

Memorias

de la

XX

Semana Regional
de Investigación y Docencia
en Matemáticas

Enero de 2011

Silvia Elena Ibarra Olmos
Martha Cristina Villalva Gutiérrez
Editoras



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

Memorias

de la

XX

**Semana Regional
de Investigación y Docencia
en Matemáticas**

Enero de 2011

Silvia Elena Ibarra Olmos
Martha Cristina Villalva Gutiérrez
Editoras



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Departamento de Matemáticas

QA11.A1
.S44
2011

Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas (20 :
2011 : Hermosillo, Sonora)

Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia
en Matemáticas; Hermosillo, Sonora, enero de 2011 / Silvia Elena
Ibarra Olmos, Martha Cristina Villalva Gutiérrez, Editoras.--
Hermosillo, Sonora : Editorial Universidad de Sonora. División de
Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de Matemáticas,
c2011.

204 p. : Il., Fotog.; 27 cm.

ISBN: 978-607-7782-91-9

Incluye bibliografía.

1. Matemáticas - Investigaciones - Congresos, conferencias, etc.
2. Matemáticas - Enseñanza - Congresos, conferencias, etc. I. Ibarra
Olmos, Silvia Elena, ed. I. Villalva Gutiérrez, Martha Cristina, ed.

Área de Análisis Bibliográfico, Subdirección de Servicios de Apoyo Académico,
DSU, Universidad de Sonora

Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas
Editada por Silvia Elena Ibarra Olmos y Martha Cristina Villalva Gutiérrez

Derechos reservados para esta edición:

D. R. © 2011, Silvia Elena Ibarra Olmos y Martha Cristina Villalva Gutiérrez (Editoras)

D. R. © 2011, Universidad de Sonora

ISBN: 978-607-7782-91-9

Universidad de Sonora
Calle Rosales y Blvd. Luis Encinas
Hermosillo, Sonora
C.P. 83000
Teléfono (01-662) 2592155
Fax (01-662) 2592219

Diseño de portada: Olivia Carolina Gutú Ocampo
Fotografía tomada de www.flickr.com, con permiso de uso sin fines de lucro

Impreso en México
Printed in Mexico

Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas

Directorio

Dr. Heriberto Grijalva Monteverde
Rector

Dr. Enrique Velázquez Contreras
Secretario General Académico

M. E. Rosa Elena Trujillo Llanes
Secretaria General Administrativa

Dra. Arminda Guadalupe García de León Peñúñuri
Vicerrectora de la Unidad Regional Centro

M. C. Miguel Ángel Moreno Núñez
Director de la División de Ciencias Exactas y Naturales

Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa
Jefe del Departamento de Matemáticas

M. D. O. Manuel Ignacio Guerra Robles
Director de Vinculación y Difusión

Lic. Raúl Acevedo Savín
Jefe del Área de Publicaciones

Comité organizador

<i>Presidenta</i>	Silvia Elena Ibarra Olmos
<i>Secretaria</i>	Martha Cristina Villalva Gutiérrez
<i>Comisión Académica</i>	Agustín Grijalva Monteverde Jorge Ruperto Vargas Castro
<i>Comisión de Difusión</i>	Olivia Carolina Gutú Ocampo Francisco Javier Tapia Moreno
<i>Comisión Editorial</i>	Silvia Elena Ibarra Olmos Martha Cristina Villalva Gutiérrez
<i>Comisión de Logística</i>	José Dolores Dávila Galindo Lina Morales Peral José María Bravo Tapia
<i>Comisión de Relaciones Públicas</i>	Lorena Armida Durazo Grijalva

Índice

Presentación	1
Construcción del significado geométrico de la derivada a partir de la resolución de problemas de optimización y uso de Geogebra María Teresa Dávila Araiza, Agustín Grijalva Monteverde y José María Bravo Tapia	3
La metacognición y la competencia de estudiantes de ingeniería en la resolución de problemas de optimización José Álvaro Encinas Bringas y Ramiro Ávila Godoy	9
Diseño instruccional con soporte en videos digitales y WinPlot para el aprendizaje de Límites Rafael Pantoja Rangel, Juan Carlos Martínez Sandoval, Elena Nesterova	15
Un estudio comparativo de una estrategia didáctica que incorpora calculadora graficadora y el enfoque tradicional, para abordar aplicaciones de ecuaciones diferenciales Maximiliano De Las Fuentes Lara, José Luis Arcos Vega y Álvaro Encinas Bringas	21
Construcción de la función derivada a partir de una visualización dinámica de la linealidad local Martha Gabriela Robles Arredondo	27
Visualización dinámica en la enseñanza de la derivada Eduardo Tellechea Armenta	33
Diseño de actividades introductorias para el desarrollo de la noción de muestreo Eleazar Silvestre Castro, Irma Nancy Larios R. y Manuel A. Urrea Bernal	39
Argumentos utilizados por estudiantes de nivel medio superior y superior, con consideraciones en su desarrollo hacia la formalidad Mario Alberto Quiñonez Ayala y Jorge Ruperto Vargas Castro	45
Propuesta didáctica para el tratamiento de las funciones exponenciales Guadalupe Villaseñor Gándara	51
¿Por qué la elipse se llama elipse y la hipérbola, hipérbola? Jorge Ruperto Vargas Castro	57
Proyecto: Textos Dinámicos (TD) Ricardo Ulloa Azpeitia, Elena Nesterova y Rafael Pantoja Rangel	63
Propuesta de actividades didácticas para la capacitación de profesores de secundaria en el eje curricular manejo de la información Manuel A. Urrea Bernal, Irma Nancy Larios R. y Maricela Armenta Castro	69
Construir gráficas de funciones usando incrementos de variables para introducir el concepto de función derivada José Carlos Cortés Zavala	75
Explorando transformaciones lineales en el plano usando Geogebra César Fabián Romero Félix, José Luis Soto Munguía	79

Diseño de software educativo: construcción de algoritmos para el manejo de gráficas y construcciones geométricas interactivas	85
Christian Morales O., Lourdes Guerrero M.	
Discrepancias en el cálculo de los cuartiles y posibles consecuencias en el aprendizaje de los estudiantes en dichos conceptos	91
Alejandrina Bautista Jacobo	
Importancia de la lógica en la enseñanza de las demostraciones matemáticas	97
Carlos Arturo Loredó Villalobos	
Propuesta del diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático potencia	103
Jesús Manuel Duarte Sánchez, José Luis Díaz Gómez	
Aprendizaje ubicuo en la enseñanza de las matemáticas	109
Héctor Antonio Villa Martínez, Fco. Javier Tapia Moreno y Claudio López Miranda	
Células de aprendizaje asincrónico. Experiencia en didáctica de las matemáticas	115
Sergio Pou Alberú, Manuel Moreno Mercado y Gloria Elena Rubí Vázquez	
Comparación de heurísticas y algoritmos de búsquedas en el dominio del ajedrez	123
Omar Edgardo Lugo Sánchez, Julio Waissman Vilanova	
Aprendizaje de funciones de utilidad basado en criterio de Metrópolis para el juego de <i>Othello</i>	135
Ismael Tesisteco Félix, Julio Waissman Vilanova	
Ecuaciones diferenciales parciales no lineales: Separación de variables, soluciones simbólicas	145
Inna Shingareva y Carlos Lizárraga Celaya	
La bifurcación Takens-Bogdanov m-paramétrica n-dimensional	153
Francisco A. Carrillo, Fernando Verduzco G, Joaquín Delgado F.	
Visualización de campos vectoriales analíticos generalizados	167
Alvaro Álvarez Parrilla, Martín Eduardo Frías Armenta, E. López González y C. Yee Romero	
Un paseo por la probabilidad y la estadística: de Bahía de Kino a Varadero (Parte 1)	177
Claudio A. López Miranda y Francisco Javier Tapia Moreno	
Un paseo por la probabilidad y la estadística: de Bahía de Kino a Varadero (Parte 2)	183
Claudio A. López Miranda y Francisco Javier Tapia Moreno	
Inferencia estadística para cadenas de Markov	189
Martha Cecilia Palafox Duarte	
El Análisis Didáctico en el marco del Enfoque Ontosemiótico	197
Vicenç Font Moll y Norma Rubio Goycochea	
Grupo de discusión “Educación a distancia”	201
Gisela Montiel Espinosa, Martha C. Villalva Gutiérrez, Francisco Javier Tapia Moreno y Ricardo Ulloa Azpeitia	

Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas

Presentación

Por veinte años consecutivos el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora ha organizado la Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. En su edición 2010 se celebró simultáneamente el vigésimo aniversario de la creación del Programa de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa.

Al igual que en las ediciones anteriores, la participación de estudiantes, profesores e investigadores en matemáticas, matemática educativa y ciencias de la computación, tanto nacionales como extranjeros, fue abundante. A las actividades ya tradicionales de presentación de ponencias, reportes de investigación, conferencias, talleres y cursos, se agregó ahora la realización de dos grupos de discusión.

Como colofón al evento, se presenta esta Memoria, en la cual se incluye la mayor parte de los trabajos participantes. Agradecemos la colaboración de autores, cuerpo de evaluadores y de todos aquellos que de una u otra manera sumaron esfuerzos para lograr su concreción.

Editoras

Hermosillo, Sonora, Enero de 2011

Construcción del significado geométrico de la derivada a partir de la resolución de problemas de optimización y uso de GeoGebra

María Teresa Dávila Araiza, Agustín Grijalva Monteverde, José María Bravo Tapia
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
tere.davila.araiza@gmail.com, {guty, jmbravo}@gauss.mat.uson.mx

Nivel educativo: Superior

Resumen

En este trabajo se presenta el resumen de los avances de tesis para obtener el grado de Maestría en Matemática Educativa, consistente en una propuesta didáctica apoyada en el software GeoGebra, para la enseñanza de la derivada como la pendiente de la recta tangente, en el curso Cálculo Diferencial e Integral I del área de Ingeniería de la Universidad de Sonora. El objetivo del trabajo es promover la construcción pragmática del significado de la derivada y otros objetos matemáticos del Cálculo, resolviendo problemas de optimización, pues consideramos que de esta forma el estudiante le dará a estos objetos un significado más cercano a su profesión. Se incluye además la descripción de una actividad didáctica que refleja las características de nuestra propuesta

1. Introducción

El cálculo ha sido el centro de atención de diversos trabajos de investigación, que no sólo muestran la existencia de diversas dificultades enfrentadas por los estudiantes para comprender los objetos y procesos de esta disciplina [1], sino que también señalan que es común en los cursos de cálculo presentar a los objetos matemáticos como algo ya acabado y alejado de la realidad; enfatizar las prácticas algorítmicas y privilegiar el trabajo en el registro algebraico, por considerar los tratamientos numéricos y gráficos como no matemáticos [2],[3] &[4]. Esto puede ocasionar que el curso de cálculo carezca de sentido para el alumno; que sus significados de los objetos matemáticos sean pobres; que presente dificultades para usarlos en registros distintos del analítico y en problemas no rutinarios, en particular para modelar situaciones planteadas en contextos extramatemáticos e interpretar los resultados obtenidos.

Teniendo en cuenta que el ingeniero durante su formación académica y su práctica profesional, requiere modelar, describir y analizar situaciones cambiantes y resolver problemas, optimizando costos, tiempo, materiales, etc.; consideramos necesario realizar un acercamiento al cálculo, que promueva en los estudiantes de ingeniería la construcción de significados para los objetos matemáticos del cálculo diferencial, en un ambiente cercano a las prácticas de un ingeniero.

2. Características de la propuesta

Nuestra propuesta se centra en la derivada, y se apoya en elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, conocido como EOS. En particular, se retoma la naturaleza pragmática de los objetos matemáticos (personales o institucionales) asumida en esta teoría, como los entes que emergen gradualmente de los sistemas de prácticas realizadas durante la resolución de campos de problemas [5].

El acercamiento a la derivada, que proponemos con nuestro trabajo, es distinto al tradicional (caracterizado por el uso de límites). Se pretende promover a través de la resolución de problemas de optimización de contexto extramatemático, familiar para los estudiantes y cercano a la ingeniería, el desarrollo de sistemas de prácticas de los cuales emerge la derivada como la pendiente de la recta tangente.

Para guiar al estudiante, diseñamos actividades didácticas integradas por hojas de trabajo y ambientes dinámicos virtuales creados con el software de geometría dinámica “GeoGebra”. Este software utiliza distintos registros de representación semiótica (lengua natural, gráfico, algebraico y numérico) y se puede vincularlos dinámicamente, lo cual que contribuye a su articulación y a la construcción de un significado más amplio de los objetos, ya que cada representación ayuda a producir sólo una parte del significado [6]. Otra característica importante de GeoGebra es que permite representar objetos variables, y dado que el cálculo estudia la variación, esta propiedad se vuelve de gran ayuda para modelar fenómenos cambiantes.

Los ambientes dinámicos virtuales que creamos con GeoGebra, son manipulables, involucran diferentes registros de representación, y constan de a) una construcción dinámica y manipulable que simula el contexto de los problemas a resolver; b) las representaciones tabular, analítica y gráfica de la función que modela al problema, donde la tabla es representada por una hoja de cálculo; c) el enunciado del problema y d) la recta tangente a la gráfica. Todos estos elementos del ambiente dinámico pueden ocultarse o aparecer activando unas “casillas” de control que se encuentran visibles en la pantalla.

Las actividades didácticas de nuestra propuesta tienen una estructura parecida, que podemos describir de la siguiente manera:

- Se comienza con la manipulación de la construcción que simula al fenómeno implicado en el problema, para que el estudiante observe que hay magnitudes que cambian y que están relacionadas, pues al modificar una, se modifica a la otra.
- Le sigue el establecimiento de las representaciones analítica, tabular y gráfica de la función que modela al fenómeno.
- Luego se realiza una aproximación numérica (con ayuda de la hoja de cálculo) de las coordenadas del punto correspondiente al valor extremo y se ubica a éste en la gráfica.
- Posteriormente, usando la herramienta *zoom* en torno a dicho punto, se observa cómo ésta se convierte localmente en una recta horizontal, que coincide con la recta tangente en tal punto, con lo cual se caracteriza al mismo.
- Finalmente, se busca establecer la monotonía de la función de dos maneras, primero relacionando los valores de la tabla con la forma de la gráfica, y luego, relacionando la pendiente de la recta tangente con la forma de la gráfica.

A continuación presentamos brevemente una de las actividades didácticas que conforman nuestra propuesta, la cual es representativa del conjunto de actividades que diseñamos.

3. Ejemplo de una de las actividades que forman parte de la propuesta

Uno de los problemas de optimización que seleccionamos es *problema de la viga más resistente* en cuyo enunciado se presenta a continuación: La resistencia de una viga rectangular es directamente proporcional al producto del ancho y el cuadrado de la altura de su sección transversal. Determine las dimensiones de la viga más resistente que se pueda obtener de un tronco circular de 30 cm de radio.

Consideramos que antes de plantear el problema se podría realizar una discusión grupal muy rica para determinar intuitivamente de qué podría depender la resistencia de la madera a la compresión y al hecho de que dos magnitudes sean directamente proporcionales, para luego poder interpretar la proporcionalidad entre la resistencia y el producto del ancho por el cuadrado de la altura en una viga cualquiera. Esta discusión puede originar que sean los propios estudiantes quienes planteen el problema de construir una viga a partir del tronco de un árbol, que tenga la máxima resistencia.

De manera general, pretendemos que el estudiante siga una ruta como la descrita a continuación, después de haberse planteado el problema:

- Al abrir el archivo de GeoGebra aparecerá una construcción dinámica y manipulable que simula la sección transversal del tronco y la viga, donde el valor del ancho de ésta (denotado por x) cambia en tiempo real. El estudiante puede observar que hay una gran cantidad de vigas diferentes que se pueden hacer de un tronco dado, cambiando el valor del ancho.

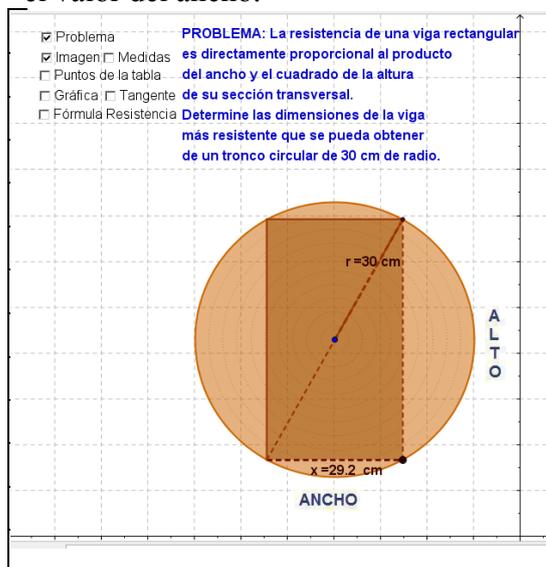


Figura 1. Tronco y viga virtuales. $x=29.2$ cm.

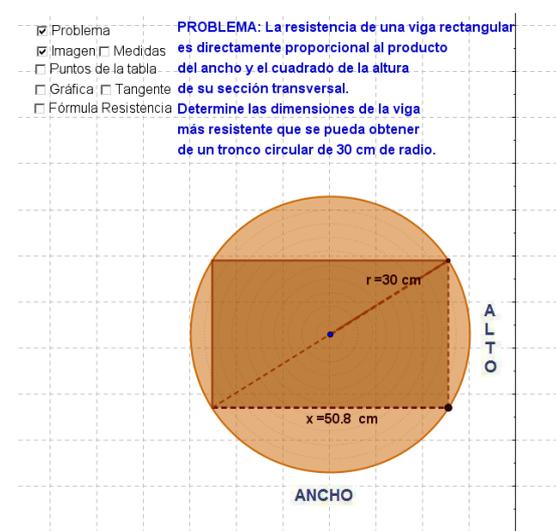


Figura 2. Tronco y viga virtuales. $x=58.8$ cm.

- Al fijar el valor del ancho, se espera que el estudiante descubra que se puede usar el teorema de Pitágoras para obtener el alto de la viga correspondiente a ese ancho. Luego, reflexionando que el valor del ancho puede cambiar y tomando como referencia el procedimiento seguido para ese valor dado, se pide al estudiante construir una expresión analítica para la altura de la viga en dependencia de x y finalmente una expresión para la resistencia, también en dependencia de x .
- Al manipular el punto variable, se puede observar que el ancho de la viga sólo puede tomar valores en el intervalo $[0,30]$.

- Usando la expresión analítica de la resistencia, se procede a calcular valores particulares de ésta para distintos valores dados del ancho y a colocarlos en una tabla y unos ejes coordenados.
- En la tabla numérica se puede observar que la resistencia alcanza un valor mayor al resto. Se espera que los estudiantes sugieran que se pueden obtener otros valores aún mayores.
- Al activar en el archivo de GeoGebra las casillas que muestran las representaciones gráfica, analítica y numérica de la función implicada y un punto variable (punto manipulable), se espera que el estudiante compruebe sus resultados y use la hoja de cálculo para aproximar, con varios decimales, las coordenadas del punto correspondiente al valor máximo, mediante la búsqueda en intervalos cada vez más pequeños.

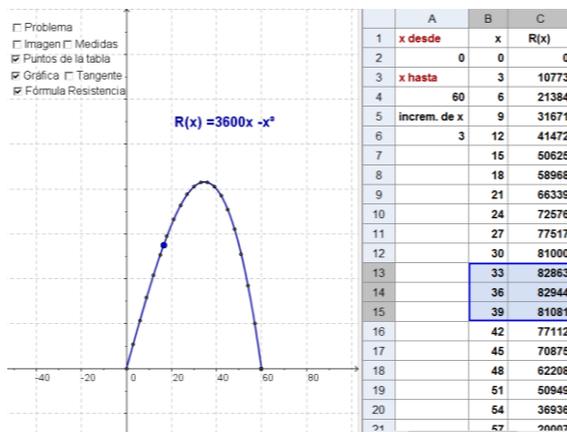


Figura 3. Exploración en el intervalo [0, 60].

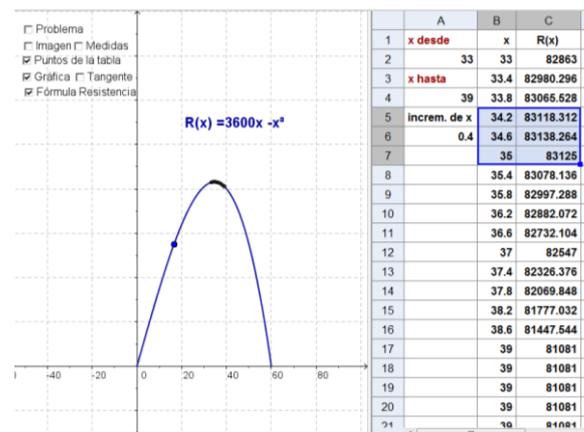


Figura 4. Exploración en el intervalo [33, 39].

- Al intentar que coincidan, en la gráfica, las coordenadas del punto variable con las encontradas en la hoja de cálculo, mediante acercamientos sucesivos (*zoom*) sobre el punto, se podrá observar que la gráfica se vuelve una recta horizontal alrededor del punto.
- Después, se puede discutir grupalmente por qué sucede esto y cuál es esa recta. Al activar la casilla “tangente” aparece una recta que se sobrepone con la gráfica y al alejarse del punto (*zoom out*), se puede observar que la recta es tangente a la gráfica en el punto variable, por lo cual, al mover tal punto, se mueve ésta.

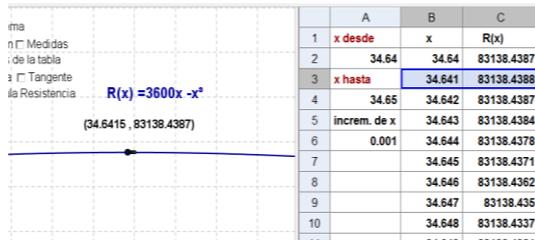


Figura 5. Curva linealizada al hacer zoom.

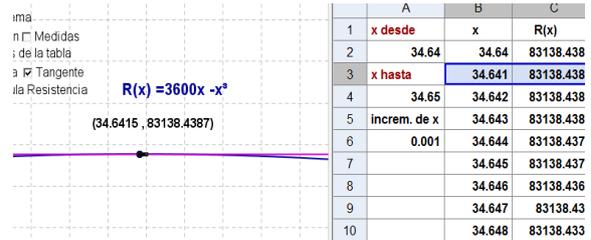


Figura 6. Curva y recta tangente sobrepuestas.

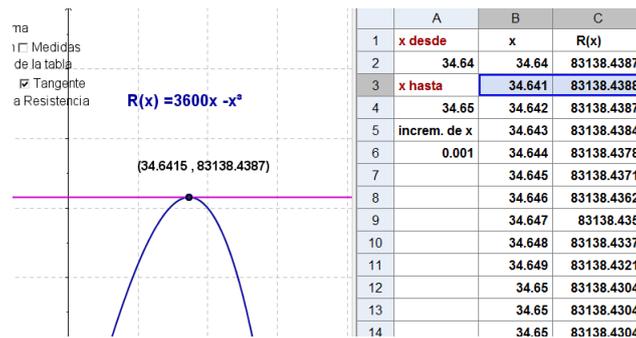


Figura 7. Curva y recta tangente al alejarse.

- Posteriormente se reflexiona sobre la monotonía de la función, primero analizando los valores de la resistencia en la tabla numérica, antes y después del valor más alto, y observando cómo es la gráfica en cada caso. Luego se observa cómo es la pendiente de la recta tangente cuando el punto variable está antes del punto más alto y cuando está después de éste. Con esto se buscará promover gráficamente el establecimiento de una relación, entre la monotonía de la función y el signo de la pendiente de la recta tangente.

