en la modalidad a distancia tienen que organizar sus actividades para cumplir con las agendas establecidas en los cursos, incluso creo que los márgenes deben estar establecidos explícitamente en las agendas y no admitir trabajos por fuera de los plazos establecidos en ellas.

i) Se puede concluir, que en lo general los estudiantes, tuvieron problemas en la organización del tiempo que les permitiera enviar a la plataforma las actividades en los tiempos señalados.

j) Se detectó que los estudiantes tienen problemas para comunicarse en forma escrita, lo anterior es una seria dificultad en los alances de los objetivos plateados en el curso, dado que es esta forma de comunicación esencial en la educación a distancia.

k) La plataforma funciono perfectamente, siempre fue posible ingresar y trabajar en ella sin problemas. Particularmente el personal responsable de su funcionamiento son sumamente profesionales y eficientes, en todo momento atendieron en tiempo y forma las solicitudes realizadas.

l) Por último, se considera que, los estudiantes que estudian en un ambiente a distancia deben contar con una serie de habilidades que es necesario definir, como por ejemplo, la habilidad para organizar su tiempo, la de expresarse de forma escrita adecuadamente, realizar las actividades curriculares sin recordatorios, etcétera, para poder caracterizar a los estudiantes que pueden desenvolverse exitosamente en la educación a distancia.

4 Comentarios finales

Es evidente que la educación a distancia significa un cambio radical a la educación presencial; desde la misma concepción de la educación a distancia, hasta los mecanismos de acción, administración, diseño, implementación y evaluación por mencionar algunas consideraciones. Sin embargo; cada vez son más las instituciones educativas que ofrecen cursos a distancia, las aulas empiezan a convertirse en espacios virtuales de estudio, siendo por lo tanto la educación en esta modalidad un campo amplio de investigación, en ese sentido es importante continuar con trabajos en esa dirección. A pesar de que este trabajo fue un primer acercamiento al diseño de un curso de estadística en la modalidad a distancia, los resultados obtenidos nos permiten incorporar elementos tanto en el diseño de curso, como a las características necesarias que deben de poseer los estudiantes en esta modalidad. Adicionalmente se señala la necesidad de que todas las instancias institucionales (profesores responsables de curso, responsables académicos del proyecto de la Lic. en Trabajo Social y personal involucrado en el diseño y concreción del curso de la Dirección de Desarrollo académico e Innovación Educativa, así como de los autores de contenido del mismo) que participan en el desarrollo de la educación a distancia se reúnan para considerar los cambios que se consideren pertinentes por todos los involucrados y así poder incorporarlos; lo que permitiría seguir avanzado en la mejora de la educación en esta modalidad.

Referencias

[1] Larios, N. y Parra, M. (2012). Memorias de la XXI Semana de Investigaciòn y Docencia en Matemàticas, en `http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/XIX/MemoriasXIX.pdf`, recuperado en enero 2012

[2] Molina, A.M & Molina, A.J. (2002). *Diseño instruccional para la educación a distancia,* en: `http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=37302408`. Recuperado el 8/11/2010.

[3] McAnally-Salas, L.S. y C. Armijo V *La estructura de un curso en línea y el uso de las dimensiones del aprendizaje como modelo instruccional*, en: `http://www.rieoei.org/deloslectores/McAnally.PDF`. Recuperado en enero del 2012.

[4] Díaz, J. *El estudiante a distancia exitoso*, en: `www.uv.mx/jdiaz/aprenderlinea/elestudianteexitoso.doc`, recuperado en enero del 2012.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 131–136.

SISTEMATIZACIÓN DE LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES

Carlos López Ruvalcaba* **Mario Silvino Ávila Sandoval**
Luis Esteban Macías

Departamento de Física, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
e-mail: *clopez@uacj.mx

Resumen

El presente artículo expone una sistematización de la generalización de patrones matemáticos de primero, segundo y tercer grado, por diversos métodos que emplean diversos tipos de registros de representación semiótica y que representan una herramienta didáctica relevante para el desarrollo del razonamiento inductivo de estudiantes situados en un nivel previo al estudio del álgebra formal. En el desarrollo de las diversas soluciones a las generalizaciones, se exhibe una secuencia lógica que posibilita su implementación en el contexto escolar, ya que la mencionada temática, se presenta solo ocasionalmente en los textos de nivel secundaria o preparatoria y sólamente en sentido lúdico o de curiosidad matemática, privándose de la posibilidad de desarrollar importantes habilidades necesarias en el aprendizaje del álgebra y la matemática en general.

1 Introducción

El desarrollo de habilidades de generalización de patrones matemáticos dentro del ejercicio escolar, tiene una notable relevancia en los aprendices de matemáticas, que pocas veces es explorado por los docentes, debido a que el trabajo con este tipo de regularidades y su generalización, prácticamente están ausentes en el currículo escolar. Entendemos por patrón matemático como "algo" que se repite con regularidad tanto en el plano aritmético como geométrico. Algunos autores como Zazkis y Liljedahl plantean que los patrones matemáticos son el alma y corazón de las matemáticas y que a diferencia de la resolución de ecuaciones o la manipulación de números enteros, no siempre se presentan como un tópico o actividad curricular y que algunos maestros los ven solo como una actividad lúdica o recreacional y que sin embargo, consideran que esta actividad es en la que está basada el álgebra y toda la matemática en general [1]. Por otro lado, Krutetskii clasifica la generalización como una de las habilidades cognitivas más importantes que puede mostrar un estudiante [2]. En concordancia con lo anterior, Mason llama a la generalización el latido de las matemáticas [3]; así mismo, Vogel menciona que el análisis de patrones matemáticos y la descripción de sus regularidades y propiedades, es uno de los objetivos de las matemáticas [4], mientras que Sriraman establece que debido al pensamiento de orden superior implicado en la generalización como la abstracción, pensamiento holístico, visualización y la flexibilidad de razonamiento, la habilidad de generalizar es algo que caracteriza a los estudiantes capaces [5].

2 La generalización y el aprendizaje del álgebra

Son numerosos los investigadores que consignan que el desarrollo de las habilidades en la generalización de patrones son el preámbulo necesario para el estudio del álgebra. Los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) del año 2000, estipulan que el álgebra se aprende mejor al ser considerada como un conjunto de técnicas y conceptos ligados a la representación de relaciones cuantitativas y como una clase de pensamiento matemático para formalizar patrones, funciones y generalizaciones [6]. En iguales términos, Amit y Dorit plantean que tanto como proceso como un producto de la educación matemática, la generalización tiene méritos e importancia como un objetivo instruccional en sí, sin embargo, ésta puede también servir como un medio para construir nuevo conocimiento, actuando como un iniciador para futuro aprendizaje en el álgebra [7]. Cuando los estudiantes exploran patrones, se dedican a detectar similitudes y diferencias, clasificar, etiquetar, buscar algoritmos, conjeturar, argumentar, establecer relaciones numéricas entre componentes o bien, a generalizar los datos y encontrar relaciones matemáticas, desarrollan habilidades que son fundamentales para el aprendizaje del álgebra [8]. Estos investigadores, defienden la postura de que el trabajar con patrones matemáticos sirve para introducir el concepto de variable, argumentando que tradicionalmente, éste, se introduce como incógnita de una ecuación, dejando de lado su naturaleza definitoria de fenómenos de variación, además, el trabajo con patrones, proporciona a los estudiantes la oportunidad de observar y verbalizar sus generalizaciones y de registrarlas simbólicamente conformando una útil y concreta base para la manipulación simbólica [9]. Otros autores como Trujillo y Castro consideran la generalización de la aritmética como una componente fundamental del álgebra y que tradicionalmente se usa para introducir los conceptos iniciales de esta disciplina en el contexto escolar [10], mientras que Mason considera la generalización como la vía que conduce hacia el álgebra y que conforma la esencia misma de esta rama de las matemáticas [11].

3 La generalización y el pensamiento inductivo

La meta primaria del pensamiento inductivo es la generalización [12]. En su libro Inductive Reasoning in the Secondary Classroom, Nubert y Binko, muestran la relevancia del pensamiento inductivo, ejemplificando dos situaciones de clase diferentes: Una de corte expositiva, donde el profesor lleva a cabo el razonamiento y establece una generalización para la clase en la cual, los estudiantes pueden o no estar involucrados en la explicación de los casos específicos que dan base a la generalización (enfoque deductivo), mientras que en otra, que denomina *guiada al descubrimiento inductivo*, los estudiantes, no el profesor, establecen la generalización seguida del análisis de los casos específicos, para establecer el origen de ésta, en la cual, el profesor utiliza el siguiente patrón, en donde, los alumnos primeramente examinan los casos particulares, responden las preguntas del profesor, infieren la generalización y finalmente la aplican a casos específicos [13]. Sin embargo, la realidad es que la práctica docente que escencialmente prevalece en las instituciones educativas, sigue siendo la de carácter deductivo-expositivo.

4 Estrategias de generalización de patrones

La generalización de patrones geométricos consiste en encontrar una expresión en términos de la posición que ocupa cada figura y que usualmente se denota por n tal como se muestra el ejemplo de la figura 1.

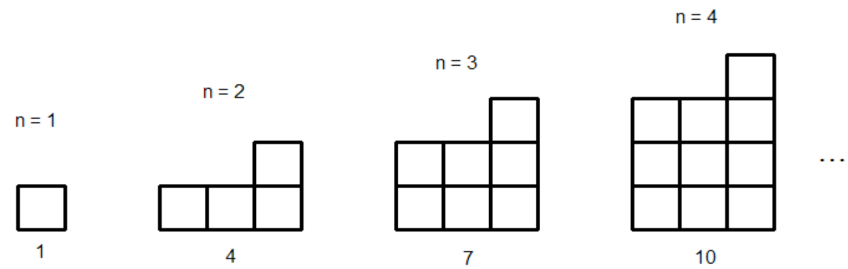


Figura 1: La posición de cada elemento

Existen diferentes estrategias que conducen a la generalización de este tipo de patrones, en diferentes registros de representación. La primera de ellas puede ser el conteo basado en la realización de tratamientos sobre la misma representación gráfica, como lo muestra la figura 2.

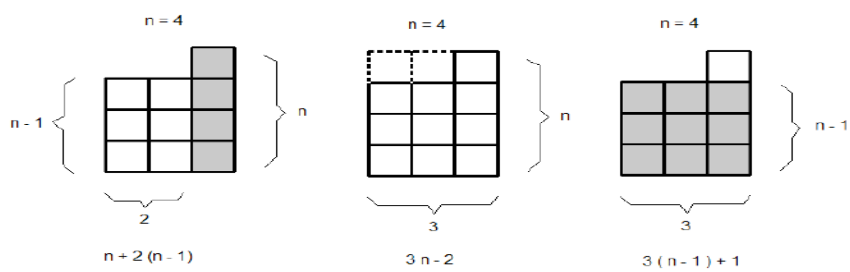


Figura 2: Diferentes formas de realizar conteos

Por otro lado, cabe la posibilidad de enfocarse puramente dentro del registro numérico para buscar la generalización del patrón, desarrollando un método que bien puede denominarse "de análisis de sumas" y que se muestra en la tabla 1.

Una vez identificada la naturaleza lineal del patrón, es posible utilizar herramientas algebráicas elementales para determinar la expresión de generalización.

También dentro del registro numérico, existe la posibilidad de hacer un análisis de diferencias de la sucesión, para determinar su tipo de comportamiento, tal como lo muestra la tabla 2.

Una vez trabajados algunos patrones lineales resulta natural desarrollar la tarea de generalizar patrones de mayor complejidad como los cuadráticos, en los cuales, es factible aplicar métodos similares a los ya expuestos. Como ejemplo, se presenta en la figura 3 un patrón

Tabla 1: Método de análisis de sumas.

n	Número de cuadros	Suma	Suma simplificada
1	1	1	1 +3(0)
2	4	1+3	1+3(1)
3	7	1+3+3	1+3(2)
4	10	1+3+3+3	1+3(3)
n	$3n-2$	$1+3+3+\cdots+3$	1+3(n-1)

Tabla 2: Análisis de diferencias.

n	Número de cuadros	Primeras diferencias	Segundas diferencias
1	1		
		3	
2	4		0
		3	
3	7		0
		3	
4	10		0
		3	
5	13		

cuadrático consistente en la sucesión que forman la cantidad de triángulos obscuros en cada una de las figuras determinada por su posición y una posibilidad de ser tratado para su generalización, de cuyo reacomodo pueden contarse $n(2n)$ cuadros, y por ello $2n(2n)$ triángulos, de los cuales, sólo tres cuartas partes son obscuros, y por ello, es posible concluir con la generalización $T(n) = \frac{3}{4}[2n(2n)] = 3n^2$.

El profundizar con los patrones cuadráticos permite trabajar con patrones cúbicos o de orden superior, que incluso, pueden ser construidos en el plano físico, utilizando diversos componentes, como el que se muestra en la figura 4, elaborado con fichas de dominó, en donde los "reacomodos" de las formaciones pueden hacerse de manera manual, y que para lograr su generalización es necesario utilizar herramientas construídas en la generalización de patrones lineales y cuadráticos [14].

5 Conclusiones

Para el desarrollo de problemas concernientes a la identificación de patrones matemáticos y su generalización, es imprescindible el uso de registros de representación semiótica que resalten la visualización, tales como las representaciones puntuales, o el acomodo de fichas de dominó, etc.

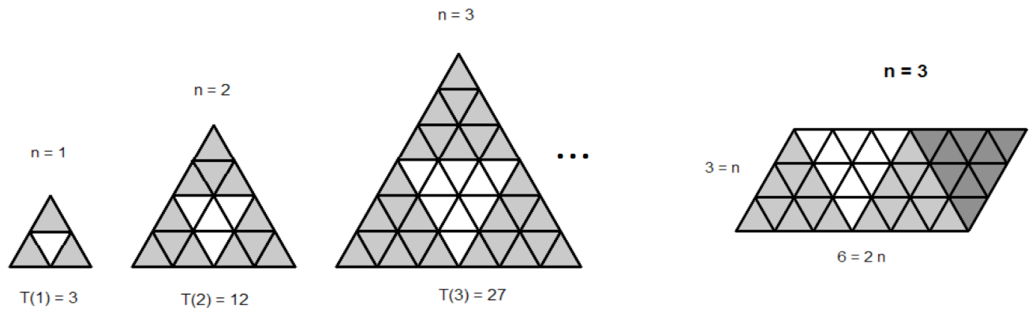


Figura 3: Un patrón cuadrático

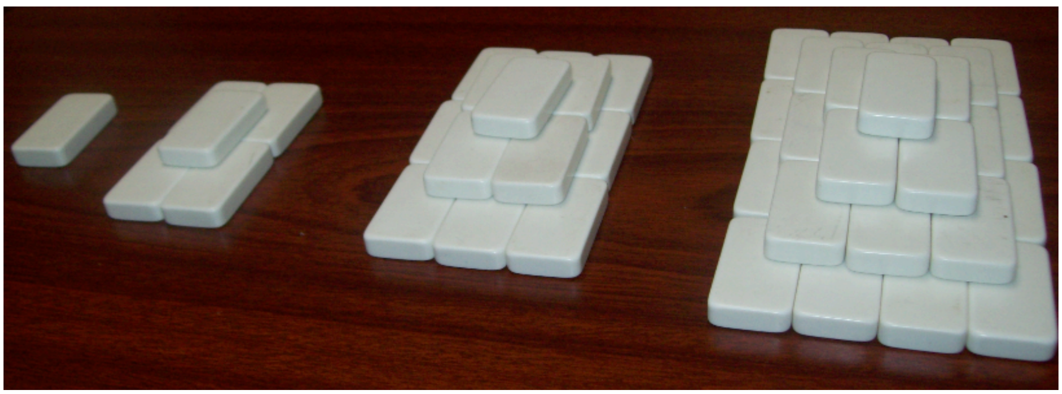


Figura 4: Patrón formado con fichas de dominó

Dado que este tipo de problemas pueden resolverse por medio de una amplia gama de formas, su inclusión en el plano didáctico en el aula debe darse de forma sistemática, es decir, trabajando metodologías particulares como las analizadas en este trabajo.

El desarrollo sobre las generalizaciones de patrones, se hace tomando algunos casos particulares, lo que implica que el tipo de razonamiento empleado para la consecución de resultados, es de tipo inductivo, el cual, no es ampliamente utlizado en el discurso matemático tradicional.

Referencias

[1] Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). *Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation.* Educational Studies in Mathematics, volumen 49, número 3, 379–402.

[2] Krutetskii, V. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* USA. University of Chicago Press.

[3] Mason, J. (1996). *Expressing generality on roots of algebra.* En Bednarz, N. y Kieran, C. (Editores) Approaches to albebra: Perspectives for research and teaching, 65–86.

[4] Vogel, R. (2005). *Patterns: A fundamental idea or mathematical thinking and learning.* ZDM International Journal on Mathematics Education, volumen 37, número 5, 445–449.

[5] Sriraman, B. (2004). *Reflective abstraction, uniframes and the formulation of generalizations.* Journal or Mahtematical Behavior, volumen 1, número 23, 205–222.

[6] NCTM. (2000). *Executive summary. Principles and standards for school mathematics.* Recuperado el 6 de septiembre de 2010 de http://www.nctm.org.

[7] Amit, M. y Dorit, N. (2008). *Rising to the challenge: using generalization in pattern problems to unearth the algebric skills of talented pre-algebra students.* ZDM, International Journal on Mathematics Education, volumen 40, número 1, 111–129.

[8] English, L. y Warren, E. (1995). *General reasoning processes and elementary algebraic undestarning: implications for initial instruccion.* Focus on Learning Problems in Mathematics, volumen 17, número 4, 1–19.

[9] English, L. y Warren, E. (1995). *Introducing the variable through pattern exploration.* Mathematics Teacher, volumen 91, número 2, 166–170.

[10] Trujillo, P. y Castro, E. (2009). *Un estudio de casos sobre el proceso de generalización.* En González, M. y González, J. (Editores) Investigación en Educación Matemática XIII, 511–521.

[11] Mason, J. (2005). *Developing thinking in algebra.* UK. The Open University y Paul Chapman Publishing.