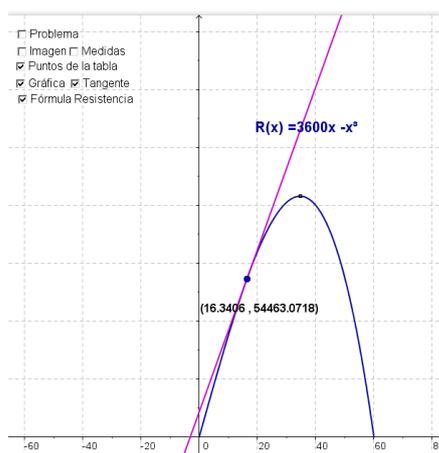


Figura 8. Recta tangente antes del punto más alto.

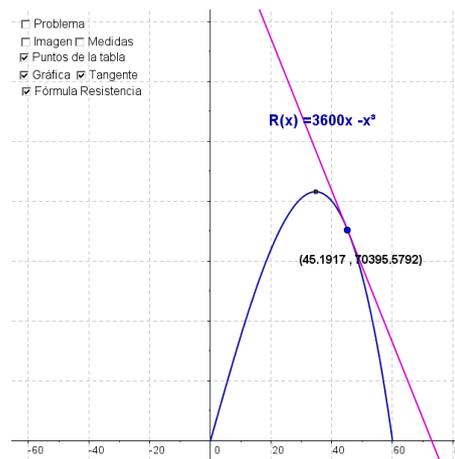


Figura 9. Recta tangente después del punto más alto

- Finalmente se espera que los estudiante propongan gráficamente cómo solucionarían el problema de la viga más resistente: determinando el valor de x tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto correspondiente a x , tiene pendiente cero.

4. Comentarios finales

El acercamiento que proponemos en este trabajo es intuitivo y al inicio informal. Las actividades didácticas de nuestra propuesta están diseñadas para estudiantes principiantes en el estudio del Cálculo en Ingeniería, por lo que durante las primeras actividades no se usa terminología matemática, pues ésta se irá construyendo gradualmente (al igual que los objetos matemáticos) conforme se establezcan ciertas regularidades entre los problemas, es decir, que en el transcurso de las actividades se le irá poniendo “nombre” a los objetos que construyan.

5. Referencias

- [1] Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140).
- [2] Castañeda, A. (2002). Estudio de la Evolución Didáctica del Punto de Inflexión: una Aproximación Socioepistemológica. *Relime*, 5(1), 27-44.
- [3] Dolores, C. (2000). Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza de la Derivada. *ICME-8 Sevilla, España*, 155-181.
- [4] Serna Martínez, L. (2007). *Estudio Socioepistemológico de la Tangente*. (Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada). Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/serna_2007.pdf
- [5] Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado del sitio Web del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm
- [6] Font, V. (2009). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Colección Digital Eudoxus*, 0(11). Recuperado de <http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/422/421>

La metacognición y la competencia de estudiantes de ingeniería en la resolución de problemas de optimización

José Alvaro Encinas Bringas y Ramiro Ávila Godoy
Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Baja California
Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora
aencinasb@uabc.mx; ravilag@gauss.mat.uson.mx

Nivel educativo: Superior

Resumen

Se presenta parte de una investigación sobre la comprensión y competencia que estudiantes de ingeniería muestran al abordar problemas de optimización. En el presente, se estudian sus significados ante esos problemas. Se apoya en el Enfoque Ontosemiótico de J.D.Godino. Para ello se seleccionaron problemas de un texto escolar y se aplicaron a estudiantes de un curso de Cálculo en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California. Se efectuaron análisis de las configuraciones cognitivas y metacognitivas sobre las respuestas escritas y verbales. Los resultados muestran un bajo desempeño de los estudiantes ante esos problemas. Se considera se debe al tipo de significados institucionales implementados por profesores en el aula.

1. Introducción

El presente documento refiere sobre una parte de la investigación denominada “Comprensión y competencia sobre optimización en estudiantes de ingeniería”. En ella se pretende describir y explicar la relación que existe entre la comprensión que tienen los alumnos de los conceptos y procedimientos que se utilizan en la resolución de problemas rutinarios de optimización y su competencia (eficacia) en el abordaje y resolución de problemas más complejos del mismo tema.

El sustento de la investigación es la Teoría Ontológica Semiótica de la Cognición e Instrucción matemática de Godino [2,4,7,8]. Este enfoque considera que un Objeto Matemático (OM) (Institucional o Personal) es un emergente del sistema de prácticas (sociales o personales) asociadas a un campo de problemas. El *Significado Institucional* (SI) o el *Significado Personal* (SP) de un OM corresponde al sistema de prácticas discursivas u operatorias asociadas al campo de problemas. Los SI se pueden considerar de los siguientes tipos: de referencia, planeado, evaluado e implementado. Mientras los SP, en globales, declarados y logrados.

Los *SI de referencia*, se pueden encontrar en los documentos curriculares y en libros de texto y en sujetos tales como el profesor, el coordinador de área, autoridades, etc. El *SI planeado* es lo pretendido por el profesor para su clase y el *SI implementado* es lo realmente efectuado en ella mientras que lo *evaluado* corresponde a la práctica correspondiente.

Los SP, por ejemplo de un estudiante, del tipo *global* corresponden a la totalidad de prácticas sobre un cierto OM; *declarado*, son las prácticas expresadas como respuesta de una evaluación propuesta por el profesor y *logrado* corresponde a las prácticas manifestadas exitosas o en concordancia con las institucionales. Los OM se clasifican en [7,8]: *Lenguaje, Problemas, Conceptos, Procedimientos, Proposiciones y Argumentos*.

Godino [8] y Font [9] han construido nociones teóricas para un análisis de la actividad matemática dentro y fuera del aula, proponiendo arreglos o *configuraciones* de los seis tipos de OM's anteriormente mencionados. Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales). Además la *configuración metacognitiva* [10, 11,12] correspondiente a un arreglo de la planificación, supervisión y control de la actividad cognitiva.

Como antecedente inmediato de este trabajo, se tiene una investigación [6] sobre la relación entre los significados institucionales de referencia, planeados e implementados de optimización en un curso de cálculo para estudiantes de primer semestre de ingeniería, donde se muestra una fuerte influencia del libro de texto sobre la actividad en el aula del profesor seleccionado. Asimismo, se evidencian algunos aspectos de la práctica docente del mismo. En este trabajo se estudia el desempeño de estudiantes ante problemas de optimización en el mismo curso de Cálculo mencionado, analizándose mediante el uso de las configuraciones cognitivas y metacognitivas.

2. Materiales y métodos

El método utilizado en la toma de datos, fue primeramente seleccionar seis problemas propuestos en el libro de texto, *El Cálculo* de Louis Leithold [5], utilizado por algunos profesores en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California (UABC) para los cursos de Cálculo Diferencial. Se identificaron cinco de los más exitosos estudiantes, que comprenden el OM *optimización*, del curso mencionado. Además, otros cinco exitosos, de otro grupo y finalmente tres estudiantes de semestres posteriores que pueden considerarse como expertos. Se les aplicaron los problemas en forma individual y aislada, solicitándoles que anotaran en papel sus respuestas. Además se les pidió que externaran en voz alta sus pensamientos en forma simultánea al proceso de resolución del problema. Lo hecho por cada uno de los estudiantes participantes en la investigación, se video grabó. Estas grabaciones fueron transcritas para su posterior análisis junto con las hojas de respuestas de los estudiantes. El análisis se llevó a cabo comparando la configuración epistémica del problema con la configuración cognitiva de cada resolutor. Se detectaron algunos conflictos semióticos o de significados. De las transcripciones se identifican competencias metacognitivas de planificar, supervisar y control de los propios procesos cognitivos de resolución de problemas.

2.1 Los problemas

Los seis problemas seleccionados del texto [5], son del tipo escolar de contexto evocado [1]. El enunciado de uno de los problemas seleccionados, está planteado en un contexto geométrico e involucra en su solución una función de tipo radical.

Problema 1. “Dos postes con longitudes de seis y ocho metros respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste”.

Respecto a los otros cinco problemas, dos son de cálculo de áreas que se modelan, uno con una función cuadrática y el otro con una función recíproca; dos más relacionadas con funciones radicales y uno más complejo que conduce a funciones trigonométricas.

3. Resultados y discusión

3.1 Respuestas escritas a los problemas

En seguida se presenta la Tabla 1, en la cual se describe la configuración cognitiva de la alumna N, donde sintetiza y estructura su propuesta de resolución del primer problema.

Tabla 1. Configuración cognitiva de la alumna N del problema #1.

Objetos Matemáticos	Especificaciones
Situación-problema	Problema escolar, de contexto extra matemático evocado de aplicación. Minimización de longitud entre dos puntos. Emerge una expresión de raíces de cuadradas de números.
Lenguaje	Términos y expresiones: longitud, variable, expresiones algebraicas e igualdades. Representación: dibuja dos postes de 6 y 8 m paralelos, nombrándolos A y B respectivamente, situados a una distancia de 10 m. Dibuja un cable que une los extremos de los postes tocando el piso en el punto medio entre ambos. Asigna variables a las hipotenusas y catetos de la base de los dos triángulos formados.
Conceptos	Longitud, triángulo rectángulo, relaciones trigonométricas.
Proposiciones	“El cuadrado de la hipotenusa en un triángulo rectángulo es igual a la suma del cuadrado de los catetos”
Procedimientos	Lee el enunciado del problema. Identifica algunos datos e incógnitas. Encuentra dos soluciones del problema.
Argumentos	Supone que la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual al cociente del lado opuesto entre el adyacente. Deduce que la suma de las longitudes de las hipotenusas de dos triángulos distintos es igual al cuadrado de las mismas.

Este arreglo se compara con la Configuración Epistémica correspondiente (no mostrada por razones de espacio), de cuyo resultado se elabora la Tabla 2, donde se anotan las discrepancias o conflictos semióticos entre los significados personales de la alumna N y los de la institución, representados en este caso por un resolutor experto.

Tabla 2. Conflictos semióticos.

Objetos Matemáticos	Conflictos semióticos
Situación-problema	La estudiante no identifica que es un problema de optimización. En lugar de emerger una función cuadrática, lo hace una expresión algebraica de raíces cuadradas de números.
Lenguaje	No aparecen los términos: función, derivada, desigualdades. Representación: dibuja el cable que une los extremos de los postes tocando el piso en el punto medio entre ambos. En lugar de que pueda ser cualquier punto. Asigna variables a las hipotenusas pero no a los catetos de la base de los dos triángulos formados.
Conceptos	No aparecen los conceptos: variable, función, derivada, mínimo relativo.
Proposiciones	Sólo utiliza el teorema de Pitágoras en trigonometría no considerando algún resultado del cálculo diferencial.
Procedimientos	Interpreta incorrectamente el enunciado del problema como lo muestra su estrategia de solución. No identifica las incógnitas o magnitudes variables. No construye la función radical que relaciona magnitudes variables, y por tanto el resto del procedimiento correcto falla. Encuentra dos soluciones incorrectas del problema. “Tantea soluciones”. No valida la solución del mismo.
Argumentos	Encuentra erróneamente el valor hipotenusa de un triángulo rectángulo, correspondiendo realmente al seno del ángulo. No es posible aplicar el teorema de Pitágoras a dos triángulos distintos simultáneamente.

El indicador más básico de la competencia de resolución de problemas de acuerdo con la Universidad del Deusto en [13], es precisamente el que el estudiante identifique el que un enunciado corresponde a un problema de cierto tipo, en este caso, de optimización, mismo que la estudiante N no logra. Al tomar la decisión de fijar el cable a la mitad entre las bases de los postes, y de allí plantear su estrategia de resolución, ésta queda definida en un ambiente trigonométrico y no de tipo variacional. Se presume que su pensamiento variacional no está lo suficientemente desarrollado como puede observarse en el tramo de transcripción que se presenta en seguida.

3.2 Transcripciones en voz alta

A continuación se presenta lo dicho en voz alta por la alumna N en un segmento del proceso de resolución del problema:

“¡ah! lo voy a leer otra vez para entenderlo mejor... dos postes con longitudes de seis y ocho metros respectivamente, se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas a una distancia de diez metros, calcule la longitud mínima... de un cable... mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes; o sea las bases y luego hasta la punta del otro,... bien, a la punta del otro,... ok... Lo primero que voy a hacer va a ser un dibujo que me muestre los dos postes,...ok... aquí está un poste y a una distancia de diez metros en el suelo está el otro poste,...ok... uno mide ocho y uno mide seis metros. Éste lo voy a poner más pequeño que el otro y éste mide seis metros, el del lado derecho mide ocho metros...ok... la longitud que tienen entre cada uno es de 10 metros, dice: calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes voy a ponerle del poste de seis metros que le voy a llamar poste A y el poste B va a ser el de ocho metros, calcule la longitud mínima de un cable que puede ir desde la punta de uno de los postes o sea desde la punta del poste A, hasta un punto en el suelo entre los postes... voy a poner desde la punta del poste A hasta en medio de los dos postes de la distancia de los 10 metros y luego hasta la punta del otro poste;... sería como una especie de triángulo para arriba... ok... dice: calcular la longitud mínima del cable... ok... pues si se forman triángulos está diciendo que es entre los dos postes, entonces la mitad van a ser 5 de la longitud de la punta de un poste al piso y de la longitud del cable de en medio hasta la punta del otro... poste... entonces podría usar un... una... la fórmula para... como es... bueno me voy a fijar en los apuntes del cuaderno, creo que es la fórmula de la hipotenusa... ok”

La Figura 1, muestra lo expresado anteriormente por la alumna N.

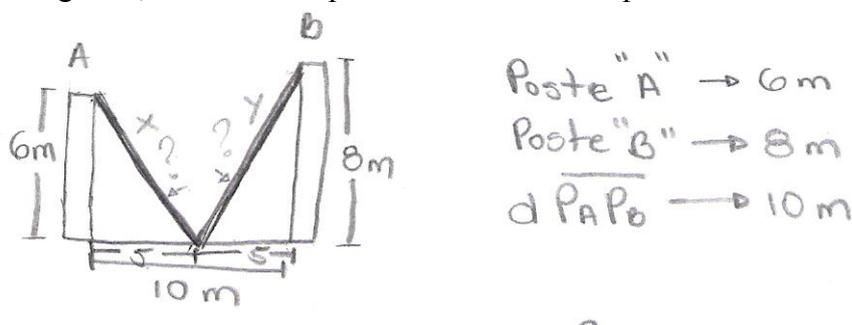


Figura 1. Dibujo de la alumna N del problema 1.

En la transcripción anterior, se identifican competencias metacognitivas tales como autoplanear y auto supervisarse. En su pensamiento se fija el hecho de que el cable llega a la mitad de la distancia entre las bases. Revisando todo su trabajo, no se encuentra evidencia alguna de que al menos intente fijar la llegada en algún otro punto. Al no pensarlo o hacerlo es imposible

identificar “que es lo que varía” y “que es lo constante” y por tanto no podrá construir la función correspondiente.

En un momento posterior el investigador entabló un diálogo con la alumna N, sobre este punto y después de un tiempo ésta pudo considerar otros puntos diferentes que el punto medio. Este diálogo aclaratorio también se llevó a cabo con otros estudiantes y otros problemas y se observó cómo se activaban más rápidamente los conocimientos y estrategias requeridas para avanzar en la resolución del problema. La mayor parte de los obstáculos se presentaron en la identificación de magnitudes variables y la construcción de la función. Ya obtenida esta, ya sea por lo mostrado en el proceso de resolución o en la transcripción, en su autoplaneación, se concluye que el proceso algorítmico posterior para encontrar los puntos extremos de la función es dominado aceptablemente.

Del análisis de las transcripciones, se puede concluir que los elementos o competencias metacognitivas de planeación, dirección y control, están más presentes en los estudiantes más avanzados (tercer semestre) que con respecto a los del curso de cálculo de primero, independientemente del grupo. En este mismo grupo de estudiantes, alumnos con una mayor metacognición corresponde a mejor proceso de resolución cognitiva del problema.

En el estudio [6] se muestra una práctica del profesor de uno de los grupos de cálculo, de donde se seleccionaron estudiantes, caracterizada como expositiva y actuante por el instructor. No se promueve de manera interactiva la comprensión de los enunciados de los problemas revisados en clase, no explorando posibilidades de interpretación o de alternativas de solución tan propio de los problemas de optimización. La argumentación es escasa en ese proceso instruccional. Se considera que este tipo de práctica docente explica el que los estudiantes no sean exitosos en la resolución de problemas de optimización.

4. Conclusiones

En este ejercicio se ha encontrado que los estudiantes de cálculo para ingeniería seleccionados como exitosos en el mismo curso, muestran un bajo desempeño en el proceso de resolución de problemas de optimización seleccionados del libro de texto y dentro de una práctica docente. Se considera que esta última incide fuertemente en los resultados obtenidos.

Un reto de los de los sistemas educativos en la pretensión de mejorar los resultados del aprendizaje de las matemáticas, además de los planteados en [6]:a) la selección y elaboración de materiales consistentes con las nuevas tendencias de la enseñanza centradas en la resolución de problemas y, b) la formación, capacitación y actualización de profesores, es lograr una adecuada formación metacognitiva de los estudiantes que les permita planear y administrar sus propios procesos cognitivos en la resolución de problemas.

5. Referencias

- [1] Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *Gaceta del RSME*, 10(2).
- [2] Godino, J.D.(2002). Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática. *XVI Convengo Nazionale: Incontri con la Matematica. Castel San Pietro Teme (Bologna)* Versión en español recuperada en abril de 2007 en: ([URL:http://www.ugr.es/local/jgodino](http://www.ugr.es/local/jgodino)).
- [3] Malaspina, U.(2007). Intuición, Rigor y Resolución de Problemas de Optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (3) ,365- 399.

- [4] Godino, J.D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Universidad de Granada. Recuperado en abril de 2007. Disponible en: ([URL:http://www.ugr.es/local/jgodino](http://www.ugr.es/local/jgodino)).
- [5] Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (Mata, F., Trad.) México, D.F., México: Oxford University Press.
- [6] Ávila, R., Encinas, A y Rivera, R. Significados institucionales de referencia, planeados e implementados de optimización en un curso de cálculo para estudiantes de ingeniería. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23, 2009, en proceso, México:CLAME
- [7] Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3),325-355.
- [8] Godino, J.D. Batanero, C. y Font, V. (2007).The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The international Journal on Mathematics Education* , 39 (1-2):127- 135. Versión ampliada al 9 de marzo de 2008 en ([URL:http://www.ugr.es/local/jgodino](http://www.ugr.es/local/jgodino))
- [9] Font, V. y Godino, J.D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos. *Educação Matematica Pesquisa*, 8(1), 67-98.
- [10] González, F. (1996). Acerca de la metacognición. *Revista paradigma*. Recuperado en abril de 2007 en URL:<http://www.revistaparadigma.org.ve/Doc/Paradigma96/doc5.html>.
- [11] D'Amore,B., Font,V. y Godino, J. (2007). *La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Revista Paradigma, 28 (2), 49-77.
- [12] Gusmão,T., Font, V. y Cajaraville, J. Análises cognitivo e metacognitivo de práticas de resolução de problemas. *Educação Matematica Pesquisa*. São Paulo, v.11, # 1,pp. 8-43, 2009.
- [13] Villa, A. y Poblete, M. (2008). *Aprendizaje basado en competencias*. Universidad de Deusto. España: Ed. Mensajero.

Diseño instruccional con soporte en videos digitales y WinPlot para el aprendizaje de límites

Rafael Pantoja Rangel, Juan Carlos Martínez Sandoval, Elena Nesterova
Departamento de Matemáticas. CUCEI
Universidad de Guadalajara
Leopoldo Castillo Figueroa
Departamento de Ciencias Básicas
Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán
rpantoja@prodigy.net.mx, rafael.pantoja@red.cucei.udg.mx

Nivel educativo: Superior

Resumen

En el Instituto Tecnológico de Cd. Guzmán (ITCG), la Academia de Ciencias Básicas de Ingeniería (ACBI), implementó el diseño instruccional de la Unidad III del curso de Matemáticas I con soporte en las nuevas tecnologías, que corresponde al contenido de Límites y continuidad de funciones reales de una variable real, de las carreras de ingeniería del Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán (ITCG) y que se experimentó en el mes de Septiembre del 2009. El ambiente para aprendizaje se integró de actividades sustentadas en los medios y materiales siguientes: Tres DVD del concepto de Límite, continuidad y asíntotas para consulta en un lector de un equipo de cómputo o residencial, la guía de estudio y actividades con el WinPlot. En un primer análisis, se puede inferir que el diseño instruccional fue del agrado de los estudiantes.

1. Introducción

En la Academia de Ciencias Básicas de Ingeniería (ACBI) del Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán (ITCG) se plantea sistematizar el proceso de enseñanza, con la finalidad de significar el aprendizaje de los alumnos. Con este fin se realizó un diseño instruccional para la enseñanza de límites y continuidad, con empleo de videos explicativos en formato DVD, el programa WinPlot y un cuaderno de trabajo. Se experimentó su efectividad para los estudiantes del primer semestre de las carreras de ingeniería del ITCG, con un promedio de edad entre los 17 y 18 años.

Una de las carencias que se observa en el ITCG es la escasa elaboración de materiales con las nuevas tecnologías (multimedia, audio y video digital, software y sitios en Internet, entre otras) que apoyen de manera sistemática el aprendizaje de los alumnos. En el diseño de los materiales y las instrucciones para las actividades de aprendizaje se tomarán en consideración los problemas de corte epistemológico y didáctico, que se enfrenta para el aprendizaje y enseñanza de límites y continuidad. Brousseau [1], define un obstáculo epistemológico como aquel conocimiento que ha sido en general, satisfactorio durante un tiempo, para la resolución de ciertos problemas, pero que posteriormente, este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas. Un obstáculo no es una falta de conocimiento sino un conocimiento adquirido que dificulta la construcción (o reconstrucción) de un concepto. Según Skemp [2] los conceptos contributivos deben estar disponibles para cada nueva etapa de abstracción pues si un nivel dado se comprende imperfectamente cualquier cosa derivada se encuentra en peligro.

El diseño instruccional empleado se basa en el modelo de Dick y Carey [3], el cuál consta de diez pasos: 1) Identificar la meta instruccional; 2) Análisis de la instrucción; 3) Análisis de los estudiantes y del contexto; 4) Redacción de objetivos; 5) Desarrollo de Instrumentos de evaluación; 6) Elaboración de la estrategia instruccional; 7) Desarrollo y selección de los materiales de instrucción; 8) Diseño y desarrollo de la evaluación formativa; 9) Diseño y desarrollo de la evaluación sumativa; y 10) Revisión de la instrucción.

El objetivo de la investigación fue determinar y evaluar los efectos que la aplicación del diseño instruccional produce sobre el aprendizaje de límites y continuidad.

Fue planeada la hipótesis que la aplicación de del diseño instruccional les permite a los alumnos del grupo experimental superar en aprovechamiento a los alumnos del grupo de control.