[12] Cañadas, M. y Castro, E. (2007). *Descripción de la generalización de estudiantes de 3ro y 4to de ESO en la resolución de problemas que involucran sucesiones lineales y cuadráticas.* Investigación en Educación Matemática XII, 283–294.

[13] Nubert, G. y Binko, J. (1992). *Inductive Reasoning in the Secondary Classroom.* USA. NEA Professional Library.

[14] Martínez, V. (2010). *Sistematización de los patrones matemáticas.* Tesis de licenciatura. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 137–145.

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DE LAS TESELACIONES EN EL PLANO, ESTUDIADAS A TRAVÉS DEL MODELO DE VAN HIELE, COMO ACTIVIDAD INTEGRADORA DE ALGUNOS CONCEPTOS GEOMÉTRICOS

Patricia Guadalupe López Valenzuela* **Jorge Ruperto Vargas Castro†**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: *pathy_19@hotmail.com
†rvargas@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Este trabajo presenta una propuesta didáctica, en la que se pretende que el aprendizaje de la geometría se llegue a dar en los estudiantes de una manera agradable. Para que el alumno llegue a comprender algunos conceptos geométricos, se hace uso de la teoría de Teselaciones en el Plano para el diseño de una secuencia de actividades que promueven el desarrollo del pensamiento y razonamiento geométrico. En estas actividades, diseñadas para ser integradoras en términos de la reciente reforma 2011, se busca llevar a los estudiantes a experiencias más significativas como: visualizar, explorar, analizar, abstraer propiedades, clasificar, elaborar conjeturas y tratar de validarlas. Esta propuesta se trabaja en una dinámica de taller, con apoyo de materiales manipulables y software de cómputo apropiado; en el taller se utilizan diferentes registros de representación, como son: Numérico - Tabular, Gráfico, Algebraico, y Verbal; desarrollando todo esto en un ambiente lúdico.

1 Introducción

En la educación, la enseñanza de las matemáticas se ha visto obligada a seguir un orden lógico disciplinar. Esto se convierte en un esquema rígido de poca flexibilidad didáctica al momento de crear un plan de estudio, y debido a que los profesores están muy acostumbrados a esto, al realizar una actividad para la clase la realizan de una manera muy formal, tal como sucede en los textos actuales de segundo año de educación secundaria con el tema de teselaciones en el plano [7, p. 179-180], los cuales desarrollan el tema yendo de lo general a lo particular, proporcionando problemas matemáticos que deben ser completados con un dato, y fuera de un contexto que permita descubrir su significado y utilidad, sin facilitar la comprensión del objeto, convirtiendo a la matemática en algo tedioso y que causa confusión tanto para los estudiantes y a los mismos profesores, y lo que es peor aún, el rechazo hacia las mismas.

Lo manera de desarrollar el tema de teselaciones en el plano en los libros de texto de segundo de secundaria que revisamos, que más abajo se citan, nos pareció una manera inadecuada pero interesante para retomar esos trabajos y realizar una propuesta didáctica más funcional.

Como alternativa a esta situación, en este trabajo proponemos realizar una mejora a las propuestas de desarrollo del tema de teselaciones en el plano encontradas en los mencionados textos, de tal manera que el razonamiento de los estudiantes evolucione desde niveles muy elementales hasta niveles de formalización y generalización, apoyándonos en el modelo del desarrollo del pensamiento geométrico de Van Hiele.

2 Planteamiento del Problema

En este trabajo nos enfrentamos a uno de los problemas que presenta el estudio de la geometría en el nivel básico, tanto en México como en el resto del mundo, consistente en que con frecuencia sus contenidos y propósitos están poco definidos y no se ve con claridad cuáles son los medios para lograr un aprendizaje significativo de esta disciplina. En tales circunstancias, no es raro que el estudio de la geometría se limite en ocasiones a presentar algunas definiciones, teoremas y demostraciones para que los alumnos las memoricen, o a intentar iniciarlos prematuramente en la geometría axiomática, es por ello que nos proponemos diseñar una solución alternativa.

Por este motivo se piensa en utilizar las teselaciones en el plano como una herramienta para la comprensión de algunos tópicos geométricos y no geométricos en un proyecto integrador.

3 Marco Referencial

El trabajo está dirigido a profesores y estudiantes de educación secundaria de Hermosillo, Sonora, cuyo desempeño se desenvuelve en el contexto del Plan de estudios 2011 correspondiente a la Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB) 2009 en el cual se destaca el desarrollo de competencias.

Para el estudio de las Matemáticas, la asignatura se desglosa en los tres ejes siguientes que son los mismos para primaria y secundaria: **Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida y Manejo de la información.** Trabajamos con el segundo eje dado que este encierra los tres aspectos esenciales alrededor de los cuales gira el estudio de la *geometría* y la medición.

El marco teórico fundamental del cual se partió es el modelo de desarrollo de razonamiento geométrico llamado Modelo de Van Hiele, el cual está formado por dos partes: los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje.

Los niveles describen cómo se piensa y en qué tipo de ideas geométricas se piensa, más que en la cantidad de conocimiento que tiene la persona. Los cinco niveles son:

Nivel 1. Reconocimiento.

Nivel 2. Análisis.

Nivel 3. Clasificación.

Nivel 4. Deducción

Nivel 5. Rigor

Las fases describen cómo puede un profesor organizar la actividad en sus clases para que los alumnos sean capaces de acceder al nivel de razonamiento superior al que tienen actualmente, y son las siguientes:

1era. fase: Información.

2da. fase: Orientación dirigida.

3era. fase: Explicitación.

4ta. fase: Orientación libre.

5ta. fase: Integración.

Dado que en el desarrollo de las fases encontramos un enfoque tradicional proponemos una leve modificación en este apartado al utilizar la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval realizando las tres actividades cognitivas fundamentales, formación de una representación identificable, tratamiento y conversión, para que un sistema semiótico llegue a ser un registro de representación.

En este proyecto se realizaron actividades con la intención de que lleven a los estudiantes a experiencias nuevas capaces de atraer su atención como visualizar, explorar y analizar, abstraer propiedades, clasificar, elaborar conjeturas y tratar de validarlas. Por lo que es necesario exponer al alumno ante una situación problema que sea significativa para éste y lo motive a movilizar lo aprendido con iniciativa e interés.

4 Justificación de la Propuesta

"Un problema geométrico interesante consiste en averiguar con cuales figuras geométricas o teselas se puede cubrir completamente el plano, o lo que es lo mismo, construir un teselado" [13, p. 82].

Esta cita tomada del libro de primaria de quinto grado de una reforma anterior (1993); hace referencia a que el tema de teselaciones en el plano es parte importante de las matemáticas, pero por algún motivo o posiblemente por falta de fundamentos o por tener una idea equivocada de que solo puede realizarse para niveles más altos de educación, dicho tema no se había llegado a desarrollar ampliamente en los libros de texto. En la actualidad podemos encontrar el desarrollo del tema en algunos libros de texto de segundo año de educación secundaria ([2, p. 191-195], [3, p. 166-179], [6, p. 138-142], [7, p. 179-180]. [11, p. 152-159], [12, p. 166-171]) donde algunos autores le dan el nombre de mosaicos o recubrimiento de un plano. Se ubica en el eje curricular *forma, espacio y medida,* en el tema de formas geométricas.

Sin embargo, viendo lo interesante que es este tópico, retomamos la idea para presentar una propuesta para que el aprendizaje de la geometría se llegue a dar en los alumnos de una manera agradable, diseñando e implementando una secuencia de actividades donde se utilicen tópicos geométricos, aritméticos, visuales y culturales con las que se pretende promover el desarrollo del pensamiento y razonamiento geométrico.

Esta propuesta se trabaja en una dinámica de taller promoviendo un ambiente lúdico, en el cual se utilizan diferentes marcos de representación, como son: Numérico - Tabular, Gráfico, Algebraico y Verbal.

La secuencia de actividades que se diseñaron consisten en:

- Conocer obras artísticas y culturales donde se utilice el concepto.

- Estudiar las propiedades de las figuras planas, ángulos, triángulos, polígonos en general e incluso figuras arbitrarias, no estudiados en abstracto y por si mismo sino abordadas con el fin de acreditar un proyecto integrador.

- Realizar operaciones aritméticas con enteros y fracciones.

- Uso de tabulaciones numéricas, uso de algunas expresiones algebraicas

- Uso de Tecnología Electrónica:
    - Hoja de cálculo (Ejemplo: Excel) para ampliar las tablas y los respectivos análisis
    - Uso de Software de geometría dinámica, para diseño dinámico de teselaciones que permita valorar su correcta construcción.

Se parte desde el uso de figuras manipulables hasta el recurso computacional del uso de una hoja electrónica o un software de geometría dinámica para diseñar las teselaciones correctamente. Con algunas de las actividades motivamos a que el estudiante construya sus propias definiciones y llegue a crear la geometría por sí mismo a medida que avanza a través de las actividades y los problemas.

Para el desarrollo de este proyecto se realizan planes de clase, estos (según los Planes de Estudio 2011 de la RIEB) sugieren a los docentes estrategias didácticas que incorporan los objetos de aprendizaje (ODA), los libros de texto y otros recursos existentes dentro y fuera del aula. Son propuestas que promueven el logro de los aprendizajes esperados y que pueden ser modificadas para adaptarlas a las características de los alumnos, a las condiciones tecnológicas del aula y al contexto de la escuela. Aunque la propuesta va dirigida a los alumnos nos conviene formularla desde el punto de vista del docente para que este tenga una clara visión de cómo abarcar el tema.

5 Ejemplo de plan de clase

Plan de clase 1	**Curso: Matemáticas 2 (8)**
Eje temático: Forma Espacio y Medida	**Tema:** Teselaciones en el plano.

Contenido. Características de los polígonos regulares y encontrar aquellos que permiten cubrir el plano y realizar la acción de cubrirlo.

Intención disciplinar:

Que los alumnos analicen con cuales polígonos regulares de un solo tipo es posible cubrir una superficie plana.

Intención didáctica:

Propiciar condiciones para que los alumnos adquieran conocimiento sobre los conceptos de lado y ángulo de los polígonos regulares.

Consigna: Organizados en equipos, respondan las siguientes preguntas y justifiquen sus respuestas.

1. Compare los polígonos regulares que se le proporcionan, y mencione lo que observa con respecto a:

   a) Sus lados. ____________________

   b) Si superpones un polígono regular con otro coincidiendo uno de sus lados, ¿qué observas sobre sus ángulos interiores?

   ____

2. Suponga que quiere recubrir el piso de su casa con vitropiso que tienen forma de polígono regular, antes de comprarlos conviene que haga algunas reflexiones. Con cada una de las piezas que se te proporcionan intenta formar mosaicos, utilizando un solo tipo de polígono regular a la vez. Y contesta las siguientes preguntas:

   a) ¿Es posible cubrir una superficie plana con triángulos equiláteros de tal manera que no se superpongan ni queden espacios libres?

   ____

   b) Para lograr el objetivo anterior, ¿Cuántos triángulos equiláteros deben de coincidir en un mismo vértice?

   ____

   c) ¿Puede, con estas observaciones, determinar cuánto mide al ángulo interior de un triangulo equilátero?

   ____

   d) ¿Cómo realizó el inciso anterior?

   ____

   e) ¿Es posible cubrir el piso con puras piezas cuadradas del mismo tamaño? Experimente.

   ____

   f) Para lograr el mismo fin con piezas cuadradas, ¿cuántos cuadrados deben coincidir en un mismo vértice?

   ____

   g) Con base en lo observado en el inciso anterior, determine el valor de cada ángulo interior de un cuadrado.

   ____

   h) ¿Es posible cubrir el piso con piezas en forma de pentágonos regulares? Experimente.

   ____

   i) Con respecto al inciso anterior, ¿qué es lo que observa al hacer coincidir los pentágonos regulares en un mismo vértice?

   ____

j) ¿Puede determinar el valor de cada ángulo interior de un pentágono regular? Argumente.

k) ¿Puede cubrir una superficie plana con puros hexágonos regulares? Experimente.

l) ¿Cuántos hexágonos regulares coinciden en un mismo vértice?

m) Con base en lo observado, determine el valor de cada ángulo interior de un hexágono regular.

3. A continuación, intente recubrir el plano con los polígonos regulares faltantes (de 7 a 12 lados) y explique lo que observa en cada caso.

4. Con base en lo visto hasta el momento, describa con sus propias palabras los requisitos necesarios para que las piezas cubran el plano.

5. Introduzca los datos obtenidos **hasta el momento** en la tabla siguiente.

Polígonos Regulares	**Número de lados**	**Numero de polígonos regulares que coinciden en un vértice**	**Medida ángulo interior**
Triangulo Equilátero			
Cuadrado			
Pentágono regular			
Hexágono regular			
Heptágono regular			
Octágono regular			
Eneágono regular			
Decágono regular			
Undecágono regular			
Dodecágono regular			

6. ¿Cuántos son los polígonos regulares de un solo tipo con los que puede recubrir el piso de su casa? y, ¿cuáles son?

 ____

7. ¿No hay más? ¿Por qué? ______________________________

Consideraciones previas:

Es necesario que se dé tiempo suficiente para que los alumnos resuelvan cada problema, con el fin de que los estudiantes comuniquen los diferentes procedimientos y resultados obtenidos, así como los argumentos que respalden sus procedimientos. Es probable que algunos alumnos no lleguen a darse cuenta que a mayor número de lados de un polígono regular, mayor es su ángulo interior y se espera que con el llenado de la tabla con base en las observaciones hechas previamente se den cuenta de esto. Es importante que después de la quinta consigna todos los alumnos lleguen a la conclusión de que solamente son tres los tipos de polígonos regulares con los cuales se puede cubrir el plano (cuadrados, hexágonos regulares y triángulos equiláteros), debido a que la medida de sus ángulos interiores es divisor de 360. Es probable que haya la necesidad de aclarar conceptos tales como polígonos regulares, vértice, ángulo y ángulos internos.

Competencias y habilidades a desarrollar:

- Resolver problemas de manera autónoma. Los alumnos sepan identificar y resolver tipos situaciones o problemas en los que sobren o falten datos.
- Comunicar información matemática. Los alumnos expresen, representen e interpreten información matemática contenida en una situación y expongan las ideas matemáticas encontradas.
- Validar procedimientos y resultados. Los alumnos explican los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance.
- Manejar técnicas eficientemente. Los alumnos efectúan cálculos sin apoyo de calculadora.

Observaciones posteriores:

Este plan de clase y los demás que se han diseñado serán piloteados para obtener información acerca de su pertinencia.

Referencias

[1] Alarcón, J. et. al. (2004). *Libro para el Maestro. Matemática Secundaria.* SEP. México.

[2] Arriaga, A. Benítez, M. y Cortés, M. (2008). *Matemáticas, introducción por Competencias.* Ed. Pearson Educación. México.

[3] Bosch, C. y Gómez, C. (2007). *Encuentro con las Matemáticas, Segundo.* Ed. Nuevo México. México.

[4] Duval, R. (1997). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México.

[5] Duval, R. (2001). *La Geometría desde un punto de vista cognitivo.* Documento de discusión para un estudio ICMI. PMME-UNISON.

[6] Farfán, R., Cantoral, R. et al (2008). *Matemáticas segundo grado.* Ed. McGraw-Hill. México.

[7] Filloy, E., Rojano M., et al (2009). *2° Matemáticas.* Ed. México.

[8] Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1990) *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele.* Eds. S. Llinares, M.V. Sánchez. España.

[9] Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1991). *En Educación Matemática* Vol. 3, pp. 49-65. Con permiso para su reproducción en *La enseñanza de las Matemáticas en la escuela secundaria.* Lecturas PRONAP (1996).

[10] Storer, A et al. (2000) *Matemáticas, quinto grado.* SEP. México.

[11] Valiente, S. (2008). *Matemáticas 2.* Ed. Limusa. México.

[12] Waldeng, G., Villaseñor, R. et al (2007). *Matemáticas en Contexto 2.* Ed. Esfinge. México.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 147–154.

Nivel: Superior

ESTUDIO SOBRE LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Lucía Gisella Mendoza von der Borch* **Silvia Elena Ibarra Olmos†**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: *luciamendoza@hotmail.com
†sibarra@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Se presentan los avances de un trabajo de investigación que tiene como objetivo analizar y describir las prácticas de enseñanza de las matemáticas de profesores que han cursado el Diplomado "Prácticas docentes en las matemáticas de secundaria", un programa de formación centrado en la reflexión sobre las prácticas. Para la identificación de las prácticas y su análisis se utilizan herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Los contenidos matemáticos a analizar son los correspondientes a los apartados "Proporcionalidad y funciones" y "Análisis y representación de datos" del Programa de Matemáticas de Segundo Grado de Secundaria del Plan de Estudios para la Educación Básica 2011.

1 Introducción

Los avances de investigación que se presentan aquí forman parte de una tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Este trabajo tiene por objetivo analizar y describir algunos aspectos centrales de las prácticas docentes de profesores de matemáticas de secundaria que han cursado un programa de formación específico, el Diplomado "Prácticas docentes en las matemáticas de secundaria". Este Diplomado, que se enmarca dentro del Programa de Transformación Educativa del Estado de Sonora -cuya puesta en marcha se anunció a principios de 2011-, está dirigido a los docentes de matemáticas de las secundarias públicas del estado y tiene por objetivo "Apoyar al personal docente de la escuela secundaria en la comprensión y desarrollo de las competencias profesionales que lo hagan más eficaz para conducir el proceso de aprendizaje de las matemáticas de sus alumnos" [1].