El diseño y desarrollo de materiales es un área de oportunidad que no ha sido explotada en la misma proporción en que se han desarrollado las nuevas tecnologías [4], ya que se ha relegado por la dificultad para producir un programa multimedia, un tutorial o un software educativo, porque demanda competencias de diseño gráfico y programación que están fuera del alcance de la mayoría de los docentes. Tres estudiantes de las carreras de ingeniería en sistemas computacionales que participaron en el verano científico organizado por el programa interinstitucional para el fortalecimiento de la investigación [5] apoyaron el diseño gráfico y programación de los materiales.

Otra situación es que la DGEST envía los programas de los cursos, con un apartado de Sugerencias Didácticas [6]. En esta investigación se cubrieron las sugerencias propuestas por DGEST, tales como usar los recursos tecnológicos que faciliten la comprensión de los conceptos, la resolución de problemas e interpretación de los resultados (WinPlot y video explicativo en formato DVD); formar los grupos de discusión y análisis sobre los conceptos previamente investigados; proporcionar al estudiante una lista de problemas del tema y genere prácticas de laboratorio para confrontar los resultados obtenidos.

2. Fundamentación

Dentro de los aspectos epistemológicos se consideraron, el desarrollo histórico del concepto de límite y la presencia a través de dicho desarrollo de los obstáculos epistemológicos, que tienen dos características principales: son inevitables y esencialmente constitutivos del conocimiento por ser adquirido y se encuentran por lo menos en alguna parte del desarrollo histórico del concepto. Históricamente el concepto de Límite, apareció de manera implícita en el concepto de sucesión infinita de sumas parciales, como un “proceso dinámico” y sólo después de la aparición de los conceptos de integral y derivada y hasta fines del siglo XIX, se definió formalmente como un “objeto estático” [7], [8]. Los principales obstáculos epistemológicos que se han presentado en el desarrollo conceptual del límite tienen que ver con la dificultad en el paso del infinito potencial al infinito actual y el replanteamiento sobre la existencia de las cantidades infinitesimales [9].

El diseño de los materiales y las instrucciones para las actividades de aprendizaje se basó en que la utilización de distintas representaciones del concepto de límite (numérico, gráfico, algebraico, verbal) mejora su comprensión [10]. La representación numérica proporciona una visión dinámica de aproximación y está vinculada con procesos reales. La representación gráfica es un puente entre la representación numérica y la algebraica, vincula tendencias entre las variables. La representación algebraica es abstracta, proporciona una visión estática, tiene precisión inmejorable, pero poco

vínculo con procesos reales. La representación verbal es dinámica y vinculada con la realidad fuertemente.

Por otro lado, la teoría del aprendizaje significativo, afirma sobre la existencia de una estructura cognitiva en el alumno, esto es, esquemas de conocimientos, conceptos, percepciones, hechos, etc. El aprendizaje consiste en una reestructuración activa de dicha estructura: La nueva información es vinculada a los aspectos *relevantes y preexistentes* en la estructura cognitiva y en el proceso se modifican la información recientemente adquirida y la estructura preexistente [11].

De acuerdo con la teoría APOE, para que un concepto matemático, pueda convertirse en un objeto “aprendido”, se requiere primeramente que este sea concebido como un objeto mental (primitivo) sobre el cual pueda ejercerse alguna *acción*. Cuando dicha acción es interiorizada por el sujeto entonces se convierte en un *proceso*. Dicho proceso puede llegar a evolucionar en un *objeto* conceptual más general e insertarse con otros conceptos en un nuevo esquema mental. El concepto de límite tiene esta doble cara: es proceso y es objeto pero además, es necesario manejar la reversibilidad del *objeto en proceso* [12].

3. Metodología

De la revisión de la información referente al aprendizaje del concepto de límite y los textos más empleados en la enseñanza del cálculo se identificaron la meta instruccional, los contenidos para la enseñanza, los conocimientos previos que debe poseer el alumno y el contenido del examen de diagnóstico, aplicado en la primera sesión. Se redactaron los objetivos de enseñanza y de aprendizaje y se desarrollaron las estrategias, los instrumentos y criterios de evaluación. Se elaboró el cronograma que incluye por sesión las actividades en el aula, en la compu aula y extraclase.

La experimentación se desarrolló en doce sesiones de 50 minutos cada una. A los alumnos del grupo experimental se les entregó el cuaderno de trabajo con los objetivos e instrucciones, actividades de aprendizaje, seis cuestionarios y ocho problemarios, tres DVD con 28 videos digitalizados con los conocimientos previos para cada uno de los temas de la unidad III del programa vigente de Matemáticas I, para las carreras de ingeniería de la DGEST y un manual de WinPlot con uso específico al estudio de límites.

Al inicio del experimento se aplicó un examen de conocimientos previos y al finalizar el experimento, se aplicó el pos test para evaluar el aprendizaje logrado por los alumnos en el tema. Se aplicaron dos encuestas al grupo experimental para conocer el nivel de satisfacción en el uso de los medios y materiales usados.

4. Resultados

Resultados de la evaluación diagnóstica. Los promedios de calificaciones: el grupo experimental tuvo como promedio 52.7 y el de control 46.7. Treinta alumnos del grupo experimental (41.1%) tuvieron una calificación mayor o igual a 60. Se consideró que los alumnos del grupo experimental, tienen los conocimientos básicos para iniciar la experimentación.

Resultados del pos test. El pos test los estudiantes de ambos grupos, experimental y de control, contestaron a lápiz y papel en la última sesión. En el grupo experimental se tuvo a 29 alumnos

(40.3%) con al menos 70 de calificación, y la calificación más alta fue de 84.6. En el grupo de control se tuvo solo un alumno (1.8%) con al menos 70 de calificación, y su calificación fue de 73.1.

Análisis estadístico. El análisis para la prueba t , (Comparación de Medias), así como el supuesto de que las variancias son iguales, fueron validados por los cálculos del StatGraphics, que arrojó los datos siguientes: $t = -7,93557$, $P\text{-value}=1.18464E-7$. Con base en estos valores y que la hipótesis nula de la investigación señala que la diferencia entre las medias es cero ($\mu_{control} - \mu_{experimental} = 0$), mientras que la hipótesis alternativa propone que la diferencia entre las medias es negativa ($\mu_{control} - \mu_{experimental} < 0$) y como $P\text{-valor} < 0.05$, se acepta la hipótesis alternativa, lo que significa que existe una diferencia significativa a favor del grupo experimental sujeto a la aplicación de la propuesta para el aprendizaje de límites.

Análisis de las encuestas. Los datos cualitativos se obtuvieron de la encuesta y será cuantificada con una escala de Likert [3].

- a) El promedio general de las dos encuestas es de 4.08 que cae en la categoría *De acuerdo*.
- b) El promedio para la evaluación de los materiales es de 4.22, y es superior a 4, por lo que corresponde a la categoría *De acuerdo*. El 58% de las respuestas caen dentro de la categoría *De acuerdo*, y el 34% caen en la categoría *Completamente de acuerdo*.



Figura 1. Resultados de la encuesta sobre los materiales y la nueva forma de trabajo.

- c) El promedio correspondiente a la nueva forma de trabajar (metodología) es de 3.91, y siendo 9 centésimas inferior a 4 tiende a caer dentro de la categoría *De acuerdo*. El 56% de las respuestas caen dentro de la categoría *De acuerdo*, y el 22% caen en la categoría *Completamente de acuerdo*.

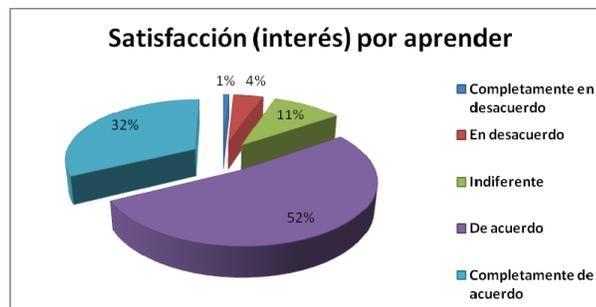


Figura 2. Resultados de la evaluación correspondiente a la satisfacción por aprender.

- d) El promedio correspondiente a la satisfacción por aprender es de 4.11, ligeramente superior a 4, correspondiente a la categoría *De acuerdo*. El 52% de las respuestas está en la categoría *De acuerdo*, y el 32% en *Completamente de acuerdo* (Fig. 2).

5. Respuestas a las preguntas de investigación complementarias

1. ¿Cómo los videos intervienen en el aprendizaje sobre el concepto de límite?

De la respuesta a la encuesta en las preguntas P1, P11, P16 y P19 relacionadas con el uso de los videos en la propuesta, se afirma que los alumnos consideraron los videos apropiados para aprender límites (Promedio = 3.95). Además, de las observaciones realizadas en el aula, se concluye que los alumnos muestran más interés por el aprendizaje del nuevo conocimiento.

2. ¿De qué manera el cuaderno de trabajo influye en el aprendizaje del alumno?

Las actividades incluidas en el cuaderno de trabajo fueron los cuestionarios, los problemarios y la consulta de videos, de acuerdo al promedio calculado (4.12) en las preguntas de la encuesta (P3, P4, P5, P9 y P10) son satisfactorios para la propuesta, porque promovieron las actividades extraclase, las discusiones en el aula y el trabajo en un medio tan importante como es la computadora.

3. ¿Cómo contribuye el software WinPlot en el aprendizaje de los alumnos?

Se sabe que el uso del software de matemáticas es un buen medio para aprender matemáticas, tal y como sucedió en esta investigación, donde de acuerdo a lo respondido por los alumnos en las preguntas de la encuesta P2, P8 y P15, su satisfacción por el uso del software ha sido positivo, corroborado con el promedio de 4.2, que fue el mayor obtenido de las preguntas auxiliares de la investigación.

6. Conclusiones

Son varias las investigaciones donde se afirma que las nuevas tecnologías son una buena opción para aprender matemáticas, pero esta propuesta se sustentó con los elementos que soportan el diseño Instruccional orientado al trabajo a lápiz y papel, que los alumnos desarrollaron tanto en el trabajo extra clase, en el aula y en la compuaula, dado que para el estudio fueron importantes las respuestas que los alumnos dieron a los cuestionarios y a los problemarios, se reflejó en su interés por participar activamente en la adquisición de su aprendizaje, por tal motivo, un ambiente de aprendizaje mixto, donde se incluya el trabajo extra clase, en el aula y la compuaula, es y será muy importante para el aprendizaje de las matemáticas.

Los medios y materiales son un factor relevante en el diseño de un ambiente para aprendizaje. Se recomienda que las actividades que el alumno realizará se orienten hacia el trabajo extra clase, en el aula y en el centro de cómputo, dado que la integración de tales actividades propiciará el aprendizaje.

Es sabido de que los contenidos incluidos en la propuesta, referentes al estudio de límites, continuidad y asíntotas son de un nivel complicado para su enseñanza y aprendizaje, sobre todo en lo referente a la aplicación de la definición de límite, que en la enseñanza tradicional se trata de manera relampagueante y orientada sólo a la cuestión analítica y a uno que otro ejemplo escrito en el pizarrón. En la propuesta se notó la satisfacción por el acercamiento numérico y gráfico, que fueron tratados en la compuaula con el programa WinPlot y que se reflejaron en la contestación de los

cuestionarios y problemarios, diseñados para la propuesta, en la que se resalta que lo observado en la pantalla de la computadora se reflejara en el trabajo a lápiz y papel.

El trabajo extra clase realizado en función de los videos incluidos en el DVD, fueron un factor importante en las discusiones en el aula, porque se notó en los alumnos que los conocimientos previos adquiridos con la observación del video y las correspondientes respuestas a los cuestionarios, que propiciaron el aprendizaje de los contenido de límites, continuidad y asíntotas.

Como toda experimentación, siempre hay imponderables (variables exógenas) que se deben cuidar, pero cuando institucionalmente estos imponderables son generados por los compromisos que no pueden evitar las autoridades, generan problemas que se ven reflejadas en los resultados de investigación, así que se sugiere que los estudios sean planificados con precisión tal que evite contratiempos, como los enfrentados en este estudio, pues hubo sesiones que se tuvieron que reprogramar, como la sesión donde se tomarían evidencias en video del desarrollo de la sesión o como la suspensión de clases, que año con año se otorgan por la Feria de Cd. Guzmán.

Por último, se concluye que este tipo de estudio se debe integrar de manera paulatina en las instituciones de nivel superior, con las variantes de trabajo individual o colaborativo, con el uso de las nuevas tecnologías, dejar de lado el trabajo a lápiz y papel y las discusiones en el aula orientadas, sin dejar de lado que para cada nuevo contenido que se ha de tratar, se sugiere verificar los conocimientos previos, tendientes a propiciar las discusiones en el aula, como fue el caso de los videos incluidos en la investigación o para desarrollar las actividades propuestas.

7. Referencias

- [1] Brousseau, G. (1983). *Les obstacles epistemologiques et les problèmes en mathematiques*. Recherches en Didactique des Mathematiques. Vol. 4 No. 2. pp. 165-198.
- [2] Skemp, R (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata.
- [3] Dick, W., Carey, L. y Carey, J. (2005). *The systematic design of instruction*, (6th ed.). USA: Person.
- [4] Pantoja, R. y Ulloa R. (2005). *Aprendizaje de la teoría de polinomios en un ambiente virtual con soporte en multimedia y el software MathCad*. En la Revista Cuadernos de los Altos, Num. 2.
- [5] DELFIN (2009). Programa Interinstitucional para el Fortalecimiento de la Investigación y el Posgrado del pacífico. <http://www.programadelfin.com.mx/>
- [6] DGEST (2010). Guía para la instrumentación didáctica de los programas de estudio para la formación y desarrollo de competencias profesionales.
- [7] http://www.dgest.gob.mx/index.php/academica/docencia/direccion_de_docencia.htm
- [8] Boyer, C. B. (1959). *The History of the calculus and its conceptual development*. New York:Dover Publications, Inc.
- [9] Edwards, J. (1979). *The Historical Development of Calculus*. New york: Springer Verlag.
- [10] Cornú, B. (1991). Limits. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 153-166. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- [11] Blázquez S., Ortega T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME* 4(3), 219-236. Valladolid, España
- [12] Ausubel, D. P., Novak J. & Hanesian, H. (1996), *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. México: Editorial Trillas.
- [13] Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas K., & Vidakovic, T. (1996). Understanding the Limit concept: Begining with a Coordinated Process Schema, *Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 167-192.

Un estudio comparativo de una estrategia didáctica que incorpora calculadora graficadora y el enfoque tradicional, para abordar aplicaciones de ecuaciones diferenciales

Maximiliano De Las Fuentes Lara, José Luis Arcos Vega, Álvaro Encinas Bringas
Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California
maxito6782@hotmail.com

Nivel educativo: Superior

Resumen

Resumen: Se presentan los resultados de una investigación cuyo propósito es establecer de manera comparativa la eficiencia de dos métodos de enseñanza, uno con enfoque tradicional [1], y otro con una estrategia didáctica que incorpora la calculadora y basada en la teoría de las representaciones semióticas de Duval [2]. La eficiencia se midió a través de la actividad cognitiva de los estudiantes en la manipulación de los registros de representación alrededor del fenómeno sistema masa-resorte, en un curso de ecuaciones diferenciales. Esto en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Baja California. A 30 estudiantes se les enseñó de manera tradicional y a 36 mediante la estrategia propuesta. Se administró un instrumento de medición tipo post-test. Los resultados muestran de manera significativa, mayores niveles de eficiencia en la manipulación de los registros en los estudiantes que abordaron el objeto de estudio mediante la propuesta.

1. Introducción

Los cursos de matemáticas de nivel superior buscan que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos, los cuales deben ser aplicados en otros contextos diferentes al cual se aprendieron. También se espera que los estudiantes desarrollen habilidades en el manejo de conceptos en sus diferentes representaciones: algebraico, numérico, gráfico e inclusive en el lenguaje natural, así como también que logren competencias para modelar, plantear y resolver problemas, representar y utilizar el lenguaje simbólico y formal. Esta acción presupone la plena comprensión de un concepto matemático, cuanto más si la situación de aprendizaje esta enmarcada en un contexto físico o de ingeniería.

Según Artigue [3], estudios realizados sobre la enseñanza universitaria muestran claramente que esta se centra en el funcionamiento dentro del cuadro algebraico, en una praxis algorítmica y en la evaluación de las competencias algebraicas correspondientes. Al parecer sólo se prepara a los estudiantes con destrezas y capacidades procedimentales, sin incorporar ni los avances en el conocimiento de cómo aprenden los estudiantes ni los recursos tecnológicos modernos.

En la formación del ingeniero, actualmente se estima que entre el 14% y 20% de la carga curricular son unidades de aprendizaje del área de matemáticas. Las ecuaciones diferenciales y el estudio y aprendizaje de las mismas permiten modelar, comprender y avanzar en el conocimiento de diversos fenómenos de la naturaleza; crecimiento y decrecimiento poblacional, variación de temperatura de los cuerpos, propagación de los virus, sistemas masa-resorte con o sin amortiguamiento,

iluminación, circuitos eléctricos, son ejemplos comunes de ello. Uno de los tópicos a estudiar durante el curso de ecuaciones diferenciales, es precisamente el denominado sistema masa-resorte, el cual tiene múltiples aplicaciones en las diversas áreas de ingeniería.

Actualmente en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California se cuenta con índices de reprobación estudiantil en los cursos de ecuaciones diferenciales del orden del 25% en promedio, lo cual es preocupante, por tal motivo se rezagan o desertan más de 75 alumnos por cada semestre solamente debido a esta unidad de aprendizaje.

En el presente proyecto de investigación se diseñó e implementó una estrategia didáctica, diseñada a partir de la teoría cognitiva de Duval [2], toda vez que en las actividades que los estudiantes tienen que realizar en la estrategia se enfatiza en la habilidad para cambiar de un registro de representación a otro, además de promover el equilibrio de los distintos registros de representación (algebraico, numérico y geométrico) para no privilegiar en particular alguno de ellos; y los avances logrados en el campo tecnológico según Kutzler [4]. El Diseño de la estrategia didáctica considera la dialéctica herramienta – objeto, de acuerdo a Douady [5], en el cual los conceptos matemáticos van alternando el papel de instrumento o herramienta para afrontar o resolver un problema, y de objeto tomando un lugar en la construcción de un conocimiento organizado.

Se presentan los resultados de un análisis comparativo basado en la actividad cognitiva desarrollada por los estudiantes a partir de la implementación de la estrategia didáctica que incorpora tecnología de la calculadora y el instrumento de medición, con el propósito de evidenciar que un grupo de estudiantes que enfrente el estudio del fenómeno sistema masa-resorte y los conceptos matemáticos involucrados en el mismo mediante una estrategia didáctica que incorpore la calculadora logra una mayor eficiencia en cuanto a la manipulación de los distintos registros de representación que los estudiantes de un grupo cuyo acercamiento al tema citado es a través de un enfoque de enseñanza tradicional.

2. Metodología

El estudio involucró a dos grupos de estudiantes inscritos en la unidad de aprendizaje de ecuaciones diferenciales de la Facultad de Ingeniería en la Universidad Autónoma de Baja California.

El diseño de investigación que se utiliza es el denominado experimento *puro* Hernández, Fernández y Baptista [6], en virtud de que se manipula de manera intencional, variables independientes (enfoque de enseñanza tradicional y otro que incorpora tecnología de la calculadora) y se mide la variable dependiente (eficiencia de la actividad cognitiva), así como para el establecimiento de la comparación de los dos grupos. Con el objeto de comprobar si existe diferencia de la eficiencia en cuanto a la actividad cognitiva desarrollada por los estudiantes ante los dos enfoques de enseñanza se usa la prueba de diferencia de medias de Walpole y Myers [7].

Los resultados de la aplicación de un instrumento de medición diagnóstico permitió establecer la homogeneidad de los estudiantes en cuanto a la manipulación de los distintos registros de representación al momento previo al inicio de abordar el estudio del fenómeno sistema masa-resorte, toda vez que las pruebas de hipótesis evidenciaron que no existe diferencia significativa sobre los registros de representación de los estudiantes de los grupos participantes. Dicho instrumento se diseñó con la consideración de los criterios de Contreras [8], para la generación de ítems en la construcción de exámenes del tipo criterial alineado con el currículum.

Participaron en la investigación 66 estudiantes de la Facultad de Ingeniería, 36 de ellos integraban el grupo piloto, y el resto (grupo de control) trabajaron de manera tradicional, la experimentación tuvo una duración de 12 días e incluyó la puesta en escena de la estrategia didáctica y la aplicación de la posprueba o post-test. La calidad del experimento fue verificada mediante su validez interna, de acuerdo a Hernández [6].

El instrumento de medición post-test o posprueba esta constituido por 34 reactivos y se ha diseñado bajo las mismas consideraciones que el diagnóstico, a diferencia que se aboca a determinar la actividad cognitiva en cuanto a la manipulación de los estudiantes para con los registros de representación, alrededor de los conceptos matemáticos del fenómeno sistema masa-resorte.

La posprueba se administró a ambos grupos de investigación posterior a la puesta en escena de la estrategia didáctica, de manera que la comparación de los resultados permite determinar si existe diferencia en la eficiencia de la actividad cognitiva de los estudiantes. La calidad de este instrumento es juzgada mediante la validez de contenido, toda vez que participaron jueces expertos en su revisión, así como también por la validez de criterio, en cuanto que se correlacionaron los resultados con dos pruebas colegiadas, alineadas con el currículum y criterios de matemáticas I y II, las cuales se aplican desde 2007 a nivel Estatal en las Facultades de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California y con las que se obtuvieron una correlación muestral de Pearson de 0.73 para el caso de matemáticas I, y una correlación de Pearson de 0.79 para el caso de matemáticas II. En ambos casos se rechazaría la hipótesis de no asociación lineal con un nivel de significancia de 0.01. También se calculó la confiabilidad por el método de mitades partidas, en donde se obtuvo un coeficiente de 0.81, calificado como correlación positiva considerable de acuerdo a la escala de Hernández [6].

Además de los elementos anteriormente descritos, se determinó el promedio del índice de discriminación del post-test obteniendo 0.46, el cual puede considerarse como una calificación excelente (mayor que 0.40) para Ebel y Frisbie [9].

3. Resultados

Se presentan los resultados de un análisis comparativo entre la actividad cognitiva de los estudiantes de los grupos de control y experimental, logrados a partir de los esquemas de enseñanza tradicional y otro que incorpora tecnología de la calculadora, y medidos con los índices de dificultad con la administración de post-test. El índice de dificultad o valor p del reactivo, se refiere a la proporción de examinados que contestaron correctamente el ítem.

La actividad cognitiva de tratamiento externo o conversión evidencia la mayor dificultad para los estudiantes cuando esta se presenta como necesaria para la resolución de un reactivo. La representación se posiciona como la de menor dificultad y secundariamente la actividad de tratamiento. De acuerdo a las pruebas de hipótesis no hay diferencia significativa entre tales actividades cognitivas para el grupo de control.

De manera recurrente los estudiantes del grupo de control muestran mayor dificultad para resolver los reactivos cuyo registro inicial es gráfico, mientras que en contraste se tiene el registro inicial numérico, de hecho la prueba de hipótesis sugiere diferencia significativa entre los registros gráfico y numérico.

El gráfico de barras (ver figura 1) muestra claramente la diferencia en cuanto a las actividades cognitivas de los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control medidas a partir del índice de dificultad.