Los principales elementos de justificación de nuestro trabajo son los siguientes:

a) Los magros resultados que obtienen los alumnos mexicanos en distintas evaluaciones de aprendizaje de matemáticas -como las pruebas ENLACE, EXCALE, PISA y la que realiza el Instituto de Innovación y Evaluación Educativa del Estado de Sonora (IIEEES) - ha sido un factor que ha influido de manera muy importante en la preocupación, tanto de diferentes instancias de gobierno como del ámbito académico, por poner atención en las prácticas docentes y en la creación de diferentes programas de formación y actualización para el profesorado.

b) Algunos resultados de investigación [2,3] dan cuenta de que, en lo que respecta a las asignaturas de matemáticas, los planteamientos (en cuanto al enfoque y la metodología de enseñanza) de las distintas reformas curriculares que se han venido promoviendo en la educación básica en México, frecuentemente no son incorporados por los profesores en las aulas. Estas investigaciones reportan que incluso después de más de una década de haber entrado en vigor las propuestas curriculares, el enfoque y la metodología por ellas formuladas no eran llevados al aula, y que los profesores continuaban, en ciertos aspectos, arraigados al sistema "tradicional" de enseñanza.

2 La problemática de la formación y actualización de profesores

Debido a las situaciones mencionadas, se ha enfatizado desde hace varios años la necesidad de mejorar la práctica docente. Las propuestas curriculares oficiales para secundaria 2006 y 2011 plantean explícitamente esta necesidad [4,5], y tratan de fomentar cambios en algunas prácticas que, aunque no han resultado eficaces para lograr el aprendizaje de matemáticas de los alumnos tal y como lo promueven los planes y programas actuales, con frecuencia siguen siendo utilizadas por los profesores en su quehacer cotidiano en el aula.

La modificación de las prácticas docentes es un proceso complejo en el que intervienen factores de muy diversa naturaleza. Es importante destacar que los cambios propuestos por las reformas curriculares difícilmente podrán verse incorporados en las aulas si no se diseñan e implementan programas de formación efectivos que se dirijan a orientar y sensibilizar a los profesores en la dirección de esos cambios.

Es así como, actualmente, una preocupación importante en Matemática Educativa es el cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. Según Godino, Font y Wilhelmi (2006), basándose en Hiebert, Morris y Glass (2003), hay una ausencia de efectos significativos de los programas de formación de profesores en la práctica docente, lo cual puede explicarse, en parte, por "la falta de un conocimiento base ampliamente compartido sobre la enseñanza y la formación de profesores" [6]. Sostienen que los programas de formación pueden ser más efectivos centrándolos en ayudar a los profesores a que adquieran herramientas para poder realizar un análisis crítico de su propia práctica docente, así como de los textos escolares y materiales didácticos utilizados, con el fin de evaluar la pertinencia, idoneidad y adecuación de éstos al proyecto educativo en el que se insertan.

El Diplomado "Prácticas docentes en las matemáticas de secundaria", es un programa de formación centrado en promover reflexiones sobre aspectos significativos de las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Consideramos que el obtener información cualitativa acerca de la interpretación que hacen los profesores de los planteamientos del Diplomado y, dado el caso, de la manera en cómo les dan concreción en el aula a alguno (s) de estos planteamientos, puede generar aspectos de interés y utilidad para el ámbito de la formación de profesores.

3 Consideraciones teóricas

El marco teórico que sustenta la investigación es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Este enfoque teórico cuenta con diversas herramientas de análisis de los procesos de instrucción matemática, tanto a nivel descriptivo como explicativo y valorativo. Asimismo, cuenta con herramientas para analizar las categorías o componentes del conocimiento (matemático y didáctico) del profesor de matemáticas y plantea diversos elementos de análisis y factores a considerar dentro del ámbito de la formación de profesores. De ahí justificamos la elección de este marco teórico para sustentar nuestra investigación.

Las principales herramientas del EOS que utilizaremos para analizar e interpretar los resultados de nuestra investigación, son:

- Las nociones de práctica matemática y objeto matemático; y la tipología de objetos primarios.

- Las nociones de configuración y trayectoria epistémica; configuración y trayectoria docente.

- Algunas herramientas de los tres primeros niveles de análisis didáctico [7]:

  <u>Nivel uno</u>. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.

  <u>Nivel dos</u>. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.

  <u>Nivel tres</u>. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.

Las prácticas a las que se refiere el primer nivel de análisis ya no son únicamente las prácticas matemáticas, sino que incluyen también a las prácticas didácticas, que son el tema de estudio en nuestra investigación. En las herramientas de análisis didáctico que propone el Enfoque Ontosemiótico, se consideran las nociones de problema, práctica, proceso y objeto ya no sólo matemáticos, sino que se habla también de *problemas, prácticas, procesos y objetos didácticos* [7].

Las nociones de configuración y trayectoria didáctica (nivel dos y tres de análisis) han sido introducidos en el EOS para realizar análisis más detallados de los procesos de instrucción (el nivel uno plantea un análisis general de los sistemas de prácticas, mientras que los niveles subsecuentes van proporcionando herramientas para un análisis más específico). De acuerdo con este enfoque teórico, la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático se visualiza como "un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales" [7]. El proceso de instrucción sobre un contenido matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas.

En este trabajo nos centraremos en estudiar las componentes epistémica y docente de las configuraciones didácticas presentes en el proceso de instrucción que analizaremos.

4 Consideraciones metodológicas

Los elementos metodológicos de esta investigación se relacionan estrechamente con las herramientas teóricas, pues éstas últimas nos han permitido diseñar instrumentos de observación pertinentes para conseguir los objetivos de nuestra investigación, y son las herramientas que nos permitirán organizar y analizar la información obtenida e interpretar los resultados que se obtengan.

Este trabajo de investigación es de carácter cualitativo. Se trata de un estudio analítico y descriptivo de las prácticas docentes, en el cual la recopilación de información se obtendrá a partir de entrevistas con profesores y de observación en sus aulas. La observación será no participante.

Las acciones metodológicas de nuestro trabajo incluyen:

a) Revisión documental y bibliográfica (sobre los planes y programas de estudio para la educación secundaria, los programas de formación de profesores y sobre los planteamientos del Diplomado "Prácticas docentes en las matemáticas de secundaria").

b) Diseño de los instrumentos de colección de información, los cuales básicamente son dos: un guión de entrevista a profesores y un formato de registro para observación en el aula.

c) Selección de los casos de estudio (profesores, escuelas, horarios).

d) Realización del trabajo de campo.

e) Sistematización, análisis de la información y formulación de conclusiones.

5 Avances

Se presentan aquí algunos de los planteamientos principales del Diplomado y algunos resultados preliminares de las entrevistas realizadas a profesores de una secundaria técnica de Hermosillo, Sonora.

La información recabada mediante las entrevistas nos permite conocer los planteamientos de las propuestas curriculares y del Diplomado que los profesores identifican. Esta información que aparece en el discurso de los profesores se contrastará con los resultados que se obtengan de la observación de sus prácticas docentes en el aula. Los contenidos matemáticos cuyo tratamiento por los profesores se observará en aula son los correspondientes a los apartados "*Proporcionalidad y funciones*" y "*Análisis y representación de datos*" del Programa de Matemáticas de Segundo Grado de Secundaria del Plan de Estudios para la Educación Básica 2011. Se han elegido estos temas debido a que son contenidos en los que se hizo énfasis en el Diplomado.

5.1 El Diplomado "Prácticas docentes en las matemáticas de secundaria"

Este programa de formación consta de tres módulos:

1) *Evaluaciones del aprendizaje de las matemáticas y su relación con la práctica docente*, en el que se analizan críticamente algunos reactivos tomados de los principales instrumentos de evaluación regionales, nacionales e internacionales que se aplican a los estudiantes, con la finalidad de "dar soporte para la reflexión y discusión de diversos aspectos tanto de carácter disciplinario como didáctico" [1].

2) *Los planes de clase y otros materiales de apoyo para la actividad docente*, en el que se someten a análisis algunos planes de clase y lecciones de libros de texto que han sido aprobados oficialmente.

3) *Actividades e integración del conocimiento*, en el que se revisan algunas propuestas de situaciones problema, con el fin de enriquecer las reflexiones previas y contribuir a elevar el nivel de los participantes en el dominio de algunos contenidos matemáticos de secundaria, así como de su conocimiento y desarrollo de habilidades profesionales para la implementación de las estrategias didácticas propuestas en los planes y programas de estudio. Las situaciones propuestas en este módulo tratan de promover que los participantes reflexionen sobre las posibilidades de usar diversos elementos de la vida cotidiana en las clases de matemáticas, de plantear situaciones que involucren la necesidad de integrar contenidos de los tres ejes de las matemáticas de secundaria y, adicionalmente, de temas que son también objeto de análisis en otros cursos o asignaturas [1].

Respecto a la metodología de trabajo en el Diplomado, en los tres módulos se llevan a cabo actividades de análisis por etapas o momentos, en las que se propone la realización de alguna tarea matemática o responder algunas preguntas con el propósito de propiciar la reflexión a través de la cual se construyan los conocimientos y se desarrollen las habilidades y actitudes que se pretenden alcanzar. El trabajo se desarrolla a veces de manera individual, a veces por equipos y a veces grupal.

5.2 Resultados preliminares de las entrevistas a profesores

En la determinación del perfil de los profesores candidatos a ser sujetos de observación en aula, se tomó en consideración el que hayan tenido una participación satisfactoria en el Diplomado. A los profesores seleccionados se les realizó una entrevista con la finalidad de determinar el nivel de conocimiento que tienen sobre los planes y programas de estudio, de identificar los planteamientos en ellos formulados y que reconocen en el Diplomado, y de conocer sus concepciones personales sobre lo que es la matemática, su enseñanza y aprendizaje. De las entrevistas realizadas, se han obtenido los siguientes resultados preliminares:

a) Respecto al nivel de conocimiento de los planes y programas oficiales para las matemáticas de secundaria y sobre lo que incorporan en su quehacer en el aula.

- Hay una distancia entre los significados de los términos que utilizan los documentos oficiales de las propuestas curriculares y los que utilizan los profesores. Esto ha sido particularmente notorio en relación al término "enfoque didáctico", que algunos profesores declaran no conocer, y sin embargo hablan sobre el desarrollo de competencias en los estudiantes.
- El conocimiento del plan 2011 es incipiente, los profesores afirman no haber revisado cuidadosamente sus planteamientos.
- Algunos profesores consideran que los problemas de matemáticas son situaciones contextualizadas fuera de la matemática, no se consideran los contextos intra-matemáticos.
- Los maestros entrevistados reconocen trabajar con situaciones problemas en el aula, principalmente las que se proponen en los planes de clase presentes en el plan de estudios 2006 o adaptaciones y/o modificaciones de los mismos. Pero afirman que algunos planes de clase tienen deficiencias al partir de situaciones problema que no son del todo favorecedoras para promover la emergencia de los objetos matemáticos que se pretende estudiar.
- Los profesores reconocen emplear distintas estrategias dependiendo de las necesidades del grupo con el que están trabajando.

b) Sobre la manera en que los profesores interpretan el enfoque y la metodología promovidos en el diplomado.

- Los profesores entrevistados rescatan como elemento importante del Diplomado el promover el trabajo colaborativo, entendiendo éste no sólo como el promover que los alumnos trabajen en equipo las situaciones problemáticas que se les plantean en el aula, sino también como el compartir entre el colegiado de profesores de su comunidad, las opiniones, dudas y sugerencias que existan respecto a su quehacer docente.
- Sobre las competencias profesionales, los profesores reconocen que éstas son distintas a las competencias que se trata de promover en los alumnos. Algunas de las competencias profesionales que consideran más importantes son el conocimiento de los planes y programas, el conocimiento para organizar situaciones didácticas, para realizar evaluación a los alumnos y la habilidad para utilizar estrategias diferentes con base en las necesidades de los alumnos.
- Sobre el trabajo con las actividades del módulo tres, los profesores sostienen que éstas les han sido de utilidad para visualizar las posibilidades de utilizar situaciones de la vida cotidiana en las clases de matemáticas, y dejan entrever algunas reflexiones sobre la complejidad de la elección y/o diseño de situaciones problema que resulten eficaces para el aprendizaje de los alumnos.
- Los profesores afirman estar poniendo en práctica en el aula algunas actividades similares a las que trabajaron en el Diplomado, y que han pensado en adecuaciones o variantes que pueden hacer para trabajarlas con sus alumnos.

- Las actividades del Diplomado en las que se hizo uso del software GeoGebra causaron interés en los docentes; éstos afirman que algunas situaciones a las que se enfrentaron les han abierto las posibilidades para trabajar nuevas actividades con sus estudiantes.

c) Sobre las concepciones personales acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

- Con relación a la pregunta sobre cuándo consideran los profesores que un estudiante aprendió matemáticas, los entrevistados no hicieron ninguna referencia a los *aprendizajes esperados* [5] planteados en los planes de estudio; no asumen a éstos como indicadores, sino que, o no dieron una respuesta concreta, o asociaron el aprendizaje de los alumnos a la habilidad para resolver un problema de matemáticas, para argumentar el uso de ciertos procedimientos y para aplicar los conocimientos cuando se enfrentan a una situación diferente.
- Respecto a la enseñanza de las matemáticas, algunos profesores afirman haber cambiado su visión a lo largo de su formación y experiencia profesional; afirman que actualmente consideran la enseñanza de las matemáticas como un problema complejo, en el que es importante "ponerse en el lugar del alumno".
- Algunos profesores hablan de la dificultad para trabajar con los alumnos diferentes métodos de resolución de alguna clase de situaciones-problema, pues "el alumno siente que si ya aprendió con un método, ese le sirve y no quiere otro". Esta situación deja entrever la fragmentación que existe en el estudio de algunos contenidos matemáticos. Aunque el plan 2011 para la educación básica plantea como uno de sus principales objetivos el promover la articulación, tanto en los contenidos de la misma asignatura como entre las distintas asignaturas y grados escolares, falta ejemplificar cómo promover dicha articulación en el aula.

Próximamente iniciaremos con el trabajo de observación en el aula, con lo cual tendremos la información suficiente para estar en condiciones de describir lo que son las prácticas docentes de profesores de matemáticas de secundaria, objetivo principal de esta tesis.

Referencias

[1] Ibarra, S. et al (2011). *Diplomado Prácticas Docentes en las Matemáticas de Secundaria. Guía del Instructor.* Universidad de Sonora.

[2] Ávila, A. (2001). *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudio sobre los procesos de transmisión y apropiación del saber matemático escolar.* UNAM (Tesis de doctorado).

[3] Mena, R. (2005). *Un estudio sobre la enseñanza del álgebra.* Universidad de Sonora (Tesis de maestría).

[4] SEP (2007). *Educación Básica. Secundaria. Plan de Estudios 2006.* México: SEP.

[5] SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* México: SEP.

[6] Godino, J.D, Font, V. y Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta, *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa,* número especial, CLAME, México DF, pp. 131-155.

[7] Godino, J.D, Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.* Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 del artículo Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 155–162.

DISEÑO DE UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA EL TEMA DE REGRESIÓN Y CORRELACIÓN LINEAL

Benjamín Morán Medina* **Irma Nancy Larios Rodríguez**†

*Centro de Estudios Tecnológicos del Mar (CETMar03) de Guaymas
e-mail: master.cetmar@gmail.com

†Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: nancy@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En el presente trabajo se describe el primer acercamiento a una tesis de desarrollo docente para obtener el grado en el Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora, cuyo objetivo es el diseñar una secuencia de actividades didácticas que promueva un aprendizaje significativo de las medidas de correlación lineal (coeficiente de correlación, recta de regresión y error estándar de estimación) en estudiantes del Centro de Estudios Tecnológicos del Mar (CETMar03) de Guaymas. Particularmente en este trabajo se presenta la ubicación, la justificación, así como una actividad didáctica de la secuencia.

1 Introducción

El trabajo se ubica en el tema de medidas de correlación lineal del curso de Probabilidad y Estadística del plan de estudios de la carrera de técnico en electrónica del Centro de Estudios Tecnológicos del Mar (CETMar03). Al igual que todos los centros educativos del nivel medio superior, el CETMar03 se encuentran en proceso de una Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) [1] basada en el desarrollo de competencias (Genéricas, disciplinares y profesionales). En el programa de estudios de Matemáticas (2009) [2] se señala que ”La Matemática constituye una herramienta para las demás áreas del conocimiento, contribuye a la promoción de competencias genéricas y disciplinares, facilitando realizar el planteamiento, análisis y resolución de problemas”, de tal forma que la orientación de los cursos de matemáticas es hacia el desarrollo de competencias genéricas y disciplinarias, a través de aprendizaje significativo en su desarrollo y aplicación, más que en la ejercitación y uso de algoritmos. La propuesta metodológica de la RIEMS se concreta a partir de estrategias centradas en el aprendizaje, el papel del profesor es, entonces, de mediador del aprendizaje, un facilitador en ese proceso para guiar a los estudiantes hacia la construcción de su conocimiento.

La RIEMS exige, entre otras cosas, la necesidad de contar con materiales didácticos de apoyo al trabajo docente en la orientación ya señalada, en ese sentido es que se propone realizar una tesis de desarrollo docente, con la intensión de diseñar una secuencia de actividades didácticas para el tema medidas de correlación lineal del programa de Probabilidad y Estadística del Centro de Estudios Tecnológicos del Mar (CETMar03) de Guaymas.

2 Justificación y/o Problemática

Investigaciones en torno a la educación estadística señalan una problemática alrededor de errores y dificultades en relación a la asociación de variables, y concepciones erróneas de la asociación como las que se señalan a continuación, que nos parece son importantes de considerar para el desarrollo del trabajo de tesis. Entre ellas se encuentran las siguientes: Batanero en Didáctica de la estadística (2001) [3], reporta que en un estudio con jóvenes entre 17 y 18 años a los cuales se les planteo situaciones relacionadas con los tres tipos de problemas que ofrecen un acercamiento a la noción de asociación estadística, encontrando las siguientes concepciones erróneas sobre la asociación estadística:

- ✓ *Concepción determinista de la asociación: Algunos estudiantes no admiten más de un valor de la variable independiente para cada valor de la variable dependiente. Cuando esto no ocurre, consideran que no hay dependencia entre las variables. En otras palabras, la relación entre las variables debe ser una función desde el punto de vista matemático.*
- ✓ *Concepción unidireccional de la asociación. Si se percibe la dependencia solamente cuando es positiva (asociación directa), considerando la asociación inversa como independencia.*
- ✓ *Concepción local de la asociación. Utilizar solamente parte de los datos proporcionados por el problema para emitir el juicio de asociación.*
- ✓ *Concepción causal de la asociación: Algunos estudiantes solamente consideran la existencia de asociación entre variables si se puede atribuir una relación causal entre ellas.*

En otra compilación de trabajos de investigación realizada por Estepa y Gea (2010) [4] resaltan algunos errores y dificultades que presentan los alumnos en la resolución de tareas relacionadas con las medidas de correlación, de las cuales señalamos las siguientes:

- ✓ Dificultades en la interpretación de los diagramas de dispersión en relación al tipo de dependencia, signo, y ajuste de una línea de regresión;
- ✓ Algunos estudiantes suelen tener dificultades al relacionar el signo del coeficiente de correlación y el tipo de asociación (directa, inversa, independencia). Igual ocurre con el signo de la covarianza;
- ✓ El razonamiento sobre la asociación negativa suele tener un mayor índice de dificultad que la positiva;
- ✓ Cuando la asociación es fuerte aparecen menos dificultades;
- ✓ La oposición entre el razonamiento numérico covariacional y el razonamiento gráfico covariacional: prevalece la estrategia de razonamiento gráfico en la estimación del coeficiente de correlación ante una descripción verbal de la situación;

✓ El empleo de argumentaciones conjuntistas (numéricas, gráficas y teorías previas) en situaciones cercanas al estudiante, donde tan sólo se requiere un argumento gráfico;

✓ El razonamiento covariacional negativo en relación a una concepción unidireccional de la asociación de este modo se percibe la dependencia sólo cuando ésta es positiva, y se asigna independencia al caso de asociación inversa.

En relación a problemáticas detectada en el CETMar03, podemos mencionar la falta de materiales didácticos, notas de clase de apoyo pertinentes para la enseñanza de la estadística que propicie aprendizajes significativos. El libro de texto de probabilidad y estadística que se usa es el del subsistema de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI) en el cual se omite el tema de medidas de correlación, a pesar de que este tema aparece en el programa de la materia, además de ser un texto tradicional donde se establecer sólo estrategias de enseñanza (centradas en las actividades del profesor), en contradicción a lo señalado en la RIEMS, en donde el centro del proceso educativo es el estudiante.

Otra problemática detectada en la institución es el uso de la tecnología computacional en la enseñanza de la estadística sólo como una herramienta que permite realizar cálculos de manera más eficiente, lo cual consideramos como una postura incorrecta , compartiendo el planteamiento de Batanero (2001) [3], donde señala que sin lugar a dudas la tecnología ha influenciado significativamente el desarrollo de la estadística, además de convertirla en una disciplina más accesible para usuarios heterogéneos, permitiendo abordar mayor cantidad de contenidos, pero también ha permitido el ajuste de contenidos, de manera que permite adoptar un enfoque hacia los aspectos interpretativos y conceptuales dejando en segundo término a los procedimentales y algorítmicos para el cálculo.

En consideración a los elementos antes expuestos, es que se propone desarrollar un trabajo de tesis en la modalidad de desarrollo docente cuyo objetivo general es el diseñar de una secuencia de actividades didácticas para promover el aprendizaje significativo del tema de medidas de correlación lineal del curso de probabilidad y estadística para estudiantes de la carrera de técnico en electrónica, con las siguientes características: a) Incorporación de recursos computacionales (Excel, Fathom, etc.), b) Integrar dispositivos manipulables relacionados con el componente profesional de la carrera de técnico en electrónica, c) Recopilación de datos reales para las actividades, d) Utilización de diversos registros de representación (verbales, gráficos, tabulares y numéricos), e) Implementación de hojas de trabajo complementarias, que permitan registrar las respuestas de los estudiantes para su análisis, f) Promoción de trabajo colaborativo.

3 Actividad didáctica

En este apartado se presenta la actividad didáctica que se tiene diseñada al finalizar el primer semestre de la maestría (semestre 2011-2).

3.1. Objetivos de la actividad. La actividad didáctica tiene como propósitos que el estudiante: a) Identifique variables dependientes e independientes, b) Identifique relaciones lineales, c) Identifique relaciones directas e inversas, d) Participe de manera efectiva en equipos colaborativos, e) Incorpore el uso de tecnología para procesar e interpretar información

3.2. Descripción de la actividad. Una catapulta es un instrumento militar utilizado en la antigüedad para el lanzamiento a distancia de grandes objetos a modo de proyectiles. Fue inventada probablemente por los griegos y posteriormente mejorada por cartagineses y romanos, siendo muy empleada en la Edad Media. Además es una maquina compuesta susceptible al ajuste para mejorar su exactitud, precisión y por consecuencia su eficiencia, al igual que cualquier maquinaria de producción industrial. La Figura 1 se muestra dicho dispositivo.

Figura 1

Las catapultas que se usarán en la actividad didáctica, están compuestas de madera con características que permiten realizar los ajustes fácilmente a través de las variables "A, B y C". La variable A que representa la posición de la liga en el vástago móvil (8 posiciones), la variable B que es la posición del tope para el ángulo de lanzamiento (6 posiciones) y la variable C que es la posición de la liga en el vástago fijo (5 posiciones). La Figura 2, muestra cada una de las partes de la catapulta, relacionada con las variables antes mencionadas.

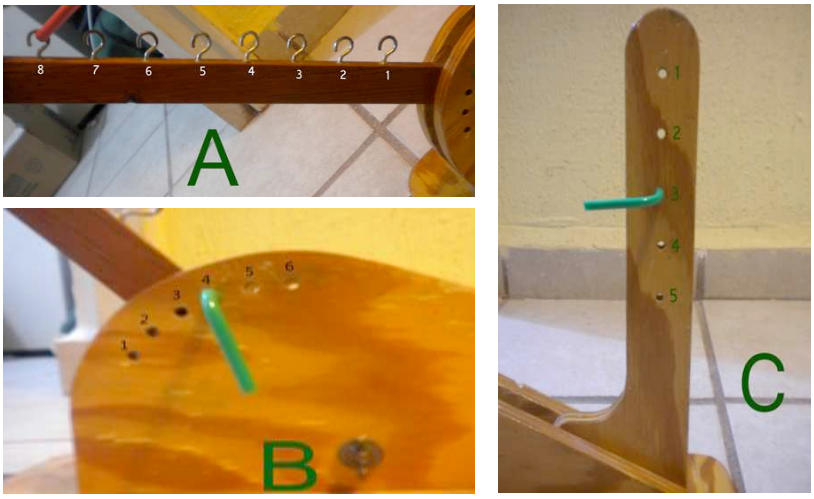


Figura 2

3.3. Instrucciones.

Primera etapa: Se invita a los alumnos a formar tres equipos, a los cuales se les asignará una catapulta, accesorios y equipo de medición, para el desarrollo de la actividad.

a) Coloca la catapulta en la configuración que se muestra en la Tabla 1 y mide los valores correspondientes a las posiciones A, B, y C, con la ayuda de la cinta de medir y el transportador apúntalos en la misma tabla.

b)

Tabla 1

	Posición	Valor
A	4	
B	5	
C	3	

Es importante solicitar que al interior del equipo se asignen diferentes roles para la realización de las distintas actividades de medición, manipulación de la catapulta, registro de los datos, etc. Además de establecer en el equipo un método para realizar una medición precisa y ajustes eficaces (se podrán sugerir algunos por parte del profesor)

c) Con la misma configuración, realiza 15 lanzamientos midiendo con la cinta métrica la distancia recorrida de la pelota a partir de la base de la catapulta y registra los datos en la Tabla 2.

Tabla 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Distancia															

Segunda etapa: En esta segunda etapa se asigna aleatoriamente a cada equipo una de las variables A, B y C.

d) Realiza lanzamientos en cada una de las posiciones de la variable que le tocó a tu equipo, midiendo en cada tiro la variable ajustada y el alcance obtenido, manteniendo fijas las posiciones de las otras dos variables de la configuración. Registra los resultados obtenidos en la Tabla 3.

Tabla 3

Posición	Valor medido de la posición (A, B o C)	Salida (mts)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

e) Introduce los valores en la hoja de Excel correspondiente a tu variable que está en el archivo catapulta.xlsx.

En plenaria se compartirá la información de las relaciones resultantes del alcance de la pelota con la variable que les toco manipular, para completar las tablas de las hojas de Excel de las otras variable.

Con base a la observación de las graficas, conteste lo siguiente:

f) Llena en la Tabla 4, el alcance de la pelota, considerando las posiciones de las variables A, B y C, señaladas en la misma.

Tabla 4

Variable A		Variable B		Variable C	
Valor de la Entrada (mts)	Salida (mts)	Valor de la Entrada (grados)	Salida (mts)	Valor de la Entrada (mts)	Salida (mts)
0.015		52.5		0.045	
0.045		46.5		0.075	
0.075		39.5		0.105	
0.105		29		0.135	
0.135					
0.165					
0.195					

g) ¿Cuál de las variables (A, B y C) que consideras tiene mayor efecto sobre la distancia alcanzada por la pelota? Argumenta tu respuesta.

h) ¿Consideras que la relación de las variables (A, B y C) con la distancia tienen una tendencia lineal? ¿Por qué?

i) Indica si la tendencia lineal para alguna de las variables es positiva (creciente) o negativa (decreciente). Argumenta tu respuesta.

j) En plenaria, compara tus respuestas con el resto del grupo, consensando la pertinencia de las mismas.

> La actividad concluye con la participación del profesor, con la intención de precisar las ideas más importantes de la actividad en torno a los objetivos planteados

3.4. Descripción de archivo de Excel.

El archivo Excel Catapulta, consta de tres hojas, llamadas Variable A, Variable B y Variable C. Cada hoja contiene una tabla en la cual los estudiantes van a capturar los valores del inciso c de la actividad, generándose automáticamente los correspondientes diagramas de dispersión con los cuales se espera que los estudiantes den respuesta a los últimos cuestionamientos de la actividad.

4 Comentarios finales

a) Actualmente se esta trabajando en la conclusión del diseño de actividades didácticas y en la revisión del estado del arte del tema de tesis, algunas de las acciones que se realizarán durante el semestre 2012-1 son las siguientes, primeramente realizar una revisión referencias que permita precisar a la brevedad el marco teórico pertinente para la implementación de las actividades de aprendizaje, así como análisis de resultados, conclusión de las actividades didácticas de la secuencia y el pilotaje de las mismas con la intención de realizar las adecuaciones pertinentes que permitan la aplicación en el o los grupos experimentales, a más tardar durante el semestre 2013-1.

b) Durante el semestre 2012-2, se realizó un pilotaje con un grupo de 5 estudiantes, con la intensión de realizar una valoración general de la actividad de aprendizaje, y así poder implementarla durante el semestre 2013-1, tal y como se señalo en el párrafo punto anterior. Del resultado del pilotaje los resultados más relevantes son los siguientes:

❖ En general la situación problema y el manipulable resultan provocadoras de manera favorable para los estudiantes de la carrera de técnico en electrónica.

❖ Se considera pertinente aumentar el número de mediciones por cada experimento para asegurar la identificación de la aleatoriedad (Concepción determinista de la asociación).

❖ La metodología ACODESA requiere de mayor tiempo del planteado inicialmente, para dar oportunidad al discente de debatir y lograr las representaciones deseadas.

Referencias

[1] Vázquez, J. (2008). Acuerdo 444-SNB. SEP. Recuperado el 2 de febrero 2012, de: `http://www.reforma-iems.sems.gob.mx/wb/riems/acuerdos_secretariales`.

[2] CoSDAc. (2010). Programa de estudios de Matemáticas. Recuperado el 2 de febrero 2012, de: `http://www.cecyteo.edu.mx/site/Docs/ProgramasBasicas/Matematicas.pdf`.

[3] Batanero, C. (2001). Didáctica de la estadística. Granada: G.E.E.U.G.

[4] Estepa, A. y Gea, M.M. (2010). Conocimiento para la enseñanza de la asociación estadística. Investigaciones actuales en educación estadística y formación de profesores. 2, 23-40. Granada: Universidad de Granada.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 163–169.

LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN COMO HERRAMIENTA PARA LA EVALUACIÓN DEL DESARROLLO DE COMPETENCIAS EN EL BACHILLERATO

Gloria Angélica Moreno Durazo* **Agustín Grijalva Monteverde†**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: *angelicadzo@hotmail.com
†guty@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En este trabajo se presenta la propuesta de tesis para obtener el grado de maestría en ciencias con especialidad en matemática educativa, la cual tiene como principal objetivo la evaluación de competencias matemáticas efectivamente desarrolladas por estudiantes de bachillerato. Para lograr este fin nos proponemos emplear los criterios establecidos en el enfoque ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemática (EOS), utilizaremos estos criterios para dar una visión global del proceso de estudio de la integral de una función realizado por los estudiantes y, por otro lado, para diseñar y analizar la herramienta de evaluación.

1 Introducción

La educación en nuestro país, desde la básica hasta la educación media superior, y en algunos casos la educación superior, ha incorporado en su currículo el modelo educativo basado en competencias. Esta medida se ha venido implementando hace algunos años en diferentes ciclos, en 2004 el modelo se incluyó en el currículo de la educación preescolar, dos años después se implementó en secundaria y, para finalizar con la educación básica, en el 2009 se renovó el currículo de primaria incluyendo el modelo basado en competencias; en el caso de la Educación Media Superior esta reforma se presentó en el 2008.

En la Reforma Integral de Educación Media Superior (2008) se enuncian las 8 competencias matemáticas que componen el perfil de egreso del estudiante de bachillerato, siendo el objetivo principal de este trabajo de tesis identificar cuáles de las competencias, y en qué medida, son desarrolladas por estudiantes del bachillerato; específicamente estudiantes del CBTIS 206.

En este documento se presenta el trabajo realizado, en la segunda sección se muestra la problemática alrededor del tema de tesis y la justificación, se presenta en la tercera sección los elementos teórico-metodológicos considerados para el desarrollo de la propuesta y, por último, en la cuarta sección se menciona el análisis realizado al libro *Cálculo* del profesor Hipólito Orduño Vega, el cual es un material de apoyo para la materia de Matemáticas aplicadas impartida en el sexto semestre del CBTIS.

2 La problemática y su justificación

A partir de un estudio sobre la diversidad de planteamientos curriculares, en la Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008), se encontró que existen cerca de 200 subsistemas de Educación Media Superior en el país. Esto motivó que la Secretaría de Educación Pública estableciera la llamada Reforma Integral de la Educación Media Superior y, con ella, el Sistema Nacional de Bachillerato.

Para el establecimiento de un Marco Curricular Común a todos los sistemas y subsistemas de bachillerato en el país, se adoptó un modelo curricular basado en las competencias y en los últimos años se han venido concretando diversas medidas para su establecimiento, no sólo en el planteamiento curricular, sino también en la elaboración de textos y materiales didácticos de apoyo para la enseñanza, la formación de profesores y la modificación de los instrumentos de evaluación del aprendizaje.

Con la renovación de los currículos en los diferentes niveles educativos es necesario realizar evaluaciones en los estudiantes pensando en las competencias que forman el perfil de egreso del estudiante en los distintos niveles. En el caso de la Educación Media Superior encontramos evaluaciones de conocimientos y habilidades con la implementación de la prueba Enlace. En los resultados de Enlace (2011) se muestra el 75.3

Respecto a la implementación de la Reforma Integral de la Educación Media Superior, López (2011) realiza un diagnóstico desde la perspectiva de los profesores que laboran en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora; en esta investigación se muestra la falta de familiaridad por parte de los profesores con relación al modelo educativo basado en competencias.

Relacionado a las evaluaciones López (2011) señala "los planes de estudio se sustentan en teorías de aprendizaje y estas definen el rol del docente, del alumnado, el concepto de enseñanza aprendizaje, así como estrategias de enseñanza y evaluación, aspectos que marcan las transformaciones en la práctica docente." En ello basa la importancia de que los profesores conozcan los instrumentos de evaluación que se manejan en el modelo educativo basado en competencias y, como resultado obtiene que estos instrumentos de evaluación son poco conocidos por los profesores.

Investigaciones acerca de evaluación de competencias matemáticas en estudiantes en los diferentes niveles educativos son poco frecuentes.

3 Elementos teórico-metodológicos

Es importante que en cualquier proceso de enseñanza y de aprendizaje sea posible describir, explicar y valorar lo sucedido en dicho proceso. El EOS cuenta con cinco niveles de análisis para lograr este fin. Los niveles de análisis que encontramos en este enfoque son:

1. Análisis de las prácticas matemáticas

2. Análisis de objetos y procesos matemáticos

3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas y de conflictos semióticos
4. Identificación del sistema de normas y metanormas
5. Valoración de la idoneidad didáctica

Los cuatro primeros niveles mencionados son la herramienta para describir y explicar los procesos de estudio, esto es, en ellos se responde las cuestiones ¿qué está pasando y porqué? En el intento de valorar este proceso se hace uso del quinto nivel, el cual se basa en los cuatro niveles anteriores.

Estos niveles de análisis serán usados para dar una visión global del proceso de estudio realizado por los estudiantes del CBTIS 206 y predecir cuales son las prácticas que estos estudiantes son capaces de llevar a cabo, este fin se logrará mediante el uso de estos niveles en el análisis del libro y la observación en el aula.

Para evaluar cuáles son las competencias que el estudiante ha desarrollado al finalizar el proceso de estudio, usaremos los niveles 1 y 2, es decir, basándonos en las respuestas que el estudiante dé a las situaciones problema que se le presenten podremos mencionar qué objetos y prácticas matemáticas intervinieron en la solución del problema.

Los procesos intervinientes en la solución los pondremos en relación con las competencias definidas en la Reforma Integral de Educación Media Superior (2008) y así podremos determinar cuáles son las que efectivamente ha desarrollado el estudiante.

Por otro lado, para la realización de los objetivos podemos agrupar las acciones que se llevarán a cabo en dos grandes etapas.