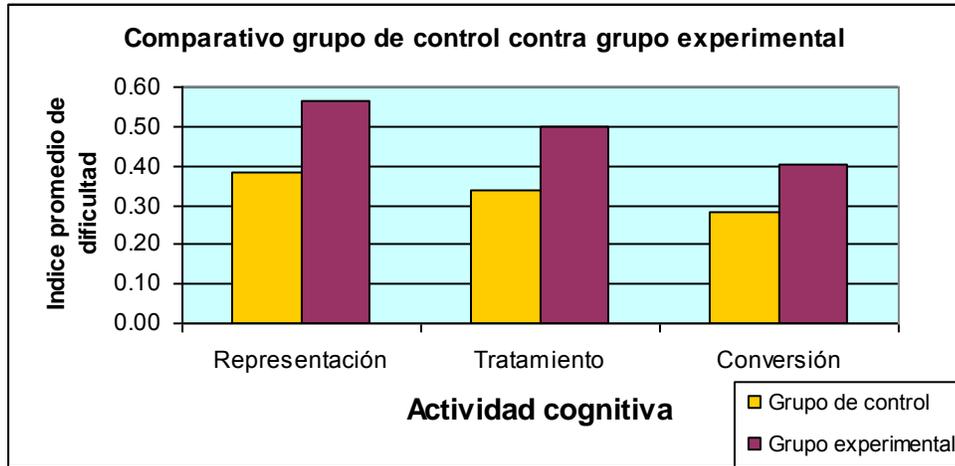


Figura 1. Gráfico comparativo de los grupos de control y piloto en cuanto a la actividad cognitiva y el índice de dificultad promedio.

Para el caso de las actividades cognitivas, el comparativo entre los grupos de control y experimental evidencia diferencia de manera significativa a favor del grupo experimental en cuanto a la actividad cognitiva de representación, de tratamiento y de conversión. Ambos grupos reflejan menor eficiencia cuando la actividad cognitiva requerida para resolver favorablemente un reactivo es la conversión, le sigue la actividad de tratamiento y la representación.

Algunos resultados asociados al registro inicial y final de los reactivos presentados en el post-test se indican a continuación:

- En todos los casos el grupo experimental presenta contra el grupo de control mayor eficiencia evidenciado por los índices de dificultad cuando se trata de los registros iniciales de representación algebraico, gráfico y de lenguaje natural, y aunque mínimamente también en el registro inicial numérico, es en este último registro en el que no existe diferencia significativa.
- De manera sobresaliente el registro inicial gráfico en el grupo experimental destaca ante cualquier otro registro dentro y fuera del mismo grupo experimental.
- En todos los casos el grupo experimental presenta contra el grupo de control mayor eficiencia cuando se trata de los registros finales de representación algebraico, gráfico y de

lenguaje natural, y aunque mínimamente también en el registro final numérico, es en este último registro en el que no existe diferencia significativa.

- De manera sobresaliente el registro final gráfico en el grupo experimental destaca ante cualquier otro registro de representación dentro y fuera del mismo grupo experimental.

4. Conclusión

Además de la medición de la eficiencia en cuanto a la actividad cognitiva se detectó que la mayoría de los estudiantes no están acostumbrados a trabajar en sus clases habituales con estrategias didácticas que incorporan tecnología de la calculadora, sino simplemente con ejercicios mas o menos rutinarios con dependencia del profesor como producto de la enseñanza tradicional, de hecho una encuesta aplicada a los estudiantes del grupo experimental evidenció sobremanera el poco uso y potencialidad de las calculadoras graficadoras y simbólicas (que incluyen Sistema de Cómputo Algebraico), pues solamente el 21% cuenta con calculadora de última tecnología y la eficiencia de su uso es muy discutible.

La experiencia puede considerarse como exitosa en varios aspectos, por una parte logra que los estudiantes del grupo experimental se apropien intelectualmente de los problemas que conforman la estrategia didáctica, además se consigue que el estudiante transite adecuadamente del contexto gráfico al contexto físico virtual, los estudiantes logran describir tanto física como geoméricamente los diferentes tipos de movimiento armónico y amortiguado en sus tres dimensiones, sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado. Los estudiantes asocian adecuadamente el gráfico de la ecuación de movimiento a partir de la ecuación diferencial que modela el sistema, y viceversa.

5. Referencias

- [1] Gerald, A. G. (2002). Representaciones en el aprendizaje de las matemáticas y resolución de problemas. En L. D. English (Ed.), *Manual de investigación internacional en educación matemática* (pp. 197-218). New Jersey, EE. UU.
- [2] Duval, R. (2006). Quelle Sémiotique Pour L'Analyse de L'Activité et des productions mathématiques. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, Número especial, pp. 45-81.
- [3] Artigue, M., Douady R., Moreno L., & Gómez P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. pp. 97-140. Grupo Editorial Iberoamérica.
- [4] Kutzler, B. (2003). La calculadora algebraica como herramienta pedagógica para enseñar matemáticas (J. Jiménez, Trad.). En A. Del Castillo, L. Dórame, J. Jiménez & E Hugues, (Eds.), *Antología de lecturas, El uso del sistema de cómputo simbólico voyage 200 como recurso didáctico, nivel básico* (pp 9-27). Hermosillo, Sonora: (Artículo original en inglés Kutzler B. The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics.
- [5] Douady, R. (1985). Juego de marcos y dialéctica herramienta – objeto. *Recherches en Didactique de Mathématique*. Vol. 7, No. 2. pp. 5-31. Versión en español Ernesto Sánchez S. y Gonzalo Zubieta B. *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas: Escuela Francesa. DME-CINVESTAV. 1993*

- [6] Hernández, S. R., Fernández, C. C., & Baptista, L. P., (2006). *Metodología de la investigación* (cuarta edición). México: Mc. Graw Hill.
- [7] Walpole, R. E., & Myers, R. H., (1989). *Probabilidad y estadística para ingenieros* (segunda edición). México: Interamericana.
- [8] Contreras, L., Bachhoff, E. & Larrazolo, N. (2004). *Capacitación de Comités Elaborador de Reactivos*, Curso-Taller para la Elaboración de Exámenes Criteriales
- [9] Ebel, R. L. y Frisbie, D. A. (1986). *Essentials of Education Measurement*. Englewood Cliffs, NJ.: Prentice Hall.

Construcción de la función derivada a partir de una visualización dinámica de la linealidad local

Martha Gabriela Robles Arredondo
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
gaby@gauss.mat.uson.mx

Nivel educativo: Superior

Resumen

Las nociones de derivada en un punto y de función derivada entrañan tradicionalmente una dificultad especial para los alumnos. La forma clásica de introducir el concepto de derivada, con la noción de límite en el centro de sus acepciones puntual y funcional, conlleva un alto nivel de complejidad, lo que pudiera explicar el origen de la dificultad mencionada. En este trabajo se presentan los avances de un proyecto de tesis que propone una técnica de construcción de la función derivada, con base en el diseño e implementación de una secuencia de actividades didácticas asistidas por computadora, que promueve un significado más amplio en torno a dicho objeto matemático, con alumnos del primer curso de Cálculo de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, buscando constituir una introducción alternativa al tratamiento vía límites, desde la noción de linealidad local

1. Introducción

Es tradicional que, en los cursos de Cálculo Diferencial, las nociones de *derivada en un punto* y de *función derivada* entrañen una dificultad especial para los alumnos. Particularmente en el nivel universitario, la forma clásica de introducir el concepto de *derivada*, con la noción de *límite* en el centro de sus acepciones puntual y funcional, conlleva un alto nivel de complejidad, lo que pudiera explicar el origen de la dificultad mencionada.

Es frecuente también que en un curso de Cálculo se sobrevaloren los procedimientos analíticos y la algoritmia, desatendiendo la pertinencia de los recursos geométricos y visuales, entre otras razones, por considerarlos no matemáticos. Esto hace común encontrar estudiantes que desarrollan una gran habilidad para derivar, sin haber logrado construir un verdadero significado en torno a las nociones involucradas (límites, pendiente de la recta tangente, razón instantánea de variación, función derivada).

La desatención a la articulación entre representaciones, que privilegia el manejo analítico sobre el geométrico, se evidencia cuando, aún en los casos más sencillos, la observación simultánea de las gráficas de f y f' no logra activar en el estudiante ningún proceso reflexivo a partir de la definición de derivada vía límite.

Además, la dificultad que entraña el propio concepto de límite (Artigue, 2000) es algo que motivó el interés por ampliar el abanico de posibilidades para promover la emergencia de la función derivada, buscando no restringirla al tratamiento vía límites. Es decir, se trata de proponer al estudiante la realización de una tarea matemática menos compleja, que lo introduzca al proceso de construcción de la función derivada.

Por todo lo anterior, en lo que respecta a la posibilidad de obtener mejores resultados con alumnos de un primer curso de Cálculo, la reflexión se orienta hacia los siguientes aspectos:

- La forma en que los procesos de instrucción promueven que los estudiantes construyan su propio concepto de derivada, a través de prácticas que privilegian, finalmente, el uso de las técnicas de derivación, por sobre dos grandes aspectos: su interpretación geométrica como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, por un lado, y como una función, por el otro.
- La importancia de promover una mayor riqueza en el lenguaje utilizado para abordar la tarea matemática, concretamente, en cuanto a la articulación de las diferentes representaciones asociadas a un objeto matemático.
- La conveniencia de incorporar los recursos que ofrece la herramienta tecnológica, como una forma de apoyar el quehacer en el aula.

Como proyecto de tesis de desarrollo docente, para la obtención del grado de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, esta propuesta gira en torno a la siguiente idea: a partir de la gráfica de f , mediante una construcción visualmente convincente de la recta tangente desde la noción de linealidad local, el alumno pudiera utilizar la interpretación geométrica de la derivada para llegar a la identificación de la expresión analítica de la función derivada, f' .

Así, la secuencia de actividades didácticas tiene como propósito central el propiciar que el alumno ponga en juego las diferentes representaciones del objeto *función derivada*, con la intención de promover que, a partir de una tabla obtenida mediante el trabajo dinámico desarrollado con el software, el estudiante construya la gráfica correspondiente y, finalmente, obtenga la expresión analítica de la función derivada. Sin embargo, la aplicación de la secuencia va más allá en sus objetivos, pues contempla, además, el aprovechamiento de los recursos visuales del Applet Descartes para poner al estudiante en contacto con dos nociones esenciales: la recta tangente como *la recta que más se parece a la curva en las cercanías del punto de tangencia*, y la *no derivabilidad puntual* de una función.

2. Elementos teóricos

El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), desarrollado por Juan Díaz Godino y colaboradores (Godino, 2008), constituye el marco teórico que orienta y da soporte a esta propuesta. Las nociones de *objetos primarios*, *práctica matemática*, *sistema de prácticas* y *significado* han resultado muy útiles, como herramientas teóricas, para dar sustento a los planteamientos contenidos en este trabajo.

Además, la identificación de la trama de *funciones semióticas* que el alumno debe activar en el desarrollo de la tarea matemática planteada, permite observar las diferentes *paradas* que se realizan en el trayecto, desde la gráfica de la función f hasta la identificación analítica de la función derivada de f , lo que, finalmente, favorece la detección de posibles conflictos durante el proceso de instrucción.

De acuerdo a los planteamientos del EOS (Font,2007), la técnica de acercamiento a la observación de la linealidad local, en el proceso de construcción de la función derivada, relaciona los siguientes ostensivos:

Gráfica de $f(x)$ \Rightarrow zoom Gráfica de $f(x)$ \Rightarrow Tabla de $f'(x)$ \Rightarrow Gráfica de $f'(x)$
 \Rightarrow \Rightarrow Expresión analítica de $f'(x)$

Así, para hacer emerger a la función derivada de una función f en cada actividad de la secuencia, el alumno debe activar una trama de funciones semióticas, que puede describirse como sigue:

1. El objeto x con el objeto *pendiente del segmento visualizado en el punto de abscisa x*
2. El objeto *pendiente del segmento visualizado en el punto de abscisa x* con el objeto *pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x*
3. El objeto *pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x* con el objeto $m_t(x)$
4. El objeto x con el objeto $m_t(x)$
5. El objeto x con el objeto $(x, m_t(x))$
6. El objeto $(x, m_t(x))$ con el objeto *gráfica de $m_t(x)$* ; es decir, el objeto $(x, m_t(x))$ con la clase a la cual pertenece
7. El objeto *gráfica de $m_t(x)$* con el objeto *expresión analítica de $m_t(x)$*
8. El objeto $m_t(x)$ con el objeto $f'(x)$; es decir, una notación con otra diferente pero equivalente.
9. El objeto x con la clase a la cual pertenece, al considerarla como la variable de la *función derivada* obtenida.
10. El objeto *función derivada* con la clase a la cual pertenece.

3. Aspectos Metodológicos

La propuesta está constituida por una secuencia de actividades didácticas, a implementarse en el curso de Cálculo Diferencial e Integral I, correspondiente a los programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora.

Como elementos que intervienen en la realización de cada una de las actividades didácticas que conforman la secuencia, se identifican los siguientes:

1. *Applet Linealizador*. Escenario interactivo configurado con el Applet Descartes, que constituye el recurso indispensable para la realización del ejercicio.
2. *Hoja de Trabajo*. Material impreso y diseñado ex profeso que pretende ser suficiente para conducir al estudiante durante el desarrollo de cada actividad. Este documento contiene, por un lado, una colección de gráficas de funciones, analíticamente no identificadas, seleccionadas cuidadosamente con objeto de simplificar la tarea esencial y evitar tareas secundarias “ruidosas”, así como una serie de indicaciones y preguntas que constituyen la guía de trabajo, por el otro.

La articulación de los elementos anteriores busca facilitar que el profesor, con un mínimo de intervención que propicie en el alumno el mayor grado de reflexión posible, juegue el papel de *conductor* de la actividad didáctica, promoviendo así que el estudiante se vuelva el sujeto *ejecutor* de la práctica, de la manera más autónoma posible.

En el desarrollo de este proyecto de tesis, se identifican diferentes etapas, distinguiéndose como la principal de ellas la del diseño e implementación de la secuencia didáctica. Las actividades didácticas que constituyen la secuencia, diseñadas gracias a la configurabilidad del applet Descartes, puede describirse brevemente como sigue:

➤ *Actividad 1*

Esta primera actividad tiene como propósito presentar al estudiante una justificación visual de una proposición matemática que es el eje de esta propuesta: *la recta tangente es la recta que mejor aproxima a una curva en las cercanías del punto de tangencia*.

La argumentación planteada por esta primera actividad constituye lo que se denomina *un razonamiento plausible* (Polya,1954), ya que se trata de una demostración verosímil o convincente (probable) de que la recta tangente coincide con el segmento visualizado. Así, el proceso de acercamiento (*zoom*), posible gracias a los recursos visuales del applet Linealizador, permite mostrar al estudiante que, de todas las rectas que pasan por un punto dado de la curva, la que mejor aproxima a ésta en las cercanías del punto es la que tiene como pendiente la misma que el segmento visualizado y, tras un proceso de alejamiento, que se trata precisamente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

➤ *Actividad 2*

Dada una terna de rectas, se plantea la construcción de la función pendiente de la recta tangente, $m_t(x)$, considerando las tres posibilidades: una recta creciente ($m>0$), una recta decreciente ($m<0$) y una recta horizontal ($m=0$).

El objetivo principal de esta actividad es propiciar que el estudiante concluya que, cuando f es lineal, la determinación de la función $m_t(x)$ no requiere de la ayuda del software. Además, se busca que el alumno reflexione sobre el hecho de que la función $m_t(x)$ resulta ser constante en todos los casos, así como sobre la relación entre el signo de la pendiente y el comportamiento de la recta como creciente o decreciente.

➤ *Actividad 3*

En este caso el proceso linealizador se aplica a un conjunto de gráficas de funciones cuadráticas. Se presenta un conjunto de parábolas que permite al estudiante observar diversas situaciones en cuanto a concavidad y traslaciones (vertical y horizontal).

El propósito de esta actividad es que el alumno deduzca que, cuando las funciones analizadas son cuadráticas, la función $m_t(x)$ resulta lineal, y que ésta es creciente o decreciente como resultado de la concavidad de la parábola correspondiente. También se espera que deduzca los efectos de las traslaciones vertical y horizontal sobre la expresión analítica de la función $m_t(x)$.

Tanto en la actividad 2 como en la 3, se espera que el estudiante sea capaz de realizar por sí mismo la identificación analítica de la función f en cada caso.

➤ *Actividad 4*

Esta actividad propone al estudiante un proceso linealizador aplicado a las gráficas de dos polinomios: uno de grado 3 y otro de grado 4. Ambos polinomios se han seleccionado cuidadosamente para facilitar la identificación analítica de la función $m_t(x)$ correspondiente.

Lo que se persigue con esta actividad es que el estudiante concluya (tal vez apoyado en los resultados de las tres actividades anteriores) que, para polinomios de grados 3 y 4, las funciones $m_t(x)$ resultantes son polinomio de grados 2 y 3, respectivamente.

➤ *Actividad 5*

Para esta actividad didáctica se presenta una selección de gráficas de funciones trascendentes que se consideran esenciales en el estudio del Cálculo. Cabe hacer la

aclaración de que entre las gráficas seleccionadas no se incluye la de la función exponencial natural, pues, dada su importancia, se le considera como única función a analizar en la actividad siguiente.

El objetivo de la actividad 5 es que el alumno, además de identificar la función derivada de cada una de las funciones trascendentes seleccionadas, tenga un primer acercamiento, aunque mínimo, a la Regla de la Cadena y que éste, en su momento, pueda ser retomado como apoyo.

➤ *Actividad 6*

La observación de la linealidad local de la función exponencial natural se ha postergado para esta sexta actividad. De las gráficas seleccionadas para su análisis a lo largo de la secuencia, la de la función exponencial natural es la única que no se presta a que el estudiante lea, de manera precisa, la pendiente del segmento visualizado a partir de la cuadrícula de respaldo. Así, se pide al alumno que aproxime, lo mejor posible, el valor de la pendiente en cada caso, con la intención de que, al colocar los puntos determinados por la tabla sobre el plano cartesiano, observe cómo éstos se ubican sobre la gráfica de f , a diferencia de las actividades anteriores.

Un aspecto importante sobre el cual se pretende incidir a lo largo de las actividades de la 2 a la 6, es la identificación de los intervalos donde la gráfica de la función f es creciente o decreciente, y su relación con el signo de la pendiente de la recta tangente, lo que constituiría un primer contacto con los criterios de máximos y mínimos relativos.

➤ *Actividad 7*

Esta actividad es la última de la secuencia y en ella se analizan las gráficas de tres funciones no derivables en uno o más puntos. Para estas funciones la causa de la no derivabilidad puntual puede referirse a cambios abruptos en la curva o a la existencia de una recta tangente vertical.

Como puede apreciarse, el objetivo de esta actividad es esencialmente distinto al de las demás actividades didácticas, ya que busca poner al estudiante en contacto con la noción visual de *no derivabilidad en un punto*. Así, en un caso, el propósito es llevar al estudiante a concluir que la diferencia entre una curva suave y otra que presenta algún cambio abrupto en su comportamiento gráfico, radica en que sea posible o no visualizarla localmente como un segmento de recta único, mientras que, en el otro, se busca que el alumno identifique que la derivabilidad en un punto está relacionada con un valor real de la pendiente de la recta tangente en dicho punto.

En el desarrollo de este proyecto de tesis, se identifican, además del diseño e implementación de la secuencia didáctica, otras fases como las siguientes:

- ✓ Revisión bibliográfica
- ✓ Diseño e implementación de un instrumento de diagnóstico
- ✓ Puesta en escena
- ✓ Diseño e implementación de un instrumento de evaluación
- ✓ Organización y análisis de la información
- ✓ Reporte de resultados
- ✓ Versión actualizada de la secuencia de actividades didácticas

De estas etapas, a la fecha faltan por abordar las tres últimas; es decir, mientras que la revisión bibliográfica continúa, y así será a lo largo de todo el proyecto, tras la aplicación del instrumento de diagnóstico y la puesta en escena de la secuencia, con un grupo de primer ingreso a la carrera de Ingeniería Química de la Universidad de Sonora, al momento se ha avanzado hasta la implementación de un instrumento de evaluación, quedando pendiente el tratamiento de la información recabada.

4. Comentarios finales

Con este trabajo se pretende contribuir a enriquecer el significado del objeto *función derivada*, a través de un acercamiento alternativo al tratamiento vía límites. Este acercamiento supone el tránsito del estudiante a lo largo de una ruta procedimental que, desde la noción de linealidad local, promueve la emergencia del objeto *función derivada*, a través de la realización de una tarea matemática asistida por computadora, que se considera sencilla y amigable.

Por último, aunque el primer propósito es el de incidir positivamente sobre el significado de *función derivada*, se espera que, como consecuencia, los planteamientos aquí presentados contribuyan a enriquecer también el significado de *derivada* como objeto matemático, concebida ésta como la herramienta por excelencia asociada a la medición de la *variación* en los fenómenos del entorno propios de la ingeniería y, por tanto, como elemento esencial en el estudio del Cálculo.

5. Referencias

- [1] Bagert et al. (1999). *Guidelines for Software Engineering Education, Version 1.0.*, tech. report CMU/SEI-99-TR-032. Pittsburgh, PA: Carnegie Mellon Univ. Software Engineering Institute.
- [2] Bourque and Dupuis, eds.(2004) IEEE CS, Guide to the Software Engineering Body of Knowledge: 2004 Version. Consultado el 15 de octubre de 2007 en www.swebok.org.
- [3] Hislop et al. (2006). Resources for reconsidering software engineering offerings by computer science departments, *Journal of Computing Sciences in Colleges*, 21(6), pp. 251-260.
- [4] Laporte, C.Y., April, A., Renault, A. (2007). Applying ISO/IEC JTC 1/SC7 Software Engineering Standards in Very Small Enterprises, *Crosstalk, Journal of Defense Software Engineering*, February 2007, pp. 29-30.

Visualización dinámica en la enseñanza de la derivada

Eduardo Tellechea Armenta
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
etellech@gauss.mat.uson.mx

Nivel educativo: Superior

Resumen

En este trabajo se pretende motivar entre los profesores el uso de software dinámico que permita diseñar ambientes computacionales interactivos con alternativas visuales en la enseñanza de la derivada. Con esta propuesta, a partir de la interacción con las representaciones gráficas dinámicas, los alumnos desarrollarán habilidades de exploración y conjetura que les permitirá, encontrar las expresiones analíticas de las derivadas de las principales funciones del cálculo, enriqueciendo de esta manera la variedad de enfoques educativos que se derivan de atender la visualización de las funciones.

1. Introducción

Con el fin de promover un tratamiento alternativo del estudio de la derivada, partiremos sólo de su interpretación geométrica como la pendiente de la recta tangente, encontrada ésta como límite de pendientes de rectas secantes, y mostraremos que con el uso de software dinámico (Applet Descartes y Geogebra) es posible, a partir de la gráfica de la función, encontrar la expresión analítica para la derivada de las más importantes funciones del cálculo.

En la tercera sección presentamos un applet que traza la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado y, a partir de su intersección con el eje de las abscisas, descubriremos la derivada, tanto puntual como globalmente. En las secciones cuatro y cinco se obtiene la derivada de las funciones seno y coseno, a partir de su representación en el círculo trigonométrico. Es pertinente puntualizar que el acercamiento presentado en estas dos secciones se fundamenta en una serie de tratamientos en el registro geométrico (construcciones), lo que permite visualizar a la derivada desde una perspectiva diferente. Finalmente, en la sección seis, se construye un trazador de la función derivada que, desde su representación gráfica, permite reconocer la expresión analítica respectiva.