- La primera etapa consiste en:
  - Hacer una revisión profunda de bibliografía con el propósito de conocer los trabajos que se han realizado sobre evaluación del desarrollo de competencias.
  - Revisar planes y programas de estudio del CBTIS.
  - Hacer un análisis sobre las actividades propuestas en el libro de Cálculo de Hipólito Orduño Vega. Este análisis consiste en identificar los objetos matemáticos intervinientes y emergentes, las prácticas matemáticas promovidas, los procesos matemáticos puestos en juego, etc.
  - Observar en el aula algunas clases en la que se trate el tema de la integral.
- La segunda etapa consiste en:
  - Elaboración y elección, en su caso, de problemas para hacer el cuestionario que se aplicará a los estudiantes. El propósito de este cuestionario es, claramente, evaluar las competencias de estos estudiantes.
  - Una vez aplicado el cuestionario se pasará a hacer una análisis sobre las respuestas de los estudiantes y con este análisis decidir si los estudiantes cuentan o no con las competencias demandadas para su nivel educativo.

4 Análisis del libro de texto

Un curso obligatorio en el sistema CBTIS es el de Matemáticas aplicadas, cuyo propósito de acuerdo al plan de estudios de Matemáticas (2009) para el bachillerato tecnológico considera "que el estudiante analice e interprete las relaciones entre dos variables de problemas de tipo social o natural, y los resuelva aplicando el teorema fundamental del cálculo". El libro que se analizará es un material de apoyo para este curso.

El tema *la integral* se aborda en dos secciones del libro, en el capítulo 4 *Aplicación geométrica de la integral* y en el capítulo 5 *El teorema fundamental del cálculo e integración de funciones.* Hacemos uso del estudio realizado por Crisóstomo y Godino (2004) para caracterizar las situaciones problema del libro dentro de las configuraciones epistémicas abordadas en este estudio.

Los problemas de cálculo de áreas, uso de método de exhaución para aproximar el área bajo la gráfica de una función, lenguaje esencialmente geométrico y aritmético, manejo del concepto de área son características que sitúan a los problemas presentes en el capítulo cuatro en la configuración epistémica intuitiva.

La aplicación de métodos en problemas para relacionar el diferencial y la primitiva, calcular el á rea como inversa de la diferenciación, utilización de lenguaje simbólico y gráfico, propiedades como el área bajo la curva $y = ax^{\frac{m}{n}}$ es igual a $\dfrac{ax^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}$, sitúan a los problemas presentes en el capítulo cinco en la configuración epistémica primitiva.

Tomamos en cuenta esta clasificación de los problemas para agruparlos de la siguiente manera: problemas de cálculo de áreas cuya finalidad es introductoria, problemas pertenecientes a la configuración epistémica intuitiva y problemas pertenecientes a la configuración epistémica primitiva.

Como primera etapa del análisis se realiza la identificación de las prácticas matemáticas, objetos matemáticos y los procesos matemáticos intervinientes en cada grupo de problemas; la finalidad de esta etapa tiene dos vertientes: primeramente la identificación de objetos matemáticos permitirá la valoración de la idoneidad epistémica ya que tiene estos mismos objetos como componentes y, en segundo caso la identificación de prácticas, objetos y procesos realizada en esta etapa servirá de guía en las visitas al aula facilitando la detección de conflictos semióticos.

Esta primera parte nos permite alcanzar la segunda etapa, la cual consiste en la valoración del libro como material educativo usando los criterios parciales de la idoneidad didáctica planteados en el EOS.

Idoneidad didáctica

Para realizar la valoración de la idoneidad didáctica, en el EOS se introduce seis criterios parciales de idoneidad atendiendo a las siguientes dimensiones que caracterizan y condicionan los procesos de enseñanza y de aprendizaje: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica. En esta sección donde sólo se hace referencia al libro valoramos la idoneidad epistémica y cognitiva dejando los demás criterios parciales para la sección en la que analice las actividades en el aula.

Idoneidad epistémica

Este criterio se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Como componentes de esta idoneidad se encuentran los seis objetos matemáticos primarios: situaciones-problemas, elementos lingüísticos, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos.

Tabla 1: Idoneidad epistémica

Componentes	
Situación problema	• La mayoría son de tipo intra-matemático tales como: calcular el área bajo la gráfica de una función $f(x)$, resolver integrales utilizando los métodos de sustitución y por partes, entre otras; abordando situaciones problemas de tipo extra-matemático en pocos momentos • Las situaciones problemas presentes en el libro son familiares para los estudiantes, se toma un problema conocido para ellos (cálculo de áreas) como motivación para la enseñanza de la integral, transformándolo en el cálculo de áreas bajo la gráfica de una función $f(x)$ problematizando al estudiante que las herramientas conocidas por él hasta el momento no son suficientes para resolver esta tipo de problemas
Lenguaje	• Las situaciones problemas presentes en el libro promueven el uso de diferentes formas de lenguaje, pues en los tres grupos de problemas en los que hemos ubicado estas situaciones se hace uso de al menos tres formas de lenguaje. • El libro de texto es un material de apoyo para estudiantes del sexto semestre de bachillerato, quienes en el cuarto semestre cursaron la materia de cálculo donde estudiaron: pre-cálculo, funciones, límites y derivadas, objetos matemáticos utilizados en las situaciones problemas que se les presenta en el estudio de la integral, por lo que consideramos que el lenguaje utilizado es adecuando para estos estudiantes. • Consideramos que se promueve la expresión e interpretación por parte de los estudiantes, ya que para resolver los problemas se pide que se discuta en equipo. Además, cada situación problema se presentan preguntas guía que intentan que el estudiante compare, explique y relacione resultados.
Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	• Los conceptos-definiciones, proposiciones y procedimientos presentes en las situaciones problemas son conocidos por los estudiantes o abordados en estas lecciones, por esto consideramos que la presentación de estos objetos matemáticos primarios es adecuada para este nivel educativo. • Los significados que se desea promover por el libro de texto en el estudiante respecto a la integral se adaptan de buena manera a lo establecido por el plan de estudios de Matemáticas (2009) para el bachillerato tecnológico • Las situaciones problemas presentes en el libro están encaminadas a la construcción de definiciones, proposiciones y procedimientos tales como: la integral, la integral definida, el teorema fundamental del cálculo, métodos

	de integración (sustitución y por partes) a través de la resolución de problemas que tienen que ver con la enseñanza de la integral. La negociación de estos objetos matemáticos se dará principalmente durante las discusiones grupales sobre los resultados obtenidos y durante el trabajo en equipo.
Argumentos	• Se promueve en los estudiantes la argumentación pues se les pide que expliquen sus respuestas a las preguntas, esperando que utilicen en sus argumentos relaciones encontradas o conocimientos previos.

Idoneidad cognitiva

Este criterio se refiere al grado en que los significados pretendidos (o implementados) estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos(o implementados). Como componentes de esta idoneidad se encuentran: conocimientos previos, adaptaciones curriculares a las diferencias individuales y aprendizaje.

Tabla 2: Idoneidad cognitiva

Componentes	
Conocimientos previos	• Entre los conocimientos necesarios para el estudio de la integral, siguiendo el libro de texto, encontramos aspectos como: áreas, funciones, límites, derivadas; temas que han sido estudiados en cursos anteriores. Por otro lado, aspectos como notación y cálculo de sumatorias son considerados para su estudio ya que no han sido tratados con anterioridad. • Dado el contexto familiar con que se propone el estudio de la integral consideramos que los significados pretendidos tienen una dificultad apropiada para los estudiantes
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	• En los grupos de problemas se trabajan situaciones con ideas similares, de esta manera se favorece la ejercitación y refuerzo de significados por parte de los estudiantes.
Aprendizaje	• Este descriptor queda fuera de nuestro análisis debido a que se refiere a un proceso de instrucción implementado.

Referencias

[1] Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008). Secretaría de Educación Pública. Recuperable al 21 de enero del 2012 en `http://www.reforma-iems.sems.gob.mx`

[2] Orduño Vega, Hipólito (2007). *Cálculo.* México D. F: Talleres de Impresora y Encuadernadora Progreso, S.A. de C.V.

[3] Enlace (2011). Recuperable al 21 de enero del 2012 en `http://enlace.sep.gob.mx/`

[4] López, Carmen (2011). *Evaluación y propuesta para la mejora de la implementación de la Reforma Integral de Educación Media Superior en el Colegio de Bachilleres del*

Estado de Sonora, a partir de la Percepción de los Docentes. Recuperable al 21 de enero del 2012 en `http://uva.ifodes.edu.mx/ensh/posgrado/minerva.pdf`

[5] Crisóstomo Edson y Godino J. D. (2004). *Reconstrucción del significado global del concepto de integral definida en didáctica de la matemática.*

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 171–179.

EPISTEMOLOGÍA Y DIDÁCTICA DEL OBJETO MATEMÁTICO PROPORCIONALIDAD

Francisco Javier Parra Bermúdez* **Ramiro Ávila Godoy†**

*Departamento de Física, Universidad de Sonora
e-mail: francisco.parra@correo.fisica.uson.mx

†Instituto de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: ravilag@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En la presente contribución se pretende mostrar un análisis epistemológico del objeto matemático proporcionalidad (OMP) en la matemática y en la física. Nuestros análisis se realizan desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico de la cognición y la instrucción en matemáticas (EOS) y la resolución de problemas. Se pretende ilustrar con algunos ejemplos, el papel de las situaciones problemáticas en el origen y desarrollo de los significados del (OMP) y cómo dichos significados, en un cierto momento, se convierten en obstáculos que dificultan el enriquecimiento de los mismos; lo cual, se asume, sucede tanto en el desarrollo histórico de las ideas como en el proceso de aprendizaje que viven los estudiantes en el aula.

1 Introducción

Uno de los instrumentos matemáticos más importantes, si no el primordial, para el tratamiento de la regularidad de sucesos que fundamentan el trabajo de investigación de la ciencia, el trabajo técnico y el funcionamiento de gran número de aparatos de medida, es la relación de proporcionalidad entre las magnitudes intervinientes. El sustrato de expresiones tales como razón, proporción, constante de proporcionalidad, etc. que se unifican sintéticamente por medio de la función lineal o función de proporcionalidad, lo constituyen las operaciones división y producto, dependiendo de las características que fijan la naturaleza de lo que se trata el que se utilice una u otra.

Los científicos, al estudiar los fenómenos que se producen en la naturaleza, comprueban que en ellos, generalmente se presentan dos (o más) magnitudes relacionadas entre sí. Es decir que al variar una de las magnitudes, la otra también cambia. Por ejemplo al aumentar el volumen de un bloque de fierro, aumenta su masa; la fuerza que se manifiesta entre dos cargas eléctricas disminuye cuando aumentamos la distancia entre ellas, etc. Cuando esto sucede, es decir, cuando las magnitudes están relacionadas, decimos que una es *función* de la otra. Así, la masa del bloque es *función* de su volumen, y la fuerza que se presenta entre las cargas eléctricas es *función* de su distancia.

La física y la ingeniería son ricas en situaciones donde aparece la variación proporcional. La velocidad que adquiere un cuerpo que cae bajo los efectos de la gravitación es, si se desprecia la resistencia del aire, proporcional al tiempo de caída. Si se aplica una fuerza a un resorte o a un alambre, la elongación que resulta es, dentro de ciertos rangos, proporcional a la fuerza aplicada; principio que se utiliza para construir pesas y básculas. Algo similar ocurre con las deformaciones que se observan cuando se intenta torcer una varilla, o cuando se carga una viga en su centro o en un extremo libre. Si se somete un cuerpo a un cambio de temperatura, sus dimensiones lineales se modifican dentro de ciertos rangos de temperatura que dependen de la materia o composición del cuerpo, esta modificación es proporcional al cambio de temperatura, propiedad que se utiliza en la construcción de termómetros, etcétera.

La Proporcionalidad es un objeto matemático especialmente importante en el proceso de matematización de diversas disciplinas científicas entre las que destacan la Física, la Química, la Biología, entre otras, además de propiciar el desarrollo del pensamiento relacional. Con la descripción anterior, lo que pretendemos es mostrar como se manifiesta y trasciende, actualmente, la importancia del objeto matemático proporcionalidad (OMP) el cual, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico de la instrucción y cognición matemática (EOS) [1], éste emerge al hacer frente a situaciones problemáticas (SP).

Por otra parte, si concebimos que el propósito fundamental de la investigación en matemática educativa, es mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, asumimos que es necesario comprender dichos procesos. Desde la perspectiva anterior, enseguida ilustramos reflexiones en esa dirección. En un curso de física a estudiantes universitarios, al plantearles preguntas como las siguientes: ¿qué significa que dos cantidades sean directamente proporcionales? una de las respuestas fue: "cuando una cantidad crece la otra también crece". ¿Lo anterior es indicador de que sean siempre directamente proporcionales?, o ¿si una cantidad crece y la otra decrece, pueden ser directamente proporcionales?, en esta última, la respuesta más frecuente es: "no". Lo anterior es indicador de las dificultades que tienen los estudiantes al no comprender la física, ni el objeto matemático proporcionalidad (OMP). Así tenemos que dos cantidades pueden ser directamente proporcionales cuando una crece y la otra decrece, siempre y cuando la constante de proporcionalidad sea un número negativo, (velocidad y tiempo en la caída libre de un cuerpo), donde la representación gráfica son rectas de "bajada". Con lo anterior también pretendemos mostrar que la física puede servir como contexto para estudiar matemáticas, y a su vez que los significados de los objetos matemáticos (OM) en el contexto de la física sean una manifestación de dominio de ésta disciplina, pretenderíamos que cuando un alumno trate de resolver un problema de "física" sea eficaz en el uso de los objetos matemáticos para describir e interpretar fenómenos físicos. Investigadores reconocidos [2] muestran que la enseñanza de la matemática y de la física en los primeros cursos universitarios no está exenta de dificultades, por ejemplo en el caso de la segunda disciplina: en los alumnos persisten una serie de interpretaciones erróneas acerca de diversos fenómenos físicos, "estudiantes que consideran que una masa doble se traduce en mitad de tiempo de caída", no tienen experiencia en métodos y formas de trabajo propios de la actividad científica, ni poseen ciertas actitudes características del trabajo científico, que repercuten en la construcción de los significados de los objetos tanto matemáticos como físicos.

2 El Objeto Matemático Proporcionalidad en la matemática griega

A través de diferentes fuentes de la Antigüedad como el historiador romano Plinio (siglo I d.n.e.) y Diógenes Laercio, historiador griego de la filosofía que vivió entre los (siglos II y III d.n.e.), sabemos que por los años 585 d.n.e., el matemático griego Thales de Mileto midió, de una manera ingeniosa, la altura de la Gran Pirámide de Keops. "La relación que yo establezco con mi sombra es la misma que la pirámide establece con la suya.". De ahí dedujo: "En el mismo instante en que mi sombra sea igual que mi estatura, la sombra de la pirámide será igual a su altura" Por lo que estableció la relación entre los lados de triángulos semejantes, que él mismo demostró y hoy conocemos como teorema de Thales.

Por otra parte Nomdedeu [3], señala que: "A Teano se le atribuye haber escrito tratados de matemáticas, uno de ellos sobre la proporción áurea. La proporcionalidad fue el eje en torno al que se desarrolló la mayor parte de la producción de la escuela pitagórica. Descubrieron que había magnitudes conmensurables e inconmensurables, a las que se refirieron con números que llamaron, respectivamente, racionales e irracionales. Conocieron las ocho formas de una proporción y su propiedad fundamental". El desarrollo de Teano, en torno a la proporción áurea, resulta del análisis de las posibles proporciones establecidas entre los dos segmentos en que queda dividido uno dado al fijar un punto en su interior.

Por la descripción histórica precedente, consideramos que la matemática griega es geométrica, y para ubicarnos en su epistemología, asumimos que el origen del objeto matemático proporcionalidad surge en ese contexto. Por lo que compartimos con Piaget [3] cuando señala que los "Los Elementos" de Euclides, "*representan acabadamente el tipo de geometría que caracteriza el período que va desde la Antigüedad hasta la Época Moderna. Dichas características, conjuntamente con las limitaciones que involucran, sólo serán puestas de manifiesto en forma explícita en el siglo XIX, precisamente cuando tiene lugar una profunda revolución metodológica y un cambio de concepción sobre la significación de la geometría*". Para comprender el proceso, lo que lograron y sus limitaciones es necesario empezar desde los griegos destacando las aportaciones de cuatro geómetras griegos, que existía entre ellos, en forma embrionaria, una cierta idea del uso de coordenadas (Apolonio), de modificaciones sucesivas de una figura que tiende hacia un límite (Arquímedes), así como una utilización de transformación por proyecciones (Euclides, Pappus). Piaget [3], continúa "Apolonio *no sólo aportó una impresionante cantidad de resultados nuevos, sino también una metodología y una renovación conceptual en las cuales puede encontrarse el germen lejano de la geometría analítica del siglo XVII*". Se le considera a Apolonio ser el primero en utilizar un sistema de coordenadas para realizar demostraciones geométricas, antes que Fermat y Descartes. El OMP, se muestra claramente en la obra de Pappus, en la proposición 129 del libro séptimo [3] de "la collection mathématique": "cuando se trazan cuatro rectas desde un mismo punto, forman sobre una transversal, trazada arbitrariamente en su plano, cuatro segmentos que tienen entre ellos una cierta relación constante cualquiera que sea la transversal." Para explorar la epistemología del OMP, consideramos bajo el EOS [1], que los OM tienen atributos contextuales y se manifiestan según su uso del lenguaje en facetas duales dialécticamente ligadas, en este caso sería la faceta unitaria-sistémica, donde el OMP, interviene como unidad en el sistema geometría, desde esta perspectiva nos abocamos en primer término a la epistemología de la geometría. Siendo el OMP, una unidad del objeto matemático geometría, para entender su epistemología hemos recurrido al desarrollo y las limitaciones de la geometría en su devenir histórico. Así, la geometría comienza, con la síntesis que hace Euclides, por un período durante el cual se estudian las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos como relaciones internas entre los elementos de dichas figuras o de dichos cuerpos. No se toma en consideración el espacio como tal, ni por consiguiente las *transformaciones* de las figuras en el interior de un espacio que las comprenda. Viene luego una etapa caracterizada por una puesta en relación de las figuras entre sí, cuya manifestación específica es la búsqueda de *transformaciones* que relacionan las figuras según múltiples formas de correspondencia (geometría proyectiva). Una tercera etapa se caracteriza por la preminencias de las estructuras. No se trata de transformar una figura en otra, sino de una estructura que opera sobre un conjunto de elementos que varían o bien sus relaciones. Las etapas anteriores Piaget [3] las denomina "intra-figural", "inter-figural" y "trans-figural", respectivamente. Correspondiéndose la primera a una centrada en "dentro" de la figura geométrica, que sería la geometría griega hasta el siglo XVII, una segunda de relaciones con la algebrización de la geometría con Descartes y dos siglos después una tercera de transformaciones con la geometría dinámica de Ponselet, Chasles, Klein, principalmente.