2. Contexto y fundamentos de la propuesta

El concepto de derivada se introduce usualmente en los libros de texto mediante una breve motivación gráfica, para pasar luego a su formulación algebraica. En dicha introducción gráfica se plantea el problema de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva en cualquier punto, como uno de los principales problemas del cálculo. Sin embargo, esta aproximación resulta insuficiente para establecer una base de significación gráfica en el estudiante, porque una vez presentado y definido, el resto del tema se desarrolla de manera algebraica.

El problema de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado, es un problema local y, como algunas investigaciones en educación matemática han mostrado, el

establecimiento de la relación general entre una función y su derivada no es cognitivamente un problema simple. La diferencia, tal como lo ha señalado Sfard (1992), estriba en concebir a la función como un proceso o como un objeto. Es conveniente destacar la importancia de introducir los conceptos matemáticos, no en términos estructurales, sino procedimentales y permitir al estudiante avanzar tanto como el software lo permita. Tal como Sfard lo ha planteado: *No debe exigirse una concepción estructural mientras que el estudiante pueda hacer bien las cosas sin ella.*

Gracias al surgimiento de lo que hoy se conoce como paquetes computacionales de geometría dinámica, es posible profundizar en las aproximaciones gráficas-numéricas a los conceptos matemáticos. Particularmente en el presente trabajo, se utiliza el Applet DESCARTES y GeoGebra, para proponer actividades de aprendizaje mediante construcciones gráficas-numéricas manipulables directamente en pantalla.

Las ideas expuestas aquí no pretenden sustituir el desarrollo analítico del tema sino, más bien, servir como soporte intuitivo a ese desarrollo.

Se presenta un acercamiento sobre la base de que un ambiente computacional diseñado para la enseñanza, debe permitir al estudiante la interactividad con las representaciones gráficas y numéricas y, como resultado de ello, detectar patrones de comportamiento y formular conjeturas sobre los objetos representados y sus características. Así, se considera que una primera aproximación gráfica a los conceptos matemáticos, puede ser útil para crear una base de significación más concreta, antes de examinar estos conceptos a un nivel más abstracto y, que la manipulación de las representaciones gráficas dinámicas puede ayudar a construir dicha base de significación.

3. La derivada a partir de consideraciones geométricas de la recta tangente

Con la ayuda del Applet Configurable DESCARTES, se construye un archivo en el que se muestra la gráfica de una función y la recta tangente en un punto, construida ésta como aproximación de secantes, como se muestra en la Figuras 1 y 2.

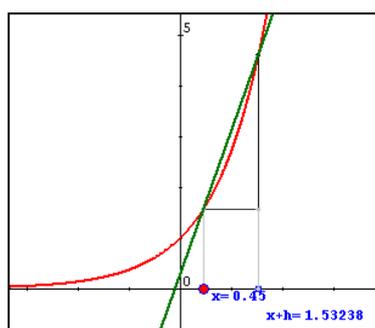


Figura 1

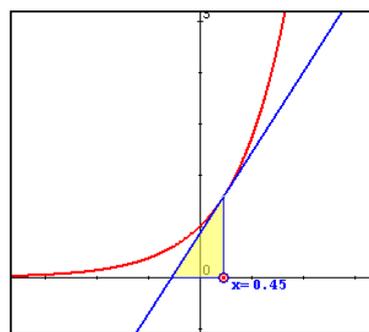


Figura 2

Se diseñan actividades escritas para que, mediante la interactividad con el software, el estudiante descubra, para cada función dada, una propiedad que cumplen todas las rectas tangentes, que le permitan determinar su pendiente, es decir la derivada de la función en el punto dado y, posteriormente, generalizarlo para obtener la expresión analítica de la función derivada.

Esta propuesta está basada en un archivo que permite modificar en pantalla, la expresión analítica de la función y el valor de x . Hechas estas modificaciones, se mostrarán en pantalla, los cambios gráficos y numéricos correspondientes.

Al abrir el Applet, se muestra la gráfica de la función f , y la recta secante que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$ (Figura 1). Hacemos $h = 0.000001$, de tal manera que la recta secante pueda considerarse como la recta tangente a la gráfica de f , en el punto $(x, f(x))$. (Figura 2). Localizamos la intersección de la recta tangente con el eje de las abscisas, y guiamos al alumno para que descubra la propiedad que tienen todas las tangentes y, con la ayuda del triángulo que se muestra en amarillo (Figura 2), calculamos la pendiente de la recta tangente, obteniendo así la derivada en el punto dado.

La actividad consiste en proporcionar al alumno un archivo como el de la Figura 3, en el que se muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y se le pide que interactúe con él, visualizando numéricamente la intersección de la recta tangente con el eje de las abscisas, con la ayuda del *zoom*. El Applet muestra en cada acercamiento, las marcas del eje x , en unidades, décimas, centésimas, etc. Por ejemplo para $x = 1.38$, visualizará la intersección en 0.69 y por lo tanto, mediante un sencillo cálculo numérico, encontrará que la pendiente de la tangente será $m = 2.76$. Una vez hechas estas exploraciones en algunos casos particulares, se le pide que anote sus datos en una tabla como la de la Figura 5, y que conjeture una expresión analítica para $f'(x)$.

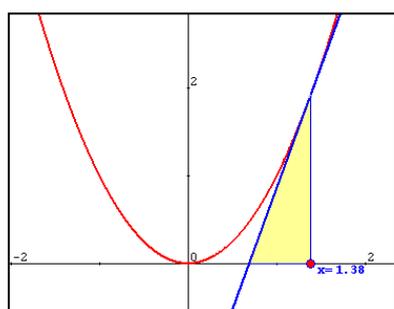


Figura 3

x	$f'(x)$
-1	-2
0	0
1	2
1.2	2.4
1.38	2.76
1.5	3
2	4

Tabla 1

Una vez analizados los casos particulares, el alumno descubrirá que la propiedad que cumplen todas las tangentes a la parábola, es que el corte se da en el punto medio del segmento Ox , visualizando de esta manera, la derivada puntual y la función derivada de la parábola, como la razón del cateto opuesto al cateto adyacente, en el triángulo de color amarillo.

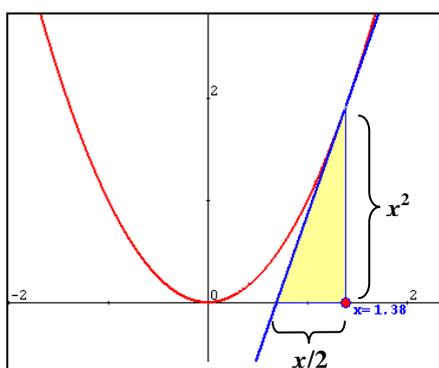


Figura 4

$$f'(x) = m = \frac{x^2 - 0}{x - x/2} = \frac{x^2}{x/2} = \frac{2x^2}{x} = 2x$$

Con una exploración similar, el alumno descubrirá la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$, analizando el corte de la recta tangente con el eje de las abscisas, para obtener así, como en el caso anterior, la función derivada: $f'(x) = m = \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{x^{1/2-1}}{2} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Finalmente, se le pide al estudiante que explore la derivada de otras funciones de la forma $f(x) = x^\alpha$ para algunos valores reales del exponente, como por ejemplo

$\alpha = 3, 4, 5, -1, -2, 1/3, 2/3, -1/2, \dots$ etc, conjeturando que: $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$

Asimismo, encontrará que para la función $f(x) = e^x$, la intersección de la recta tangente con el eje x se da una unidad a la izquierda del punto x , obteniéndose: $f'(x) = m = \frac{e^x}{1} = e^x$, es

decir $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

4. La derivada de funciones trigonométricas utilizando el Teorema de Pitágoras y la identidad trigonométrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

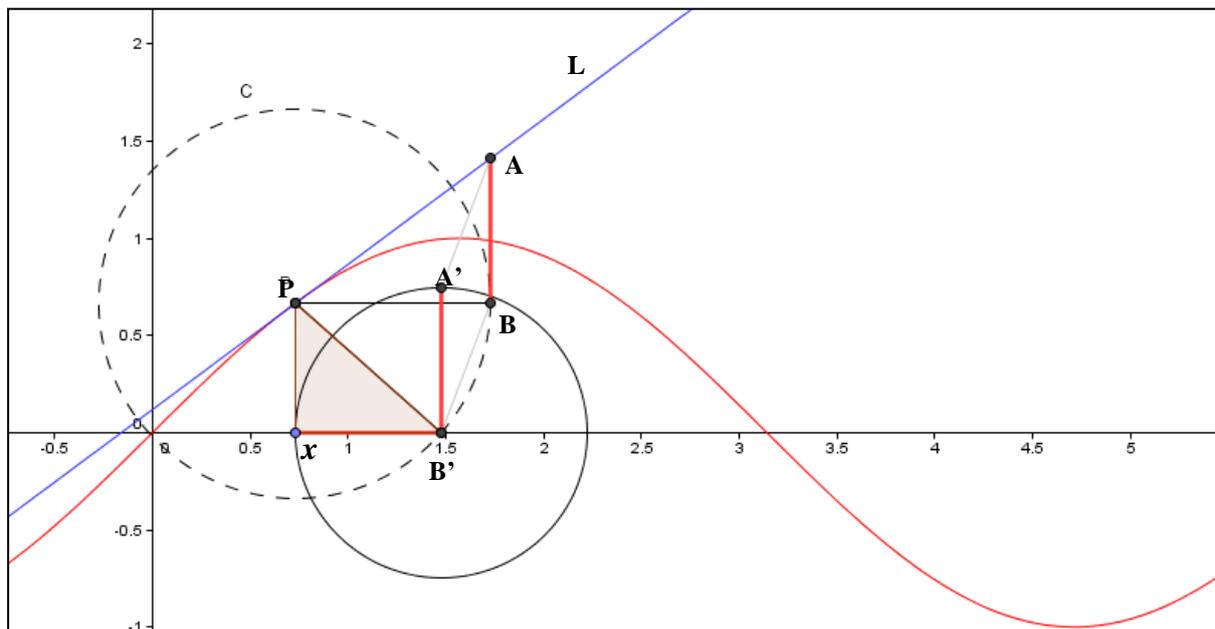


Figura 5

Con GeoGebra, graficamos $f(x) = \sin x$ y su recta tangente L , en el punto P de abscisa x . y hacemos la siguiente construcción para determinar la derivada de f :

- Trazamos el segmento horizontal PB de longitud 1
- Trazamos el segmento vertical AB , con A sobre la recta tangente.
- La longitud de AB representará gráficamente la pendiente de la recta tangente, es decir, la derivada de f en el punto x . Nota: cuando la recta tangente tenga pendiente negativa, $BA = -AB$

- d) El segmento AB se desplaza paralelamente a la intersección B' , del eje x con el círculo de radio 1 centrado en P , obteniéndose el segmento $A'B'$
- e) Trasladamos este segmento al eje de las abscisas a partir de un círculo con centro en B'
- f) De la interacción con el software, se observa que el extremo A' cae SIEMPRE sobre el punto x .
- g) Como $Px = \sin x$ y $PB' = 1$, por el Teorema de Pitágoras, en el triángulo sombreado tendremos: $\sin^2 x + (xB')^2 = 1$ y de la identidad trigonométrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obtenemos:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

5. La derivada de funciones trigonométricas utilizando el Círculo Trigonométrico

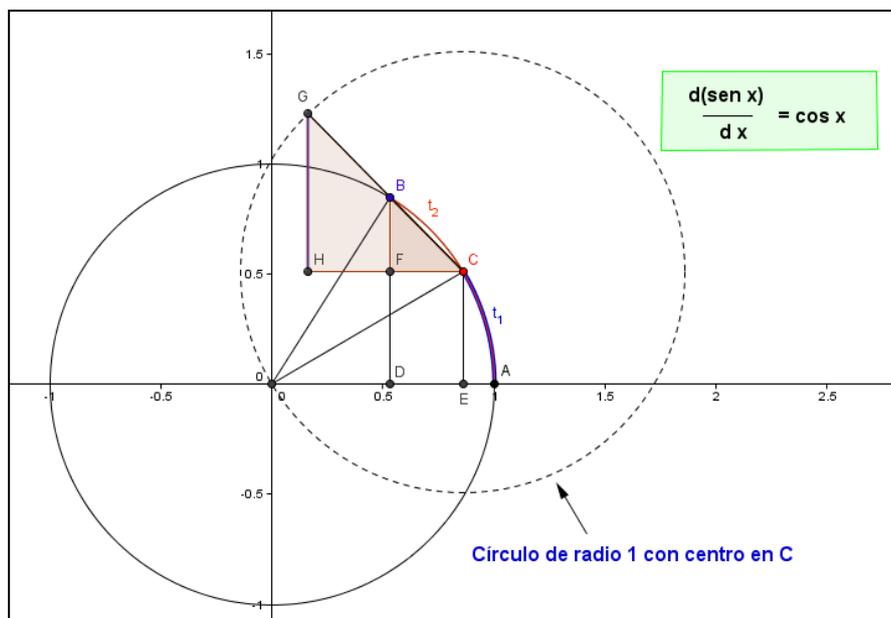


Figura 6

De manera análoga al caso anterior, hacemos uso de las definiciones de las funciones trigonométricas referidas al círculo unitario. Con GeoGebra hacemos la siguiente construcción:

- Trazamos un círculo de radio 1 con centro en el origen (círculo trigonométrico)
- El segmento CE representa el seno del arco t_1 .
- El segmento BD representa el seno del arco t_2 .
- Con centro en C , trazamos un círculo de radio 1 (círculo punteado)
- $$\frac{\sin t_2 - \sin t_1}{t_2 - t_1} \cong \frac{BF}{BC} = \frac{GH}{GC} = GH$$
- De la interacción con el software observaremos que si acercamos t_2 a t_1 , es decir, en el límite, la recta que contiene al segmento GC es la recta tangente y en consecuencia

será perpendicular al radio OC , por lo tanto los triángulos OCE y GCH son semejantes.

g) De la semejanza de los triángulos, tenemos que, en el límite, $GH = OE$.

h) En el círculo trigonométrico, por definición, $OE = \cos t_1$.

i) En consecuencia, $f'(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\sin t_2 - \sin t_1}{t_2 - t_1} = OE = \cos t_1$

Así pues de manera gráfica hemos establecido que $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

5. Referencias

- [1] Bagert et al. (1999). *Guidelines for Software Engineering Education, Version 1.0.*, tech. report CMU/SEI-99-TR-032. Pittsburgh, PA: Carnegie Mellon Univ. Software Engineering Institute.
- [2] Bourque and Dupuis, eds.(2004) IEEE CS, Guide to the Software Engineering Body of Knowledge: 2004 Version. Consultado el 15 de octubre de 2007 en www.swebok.org.
- [3] Hislop et al. (2006). Resources for reconsidering software engineering offerings by computer science departments, *Journal of Computing Sciences in Colleges*, 21(6), pp. 251-260.
- [4] Laporte, C.Y., April, A., Renault, A. (2007). Applying ISO/IEC JTC 1/SC7 Software Engineering Standards in Very Small Enterprises, *Crosstalk, Journal of Defense Software Engineering*, February 2007, pp. 29-30.

Diseño de actividades introductorias para el desarrollo de la noción de muestreo

Eleazar Silvestre Castro, Irma Nancy Larios Rodríguez, Manuel Alfredo Urrea Bernal
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
fel_silvester@hotmail.com

Nivel educativo: Superior

Resumen

Se presenta el primer acercamiento al tema a desarrollar como trabajo de tesis para obtener el grado de maestría en el Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la División de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Sonora. Este reporte particularmente se centra en la ubicación y la justificación de la problemática que se aborda, así mismo se presenta una de las actividades con la que se tiene planeado introducir el tema de muestreo del programa de Estadística II (Estadística Inferencial) del área Económico Administrativo de la Universidad de Sonora.

1. Introducción

El trabajo se enmarca en el desarrollo de un tema del curso de Estadística II del área económico administrativo, mismo que está diseñado en el marco de los Lineamientos Generales para el Nuevo Modelo Curricular de la Universidad de Sonora [1]. Dada la naturaleza del trabajo que se va a desarrollar nos parece importante señalar algunos de los objetivos de dicho modelo curricular:

1. Fomentar en los estudiantes el descubrimiento y construcción de conocimiento, en oposición a la tendencia predominante de transferencia del conocimiento.
2. Centrar los procesos de enseñanza y aprendizaje en los estudiantes y no en los profesores.
3. Introducir el trabajo en equipo entre la planta docente y los estudiantes.
4. Promover la flexibilidad, movilidad y vinculación en el desarrollo del currículo.
5. Incorporar el uso nuevas tecnologías en la enseñanza.

Esta estructura curricular exige una forma distinta de trabajar en el aula de cómo se ha venido haciendo en esta institución. Particularmente, en el caso de los cursos de estadística, se ha visto que la enseñanza tradicional no impacta de manera importante en el desarrollo de conocimientos significativos para los estudiantes, ya que habitualmente se enseñan técnicas aisladas que tratan de unirse al final con algún tipo de “aplicación”; se enseñan primeramente teorías y fórmulas y después algunos ejercicios; se enfatiza en calcular una respuesta correcta, sin entender para qué se está realizando ese cálculo.

2. La propuesta

Primeramente señalaremos que el trabajo de tesis que se pretende realizar corresponde a una tesis de desarrollo docente, con la intención de diseñar una serie de secuencias de actividades didácticas para el tema de muestreo del programa de Estadística II (Estadística Inferencial) del Área Económico Administrativo de la Universidad de Sonora.

Un punto de partida para este trabajo es considerar que el proceso de aprendizaje que realiza el estudiante se genera a partir de las situaciones de aprendizaje con las cuales interacciona,

utilizando su propia experiencia, además que las situaciones de aprendizaje le serán significativas en la medida que le sean atractivas, cubran alguna necesidad y/o se utilicen entornos que les sean familiares e interesantes.

En la tesis se van a desarrollar secuencias didácticas para los siguientes aspectos:

- a) Conceptos básicos: espacio muestra, población objetivo, variable y muestra.
- b) Tamaño de muestra.
- c) Tipos de muestreo: aleatorio y no aleatorio.
- d) Implicaciones del muestreo en la aplicación de parámetros estadísticos.

Sin embargo, hasta este momento sólo se tienen desarrolladas actividades introductorias para los conceptos básicos, a manera de ejemplo se presentará una de ellas en un apartado posterior.

3. Justificación

La estadística es una ciencia que ha tomado mucha importancia en el último siglo, su desarrollo y aplicación ha permitido un avance gigantesco a la sociedad al convertirse en el medio matemático para modelar el comportamiento de información de ciertos fenómenos. Se ha convertido en el conjunto de herramientas que son base para analizar datos de un diseño experimental, donde la finalidad de dichos análisis y tratamiento de información es simple y sencillamente una mejor toma de decisiones. Asimismo, nos encontramos en una sociedad que está expuesta por diferentes medios de comunicación a un gran cúmulo de información que no necesariamente se presenta de manera accesible y digerible, además en muchos casos, estamos en la necesidad de “crear” nuestra propia información. Requerimos entonces del conjunto de conocimientos que nos permitan entender, interpretar, analizar y crear de manera objetiva esta información: por ello requerimos de una base de conocimientos estadísticos. En este sentido, la incorporación de materias de estadística en los diferentes niveles educativos toma aún mayor importancia.

Se considera entonces, que en este momento es válido preguntarse: ¿Qué se persigue exactamente con la enseñanza de la estadística? ¿Qué se espera que realice el individuo que aprende estos conocimientos? ¿Cómo puede ayudar esto en la formación del individuo? Las instituciones educativas, por lo general, no pretenden formar estudiantes que sean expertos en estadística, pero tampoco desea capacitarlos para realizar cálculos y procedimientos sin ningún significado en los contextos que se realizan. Se desea incidir en aquellos elementos que serán realmente útiles, dentro de las posibilidades, en la vida profesional de cualquier individuo. Estos elementos conforman la base de conocimientos y capacidades estadísticas necesarias para desarrollar lo que se considera una cultura estadística, esto es: “a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante.” [3].

Batanero [2] propone los siguientes elementos como aquellos que se mantienen como inalterables y preparan para la autoformación futura:

- Conocimientos y destrezas. Se desea que el estudiante sea capaz de diseñar investigaciones, recoger datos de observación y representarlos, diferenciar entre datos categóricos y numéricos, usar medidas de tendencia central, seleccionar las mejores formas de representación para los datos y poder hacer conclusiones en base a la evidencia.

- Razonamiento estadístico. Dividido en 5 cualidades:
 - Reconocer la necesidad de los datos.
 - Transnumeración.
 - Percepción de la variación.
 - Razonamiento con modelos estadísticos.
 - Integración de la estadística y el contexto.
- Intuiciones. Que el individuo no se deje engañar por las intuiciones que posea sobre el azar y que pueda diferenciar aquellas que sean correctas o no aplicando el razonamiento estadístico para la toma de decisiones.
- Actitudes. La suma de emociones, sentimientos, valores y actitudes pueden tener un impacto en el proceso de aprendizaje del objeto de estudio e influir de manera considerable en el individuo.

Un vistazo rápido a textos tradicionales de estadística, según el área, permite ver que las situaciones utilizadas obedecen ciertamente a contextos de la vida diaria, es decir, situaciones cuyos escenarios pueden resultar bastante familiares al estudiante. Sin embargo, el hecho de utilizar situaciones ambientadas en contextos “tangibles”, se perfila en realidad más como un recurso de motivación y ejemplificación; mientras que el proceso de enseñanza de los conceptos matemáticos queda como algo tradicional. Por lo regular, se deja de lado el contexto para declarar definiciones, conceptos, teoremas, etc. y después quizás regresar a lo planteado inicialmente para aplicar este nuevo conocimiento adquirido. Este proceso nos hace dudar de su eficacia en términos de aprendizaje. Es necesario considerar aquellas actividades que el profesor lleva a cabo dentro y fuera del aula para lograr que el aprendizaje se cumpla, es decir, la planeación didáctica a implementar.

Tomando en consideración lo que se desea formar y promover en el estudiante, la presente propuesta toma como base la utilización de situaciones que no sólo estén en contextos tangibles y su intención sea la de ambientar, sino que éstas sean el medio donde se plantean problemas que el estudiante debe resolver y a través de este proceso, construya sus conocimientos estadísticos. Por medio de cuestionamientos y reflexiones planteadas, promovidas por el profesor, se busca que el estudiante proponga y ponga en práctica estrategias para encontrar soluciones y valorarlas a través del análisis de los resultados obtenidos.

En el contexto de todo lo anteriormente señalado y por necesidad de acotar el tema de tesis, es que se eligió uno de los conceptos fundamentales de la estadística inferencial, el tema de muestreo. Es el muestreo quien proporciona la representatividad necesaria para inferir sobre toda una población, la correcta selección de muestras nos brinda la posibilidad de trabajar con conjuntos de datos no grandes que pueden representar otros conjuntos de mayor tamaño o inclusive de poblaciones “infinitas”. Los elementos que giran alrededor del muestreo son considerables, como lo pueden ser procesos aleatorios y probabilísticos, de proporción, niveles de confianza, estadísticos, etc. La conjugación de dichos elementos deriva en las diferentes técnicas de muestreo, divididos en muestreo aleatorio y no aleatorio, que a su vez se dividen en el muestreo estratificado, sistemático, por conglomerados, a conveniencia, etc. Escoger el método apropiado para realizar muestras implica una comprensión de los elementos mencionados, así como conceptos básicos de estadística, como pueden ser el espacio muestral, población objetivo, variable estadística, etc. Alrededor de ellos se desarrollarán las secuencias didácticas.