En el camino hacia las *transformaciones* desde la perspectiva de la geometría proyectiva de Chasles y Poncelet tuvieron una fuerte oposición, de eminencias, como: Carnot [3] para quien la utilización de cantidades negativas o complejas aplicada a la representación de entidades geométricas era "absurda", por lo que afirmaba: "*yo demuestro que tal noción es completamente falsa y que de su admisión resultarán los más grandes de los absurdos*"

3 Los significados de los objetos matemáticos como obstáculos epistemológicos en la geometría y el álgebra

Históricamente, lo que se observa es que una gran limitación en el desarrollo de la geometría es el casi nulo uso de las "*transformaciones*" geométricas, en este sentido [3] indica que: "la geometría griega permanece en ausencia de un álgebra, de aquí la ausencia de toda "*transformación*", no obstante los "porismas" de Euclides (o *transformaciones* locales centradas en sus resultados figurales), las coordenadas parciales de Apolonio, y las modificaciones de figuras de Arquímedes o Pappus, todos ellos casos particulares sin generalizaciones metodológicas". Posteriormente Descartes juega un papel fundamental al establecer una relación sistemática entre el álgebra y la geometría, pero fue necesario que transcurrieran casi dos siglos (XVII-XIX), antes de llegar a las *transformaciones* geométricas con Lie, Klein, Chasles y Poncelet vislumbrándose un comienzo con las *transformaciones* pero limitadas a la geometría proyectiva, subordinándose al conjunto de las geometrías a sistemas algebraicos.

Ante lo anterior nos planteamos la siguiente interrogante:

¿Cuál fue el significado de la geometría que se convirtió en un obstáculo epistemológico para el uso de las *transformaciones*?

¿Qué significados construidos en geometría se convirtieron, en cierto momento, en obstáculos (epistemológicos) que dificultaron la asimilación del significado de *transformación* ante nuevos sistemas de prácticas creados para resolver nuevos problemas?

La cual puede ser reflexionada por las aportaciones de [3]: "Sobre el terreno algebraico, el sujeto se siente desde un comienzo libre de construir las transformaciones que le convienen, mientras que a la idea de transformaciones geométricas, debe preguntarse si tiene o no derecho a efectuarlas, en vista de la "realidad" impuesta por los "datos". Y más adelante prosigue: "El largo periodo interfigural no se reduce en modo alguno a la historia de una colaboración entre dos tipos de instrumentos directamente coordinables, sino que está caracterizado por el difícil ajuste de la doble naturaleza objetiva y subjetiva del espacio".

Las dificultades [3] que encontraron los griegos en la solución de numerosos problemas geométricos, sólo se explica por la *carencia de un* álgebra que les permitiera formularlos en términos de operaciones. Aunque resulta difícil explicar el estancamiento prolongado de una ciencia que sólo vuelve a florecer hasta el siglo XVI, de ahí la importancia de la obra de Vieti como un sistematizador, al retomar la ciencia de Diophanto y perfeccionarla. Posteriormente Klein ofrece una profunda interpretación de las obras de Diophanto y de Vieti sobre la base de un profundo análisis del pensamiento griego y del significado de la ciencia que se desarrollaría en los siglos XVI y XVII.

En el caso del álgebra el OMP, inicialmente emerge con la teoría de las proporciones geométricas elaboradas en el seno de las perspectivas euclidianas. Eudoxio, Aristóteles y Proclo proclamaron un *divina ars*, lo que sería la teoría general de las proporciones, capaz de englobar todo el conocimiento matemático en su conjunto. En una siguiente etapa el OMP, se manifiesta en los trabajos de matemáticos como Vieti, referidos a las transformaciones, hechas posibles gracias a un simbolismo abstracto y general. A partir de Vieti y hasta mediados del siglo XIX, el estudio del álgebra se limita al estudio de las ecuaciones algebraicas. En el siglo XVII se encuentran soluciones algebraicas para ciertos problemas de la geometría y de la mecánica. Pero, en cada problema se muestra un método de resolución que es propio para cada situación particular. Sin embargo, en la segunda mitad del siglo XVII, haciendo uso de las propiedades de las funciones continuas, tomadas del cálculo infinitesimal, se llegan a formular en el interior del álgebra, problemas de una gran generalidad, lo cual condujo al teorema fundamental del álgebra. Con el cálculo infinitesimal, Euler, Lagrange, Gauss y Cauchy, contribuyen significativamente al desarrollo del álgebra. Por ejemplo, Lagrange, al considerar el número de valores diferentes que toma un polinomio cuando se permutan las variables de todas las maneras posibles, sería una brillante idea que contiene el germen de donde surgiría la teoría de los grupos. Posteriormente en una tercera etapa el OMP, lo encontramos en las síntesis, donde se alcanzan en el álgebra estructuras, cuyas construcciones comienzan con los grupos de Galois. Las etapas anteriores en el álgebra [3] las denomina "intra-operacional", "inter-operacional" y "trans-operacional", respectivamente. Cabe señalar que los prefijos: "intra", "inter" y "trans", no son privativos en su uso sólo en geometría o álgebra, sino también del Cálculo y otras disciplinas como la Física.

4 El Objeto Matemático Proporcionalidad y su epistemología en la Física

En la física, al derrumbarse el paradigma aristotélico centrado en los atributos de los cuerpos y no en sus relaciones, el significado del OP desarrollado en la geometría griega se enriquece al emerger en el estudio de fenómenos físicos, por ejemplo Galileo establece la relación entre la longitud y el tiempo de caída de un cuerpo, lo que arrojaría una *proporcionalidad directa cuadrática* de la forma: $h \propto t^2$, después Kepler (1618), en sus famosas leyes encontraría para su tercera ley que: *para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.* Esto es: $T^2 \propto L^3$. Así pues En el siglo XVII al igual que la geometría, la física también adquiere una algebrización.

Con el desarrollo del cálculo diferencial, el OMP con Newton, se enriquece con sus leyes del movimiento, así en sus *Principia* en la 2da. Ley, para una fuerza F, en la interacción de cuerpos: d $\propto$ t lo que sería una *proporcionalidad directa lineal* entre el momento lineal y el tiempo, al considerar la masa constante la relación entre la fuerza y la aceleración es: $F \propto a$. El mismo Newton, al construir su Ley de la gravitación universal, tiene que: $F \propto 1/r^2$ (fuerza y distancia entre cuerpos), como una *proporcionalidad inversa cuadrática.* En la posteridad se daría un continuo establecimiento de relaciones de proporcionalidad entre los objetos de la física en sus diversas representaciones (*gráfica, numérica y analítica*), en la mecánica newtoniana y la física clásica. Posteriormente al emerger la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica el OMP, se enriqueció aún más.

5 Los obstáculos epistemológicos en la Física y el OMP

En el desarrollo de la física, concebimos que en ella se presentan los paradigmas aristotélico, newtoniano y einsteiniano, los cuales se caracterizan por ser: especulativo-descriptivo, experimental-cuantitativo y por su relatividad respectivamente. En el primero de ellos el OMP, se presenta de manera incipiente porque al explicar la naturaleza, éste paradigma se limita a una descripción cualitativa de los fenómenos físicos y la explicación de los mismos se mantiene a un nivel especulativo ya que se basaba en la aceptación de ciertas premisas como verdades evidentes. Carece de la medición, siendo su obstáculo limitarse a describir y no relacionar. En principio el objeto de estudio es el hecho. Entre sus premisas incuestionables, se considera que el estado natural de los cuerpos es el reposo. La axiomática de la física es material, describir lo que se ve. Lo anterior se refleja por ejemplo, al considerar que los cuerpos más pesados caen más rápido, lo cual se creyó por alrededor de 2000 años. Pero cuando Galileo se centra en el estudio de las relaciones, él exhibió la contradicción lógica del razonamiento aristotélico. Galileo contribuye a un cambio paradigmático en lo metodológico, ante la concepción global de la caída de los cuerpos, y contribuiría en la construcción de los cimientos del paradigma newtoniano caracterizado por lo experimental, consistente en probar lo que se cree, realizando mediciones. Newton crea un modelo matemático de las relaciones entre los objetos al aritmetizarlas, presenta descripciones cuantitativas, por ejemplo la fuerza se concibe como la medida de la interacción entre los cuerpos, la masa como la medida de la inercia. Posteriormente esto también se refleja cuando aparece el concepto de energía, como indicador de un cambio, deja de ser importante el objeto mismo, para estudiarse el cambio del objeto lo cual fue clave en el desarrollo de la física. Pero la limitación de la física newtoniana es en lo experimental, al considerar el carácter absoluto de los objetos relacionados, y no la relatividad de los mismos, desde los diferentes marcos referenciales de los observadores, por lo que el OMP se limitaba a su carácter absoluto. En el paradigma einsteiniano el tiempo es relativo; las velocidades no se suman en la forma galileana. En el ámbito de la mecánica cuántica: en todo instante un "átomo" no tiene una posición y una velocidad definidas (principio de incertidumbre), contrario a la física de Newton.

Algunas consideraciones sobre didáctica de la matemática

Todo lo anterior obliga a los interesados [5] en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la escuela, a plantearse las siguientes preguntas: a) ¿El estudio del origen y desarrollo de los objetos matemáticos y sus significados, así como de los obstáculos epistemológicos que en un cierto momento representaron, proporciona algunos elementos útiles para la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula escolar?; b) ¿Dicho estudio proporciona elementos para el diseño de estrategias de enseñanza que sean más adecuadas para el propósito de mejorar significativamente el desempeño matemático de nuestros alumnos?

En los dos casos se asume que la respuesta es afirmativa.

Primero, porque está demostrado con creces, que presentar en la escuela, la matemática como un cuerpo de conocimientos acabado, lógicamente estructurado, dejando de lado las situaciones que dieron origen y motivaron el desarrollo de los objetos matemáticos y sus significados, partiendo de la premisa de que es posible apropiarse de ellos por un simple acto de transmisión del conocimiento y, que una vez comprendido el significado formal, es prácticamente automática la transferencia de dichos significados y en consecuencia se estará en condiciones de utilizar eficazmente los conceptos y métodos de la disciplina en el análisis, interpretación y resolución de problemas en diferentes y variados contextos, ha conducido a resultados que se encuentran muy alejados de los esperados.

Segundo, porque el conocer las situaciones que dieron lugar al surgimiento de los sistemas de prácticas que constituyen los significados de los objetos matemáticos considerados como emergentes, así como las dificultades que enfrentaron y las estrategias y caminos que se siguieron para superarlas, ayuda a la comprensión de las dificultades que enfrentan los alumnos cuando se espera que dominen con cierta eficacia determinados conceptos y procedimientos matemáticos, pero también, dicho estudio nos brinda recursos que nos permiten orientar de mejor manera su actividad para que puedan superar con mayor eficacia dichas dificultades. Esto no significa de ninguna manera, que consideremos que en el aula escolar se reproduzca íntegramente el proceso histórico de construcción del conocimiento, ya que en este caso, dicho proceso es conducido y coordinado por el profesor, sin embargo, hay elementos en común en ambos procesos que deben ser considerados a la hora de presentar la matemática en el aula.

Finalmente, porque si el origen y desarrollo de los significados de los objetos matemáticos muestra que estos son creaciones humanas que emergieron del diseño y la implementación de sistemas de prácticas para la resolución de problemas, podemos suponer entonces que el papel del profesor, lejos de ser el de un presentador a través de la exposición, de los objetos matemáticos, debe ser el de un diseñador de situaciones problemáticas que se ubiquen en la zona de desarrollo potencial de los alumnos y que provoquen y estimulen su actividad intelectual, con el propósito de que de dicha actividad emerjan los objetos matemáticos a estudiar y sus significados y debe entonces, ser también un conductor y orientador de dicha actividad.

6 Conclusiones

a) En el análisis que se ha hecho del desarrollo del objeto matemático proporcionalidad (OMP), se ha asumido que éste es una construcción humana y que éste objeto matemático es de naturaleza pragmática, lo cual implica que emerge de un sistema de prácticas creado para analizar y resolver cierto tipo de situaciones problemáticas (SP), en la matemática y en la física.

b) El análisis del origen y desarrollo del OMP en sus diversas manifestaciones: proporcionalidad directa, inversa, al cuadrado, etc., ha permitido valorar la eficacia de las herramientas conceptuales y metodológicas utilizadas para llevar a cabo dicho análisis.

c) Un constructo teórico, especialmente útil para la Didáctica del OMP, es el de obstáculo epistemológico que ayuda a entender las dificultades que tienen los estudiantes para modificar una concepción previamente construida y proporciona elementos para el diseño de estrategias didácticas para superarlos.

d) La investigación que se ha realizado en el campo de la Epistemología, sobre el origen y desarrollo del OMP, ha sido de gran utilidad en Didáctica de la Matemática pues ha permitido identificar elementos que ayudan a comprender de mejor manera el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

e) Al hacer uso de problemas en el contexto de la física, para la construcción de significados de los OM, nos apoyamos en ambas disciplinas (física y matemáticas) como en diferentes momentos éstas disciplinas se han apoyado en el origen y desarrollo de sus propios objetos.

Referencias

[1] Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2008). *Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: `http://www.ugr.es/~jgodino/`

[2] Valdés, P., Sifredo, B., Núñez, J., Valdés, R. (1999). *El Proceso de Enseñanza- Aprendizaje de la Física en las Condiciones Contemporáneas.* Editorial Academia. Cuba.

[3] Nomdedeu, X., (2000). *Mujeres, manzanas y matemáticas. Entretejidas.* Nivola Libros Ediciones. Madrid.

[4] Piaget, J., García, R. (1998). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia.* México: Siglo XXI editores, 8ª. Edición.

[5] Ávila, J., Parra, F., Ávila, R. (2011). *Epistemología y Didáctica de la Matemática.* Memorias de la Vigésima Quinta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, RELME 25.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 181–184.

LA REFLEXIÓN CRÍTICA: CAMBIO DE VISIÓN EN ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS

Sergio Pou-Alberú* **Manuel Moreno Mercado†**
Gloria E. Rubí Vázquez‡ **Adina Jordan Aramburu§**

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño, UABC
e-mail: spoualb@uabc.edu.mx

Facultad de Ciencias Marinas, UABC
e-mail: mmoreno@uabc.edu.mx

Facultad de Ciencias, UABC
e-mail: grubiva@uabc.edu.mx

Facultad de Ciencias, UABC
e-mail: adinaja@yahoo.com

Introducción

Una de las posibles posturas epistémicas de las personas con relación a la matemática es la caracterizada por una visión positivista que considera a la matemática como un aspecto de la naturaleza independiente del hombre, leyes y relaciones por descubrir que no necesitan la existencia del ser humano para existir. Desde esta perspectiva la matemática no se crea o se inventa, sino que se descubre. Esta visión afecta también a la enseñanza de la matemática. En contraste, una visión epistémica más cercana a una postura humanista de la ciencia trae consigo también una forma diferente de concebir la enseñanza de la matemática. Por otra parte, desde el contexto de una linea de investigación que busca soluciones a los problemas recurrentes, como escasa competencia en matemáticas, alto nivel de reprobación, bajos índices de aprovechamiento, falta de solidez de los aprendizajes por parte de los alumnos y de permanencia en la universidad, así como la necesidad de profesionalización en el trabajo docente, por parte de los profesores, enfocamos la atención a los procesos didácticos al interior de la clase. En la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Baja California (Ensenada) se imparte una materia llamada "Didáctica de las Matemáticas y Microenseñanza" para alumnos de séptimo semestre. Durante el semestre 2011-2 se impartió esta materia como un seminario en el que se buscó propiciar la reflexión crítica de los estudiantes con la finalidad de dar pié a la modificación de su visión epistémica sobre la matemática y su enseñanza hacia posturas más acordes con las didácticas que proponen el empleo de problemas como base para hacer participar al alumno en el proceso enseñanza-aprendizaje de esta disciplina. Se invitó a los estudiantes a participar en tres tiempos durante el curso. En el primero, practicaron la docencia con un tema libre, que seleccionaron ellos y que expusieron al resto de sus compañeros con entera libertad; en el segundo, una vez que habían avanzado lo suficiente en las lecturas y discusiones en el grupo, se les pidió que impartieran un tema pero desde una didáctica problémica, en esta ocasión el tema también fue de su elección. Por último, en la tercera oportunidad, se les pidió que expusieran un tema elegido por el profesor, tomado de un curso universitario de cálculo diferencial, con la condición que usaran una didáctica con base en problemas para promover una competencia. En la primera ocasión las participaciones fueron muy tradicionales pero fueron cambiando en la medida en que las lecturas y discusión del curso avanzaba. Todas las participaciones fueron videograbadas y serán analizadas desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico (Godino et al, 2008) y los resultados serán presentados en otro trabajo. Por otra parte, se aplicó al inicio y al final de la experiencia una escala Likert sumativa de cinco niveles y se realizó un análisis comparativo de ambas aplicaciones de la escala. A mayor suma más cerca de la visión humanista-problémica sobre la enseñanza de las matemáticas y a menor valor en la escala, mas lejos de esta visión, lo que representa una postura más tradicional. Los resultados de este primer análisis se presentan en este trabajo y muestran un incremento en el resultado general de la escala equivalente a un 20%, lo cual se interpreta como una modificación sustantiva hacia una visión humanista-problémica de las matemáticas y su enseñanza. El desarrollo posterior del estudio de los videos permitirá corroborar o corregir esta interpretación.