4. Actividad didáctica

En este apartado se presenta, a manera de ejemplo, una actividad que forma parte de una secuencia de actividades en las que se aborda el tema del muestreo. Es una primera actividad de carácter introductorio y de arranque, en la que se tratan temas iniciales y básicos de un curso de estadística inferencial. En esta actividad se plantean situaciones problemáticas cuya finalidad es ser uno de los principales recursos didácticos.

Actividad de introducción

Objetivos de la actividad: que el estudiante:

- 1) Reflexione acerca del papel que desempeña la utilización de instrumentos para recopilar información de una población, particularmente las encuestas.
- 2) Identifique en las situaciones planteadas los siguientes conceptos: El universo, la población objetivo, la variable estadística.
- 3) Reconozca la necesidad de realizar un muestreo.

Estrategia didáctica:

Trabajo individual en hojas de trabajo, discusión de respuestas en equipo y discusión grupal con la dirección del profesor.

Situación 1. Estudio de mercado.

La empresa Coca Cola desea lanzar al mercado una nueva bebida y ha seleccionado la ciudad de Hermosillo para la etapa inicial de lanzamiento. Antes de comenzar la campaña de lanzamiento, la empresa necesita información acerca de la competencia en el mercado de esta ciudad. Contesta lo siguiente

- a) ¿De qué manera se podría obtener esta información?
- b) Menciona las ventajas y dificultades que se presentarían en tu propuesta. *¹
- c) Después de haber comparado tu propuesta con la de tus compañeros, ¿cuál crees que sea la propuesta más apropiada? Justifica tu respuesta y comenta con tus compañeros. *²

Si se optara por utilizar una encuesta para recabar la información que se necesita:

- d) ¿Qué preguntas específicas harías para conocer la información acerca de la competencia?
- e) ¿Qué características consideras deben tener los individuos que te darían información relevante respecto a la problemática de interés?
- f) ¿Qué características consideras no serían de interés conocer?
- g) Describe el perfil de la persona que resulta de interés para el estudio que se pretende realizar.
- h) ¿Cuáles de estas características se pueden “medir”? ¿cuáles no? Explica en cada caso. *³

De acuerdo al último Censo de Población y Vivienda, realizado en 2005, la ciudad de Hermosillo cuenta con 641,791 individuos.

- i) ¿Cuál crees que sea la proporción de individuos que poseen las características que te interesan?

Si los individuos que poseen las características de interés son 398,620.

- j) ¿Será posible preguntar lo que interesa a cada uno de estos individuos?
- k) ¿Qué proporción de esta población consideras necesaria encuestar? Justifica tu respuesta
- l) Realiza diferentes propuestas de cómo se podrían escoger los individuos.
- m) ¿Cuál crees que sea la mejor propuesta o método de selección? Justifica tu respuesta. *⁴

*¹ Se abre un espacio para que los estudiantes discutan las respuestas de las preguntas anteriores en equipo, de manera que puedan intercambiar ideas y enriquecer las propias.

*² Se espera que los estudiantes propongan diferentes formas de recopilar información, donde uno de los instrumentos sea la utilización de encuestas. Es necesario consensar de manera grupal que este es el camino más conveniente, aclarando solo si es necesario, que el contexto brinda elementos suficientes para llevar esto a cabo.

*³ Se procede de nuevo a comparar respuestas en equipos para pasar a una discusión grupal y llegar a un acuerdo donde se establezcan las características de interés y el por qué de éstas.

*⁴ En esta última intervención, se realiza un análisis de las propuestas de manera grupal, haciendo que los estudiantes expliquen y justifiquen las respuestas de las últimas preguntas. La intención es dejar abiertas las propuestas y no clasificarlas por correctas e incorrectas, de tal forma que quede pendiente la validación de las mismas por parte del profesor.

En la siguiente situación se realiza un cambio de contexto donde se provee de información acerca del instrumento de medición utilizado. Se cambia también el registro de representación en el cual se brinda la información.

Situación 2. Instalaciones sanitarias.

La Secretaría de Desarrollo Social (SEDESOL) desea conocer el estado de las instalaciones sanitarias de las escuelas públicas de nivel básico (preescolar, primaria y secundaria) en el municipio de Cajeme. Para realizar esto, se aplicará una encuesta que contiene las siguientes preguntas.

1. Nombre de la escuela _____
2. Tipo de escuela _____ (preescolar general, preescolar indígena, primaria general, primaria indígena, secundaria comunitaria, secundaria general, secundaria técnica y telesecundaria)
3. Número de alumnos de la escuela _____
4. Número de bebederos _____
5. Estado de los bebederos _____ (excelente, bueno, regular, malo y pésimo)
6. Número de baños _____
7. Estado de los baños _____ (excelente, bueno, regular, malo y pésimo)
8. Problemas de los baños _____ (texto abierto)

Contesta lo siguiente:

- a) ¿Qué diferencias o similitudes encuentras en las respuestas a las preguntas anteriores?
- b) ¿Cuáles de ellas se pueden “medir” y cuáles no? Justifica tu respuesta.
- c) Propón otras preguntas cuyas respuestas puedan ser “medidas” y otras que no lo sean.

*¹

Debido a los limitados recursos que posee la institución, se ha decidido levantar información sólo en algunas de las escuelas mencionadas. SEDESOL cuenta con la información que se proporciona en la tabla 1 acerca de las escuelas en el municipio de Cajeme.

- a) ¿Cuáles localidades tomarías en cuenta para seleccionar escuelas?, ¿cuáles no?
- b) ¿Qué proporción sería este número del total de escuelas en el municipio?
- c) Para la localidad de Ciudad Obregón, ¿cuántos preescolares, primarias y secundarias crees que sea conveniente seleccionar? Justifica tu respuesta.
- d) Para la localidad Pueblo Yaqui, ¿cuántas primarias será conveniente seleccionar? *²

*¹ Se pretende hacer énfasis en el tipo de preguntas que se realizan en la encuesta para continuar tratando el concepto de variable estadística, se puede retomar rápidamente las

preguntas planteadas en la situación 1. También se espera consensar características de interés como refuerzo de la situación anterior.

*² Se recomienda que los alumnos justifiquen el por qué de las respuestas de este segundo bloque, haciendo énfasis en el número de escuelas por localidad. Se propone también que el estudiante proponga otro criterio para seleccionar escuelas, diferente al que haya planteado.

Tabla1

Municipio	Localidad	Número de escuelas	Tipo de escuela		
			Preescolar	Primaria	Secundaria
Cajeme	Ciudad Obregón	59	4	39	16
Cajeme	Cuauhtémoc	3	1	2	0
Cajeme	Cócorit	2	1	1	0
Cajeme	Colonia Allende (El Dieciocho)	2	2	0	0
Cajeme	Esperanza	9	2	5	2
Cajeme	Francisco Villa	3	2	1	0
Cajeme	Los Hornos	4	1	3	0
Cajeme	Marte R. Gómez (Tobarito)	1	1	0	0
Cajeme	Mora Villalobos (Campo 29)	1	1	0	0
Cajeme	Pueblo Yaqui	12	3	7	2
Cajeme	El Olvido	1	1	0	0

5. Conclusiones

Como se precisó al inicio, lo que aquí se presenta es el primer acercamiento al tema de tesis, de tal forma que más que establecer conclusiones en este apartado, se señalarán algunas acciones que se calendarizaron para el semestre 2010-1 y así lograr avanzar en la concreción del trabajo. Primeramente, se están realizando lecturas para poder precisar a la brevedad un marco teórico pertinente, ésta es una de las acciones prioritarias para poder seguir desarrollando las actividades didácticas, se realizará un pilotaje en dos grupos del curso de Estadística II con las actividades que hasta el momento se tienen diseñadas, se realizarán entrevistas a profesores que imparten la materia para conocer las dificultades que a su parecer tienen los estudiantes en torno al tema seleccionado y se continuará con el diseño de las secuencias de actividades didácticas de acuerdo a los contenidos señalados en la propuesta e incorporando tecnología.

6. Referencias

- [1] Colegio Académico de la Universidad de Sonora, (2003). *Lineamientos Generales para un Modelo Curricular en la Universidad de Sonora*. Gaceta Unison (Edición Especial)..
- [2] Batanero, C., (2002). Los retos de de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la estadística*. Conferencia inaugural.
- [3] Gal, I., (2002). *Adult's statistical literacy*. Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*.

Argumentos utilizados por estudiantes de nivel medio superior y superior, y consideraciones en su desarrollo hacia la formalidad

Mario Alberto Quiñonez Ayala, Jorge Ruperto Vargas Castro
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
maqa_86@hotmail.com

Nivel educativo: Medio Superior y Superior

Resumen

Estamos presentando la descripción teórica y metodológica de un proyecto de investigación cuyo principal objetivo es el estudio y análisis de los tipos de argumentos utilizados por estudiantes de últimos semestres de nivel medio superior, contrastándolos con los realizados por estudiantes de nivel superior, seleccionando a representantes de los distintos niveles educativos ya mencionados, con una orientación matemática. La investigación pretende generalizar las observaciones con el fin de tomarlas como punto de partida en el diseño de actividades que promuevan el avance gradual de las argumentaciones de los alumnos hacia las demostraciones formales, propias de la disciplina Matemática.

1. Introducción

Entre la comunidad docente es innegable la importancia de la *demostración matemática* dentro del trabajo en el aula y, aunque la gran mayoría destaca su trascendencia en la formación del estudiante, generalmente se le asigna un trabajo implícito o superficial, al limitarse a desarrollar hábitos en la forma de actuar durante la actividad matemática (descuidando los distintos papeles que desempeña dentro del salón de clases). Las argumentaciones en el aula, en general, son utilizadas para validar o explicar afirmaciones utilizadas durante la resolución de problemas, demeritando su uso como medio para comunicar los descubrimientos matemáticos entre los involucrados (maestro-alumno o, de mayor relevancia en la evaluación del aprendizaje, alumno-alumno y alumno-maestro) y descuidando, además, el uso sistemático asumido en la disciplina desde la influencia de Euclides en la organización matemática.

El interés del presente trabajo es detectar la influencia de la metodología mencionada anteriormente, asumida por los profesores de manera habitual, mediante la identificación del tipo de argumentaciones utilizados por estudiantes de preparatoria, contrastándolos con los usados por alumnos de nivel profesional (de los primeros semestres, para evitar ventajas). Al margen de la influencia del trabajo en el aula, un objetivo secundario es generalizar lo más posible los resultados, para tomar éste diagnóstico como punto de partida, ideal, en el diseño de actividades que fomenten el avance gradual hacia demostraciones rigurosas, propias de la matemática formal.

La estrategia a utilizar consiste en el diseño e implementación de actividades donde el proceso de exploración-conjetura-demostración tome un rol significativo y, además, utilizar las categorías de demostración propuestas por Rodríguez (2006).

2. Planteamiento del problema, preguntas de investigación y objetivos

El asignar un papel protagónico a la argumentación en el quehacer matemático escolar (en particular a la demostración matemática y sus características) es indispensable en la formación de los estudiantes y, en teoría, los profesores están conscientes de dicha trascendencia, no obstante, descuidan el tratamiento del tema dentro de su práctica profesional, según diversas investigaciones mencionadas en Crespo (2007, p.18). Es en este punto donde comienza nuestro proyecto, con la intención de clarificar el efecto del tratamiento implícito de la demostración matemática en el aula, mediante el análisis del tipo de argumentaciones usadas por estudiantes entrenados bajo ésta metodología de enseñanza. En un intento de objetivar los resultados hemos decidido contrastar los argumentos usados por estudiantes que se encuentran en la transición preparatoria-universidad, y además cursando alguna especialidad matemática (tentativamente con alumnos de la especialidad Físico-Matemático de Cobach y alumnos de la Licenciatura en Matemáticas de los primeros semestres), pensando considerar algún grado de exigencia que los estudiantes asuman, para sus pruebas, en cada nivel escolar. Dicho esto, las preguntas que guiarán la investigación son las siguientes:

- ¿Qué tipo de argumentos plantean los estudiantes para validar sus conjeturas? ¿Realmente consideran (ellos) que son contundentes?
- ¿Es posible generalizar los tipos de argumentos utilizados (diferenciando el nivel medio superior y superior)? ¿Bajo que condiciones?
- ¿Qué características comunes son identificables en los argumentos de estudiantes?
- ¿Cuál es la axiomática en la que basan sus argumentos? Específicamente ¿En que medida están influenciados por sus percepciones?

Dadas las interrogantes que nos interesan, es necesario diseñar un instrumento suficientemente potente para capturar de manera fiel los argumentos de los estudiantes (tanto explícitos como implícitos), razón por la cual es conveniente la realización periódica de pilotajes para evaluarlo. A la par de la retroalimentación del instrumento de captura de información, destacamos los siguientes objetivos en la investigación:

- Hacer un diagnóstico sobre el tipo y “nivel” de razonamiento que muestran los estudiantes ante el desarrollo de pruebas (sin influencia del profesor).
- Analizar las argumentaciones de los estudiantes e identificar las generalmente utilizadas y admitidas.
- Usar el reconocimiento del tipo de argumentación utilizado por los estudiantes como punto de partida en el diseño de actividades que permitan un avance gradual hacia la demostración matemática, reconocida en la disciplina y con los lineamientos del razonamiento formal característicos.

3. Marco Teórico

Las corrientes teóricas que podemos destacar son: El papel y las funciones de la demostración propuestas por de Villiers (1993) citada por Crespo (2007, p.62-63) y las aportaciones de los esquemas de demostración, y el análisis de éstos, hecho por Rodríguez (2006). De Villiers considera distintas funciones de la demostración en el salón de clases, al no limitarla a procesos de *verificación*, asignada dentro de la disciplina matemática por sus lineamientos lógicos, o como metodología de *explicación* de resultados matemáticos, atribuida por los profesores; considera, además, la importancia de las demostraciones en el *descubrimiento* de nuevos resultados en matemáticas (construidos por el estudiante), la *comunicación* de éstos entre los involucrados en la actividad escolar (maestro-alumno o, de mayor relevancia para nuestro estudio, alumno-alumno y alumno-maestro) y la *organización sistemática* de los resultados (propios de la influencia de Euclides).

Las consideraciones que pretendemos enfatizar en la actividad ha implementar se realizan con el afán de rescatar los papeles relacionados al *descubrimiento* y *comunicación* de resultados matemáticos, intentando además identificar la *organización sistemática*, explícita o implícita, utilizada por los estudiantes, permitiéndonos ver su concepción del conocimiento matemático (mediante el reconocimiento de los axiomas y lemas usados en la resolución de problemas). Cabe aclarar que no pretendemos omitir los papeles de verificación y explicación, usualmente trabajados, tan solo no demeritar el resto de funciones complementarias de la *demostración matemática* en la formación escolar.

En cuanto al uso de las categorías de demostración presentado por Rodríguez (2006), han sido seleccionados por los diversos matices que se le asigna a las de tipo empírico y deductivo, lo fino de estas clasificaciones nos permitirán precisar los tipos de argumentos usados por los estudiantes bajo la premisa, a priori, del salto intuitivo–racional que representa el nivel preparatorio, lo que implica esperar de ellos respuestas de éste estilo. A modo de síntesis, es conveniente mencionar, a grandes rasgos, la clasificación de las categorías de demostración que se mencionan.

En una primera instancia se diferencian las demostraciones influenciadas por agentes externos a la propia persona y aquellos que son gestados en el interior del sujeto, en convicción externa y convicción propia respectivamente. La categoría de convicción externa podemos clasificarla a su vez, dependiendo del origen la influencia, en:

<i>Rituales</i>	Cuando la fuente de convicción se basa en una cierta apariencia de los argumentos (plausibles).
<i>Simbólicas</i>	Cuando la convicción es fruto de manipulación simbólica de diversas expresiones.
<i>Autoritarias</i>	Cuando la creencia se basa en la autoridad asignada a otra persona, un libro de texto o cualquier otro elemento que represente un conocimiento superior.

Los argumentos de convicción propia, a su vez, se clasifican en *empíricos* o *deductivos*. Entre los de tipo empírico podemos diferenciarlas, dependiendo de la fuente de convicción, en: las que provienen de la comprobación en ejemplos o generalización de comprobaciones (*inductiva*) o las basadas en experiencias físicas (*perceptivas*). Otros criterios para clasificarlas, son según la forma de escoger los ejemplos representativos (*Empirismo naif*, *Experimento crucial*, *Ejemplo genérico* y *Exhaustivo*) o el grado de abstracción involucrado (*Pura* o *Con inferencia*), ilustrado en la siguiente tabla.

Según la forma de escoger los ejemplos

Empirismo naif	Cuando la conjetura se verifica en algunos ejemplos seleccionados al azar y sin un criterio específico.
Experimento crucial	Si se verifica en un ejemplo escogido de manera que sea “lo menos particular posible”.
Ejemplo genérico	Si se verifica en un ejemplo al que se le da el carácter de representante de su clase (genérico).
Exhaustivo	Si la conjetura hecha se verifica en todos los casos posibles (aplicable únicamente en conjuntos finitos).

Según el grado de abstracción

Pura	Si la justificación consiste en realizar comprobaciones empíricas de que la propiedad se cumple.
Con inferencia	Cuando, a pesar de seguir basándose en ejemplos, se realizan razonamientos más allá de las comprobaciones empíricas, como el uso de propiedades aceptadas o relaciones entre elementos matemáticos del ejemplo.

Las argumentaciones deductivas son fruto de una argumentación lógico-deductiva y, de modo similar, se puede realizar con base en dos aspectos: el uso o no de ejemplos (*Experimento mental* o *Formal*) y el tipo de razonamiento utilizado (*Transformativa* o *Axiomática*). Ilustrado en la siguiente tabla:

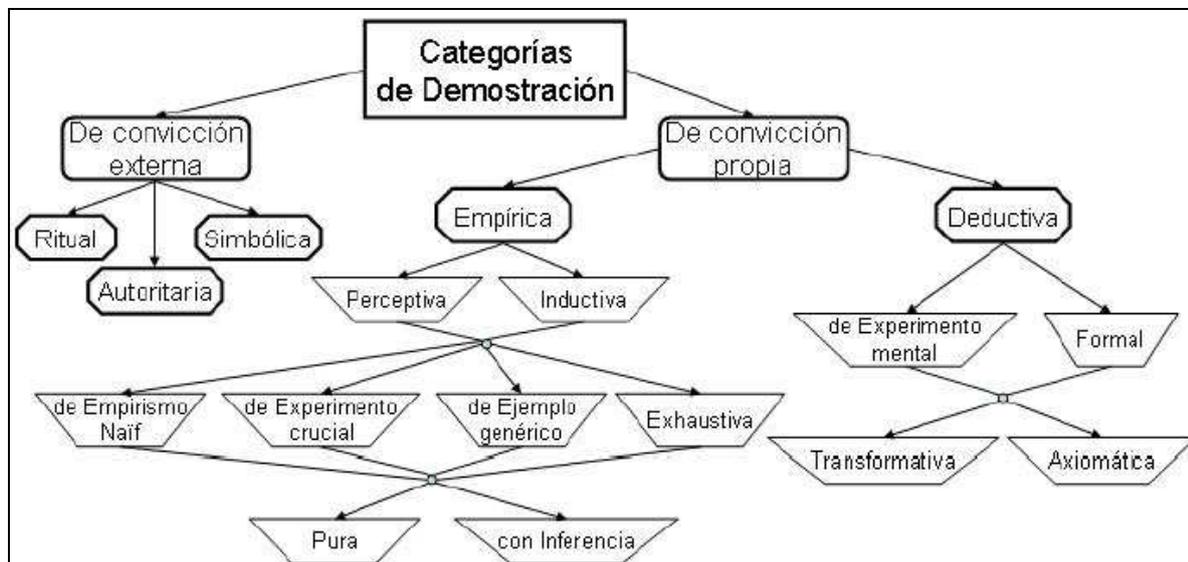
Según el uso o no de ejemplos

Experimento mental	Si, aún siendo deductiva y abstracta, está organizada con la ayuda de ejemplos.
Formal	Si la demostración está basada sin la ayuda de ejemplos.

Según el tipo de razonamiento involucrado

Transformativa	Si está basada en operaciones mentales que producen una transformación del problema en otro equivalente.
Axiomática	Si, para demostrar la tesis, se parte de los datos del problema, términos definidos y axiomas que se organizan en una cadena deductiva.

Como apoyo al lector, y para ilustrar las relaciones entre las categorías, se presenta el esquema que aparece en Rodríguez (2006, pp.26).



Dado que la naturaleza de las clasificaciones se basa en aspectos independientes, podemos catalogar a las demostraciones empíricas en *inductiva de experimento crucial con inferencia* o una demostración deductiva en *experimento mental transformativa*.

Otra de las características se plantean en investigaciones previas, con el uso de la tipología presentada, es que los alumnos no poseen una determinada categoría, sino que razonan influenciados por varias de ellos y utilizan uno u otro en función de si les pide que hagan una demostración o , simplemente, entender una que se les propone. Basados en la variedad de

categorías a considerar en cada estudiante, es conveniente definir modalidades de los esquemas de demostración según el papel que desempeñan, proponiéndose los siguientes:

- Esquema utilizado: Es el utilizado por el estudiante para resolver un problema.
- Esquema aceptado: Si un razonamiento presentado es aceptado como demostración.
- Esquema adherido: Si el estudiante, además de aceptar la demostración presentada, rechaza explícitamente las anteriores.
- Esquema declarado: Cuando un estudiante expone su interpretación de lo que significa demostrar.

Como última herramienta de análisis, pensando en el proceso de exploración-conjetura-demostración, es conveniente aclarar los lineamientos para analizar los distintos momentos por los que transita un estudiante durante la resolución de problemas, o demostración de teoremas, considerando la observación de Marrades y Gutiérrez (2000) citada en Rodríguez (2006, p.27-28):

“Las diferentes clasificaciones de demostraciones descritas...asumen que los estudiantes trabajan de una forma lineal y coherente desde el principio hasta el final de la solución del problema. Sin embargo, la realidad es, en muchos casos, diferente. Normalmente, muchos estudiantes comienzan realizando comprobaciones empíricas y, cuando han entendido el problema y la manera de demostrar la conjetura, continúan escribiendo una justificación deductiva. También es habitual realizar varios saltos entre métodos empíricos y deductivos durante la resolución de un problema.”

La única particularidad en la que diferimos es la **“justificación deductiva”** a la que se hace alusión, ya que es posible que los estudiantes, sujetos de nuestro trabajo, no la consideren necesaria para la veracidad de sus afirmaciones. Al margen de la aclaración se declaran dos posibles saltos en el proceso exploración-conjetura-demostración, como herramientas de análisis del estadio en la resolución del problema, dependiendo del interés que persiguen y son:

- Fase ascendente: Actividad que ayuda a entender el problema, generar conjeturas y verificarlas.
- Fase descendente: Actividad encaminada a construir una argumentación contundente, desde la perspectiva del estudiante, sobre la conjetura elaborada

Relacionado con la aclaración anterior, en el trabajo de Rodríguez (2006), se habla de fase descendente cuando se construyen demostraciones deductivas, encaminadas a argumentar la validez de la conjetura, pero en nuestro caso hablamos de justificaciones contundentes, para el alumno, dado que éste puede no considerar necesario un argumento de esa naturaleza y simplemente estar convencido de su veracidad por otros medios

4. Contexto de investigación y Metodología

La metodología de la investigación, interesada en características y categorías de argumentación de los estudiantes de nivel medio superior y superior, asume un enfoque cualitativo de los resultados, apoyada en un estudio de casos. La herramienta de recopilación, para obtener la máxima eficiencia posible, no se puede limitar a un examen o prueba, ya que nuestro interés no son las soluciones de los problemas (riesgo que se corre si los alumnos solo presentan la versión final de su trabajo, omitiendo sus intentos previos y relevantes dadas las pretensiones del trabajo), sino incluyendo, además, las hojas “en sucio” que contienen los métodos de solución y los intentos fallidos de demostraciones, ya que, implícitamente, nos aportan información sobre su concepción de los elementos que debe contener una argumentación y los procesos cognitivos relacionados.

Para las actividades planteadas, incluidas como anexo, fue seleccionada el área de geometría plana, por las familiaridades visuales que ofrece y el enfoque formal (axiomática material) que se incluye en la mayoría de los planes de estudio de preparatoria, esperando que los estudiantes de nivel medio superior, principalmente, tengan conocimiento e incluso experiencia con su uso (tratando de evitar la posible ventaja del trabajo de la Matemática Formal propia de la Licenciatura). Los problemas seleccionados se relacionan con la construcción y descubrimiento, en el sentido planteado por de Villiers, de las rectas notables y sus propiedades, mediante un acercamiento que permita al estudiante involucrarse en el proceso exploración-conjetura-demostración. La selección del tema de rectas notables se debe al poco trabajo sobre el contenido, y superficial desde nuestra perspectiva, declarado en el libro de texto del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (2009, pp. 46-48), lo cual convierte a dicha institución en un candidato de prueba.

La dinámica de la actividad consiste en la aplicación de una serie de actividades de manera individual y posteriormente en equipo a los representantes de ambos niveles (medio superior y superior), para posteriormente conseguir información concluyente sobre su noción de demostración mediante entrevistas y discusiones grupales. Como ya se mencionó, para categorizar las formas de argumentar de los estudiantes, se seleccionó la modalidad de estudio de casos, con el fin de poder observar el desempeño de estudiantes “representativos” de educación preparatoria y universitaria, pero dadas las complicaciones temporales, nos limitaremos a realizar un pilotaje que nos ayude a editar el instrumento de medición con la intención de implementar, con algo de experiencia, el diseño de manera oficial durante el semestre actual (enero-junio 2010). Entre las principales ventajas de posponer el trabajo podemos resaltar que la institución Cobach cuenta en sus planes de estudio el curso de Matemáticas 2 en el semestre enero-junio, el cual contiene apartados relacionados a la axiomática material y un primer acercamiento a las pruebas formales, lo cual lo convierte en un escenario idóneo para evaluar las categorías de demostración antes y después de un estudio sistemático de pruebas, basadas en el razonamiento deductivo

5. Referencias

- [1] Arsac, G. (1987). *Ensayo de la demostración: Ensayo de epistemología didáctica*. En Recherches en didactique des mathematiques, Vol. 8, no 3, pp. 267-312
- [2] Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (Ed.) (2009). *Matemáticas 2*. Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora
- [3] Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de doctorado no publicada, CICATA, IPN, México
- [4] Laporte, C.Y., April, A., Renault, A. (2007). Applying ISO/IEC JTC 1/SC7 Software Engineering Standards in Very Small Enterprises, *Crosstalk*, Journal of Defense Software Engineering, February 2007, pp. 29-30.
- [5] de Villiers, M. (1993). *El papel y la función de la demostración en matemáticas*. *Épsilon*. 26, 15-30
- [6] Kline, M (1980). *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*. España, Editorial siglo XXI
- [7] Polya , G (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México, Editorial Trillas. Rodríguez, F. (2006). *Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de cabri por estudiantes de la licenciatura en matemáticas*. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Valencia
- [8] Rodríguez, F. (2006). *Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de cabri por estudiantes de la licenciatura en matemáticas*. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Valencia

Propuesta didáctica para el tratamiento de las funciones exponenciales

Guadalupe Villaseñor Gándara
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
gviga@gauss.mat.uson.mx

Nivel educativo: Superior

Resumen

Como parte del estudio de las funciones exponenciales se presenta una secuencia didáctica que consta de tres actividades, cuyo objetivo es que el estudiante realice un primer acercamiento geométrico y numérico a la rapidez de cambio de la función exponencial, así como también un primer acercamiento geométrico y numérico a la base e , utilizando como recurso didáctico el dispositivo CAS: Voyage 200

1. Introducción

El crecimiento y decaimiento exponenciales son características esenciales de fenómenos naturales cuyo estudio demandan diferentes especialidades de las ciencias y las ingenierías. La base que se usa con más frecuencia en las ciencias es el número e , se utiliza para modelar prácticamente la mayoría de los procesos naturales de crecimiento o decrecimiento, por medio de distintas funciones relacionadas con este número (Gompertz, hiperbólicas, logística, etc.) y particularmente de las funciones exponenciales simples; $N = N_0 e^{kt}$

2. Argumentación teórica

En este trabajo se concibe el concepto de función como modelo matemático de la variación. Esto debido a que se considera que dicho concepto surge y se desarrolla a través del estudio del cambio. Este enfoque propone remover el discurso matemático escolar desde el fondo, cambiando el papel principal que los cursos de cálculo confieren al concepto de *límite* y poniendo en su lugar a la *variación física*.

Numerosas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa han puesto de manifiesto que existen dificultades persistentes en los estudiantes, ligadas, a la construcción del concepto de función. Artigue (2000) sintetiza y presenta algunos resultados de investigaciones didácticas, y en lo que se refiere al concepto de función, encuentra que existen dificultades para relacionar los diferentes registros de representación: verbal, tabular, gráfica y expresión algebraica o analítica. La falta de habilidad y conocimiento de los estudiantes para realizar la conversión entre los diferentes registros de representación ha sido identificada como una de las principales dificultades para el aprendizaje de las matemáticas.

Cuando un estudiante tiene acceso a todas las representaciones de un objeto matemático, es capaz de identificarlas, darle un tratamiento adecuado en cada registro de representación y además hacer una articulación coherente de los diferentes registros de representación sin contradicciones, el estudiante puede acceder a ese conocimiento y apropiárselo (Duval, 1998). Sin embargo la conversión entre diferentes registros de representación no es espontánea, y debe por tanto ser objeto explícito de enseñanza.

3. Construcción del método de evaluación

Los estudiantes que usan CAS (Computer Algebra System) pueden generar fácilmente representaciones gráficas de los problemas, manipular representaciones algebraicas y analizar representaciones numéricas. Esto puede ayudar a los estudiantes a construir interconexiones entre las diferentes formas de representación aumentando así su comprensión.

4. Características generales de la secuencia didáctica

El presente trabajo pretende abordar el estudio de las funciones exponenciales mediante la vinculación dinámica de sus distintas representaciones y el énfasis en las correspondientes conversiones en los diferentes registros de representación, utilizando como herramienta didáctica la calculadora Voyage 200.

5. Análisis de la secuencia didáctica

Actividad 1: Visualización Gráfica y Numérica de la Rapidez de Cambio

Objetivos: Que el estudiante realice una visualización geométrica y numérica de la rapidez de cambio de la variación exponencial, haciendo referencia a un fenómeno físico que analizó anteriormente.

Descripción de la Actividad: En esta actividad se analiza la rapidez de cambio en forma local.

Primeramente se le pide que haciendo referencia a la Actividad en la que trabajó anteriormente sobre Crecimiento Bacteriano escriba las unidades de la rapidez de cambio ($\Delta B/\Delta t$) para que al analizar éstas, logre describir lo que representa dicho concepto en el contexto en el que está trabajando.

En esta Actividad el estudiante se va a apoyar, para hacer los análisis correspondientes, en el programa **camrelat**.

En la primera parte se analiza la rapidez de cambio promedio en diferentes intervalos, a través del triángulo característico y del valor numérico de aquella, pidiéndosele escriba la interpretación en este contexto.

Después se le propone al estudiante que calcule aproximadamente la rapidez de cambio de éste cultivo bacteriano en un instante dado, utilizando la rapidez de cambio promedio sobre intervalos cada vez menores que contengan a ese instante. Después de completar una tabla para diferentes instantes dados se le pide un análisis sobre el comportamiento de esta rapidez de cambio con la intención de que observen que conforme transcurre el tiempo la población bacteriana crece más rápido.

Actividad 2: Rapidez de cambio, un análisis global.

Objetivos: Que el estudiante realice un análisis global de la rapidez de cambio de la variación exponencial a través de una visualización geométrica y numérica, haciendo referencia al análisis de la rapidez de cambio puntual que se realizó en la actividad anterior.

Descripción de la Actividad. En esta Actividad se va a trabajar con el mismo modelo matemático con el que utilizó en la Actividad anterior referente al crecimiento bacteriano, apoyado con el programa **variexpo**.

Una vez que el estudiante introduce la fórmula que representa el fenómeno de variación con el que va a trabajar, se le pide seleccione la opción “Rapidez de Cambio Promedio”, en la pantalla aparece la gráfica de la función, los triángulos característicos correspondientes y un menú con la opción “Continuar” (Figura 1.) la cual se le pide que la elija las veces que ésta aparezca, el efecto de esta acción es la reducción de los Δt (Figura 2.). El propósito de esta parte es que se realice un análisis visual del comportamiento de la rapidez de cambio promedio a través de los triángulos característicos y la reducción de éstos. Pidiéndosele escriba sus observaciones.

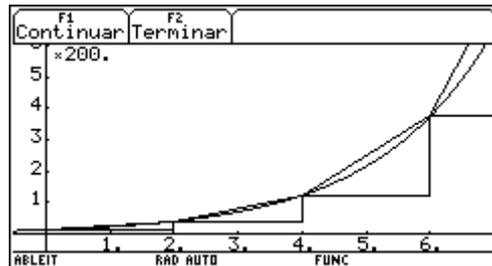


Figura 1.

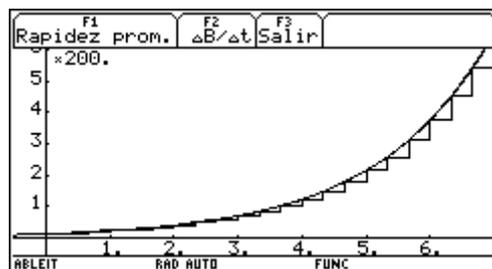


Figura 2.

A continuación se le pide al estudiante elija la opción “ $\Delta B/\Delta t$ ”, apareciendo en la pantalla la gráfica de la función, los segmentos verticales que corresponden a la magnitud de la rapidez de cambio ($\Delta B/\Delta t$) del intervalo indicado y un menú con la opción “Continuar” (Figura 3.); a partir de aquí las opciones y acciones son similares a las descritas el punto anterior. El propósito de esta parte es que se realice un análisis visual del comportamiento de la variación de la rapidez de cambio conforme se reduce el tamaño de los Δt .

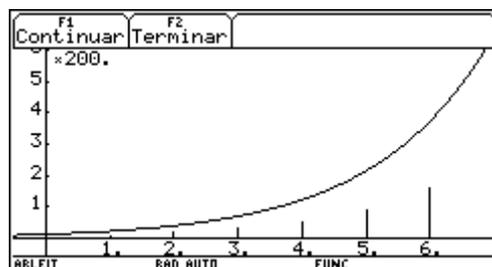


Figura 3.

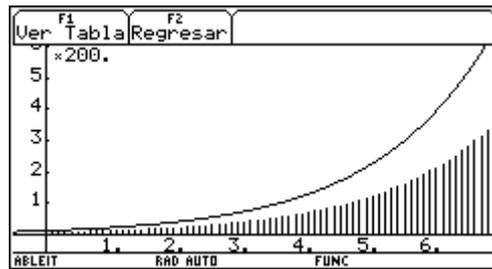


Figura 4.

Por último, se le pide elegir la opción “Ver Tabla” [F1] (Figura 4.), en la cual pueda realizar los cálculos que crea necesarios para encontrar un patrón en el comportamiento de la rapidez de cambio de la variación exponencial, esto con el objetivo de que al analizar el patrón identifique que corresponde también a una variación exponencial. Finalmente se le pide que escriba sobre los resultados obtenidos.

La primera columna corresponde a los valores de t , en la siguiente columna se muestran los valores de la rapidez de cambio ($\Delta B/\Delta t$) correspondiente al intervalo indicado (Figura 5.).

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	c1	c2	c3	c4	c5		
1	0.	14.548	undef				
2	.1	15.377	1.057				
3	.2	16.253	1.057				
4	.3	17.178	1.057				
5	.4	18.156	1.057				
6	.5	19.19	1.057				
7	.6	20.283	1.057				

$c3=c2/(\text{shift}(c2))$

Figura 5.

Actividad 3: Buscando una base.

Objetivos: El propósito de esta Actividad es explorar un primer acercamiento gráfico y numérico a la base e .

Descripción de la Actividad: En esta Actividad se trabaja con el programa base (). Primeramente se le pide que le asigne el valor a la base $A=1.5$ (Figura 6).

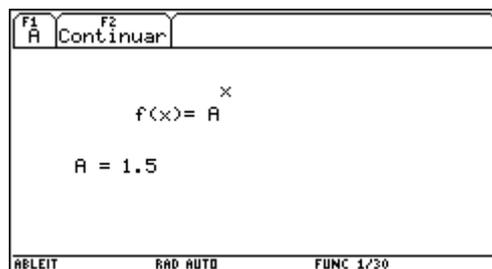


Figura 6.

Al seleccionar la opción “Continuar”, en la pantalla se observa la gráfica de la función y un menú de usuario, del cual se le pide que elija la opción $\Delta y/\Delta x$ [F1] (Figura 7), el efecto de

dicha opción es que se grafican segmentos verticales que representan la magnitud de la rapidez de cambio correspondiente del intervalo indicado (Figura 8). El propósito de lo anterior es que analice gráficamente el comportamiento de la rapidez de cambio y que escriba sobre lo que representa el que la gráfica de los $\Delta y/\Delta x$ se localiza por debajo de la gráfica de la función $f(x)$.

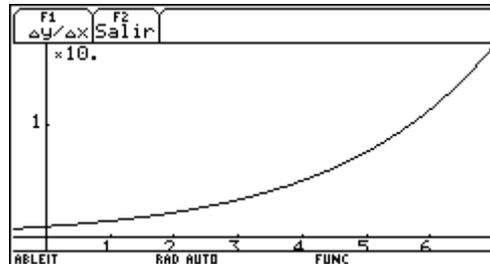


Figura 7.

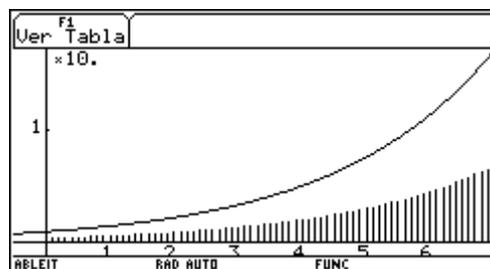


Figura 8.

La siguiente instrucción es seleccionar la opción “Ver Tabla”, apareciendo la pantalla de la Aplicación Data-Matrix (Figura 9), la primera columna corresponde a los valores de la variable x , en la siguiente columna aparecen los valores de la función $f(x)$ y la tercera columna corresponde a los valores de los $\Delta y/\Delta x$.

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	c1	c2	c3	c4	c5		
1	0.	1.	.39735				
2	.1	1.0414	.4138				
3	.2	1.0845	.43092				
4	.3	1.1293	.44875				
5	.4	1.1761	.46732				
6	.5	1.2247	.48666				
7	.6	1.2754	.5068				

r1c1=0.

Figura 9.

A continuación se le da la instrucción de que genere una nueva columna con los cálculos necesarios para encontrar el patrón de variación de los $\Delta y/\Delta x$ con el propósito de que identifique que la rapidez de cambio de la función exponencial, varía también en forma exponencial (Figura 10).

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	c1	c2	c3	c4	c5		
1	0.	1.	.39735	undef			
2	.1	1.0414	.4138	1.0414			
3	.2	1.0845	.43092	1.0414			
4	.3	1.1293	.44875	1.0414			
5	.4	1.1761	.46732	1.0414			
6	.5	1.2247	.48666	1.0414			
7	.6	1.2754	.5068	1.0414			

c4=c3/⟨shift⟨c3⟩⟩

Figura 10.

Continuando con el análisis numérico se le pide genere otra nueva columna para calcular las diferencias entre los valores de la función $f(x)$ y los valores de la rapidez de cambio $\Delta y/\Delta x$ (Figura 11.) y que describa los resultados obtenidos.

	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util
DATA	c1	c2	c3	c4	c5	
1	0.	1.	.39735	undef	.60265	
2	.1	1.0414	.4138	1.0414	.62758	
3	.2	1.0845	.43092	1.0414	.65355	
4	.3	1.1293	.44875	1.0414	.6806	
5	.4	1.1761	.46732	1.0414	.70876	
6	.5	1.2247	.48666	1.0414	.73809	
7	.6	1.2754	.5068	1.0414	.76863	
c5=c2-c3						
ABLEIT RAD AUTO FUNC						

Figura 11.

A continuación se le pide ejecute de nuevo el programa base() y le asigne a la base A el valor de 5, con ésta nueva función va a realizar las mismas instrucciones y análisis realizados en la parte anterior.

En la parte final de esta Actividad se pide le asigne otros valores a la base A de modo que la gráfica de los $\Delta y/\Delta x$ coincida lo más posible con la gráfica de la función $f(x)$, realizando el análisis numérico en la tabla correspondiente. Con el propósito de que realice un primer acercamiento a la base e.

6. Referencias

- [1] Artigue, M. (2000). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué nos enseñan las investigaciones y los cambios curriculares?* En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal*, (pp. 93-115) Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- [2] Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica. México.

¿Por qué la elipse se llama elipse y la hipérbola, hipérbola?

Jorge Ruperto Vargas Castro
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
rvargas@gauss.mat.uson.mx

Nivel educativo: Superior

Resumen

Generalmente cuando un profesor, tanto de nivel medio superior como superior, inicia un curso de Geometría Analítica Plana, lo primero que hace, sin mayor preámbulo, si acaso después de comentar algunas generalidades de la geometría analítica, es dibujar en el pizarrón un par de ejes coordenados con la característica de que son dos y perpendiculares; sin mediar una discusión, información o al menos un comentario acerca de si realmente es necesario que sean dos los ejes y si deben ser perpendiculares. En este trabajo se presentan estrategias accesibles a estudiantes, incluso de bachillerato, para comprender la necesidad de que sean dos los ejes y que no es necesario que sean perpendiculares; se analizan también las ventajas o conveniencias de que sí lo sean.

Avanzado ya el curso, se hace el estudio de las cónicas, en ocasiones sí se explica el origen del nombre genérico de cónicas, pero raramente se explica el origen del nombre particular de algunas de ellas, tales como parábola, elipse e hipérbola. En este trabajo, con el apoyo de un software de geometría dinámica, se explica el significado y origen etimológico de dichos nombres y como fruto adicional de la discusión, se explica el uso como calificativo de parabólico, hiperbólico o elíptico en otros campos como en geometrías no euclidianas, entre otros.

1. Introducción

En el estudio de la geometría analítica, en el espíritu de René Descartes su creador, se espera que la mente del estudiante y la del profesor puedan también ser calificadas como analíticas; y análisis, según una de las acepciones del diccionario LAROUSSE 2003 es: “Examen que se hace de una cosa estudiando cada una de sus partes”, mientras que en el mismo diccionario, la palabra ANALÍTICA TRASCENDENTAL significa, en su acepción filosófica, “Búsqueda de los elementos a priori del entendimiento que se aplican a los fenómenos”.

Irónicamente, la falta de una visión analítica en los cursos de geometría “analítica”, en la visión de algunos autores de textos que a la vez influyen en la concepción que de la disciplina adquieren muchos de los profesores y que éstos a la vez lo inducen en los estudiantes, reducen la geometría analítica a un conjunto de técnicas áridas y uso mecánico de recursos algebraicos para resolver problemas geométricos, perdiendo muchas veces la misma visión geométrica del problema [3]. Dentro de este panorama global en el que se enmarca la visión general de la disciplina en cuestión, destacamos el tratamiento que en dicho enfoque se da a dos de los temas fundamentales; el concepto de sistemas de coordenadas y el nombre particular de cada una de las cónicas.

A continuación, entrando ya en materia, hacemos un análisis de los tópicos recién mencionados.

2. Sistemas de coordenadas

Como lo indicábamos en el primer párrafo del resumen, el profesor en el inicio de un curso de geometría analítica tiende a dibujar, “en automático”, un par de líneas perpendiculares a partir de los cuales define el sistema de coordenadas cartesianas; sin cuestionar el por qué tienen que ser dos y por qué perpendiculares.

En los siguientes párrafos proporcionaremos ideas prácticas, para argumentar a un nivel accesible a profesores y estudiantes de bachillerato y primeros semestres de licenciatura, el por qué debe ser dos la cantidad de ejes requeridos para definir y describir al plano cartesiano, a la vez que haremos ver que **NO ES NECESARIO QUE SEAN PERPENDICULARES** para poder hacer geometría analítica; discusión que concluye formalmente al estudiar el concepto de base y dimensión en un curso de álgebra lineal; donde se entiende que hay bases no ortogonales, ortogonales y ortonormales, teniendo estas últimas ciertas ventajas operativas.

¿Por qué tienen que ser dos los ejes?

Para dar un argumento intuitivo de este hecho, primero razonamos un tanto empíricamente el por qué una sola recta no es suficiente para definir en forma única un plano.

¿Por qué una recta no es suficiente para determinar un plano?

Una línea recta siempre yace sobre al menos un plano, incluso es utilizada para la definición que de superficie plana proporcionó el griego Teón de Esmirna (70d.C.-135d.C. aprox.) y que después Euclides (S.III d.C.) utilizaría en lugar de su propia definición, la número 7 del Libro I de Los Elementos [2]; la definición de Teón dice lo siguiente:

“Una superficie plana es aquella en la cual al unir dos puntos cualesquiera de ella por medio de una línea recta; todos los puntos de la recta que los une yacen sobre la superficie”

Pero es un hecho que una recta puede pertenecer a dos o más, e inclusive a una infinidad de superficies planas; basta con doblar una hoja de papel para descubrirlo; pero no solo eso, sino que además una recta puede yacer sobre superficies curvas, como sucede con la generatriz de cualquier cilindro o de cualquier cono (ver figuras 1 y 2); por lo tanto, una recta no determina de forma única a una superficie plana.

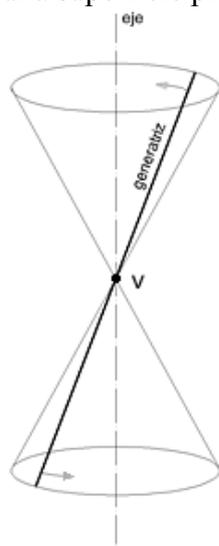


Figura 1

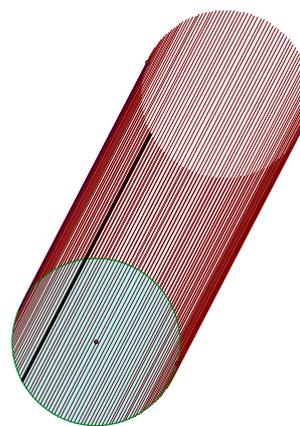


Figura 2

Ahora, afirmamos que dos rectas no paralelas sí determinan en forma única a un plano.