Reflexión

Diversos autores, entre ellos Schön (1992) han señalado el modelo de reflexión dominante como el de la racionalidad técnica. El principio fundamental de la racionalidad técnica es que la práctica profesional tiene por objeto la solución instrumental de problemas a partir de la aplicación racional de conocimientos teóricos y técnicos previamente disponibles y que provienen de un proceso de investigación científica, entendida ésta última como la investigación que puede hacerse desde la óptica positiva. Bajo esta perspectiva Schein (1973) (citado por Schön, 1992) admite tres componentes esenciales en el conocimiento profesional; una componente de ciencia o disciplina básica, sobre la que se fundamenta y desarrolla la propia práctica; una ciencia aplicada o de ingeniería, que tiene que ver con la obtención de los procedimientos cotidianos tanto de diagnóstico como de solución de problemas y una componente de habilidad y actitud que se relaciona con la actuación concreta para dar atención y servicio al cliente, empleando para ello los componentes anteriores de ciencia básica y aplicada. Los profesionistas concebidos bajo este modelo, no se considera que posean las destrezas para la elaboración de técnicas, sino sólo para su aplicación. Por el contrario, Freire (2002) menciona que la reflexión crítica sobre la práctica contiene una exigencia de relación entre la teoría y la práctica, en caso contrario la teoría se transforma en palabrería y la práctica en mero activismo. Se concibe el acto docente como un binomio docente-discente que forma parte de un ciclo formador-formado durante el mismo proceso. Considera que quien forma se forma y re-forma al formar, así como también quien es formado se forma y reforma a su formador. Es difícil concebir que un profesionista se vuelva crítico si es mecánico-memorizador; será mucho más un “repetidor cadencioso” de frases e ideas inertes que un desafiador (Freire, 2002).

Resultados y Discusión

La siguiente figura sintetiza los resultados de la escala Likert.

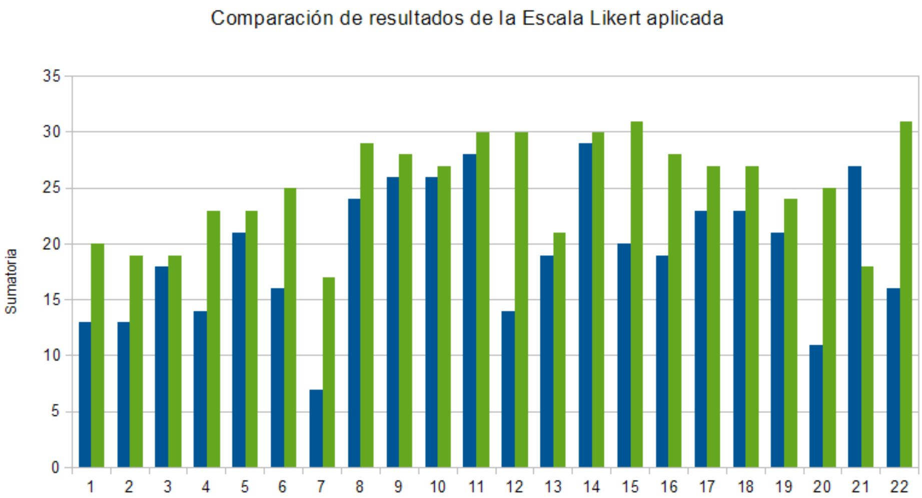


Figura 1: Resultados de la escala Likert.
El color azúl representa la primera aplicación,
el color verde la segunda

Como muestra la figura 1, la primera vez que se aplicó el cuestionario de la escala, se obtuvieron los valores y se realizaron las sumas de todos los participantes, lo que arrojó un valor total de 428 puntos (en azul). Una vez realizada la experiencia, en donde los estudiantes tuvieron la oportunidad de participar como docentes en sus intervenciones y como discentes en las intervenciones de sus compañeros, además de haber efectuado las lecturas y la reflexión propia del seminario en las sesiones de clase para ello dispuestas, contestaron de nueva cuenta la misma escala y los valores obtenidos totales fueron de 549 puntos (en verde). A excepción del reactivo 21, en todos se obtuvo una mayor valoración en la segunda aplicación del cuestionario.

Conclusión

La reflexión crítica es un proceso que puede motivar cambios en la visión epistémica de las personas con relación a la forma en que conciben las matemáticas y su enseñanza. En este primer ejercicio de análisis podemos ver que los estudiantes adoptan una posición más favorable a la idea de enseñar matemáticas en forma problémica y considerando al aprendiz como un ser humano más que como una especie de receptor anónimo una vez que pasan por un proceso de reflexión con un contenido crítico, que le da una componente teleológica al acto de la reflexión misma y que les permite cuestionar la validez y veracidad de sus preconcepciones. Aunque este es un resultado preliminar, es congruente con otros resultados obtenidos en ejercicios de reflexión crítica realizados por uno de los autores. El análisis de los materiales videograbados desde una perspectiva del enfoque Ontosemiótico y bajo la metodología de la Teoría Fundamentada permitirán ampliar estos resultados.

Referencias

[1] Freire, P. (2002). *Pedagogía del oprimido.* México: 54a edición. Siglo XXI editores.

[2] Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. Conferencia invitada en el IV Congreso Internacional de Ensino da Matematica. ULBRA, Brasil, 25-27 Octubre 2007. Publicaciones, 2008, 38, 25-49. ISSSN: 1577-4147.

[3] Schön,D.(1992).La formación de profesionales reflexivos.Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.Barcelona:Paidós.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 185–191.

ELEMENTOS PARA EL DISEÑO DE UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS SOBRE NÚMEROS COMPLEJOS

Daniela Romero Robles* **Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez†**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: *danielar_4m@hotmail.com
†acastillo@gauss.mat.uson.mx

Resumen

El presente trabajo tiene como propósito presentar algunos elementos del análisis que se llevó a cabo para la elaboración de una secuencia de actividades didácticas en línea para el aprendizaje de números complejos y sus operaciones, las cuales involucran el uso de representaciones dinámicas elaboradas con GeoGebra. Dicho análisis tuvo como base algunos elementos teóricos del Enfoque Onto-semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática.

1 Introducción

En este trabajo se presentan algunos elementos del análisis llevado a cabo para la elaboración de una secuencia de actividades didácticas en línea para la enseñanza y el aprendizaje de números complejos (Romero y Del Castillo [1]). Estas actividades involucran el uso de representaciones dinámicamente vinculadas elaboradas con Geogebra y están disponibles en la página `www.mat.uson.mx/proyectoalgebra/Complejos`. Se inicia con algunas reflexiones sobre el uso de tecnología y de representaciones gráficas dinámicamente vinculadas, se continúa con una breve presentación de los elementos teóricos utilizado para el diseño, y se termina con algunos análisis sugeridos por este marco teórico.

2 Uso de Representaciones Gráficas Dinámicas

Las actividades didácticas diseñadas tienen la característica en común de iniciar con representaciones gráficas dinámicas, lo cual es considerado como un rasgo esencial en las mismas: "La visualización cobra importancia en el proceso de razonamiento inductivo y deductivo" (Ben-Chaim, 1991, citado por Planchart [2]), mismo que se intenta promover en la secuencia de actividades.

De manera particular, Planchart [2] señala la importancia de la visualización en el proceso de aprendizaje, al mencionar que "Las gráficas, los diagramas, las figuras geométricas construidas manualmente o en computadoras generan representaciones internas y, éstas fortalecen el proceso cognitivo que conduce al aprendizaje."

Otra de las razones por las cuales se decidió que las actividades iniciaran por medio de representaciones gráficas es porque, en la mayoría de los casos, el docente le da más importancia a los desarrollos de carácter algebraico, tal como lo afirman diversos autores:

- "las investigaciones en educación matemática señalan que en general el sistema algebraico es el preferido por los profesores de matemáticas en su práctica docente" [3]
- "... los profesores promueven más el pensamiento algorítmico-algebraico que el argumento visual." [2]

Aunado a esto, no sólo los docentes se inclinan por un desarrollo algorítmico-algebraico, sino que según Vinner (1989, citado por Planchart [2]) los mismos estudiantes tienen dicha preferencia.

Por estas razones, se consideró pertinente llevar a cabo un diseño de actividades didácticas diferente, que rompiera con el esquema anteriormente expuesto, iniciando cada una de las actividades con una representación gráfica dinámica. Así, además de sacar al estudiante de su zona de confort, se enriquece su concepción sobre el tema de números complejos al trabajar con sus diferentes representaciones.

3 Uso de Tecnología

En las actividades didácticas diseñadas se ve reflejado el uso de la tecnología, porque éstas se encuentran en línea y, principalmente, porque se utiliza un software de geometría dinámica, el cual, según Laborde [4], juega un papel muy importante en la enseñanza y/o aprendizaje de las matemáticas ya que:

- El software ofrece una visualización global de los fenómenos que enriquece el conjunto de imágenes mentales de los estudiantes.
- Los ambientes de geometría dinámica, con sus capacidades gráficas de gran potencia y sus posibilidades de manipulación directa, son herramientas que pueden ser operadas fácilmente.
- La geometría dinámica permite una variación continua de los parámetros y contribuye por lo tanto al estudio de problemas generales y no sólo de situaciones específicas.

Como ya se ha mencionado, el software que sirvió de apoyo tecnológico para la realización de este diseño de actividades es GeoGebra. Las razones por las cuales se consideró hacer uso de éste son, como lo menciona Romero [5], las siguientes:

- Los numerosos reconocimientos que este software ha recibido.
- Los beneficios de ser un software libre.
- Es un DGS (Software de Geometría Dinámica).
- Es un CAS (Sistema de Cómputo Simbólico).
- Además de ser un DGS y un CAS, es un *Software de Matemáticas Dinámicas*, ya que permite la representación de objetos geométricos y algebraicos, y los vincula dinámicamente. Además, incluye una "Hoja de Cálculo", misma que se puede vincular con las representaciones geométrica y algebraica.

4 Elementos Teóricos

Para fundamentar este trabajo se consideran algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS), desarrollado por Godino [6].

Específicamente, entre los elementos que se consideran para este trabajo están los sistemas de prácticas, los objetos personales e institucionales, sus significados sistémicos, los elementos básicos del significado, las relaciones que se establecen entre ellos (funciones semióticas) y conflictos semióticos, los cuales se consideran como herramientas finas para analizar la actividad matemática y los objetos que se ponen en juego durante la misma. A su vez, con el objetivo de identificar cambios potenciales que promuevan mejores resultados del proceso de instrucción, se usa la valoración de la idoneidad didáctica propuesta por este marco teórico.

5 Significado Institucional de Referencia y Pretendido

Con el objetivo de caracterizar el significado institucional de referencia de los números complejos, sus formas de representación y sus operaciones básicas, se llevó a cabo la revisión del programa de la materia de Álgebra para Ingeniería de la Universidad de Sonora, de notas de clase [7], libros de texto [8], datos históricos [9], [10], [11], resultados de investigación en Matemática Educativa [2], sitios web [12] y el uso de tecnología [13].

Con relación al significado institucional de referencia, en la Tabla 1 se muestra un resumen del análisis ontológico-semiótico hecho. En el cual, se han identificado los objetos primarios constitutivos del significado de los números complejos y se han organizado de acuerdo con las cuatro configuraciones identificadas por Pardo y Gómez [14]. Éstas se corresponden con las cuatro grandes etapas del desarrollo histórico, caracterizadas por los cambios en las concepciones epistemológicas de los números complejos, las cuales son:

- ***Algebraica***: Primeras apariciones de las raíces cuadradas de cantidades negativas, consideradas como inútiles, aunque coherentes con los métodos algebraicos.
- ***Analítica***: Aceptación y generalización del uso de las expresiones imaginarias gracias al desarrollo del análisis infinitesimal, consideradas como cantidades que por su naturaleza son imposibles, ya que no se pueden ubicar entre los números posibles: positivos, negativos o nulos. Por eso se les llama cantidades imaginarias porque sólo existen en la imaginación.
- ***Geométrica***: Introducción de un eje imaginario que tiene asociado $\sqrt{-1}$ como unidad perpendicular a 1 y consideración de los imaginarios como vectores del plano. Así, en el plano de ejes real e imaginario un vector queda representado por $a + b\,\mathrm{i}$; y $\sqrt{-1}$ actúa como 90° alrededor de O, es decir, como un signo o índice de perpendicularidad.
- ***Formal***: Formalización de los números complejos considerándolos como pares ordenados de números reales.

Las configuraciones aquí presentadas no son exhaustivas. Una configuración que no se incluyó en la tabla es la que considera las situaciones extra-matemáticas, ya que los contextos de aplicación extra-matemáticos de los números complejos, no son fácilmente accesibles a los estudiantes de primer semestre de universidad.

Tabla 1. Configuraciones Epistémicas asociadas a los Números Complejos

Objetos primarios	Configuración Algebraica	Configuración Analítica	Configuración Geométrica	Configuración Formal
Situaciones	-Resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas (en general, polinomiales) con soluciones complejas no reales -Operar con números complejos -Representar números complejos en forma polar y cartesiana -Conversiones	-Uso de expresiones y funciones de variable compleja	-Representar números complejos en el plano, en forma polar y cartesiana -Representar los procedimientos de las operaciones con números complejos	-Considerar a los números complejos como pares ordenados de números reales -Analizar la estructura de campo del conjunto de los números complejos
Lenguaje	-Verbal -Numérico -Algebraico	-Verbal -Numérico -Algebraico	-Verbal -Numérico -Algebraico -Geométrico	-Verbal -Algebraico
Procedimientos	-Resolver ecuaciones de segundo y tercer grado -Operar con números complejos -Demostrar algunas propiedades de los números complejos conjugados -Expresar números complejos en sus diferentes formas de representación -Convertir números complejos representados en forma cartesiana a su forma polar y viceversa	-Evaluación de funciones de variable compleja	-Graficar números imaginarios puros -Graficar números complejos -Graficar los procedimientos de las operaciones con números complejos -Ley del paralelogramo	-Operar con los números complejos de acuerdo a las definiciones formales
Conceptos	-Raíz de un número negativo -Número imaginario -Número complejo -Parte Real -Parte Imaginaria -Módulo -Argumento -Suma, resta, multiplicación, división, conjugados, potencias y raíces de números complejos	-Variable compleja -Funciones de variable compleja	-Plano Complejo -Punto -Segmento dirigido -Parte Real -Parte Imaginaria -Módulo -Argumento -Ley del paralelogramo -Rotaciones	-Parejas ordenadas -Conjunto -Operación binaria -Axiomas de campo

Propiedades	-Extensión de las propiedades de las operaciones con números reales hacia las propiedades de las operaciones de los números complejos -Reglas de las operaciones con números complejos	-Propiedades y teoremas asociados con las funciones de variable compleja	-Interpretación geométrica de las operaciones con números complejos	-Los números complejos con la suma y multiplicación ordinaria tienen estructura algebraica de campo
Argumentos	Justificaciones de los algoritmos para operar con números complejos	Demostración de teoremas de variable compleja	-Demostrar gráficamente algunas propiedades de los números complejos conjugados	Demostración de las propiedades de la suma y producto de complejos

Dado que la secuencia se dirige a estudiantes de ingeniería de nuevo ingreso, para el significado institucional pretendido se tomaron en cuenta sólo las configuraciones algebraica y geométrica, ya que las configuraciones formal y analítica no forman parte del programa de Ingeniería.

Así, la secuencia didáctica, se materializó en 13 hojas de trabajo y 33 applets elaborados con el software GeoGebra. Cada hoja de trabajo contiene algunos applets, indicaciones y preguntas que tienen como objetivo orientar la actividad matemática del estudiante. Además, con el fin de aprovechar las ventajas del software GeoGebra y las actividades en sí, la secuencia fue colocada en una página web (`www.mat.uson.mx/proyectoalgebra/Complejos`) para que se pueda utilizar desde cualquier computadora.

A continuación, con el fin de brindar una panorámica general de cada una de las actividades se diseñaron unas tablas que contemplan a los objetos primarios (situaciones, lenguajes, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos). En la Tabla 2 se muestra el ejemplo para la actividad de Suma de Números Complejos (actividad 5a de la página en línea mencionada anteriormente).

Tabla 2. Objetos Primarios para la Actividad de Suma de Números Complejos

Tipos de objetos	Objetos primarios
Situaciones	- Describir gráficamente la suma de números complejos - Sumar números complejos específicos en forma binomial - Representar algebraicamente la suma de números complejos
Lenguaje	- Gráfico - Verbal - Numérico - Algebraico
Procedimientos	- Lectura de coordenadas cartesianas - Sumar partes reales - Sumar partes imaginarias
Conceptos	- Números complejos - Suma de números complejos - Parte Real - Parte Imaginaria

Propiedades	- Sean $Z_1 = a + b\,\mathrm{i}$ y $Z_2 = c + d\,\mathrm{i}$ números complejos entonces $Z_1 + Z_2 = (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i}$. (Ya que el punto de partida fue la representación gráfica) - Conmutatividad de la suma para números complejos
Argumentos	- Extensión de las propiedades para sumar con números reales - Justificar el por qué la suma de números complejos cumple con la ley del paralelogramo

6 Consideraciones Finales

Actualmente se trabaja en la descripción, explicación y valoración del proceso de instrucción asociado a la implementación de la secuencia, como un elemento a considerar para la mejora de la misma. También se considera de suma importancia, la elaboración de un documento con orientaciones para el docente para su uso en el aula.

Referencias

[1] Romero, D., Del Castillo, A. (2011). *Actividades Didácticas en Línea con GeoGebra para el Aprendizaje de Números Complejos.* XXI Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Universidad de Sonora.

[2] Planchart, O. (2002). *La Visualización y la Modelación en la Adquisición del Concepto de Función.* Tesis de Maestría en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Cuernavaca, Morelos.

[3] Hitt, F. (2003). *Una Reflexión sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología.* Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2. pp. 213-223.

[4] Laborde, C. (2000). *¿Por qué la tecnología es hoy indispensable en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?* Contribución a la Conferencia Cumbre Mundial de T^3 en Tokio.

[5] Romero, C. (2010). *Una introducción Gráfica al Concepto de Transformación Lineal Usando GeoGebra.* Tesis de Maestría en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Hermosillo, Sonora, México.

[6] Godino, J.D., Batanero, C., & Font, V. (2009). *Un enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: `http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf`

[7] Soto, J.L. (2002). *Números Complejos: una presentación gráfica.* Material Didáctico No. 1. Dpto. de Matemáticas, Universidad de Sonora

[8] Hitt, F. (2002). *Álgebra Lineal.* México: Pearson Educación.

[9] Bagni, G. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. *Una investigación experimental desempeñada en la educación media. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 45-61.

[10] Soto-Johnson, H., Oehrtman, M. (2011). *Construct Analysis of Complex Variables: Hypotheses and Historical Perspectives.* Electronic Proceedings for the Fourteenth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, E.U.A.

[11] Nahin, P. J. (1998). *An imaginary tale: The story of* $\sqrt{-1}$. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

[12] Sada, M. (2008). *Números Complejos: representación gráfica.* Ejemplos diversos de webs interactivas de Matemáticas. Recuperado el 23 de enero de 2011 de `http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/`

[13] Hohenwarter, M., Borcherds, M., Kreis, Y. (2001) *GeoGebra.* Software. Recuperado el 23 de enero de 2011 de `www.geogebra.org`

[14] Pardo, T., Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario. *Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas.* pp. 3-15. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia. España.

Memorias de la XXII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2012, pp. 193–200.

ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LA SUMA VECTORIAL

Miryam Ramona Zepeda Cota* **Manuel Alfredo Urrea Bernal†**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: *mirry_0707@hotmail.com
†maurr@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En este reporte se presentan los avances del proyecto "Desarrollo de actividades didácticas para promover el aprendizaje de la suma vectorial en estudiantes de ingeniería", para implementarse en la Universidad de Sonora, se destacan tres aspectos: elementos importantes de la justificación del trabajo, elementos teóricos en los que apoya la propuesta en este caso la teoría de las representaciones semióticas de Duval [1] y por último se presenta una de las actividades con la que se pretende promover la emergencia de la suma vectorial en el plano en términos de coordenadas de coordenadas cartesianas. En las situaciones que se presentan en la actividad la información que se conoce de los vectores es la magnitud y el ángulo que determina su dirección y sentido.

1 Introducción

En Matemática Educativa se estudian los problemas que tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, existiendo diferentes formas de acercarse a esos procesos. Hay varias vertientes para realizar investigación en esta área, por una parte está el estudio de los diferentes componentes de uno de los proceso, enseñanza o aprendizaje, esto a través de la observación directa de diferentes fenómenos; por otro lado tenemos la posibilidad de utilizar resultados de investigación y/o práctica ya realizada por los docentes de matemáticas. Este trabajo se centra en el diseño de actividades orientadas a apoyar la actividad del profesor para promover el aprendizaje de estudiantes de ingeniería en el tema de vectores, el cual forma parte del curso de Geometría Analítica incluido en los planes de estudio de la mayoría de las carreras de ingeniería de la Universidad de Sonora. Este curso se imparte en el segundo semestre de dichas carreras, en él el estudiantes tiene la oportunidad de estudiar por primera vez los vectores como objetos matemáticos, y no sólo como una herramienta para resolver ciertos problemas de Física. Es por ello que se diseñan algunas situaciones en las que se ve a los vectores como herramienta fundamental en la modelación y solución de problemas extramatemáticos (desplazamiento, fuerzas y velocidades), para posteriormente hacer un tratamiento en el que la atención esté centrada en ellos como objetos de estudio, partiendo la representación geométrica hasta llegar a la representación analítica. En los apartados siguientes se presentan mención de algunos elementos que permiten contextualizar y justificar el desarrollo del trabajo: primero se presentan algunos elementos que ayudan a ubicar y justificar el contexto de la problemática que se estudia; posteriormente se presentan los elementos del marco teórico en que se apoya el desarrollo de las actividades, los cuales se ubican en la teoría de representaciones semióticas de Duval [1]; finalmente se presenta una de las actividades que integran la secuencia de actividades de la propuesta.

2 Problemática y Justificación

En una revisión de la literatura de la disciplina, Matemática Educativa, encontramos algunos reportes de investigación que registran sobre algunas dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con vectores. Por ejemplo, en los trabajos realizados por Flores, González y Herrera [3] en los que identificaron algunas dificultades de los estudiantes durante el proceso de aprendizaje. Las dificultades más importantes que identificaron son las siguientes:

- Uso incorrecto del teorema de Pitágoras.
- Suma incorrecta de vectores utilizando algún método mal empleado.
- Suma de vectores como escalares.

Romero [5] realizó una investigación sobre las limitaciones de los registros de representación. En dicha investigación se obtuvo como resultado que los estudiantes presentan dificultades para poder representar el vector cero. Otra de las dificultades mostradas en el registro gráfico se presentó cuando se tenía la igualdad de al menos dos vectores, pues resultó complicado poder distinguir unos de otros.

En el caso del registro algebraico, las dificultades que se detectaron con mayor facilidad son las que tenían que ver con formar la expresión coherente y la lectura de expresiones algebraicas.

Soto [6] realizó un estudio con alumnos universitarios, las principales dificultades que presentaron los estudiantes son:

- Expresar un vector como combinación lineal de otros dos vectores.
- Identificar vectores colineales o coplanares.
- Identificar conjuntos de vectores linealmente dependientes.
- Al igual que en otras investigaciones también fue detectada la dificultad que los alumnos presentan al intentar representar el vector cero en el registro gráfico.

Como se puede ver, son numerosas las investigaciones que han puesto atención en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la suma vectorial, en algunas se ofrecen propuestas didácticas para su enseñanza con el propósito de profundizar en la comprensión de dichos objetos matemáticos.

Katz [4] hace una propuesta para el estudio de los vectores que consiste en promover en el estudiante la comprensión de los significados y no sólo la memorización, para ello sugiere que se promueva la participación activa de los estudiantes en el salón de clase y considera de gran importancia el trabajo en equipo, pero su técnica sigue siendo la "tradicional", partiendo de una clase donde proporciona datos históricos, definiciones con su respectivo ejemplo para que posteriormente el estudiante aplique, lo aprendido, en otros ejercicios.

La propuesta realizada por Urrea [7] con respecto a la enseñanza de la Geometría Analítica, la cual gira en torno a la resolución de problemas, dicha propuesta se divide en tres etapas:

- Etapa uno: corresponde al diseño de problemas.
- Etapa dos: corresponde a la resolución de problemas de manera individual por parte de los estudiantes.
- Etapa tres: corresponde al debate de las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver los problemas, una parte es trabajo en equipo y otra es trabajo de grupo. En todo momento bajo la coordinación del profesor.

Con base en las reflexiones anteriores y tomando en cuenta que este trabajo está ubicado en la categoría que denominamos de desarrollo docente, se presenta a continuación el objetivo general del trabajo de tesis y también el objetivo de la secuencia de actividades.

Objetivo general del trabajo:

- Diseñar una secuencia didáctica que permita promover la construcción de la suma de vectores en el plano y sus propiedades.

Objetivo general de la secuencia:

- Promover la emergencia de la suma de vectores en el plano y sus propiedades.

3 Consideraciones teóricas

El uso de las representaciones en el aprendizaje de las matemáticas es de gran importancia pues, a diferencia de otras áreas científicas, los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción por lo que se hace necesario tener representaciones de los mismos. Muchos investigadores han puesto interés en el uso de las representaciones para los procesos de enseñanza y aprendizaje, como herramienta importante en el proceso de comunicación de los contenidos matemáticos. Sin embargo para este trabajo consideramos la teoría de las representaciones semióticas de Duval [1] por la importancia que le da al manejo de distintos registros de representación y a la relación que existe entre el aprendizaje y el uso de dichos registros de representación, pues los considera fundamentales para la comprensión de los objetos matemática. Duval señala que: "*no hay noesis sin semiosis, es decir, es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad de la noesis*", esto es, es indispensable la representación de los objetos matemáticos para poder acceder a su conceptualización.

Duval define a las representaciones como: "*Producciones construidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema semiótico que tiene sus propias limitaciones de significancia y funcionamiento*".

A su vez Duval sostiene que un sistema semiótico es un registro de representación semiótica si permite que se cumplan tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis las cuales son:

Formación.

Tratamiento.

Conversión.

Duval señala que es muy importante no confundir el objeto con sus distintas representaciones porque con el paso del tiempo puede llegar a convertirse en un obstáculo cognitivo. El saber diferenciar el objeto y sus diferentes representaciones es una parte importante para el aprendizaje ya que las representaciones son fundamentales para la actividad cognitiva del pensamiento y para fines de comunicación. Los procesos de la semiosis y de la noesis son indispensables. Ya que no puede haber conceptualización del objeto matemático sin la aprehensión de las representaciones semióticas. Los objetos matemáticos tienen la peculiaridad de poder ser representados en distinto registros de representación semiótica, como es el caso de los vectores, éstos se pueden representar en forma: gráfica, algebraica, o bien en lengua natural en forma de enunciado. En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos.

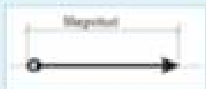
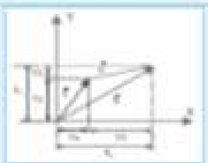
Objeto que puede ser representado.	Representaciones		
	Registro en lenguaje Natural	Registro Algebraico	Registro Gráfico
Vector	Un vector es un objeto con magnitud y dirección	$\vec{V}$	
Magnitud	La magnitud de un vector es la medida de su longitud	$\vert\vec{V}\vert$	
Producto de un vector por un escalar	El producto de un vector por un escalar es el vector que se obtiene de multiplicar el escalar por cada una de las componentes del vector	$kV = (kv_x, kv_y)$	
Suma de vectores	La suma de vectores es el vector que se obtiene de sumar las componentes respectivas de los vectores	$V-U = (V_x-U_x, V_y-U_y)$	

Tabla 1. Representación de los objetos matemáticos en distintos registros

Con respecto a las actividades del *tratamiento*, hay cambios que dependen del registro que se esté utilizando, por lo que los tratamientos son de naturaleza distinta, de la misma manera el registro seleccionado puede influir en la realización del tratamiento haciéndolo más o menos complejo. Cuando se lleva a cabo un tratamiento en una representación semiótica se aplican sobre ella determinadas reglas, la aplicación de estas reglas hace que la nueva representación aunque construida en el mismo registro que la representación de partida brinda nuevas posibilidades creativas.

De las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis, con frecuencia la menos atendida en el proceso de enseñanza es la *conversión* ya que se considera automática desde el momento en que se pueden formar representaciones en diferentes registros. De lo contrario este registro requiere de una coordinación interna de los diferentes sistemas de representación, que ha de ser construida por el estudiante, sin que dicha coordinación de representaciones diferentes le signifiquen objetos diferentes.

Además la conversión involucra una buena comprensión del objeto en estudio ya que en muchos de los casos la representación de registros diferentes no presenta necesariamente los mismos aspectos de un mismo contenido. Consideramos también que el poder estar cambiando de un registro a otro permite la construcción de un mejor conocimiento pues se ve expresado de diferentes maneras un mismo objeto; como lo menciona Duval [2]. "*La conversión sería el resultado de la comprensión conceptual y cualquier problema con ésta sería indicativo de conceptos erróneos*". Duval plantean tres razones para el uso de distintos registros de representación en el funcionamiento del pensamiento humano:

Los costos de tratamiento.

Las limitaciones representativas especificas de cada registro.

La coordinación necesaria de una diferenciación entre representante y representado.

4 Nuestra propuesta y sus características

Con el fin de entender mejor la problemática del aprendizaje de la suma vectorial y coadyuvar a generar ambientes de aprendizaje que brinden al estudiante la oportunidad de tener experiencias ricas que le permitan atender las dificultades que exhiben sobre el tema de suma de vectores en el nivel superior, se ha considerado una forma alternativa para abordarlo, donde el estudiante tenga la oportunidad de enfrentar y resolver situaciones problema, en un primer momento en un contexto fura de la matemática, donde los vectores y la suma vectorial son el centro. A partir de estas situaciones se espera que el estudiante pueda construir la definición de suma vectorial en coordenadas cartesianas, así como sus propiedades.

La estrategia seleccionada consiste en el diseño de una secuencia de actividades didácticas donde se hace énfasis en las diferentes formas de representar a los vectores, los problemas serán planteados para que el estudiante a partir de sus conocimientos previos desarrolle la habilidad de transformar los problemas sobre vectores, en otro donde la solución involucre en forma evidente el teorema de Pitágoras. Se pretende que al resolver las situaciones planteadas se vea en la necesidad de emplear diferentes registros de representación de los vectores, mediante tratamientos y conversiones.

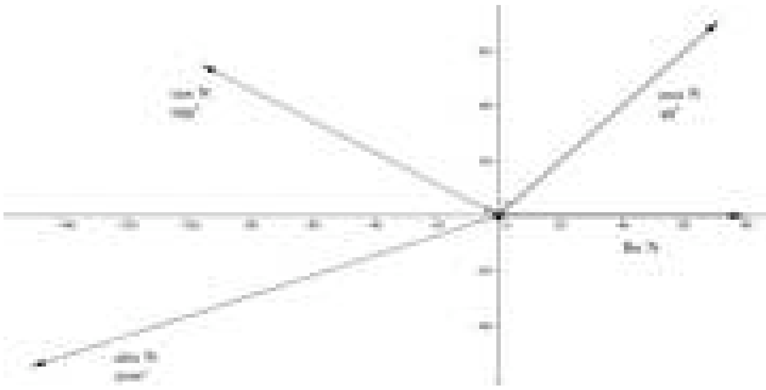
Las primeras actividades que se aplican a los estudiantes presentan un contexto extramatemático, cada actividad está acompañada del tiempo estimado de aplicación, materiales que se requieren utilizar, el objetivo de la actividad, así como el propósito de cada pregunta (por el espacio en el ejemplo sólo se muestra en detalle la primer pregunta). A se presenta una parte de una de las actividades que forman parte de la secuencia propuesta.

Ejemplo de actividad: **Actividad 4**

Objetivo: El objetivo de esta cuarta actividad es que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos que hasta ahora tienen de las suma de vectores, para:

- Trabajar o extraer información dada gráficamente.
- Identificar la propiedad asociativa de la suma de vectores.
- Identificar la propiedad conmutativa de la suma de vectores.
- Identificar e interpretar el vector inverso aditivo.

Actividad 4: Una partícula está bajo el efecto de cuatro fuerzas tal como se muestra en la siguiente figura.



1. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que está recibiendo la partícula?

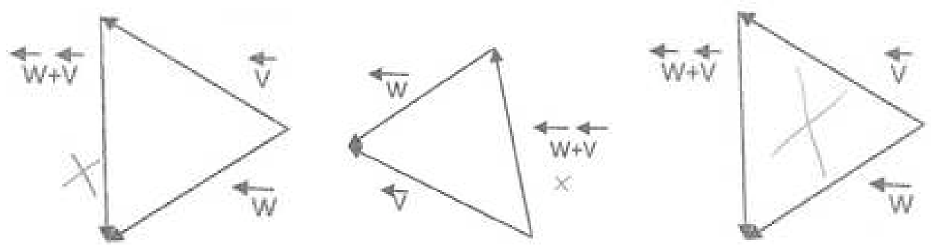
   El propósito de esta pregunta es que en un primer momento el estudiante se capaz de interpretar la información proporcionada en un registro gráfico para posteriormente realizar una serie de conversiones que le permitan cambiar del registro en coordenadas polares a coordenadas cartesianas para que de esa manera los tratamientos que se realicen en dicho registro sean más económicos.

2. Si la partícula pudiera moverse, ¿en qué dirección saldría disparada?
3. ¿Todos tus compañeros de equipo sumaron en el mismo orden las fuerzas para obtener el vector resultante?
4. En caso de que alguno de tus compañeros lo haya realizado en distinto orden, ¿qué resultado obtuvo?
5. ¿Cómo es el resultado que tu compañero obtuvo con el que obtuviste?
6. ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza resultante si las fuerzas se suman manteniendo el siguiente orden 160 N, 100 N, 80 N y 110 N?
7. Si queremos que la partícula permanezca sin moverse al aplicarle una quinta fuerza, ¿cuál deberán ser la magnitud y dirección de la quinta fuerza? Justifica tu respuesta.

5 Consideraciones finales

Es importante mencionar que en este momento nos encontramos en la etapa de pilotaje de las actividades, el propósito de la puesta en escena es identificar las estrategias que utilizan los estudiantes al resolver las situaciones propuestas, así como detectar dificultades y corregir errores en la redacción de las situaciones problema como en las preguntas de algunos de ellos. Ya se aplicó una actividad de diagnóstico, a los estudiantes con los se implementará la secuencia de actividades, en ella se detectaron dificultades para identificar la suma vectorial gráficamente tal como se muestra en las siguientes figuras, que son respuestas dadas por los estudiantes a una de las preguntas de dicho diagnóstico:

Pregunta 3.- Marca con una X la representación gráfica que representa la suma de los vectores $\vec{V}$ y $\vec{W}$



En estas respuestas de los estudiantes podemos identificar la presencia de dificultades reportadas en otras investigaciones [3], en este caso no identifican gráficamente la suma vectorial como el vector que inicia en el punto inicial del primer vector y termina en el punto final del segundo vector.

Referencias

[1] Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en matemática educativa II. Grupo editorial Iberoamérica. México.

[2] Duval R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registro semiótico y aprendizaje intelectual.* Peter Lang, Suisse, p. 37-65

[3] Flores, S., González, M. y Herrera, A. (2007), Dificultades de entendimiento en el uso de vectores en cursos introductorios de mecánica, Revista Mexicana de Física, Volumen 52, p. 178-185.

[4] Katz, D. (2010), *Vectores,* Álgebra y Geometría I, Facultad de Ciencia Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad de Rosario. p?

[5] Romero, C. (2010). Una introducción grafica al concepto de transformación lineal usando GeoGebra, Tesis de maestría, Universidad de Sonora.

[6] Soto, J. (2005), Algunas dificultades en la conversión Gráfico-Algebraica de situaciones de vectores, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Volumen 18 , p.193-199

[7] Urrea, M.: 1990, La enseñanza de la geometría analítica, algunas sugerencias metodológicas. Matemática educativa, Volumen 1, p. 52-58