Con argumentos semejantes a los utilizados en el caso anterior, razonamos lo siguiente:

Ya analizamos en el caso anterior que una recta sola sí puede pertenecer a una superficie curva, incluso una infinidad de ellas como las generatrices de un cono o de un cilindro (ver figuras 1 y 2); partiendo de esta idea, si dibujamos dos rectas no paralelas sobre una hoja de papel, y después le damos curvatura a la hoja, como ya analizamos antes, puedo lograr, en determinado momento, que una de las líneas siga siendo recta, por ejemplo, si la hago coincidir con una generatriz de un cono o de un cilindro formado con la hoja curvada, pero la otra necesariamente se curveará (dejará de ser recta); en el caso particular del cono puedo lograr la concurrencia de muchas semirrectas (pero no rectas completas) en el vértice, pero cualquier otra necesariamente se curva; con esta experiencia podemos lograr que el estudiante realice un razonamiento plausible, sin ser prueba formal, de que es imposible que dos rectas no paralelas yazcan en una misma superficie si no es plana, por supuesto que en el contexto de la Geometría Euclidiana.

Después de analizar que realmente dos líneas rectas no paralelas determinan un único plano, ahora analizamos cómo responder a la siguiente pregunta:

Para poder hacer geometría analítica; ¿es necesario que los dos ejes utilizados para definir las coordenadas de un punto sean perpendiculares?

La respuesta es NO.

Si los ejes son oblicuos, en lugar de usar rectángulos podemos usar paralelogramos para determinar las coordenadas de un punto en el plano, de tal manera que si el ángulo entre los ejes es α , podemos también determinar una fórmula de distancia entre dos puntos con la ayuda de la ley de los cosenos, como lo hacemos después de la siguiente figura (Figura 3), a la cual nos referimos en dicho desarrollo.

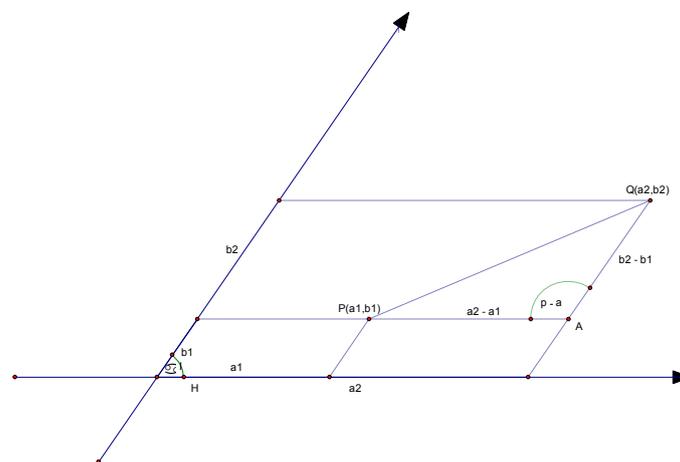


Figura 3

En un sistema de coordenadas ordinario, dado que los ejes son perpendiculares, para obtener la fórmula de la distancia entre dos puntos se aplica el Teorema de Pitágoras; pero aquí los ejes forman un ángulo α , por lo cual usaremos una generalización de dicho teorema, el llamado “Ley de los Cosenos” en el triángulo PAQ; así:

$$d(P,Q) = \sqrt{(a2 - a1)^2 + (b2 - b1)^2 - 2(a2 - a1)(b2 - b1) \cos(\pi - \alpha)}$$

Sabemos que la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio 5, en un sistema de coordenadas cartesianas convencionales es:

$$x^2 + y^2 = 25$$

En cambio, por aplicación de la fórmula de distancia entre puntos en un sistema de coordenadas de ejes oblicuos que acabamos de obtener, cuando el ángulo entre los ejes es de 60° , la ecuación de la misma circunferencia con centro en el origen y radio 5 es:

$$x^2 + xy + y^2 - 25 = 0$$

En la Figura 4 mostrada abajo, se presentan gráficamente ambos casos; dichas gráficas se obtuvieron directamente del software “Cabri Géomètre II Plus”, ya que permite variar el ángulo entre los ejes proporcionando a la vez las respectivas ecuaciones sobre las gráficas, estas coinciden con las que obtenemos al aplicar las respectivas fórmulas de distancia arriba mencionadas

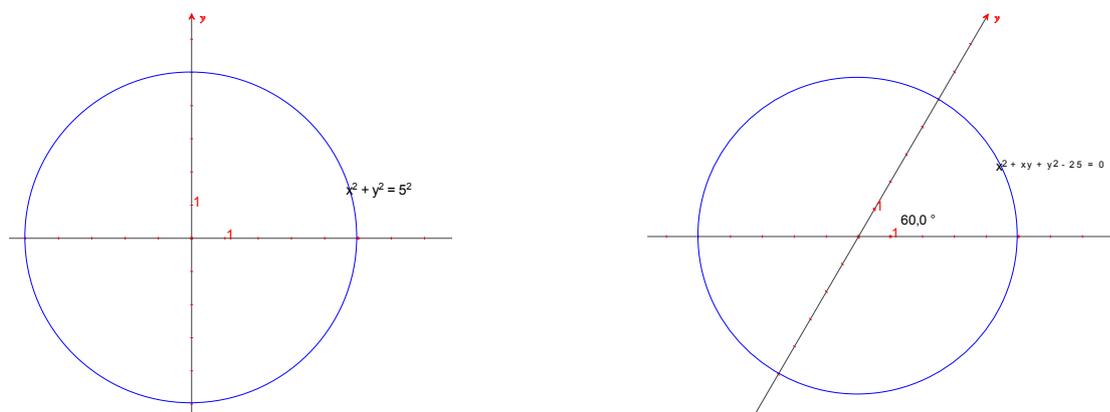


Figura 4

Se invita al lector a analizar qué representa la ecuación obtenida para ejes a 60° si se ve desde el punto de vista de los ejes coordenados perpendiculares.

En resumen, vemos que sí es posible desarrollar los principales tópicos de geometría analítica plana con un sistema de coordenadas con ejes oblicuos; por lo cual concluimos que NO es necesario que los ejes sean perpendiculares.

¿Qué ventajas tiene usar ejes perpendiculares?

Como ya lo pudimos observar, no es necesario que los ejes coordenados sean perpendiculares para poder obtener resultados en geometría analítica; sin embargo, el que lo sean representa algunas ventajas, menciono dos a continuación:

- 1.- Debido a que $\cos(90^\circ) = 0$, el uso de la ley de los cosenos se reduce al caso particular del Teorema de Pitágoras, trayendo como consecuencia la simplificación de la fórmula de distancia y por consiguiente las expresiones analíticas de algunas curvas.
- 2.- Sólo cuando los ejes son perpendiculares, la composición de reflexiones de una figura con respecto a los ejes coordenados, equivale a un giro de 180° y por consecuencia a la reflexión con respecto al origen, facilitando el estudio de las simetrías de una curva.

Como ya lo mencionamos, esta discusión tendrá su expresión formal cuando se estudie, en un curso de Álgebra Lineal, el concepto de base y de base ortonormal, extendiéndose a cualquier dimensión.

Ahora pasamos a la siguiente parte de la discusión, lo relativo al significado del nombre asignado a cada una de las cónicas, presentado con ilustraciones gráficas intentando hacer más intuitivo y comprensible e concepto.

Analicemos primero el nombre de la elipse:

La palabra elipse tiene su origen etimológico del latín *ellipsis*, que a la vez proviene del griego *elleipsis* que significa insuficiencia o defecto; y para entender qué relación tiene la curva llamada elipse con insuficiencia o defecto, debemos entenderla como uno de los posibles cortes de un cono mediante un plano; para ello consideremos la figura 5:

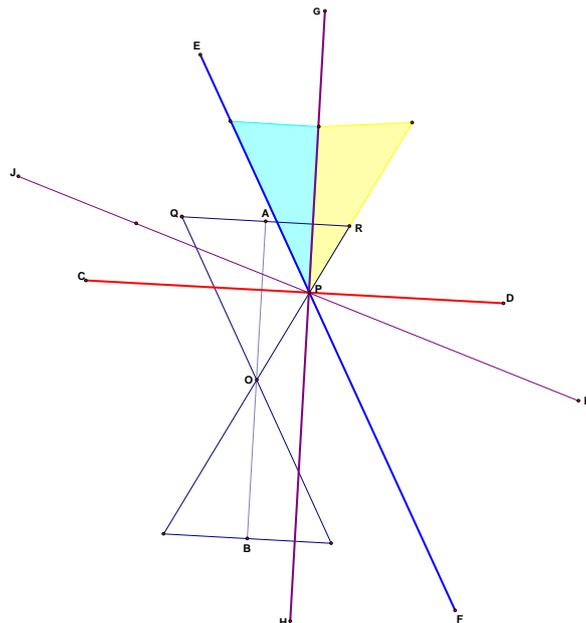


Figura 5

Si el triángulo OQR, junto con su opuesto por el vértice O, representan un corte por un plano de dos conos congruentes opuestos a lo largo del eje común AB, de tal manera que al girar dicha figura alrededor del eje AB se obtiene el par de conos mencionados, P representa un punto sobre el cono, la línea EF marca la dirección de un corte al cono paralelo a la generatriz QO; CD representa un corte perpendicular al eje, GH un corte paralelo al eje y JK es una línea que gira con centro en P representando a un corte de dirección variable, podremos hacer el siguiente análisis:

A partir del corte en la dirección CD que produce una circunferencia, cuyo nombre supondré que sí se conoce su origen, tomemos como referencia el ángulo EPC; como la línea EF es **paralela** a la generatriz, el corte en la dirección de dicha línea corresponde a la parábola, la cual proviene del latín *parabola* que significa comparación similar, del cual se deriva también la palabra paralelo; por lo cual la parábola está relacionado con **paralelo**.

Cualquier corte en la dirección contenida en el ángulo EPC representado por las diversas posiciones de la línea JK dentro de dicho ángulo, corresponde a un ángulo que aún no alcanza la dirección paralela (EF), es en ese sentido que se aplica defecto o insuficiencia (le falta) de ahí el nombre de elipse (*ellipsis*, insuficiencia o defecto).

De la misma raíz es la palabra **elipsis** que es una forma lingüística en la que se suprimen palabras sin perder el sentido de la expresión; son por lo tanto expresiones incompletas pero aceptadas; un ejemplo lo tenemos en el título de este trabajo, ya que se sobreentendió la segunda vez en que se iba a usar el término “se llama”.

Hipérbola: Su etimología proviene del griego *hyperbole* que significa exageración o exceso. Aprovechando de nuevo la figura 5, observamos que si la dirección de corte, representada por la línea JK, se ubica dentro del ángulo RPE, el cual equivale al ángulo entre dos generatrices simétricas con respecto al eje AB, va a cortar a ambos conos, generando dos curvas en el mismo plano; aunque muchos libros [1] le llaman hipérbola sólo a la curva con dos ramas generadas por un corte paralelo al eje común, etimológicamente todos los cortes comprendidos dentro del ángulo mencionado, por haber excedido ya el corte en dirección EF paralelo a la generatriz, alcanzan la categoría de **hipérbola**, aspecto también descuidado en los cursos ordinarios de geometría analítica.

Con la misma raíz de hipérbola tenemos la palabra hipérbole, figura retórica que consiste en exagerar la expresión; ejemplo: “No hay **océano** más grande que su llanto”.

Si tomamos como referencia central a la parábola, en el contexto analítico, en la ecuación general de la cónica, es la que tiene excentricidad $e=1$; a la elipse relacionada con defecto o faltante, es la que le falta para completar la excentricidad de la parábola ($0 < e < 1$), mientras que para la hipérbola, $e > 1$ (exceso).

El calificativo parabólico, elíptico o hiperbólico se usa en otros contextos con el mismo sentido etimológico combinado con otros factores; por ejemplo, la clasificación de las geometrías en parabólica, hiperbólica y elíptica para la geometría euclidiana, de Lobachevsky y la esférica (de Riemann) respectivamente está en relación con aspectos etimológicos y de la geometría proyectiva, en especial con la cantidad de puntos al infinito asociados a cada geometría con respecto a la curva correspondiente que le da nombre.

3. Referencias

- [1] Boyer C. (1986) . *Historia de la Matemática Alanza*
- [2] Heath T. (1956). *Euclid The Thirteen Books of The Elements Dover*
- [3] Lehmann Ch.. (2002). *Geometría Analítica Limusa*

Proyecto: Textos Dinámicos (TD)

Ricardo Ulloa Azpeitia, Elena Nesterova, Rafael Pantoja Rangel
Sección de Matemática Educativa
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guadalajara/CUCEI
ricardo.ulloa@ucei.udg.mx

Nivel educativo: Superior

Resumen

Se describe un proyecto de investigación en la línea de lectomatemáticas, dirigido a experimentar una opción didáctica para incidir sobre el problema derivado del pobre dominio del idioma materno y los procesos de traducción al lenguaje especializado de las matemáticas, el lenguaje simbólico y el gráfico. Tal problema ha sido observado como presente en estudiantes de diferentes niveles, estratos sociales, ubicación geográfica y tipo de institución educativa. Se definió un sustento teórico-práctico para elaborar lo que se denomina textos dinámicos, con los que se intentará apoyar el aprendizaje de conceptos matemáticos, al menos en los dos primeros niveles de la taxonomía de Bloom, mediante la integración de hipertextos que presentarán diferentes contextos para propiciar la construcción de conceptos por parte de los estudiantes.

1. Introducción

El origen de la línea de investigación en la cual se inserta este trabajo, lectomatemáticas (estudio de los procesos de traducción del lenguaje matemático al lenguaje materno y viceversa, lo que influye en las actividades de modelaje), se deriva de la observación de que alumnos a despecho de tener diferentes condiciones contextuales, sociales o económicas, no superan obstáculos epistemológicos que enfrentan cuando resuelven problemas en palabras que implican modelar la situación descrita. A partir de investigaciones realizadas [1],[2],[3][4],[5] entre otras, ha resultado obvio que existen serios problemas con el empleo del lenguaje cotidiano y los procesos de traducción al lenguaje matemático.

Se ha investigado desde diferentes perspectivas la problemática que presenta el aprendizaje de las matemáticas y no obstante la gran cantidad de proyectos de investigación desarrollados, pareciera que no se ha incidido en los factores estratégicos, dado que no se sabe de una mejoría en el estado del arte. Es muy probable que la influencia del lenguaje haya sido poco considerada, a pesar de los indicadores al respecto de su importancia como mediador de los procesos de aprendizaje complejo, por lo que este estudio podría arrojar información valiosa para elaborar estrategias y materiales que atiendan esa situación.

¿Cómo puede un alumno comprender que debe realizar una cierta operación, si no comprende las palabras empleadas para implicar tal operación? preguntas como la anterior agregan elementos de peso para justificar el presente proyecto, pues parece muy complicado que un estudiante con deficiencias de lectoescritura, llegue a aprender las Matemáticas a nivel formal.

Existen trabajos que muestran la dependencia de los estudiantes del lenguaje y la necesaria mediación que ejerce éste para producir aprendizajes más allá del nivel de memorización, sin

embargo, tampoco se puede asegurar que un estudiante con buena lectoescritura aprenderá Matemáticas sin enfrentar problemas.

En la definición del objeto de estudio se tomaron en consideración los resultados previamente identificados, en diferentes contextos y niveles, desde secundaria hasta posgrado y en diferentes ramas de la materia. Con el desarrollo del proyecto de investigación se pasa a la fase de experimentar alternativas para superar los obstáculos observados y se busca determinar el efecto de una alternativa didáctica que implica el empleo de hipertextos diseñados para incidir sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos. En términos prácticos se pretende que los alumnos logren al menos aprendizajes de nivel 1 y 2 de la taxonomía de Bloom.

El diseño también implica un trabajo en la línea de diseño y construcción de Objetos para Aprendizaje (OPA's), con validación sustentada tanto desde una teoría constructivista del aprendizaje, como por evidencia empírica. Se planea la construcción de TD's con diferentes niveles, con la idea de propiciar un proceso de semiosis (proceso de construcción de signos y negociación de significados) por parte del estudiante, que posibilite un cierto acompañamiento de la negociación de significados de términos estratégicos para cada área correspondiente.

Otro nivel implica pedir al alumno una definición propia del concepto y luego comparar con las usuales de los textos matemáticos. El tercer nivel acarrea la presentación de alguna aplicación en la que se denota la presencia e importancia del concepto. Finalmente se indica trabajar en el contexto de un problema abierto en el que aparecen y se usan los conceptos estratégicos, de manera que involucra al estudiante en obtener una solución razonada, pues puede deducir diferentes respuestas correctas.

Objeto de estudio.

Proceso de construcción de significados de conceptos matemáticos en el contexto del empleo de una alternativa didáctica sustentada en el empleo de hipertextos.

Hipótesis.

El empleo de la alternativa didáctica propicia mejores resultados de aprendizaje por parte de los estudiantes.

2. Antecedentes

Un profesor se expresa de manera que refleja su experiencia y formación previa y obviamente es diferente a aquella a la que están acostumbrados sus alumnos. Para comprenderle, deberán invertir cierta energía en decodificar lo que escuchan o leen. Tal inversión cognitiva implica una cierta desventaja con respecto a aquellos alumnos que „dominan“ un "idioma" semejante al del profesor.

Desde luego que éste no es el único factor que influye en el aprendizaje, pero es crucial por el efecto de conexión que se requiere entre el profesor y el alumno. El problema se exagera cuando la comunicación incide sobre los aspectos estratégicos de la disciplina. Se ha detectado que los alumnos pueden repetir definiciones, sin entender su significado, como es el caso del concepto de ecuación que lo relacionan con una cierta operación.

Tal situación se repite en todas las ramas de las matemáticas que han sido exploradas hasta el momento. Por ejemplo, en el caso de la geometría, hay una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles: las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los cuatro niveles de Van Hiele no sólo se reflejan en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la

forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario. A cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje específico.

Atender los problemas que se originan por el uso del lenguaje se considera que ayuda a interpretar la mayoría de las dificultades que tienen los estudiantes para aprender: dificultades semánticas, dificultades inherentes a la estructura que adopta el código notacional y el funcionamiento del mismo, dificultades relativas al cuándo y cómo utilizar el código notacional para resolver determinada situación, etc.

El enfoque hacia incidir sobre el proceso de comunicación derivado del pobre dominio del lenguaje implica una visión integradora del currículo: comunicación, memorización de datos, formación de conceptos, modelaje y resolución de problemas. Se pone el acento en la construcción progresiva de los significados, en los aspectos comunicativos y en el dominio sintáctico orientado hacia la operación con símbolos.

Una vez que el concepto ha sido comprendido, deseablemente presentado en más de un contexto conocido por el estudiante, el docente deberá "descontextualizarlo". Esta es una operación importante, el poder de los modelos matemáticos radica en su generalidad y abstracción.

La experimentación supone las dos etapas, la contextualización, que apunta al sentido, la comprensión y el interés, y la descontextualización, o lo que es equivalente, la ubicación del modelo en el contexto de la disciplina matemática, que apunta a la generalidad y abstracción. En el mismo sentido propuesto por Brousseau [6].

3. Metodología

Se prevé proporcionar a los estudiantes una herramienta que les permita superar el dominio de los dos primeros niveles taxonómicos de Bloom, lo que representa requisito indispensable para el progreso de los estudiantes, pues si no entienden lo que se les solicita, no podrán modelar y resolver problemas expresados en palabras. El reto es poner los conocimientos estratégicos en un contexto que tenga sentido para los estudiantes y deseablemente, despierte el interés de los estudiantes y propicie aspectos lúdicos.

De cierta forma se pretende incidir sobre la zona de desarrollo próximo de los estudiantes [7] de manera que la interacción con los TD's permita ampliarla y facilitar la apropiación de los conceptos que han sido detectados como complicados para los estudiantes. A fin de lograr la necesaria generalidad y abstracción de los conocimientos, se piensa recurrir a mostrarlos en más de un contexto, lo que sugiere la idea de diferentes tipos de TD's, en consideración de que el conocimiento es situado.

Una ganancia adicional de la estrategia se refiere a las aplicaciones del concepto. En efecto, conocer los modelos matemáticos en varios contextos, aumenta las probabilidades que el estudiante reconozca situaciones en las que lo puede aplicar.

Alternativa experimental. Básicamente la idea representa construir hipertextos en el contexto del diseño instruccional de cada curso, módulos manejables para cada capítulo o unidad. Para los conceptos estratégicos identificados se incluyen ligas de diferente nivel de dominio a los que puede acceder el estudiante, desde la negociación de significados para construir un modelo matemático, la interacción con su propia definición y comparación con las tradicionales, una aplicación, distinguir su presencia en el contexto de una situación o involucrarlo en la solución de algún problema. Se espera que provocar en los estudiantes la experiencia con esa triada, propiciará que superen los obstáculos de aprendizaje que suelen enfrentar en la solución de problemas en palabras. En tal sentido se planea la construcción de tres niveles de TD.

Primer nivel. Se dispone un contexto para propiciar al estudiante construir significados. Se parte de usar enfoque sincopado hasta obtener una representación simbólica. Se propicia una negociación por parte del estudiante en la que se impulsa su creatividad. Por ejemplo, el caso del vendedor de chicles, usado para desarrollar concepto de ecuación. Se parte de la experiencia de la balanza de platos, con la idea básica de que el “peso de los números de un plato” es igual al “peso de números del otro”. La abstracción implica imaginar que el valor de los números que se ubican de uno y otro lado tiene “un peso”.

Entonces se presenta una secuencia que puede ser animada y realzada con colores para los elementos estratégicos, en la que el estudiante interactúa en el contexto propuesto y gradualmente se provoca un aumento en la abstracción para generar el modelo matemático que corresponde a la idea de ecuación:

$$Ganancias = Ingresos \text{ menos } gastos = Saldo \text{ previo } \text{ menos } saldo \text{ actual}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ Ingresos - gastos & = & Saldo \text{ previo} - saldo \text{ actual} \end{array}$$

$$Ingresos = \text{costo de venta de } \underline{\text{todos}} \text{ los chicles vendidos}$$

$$Ingresos = \text{costo de venta de cada chicle por número de chicles vendidos}$$

$$Ingresos = (\dots\dots\dots) \times (\dots\dots\dots)$$

Se pide al estudiante abreviar cada factor ...

$$Ingresos = (\dots) \times (\dots)$$

Se pide abreviar aún más... Se repite el proceso para el segundo miembro y se insiste a lo largo de la interacción que cada una de las expresiones planteadas son ecuaciones, pero que traducidas al lenguaje preferido en matemáticas se parece más a la última expresión. Se enfatiza que se ha construido un modelo matemático abstracto.

Segundo nivel. Se pide al alumno una definición propia del concepto, luego se proporcionan una o más definiciones, como las usuales de los textos matemáticos y se le pide compararlas con la que dio.

Tercer nivel. Se presenta una aplicación o bien, el contexto de un problema en el que se denota la presencia del concepto en estudio.

Cuarto nivel. Se plantea con influencia del enfoque de Aprendizaje Basado en Problemas y la estrategia de enseñanza recíproca [8] con la intención de incidir sobre la construcción de conceptos y sus aplicaciones en el modelado de situaciones propuestas. Implica las siguientes etapas.

1. Presentación de contexto: espacio para sustentar el tema a desarrollar, real o simulado, que incluya elementos de interés para los estudiantes a los que se dirige y preferentemente también, elementos lúdicos.
2. Disponer espacio para construcción, por parte de los estudiantes, de los conceptos de interés identificados en la etapa anterior, mediante una construcción semejante a un *Wiki*, en una plataforma o página Web para hacer las aportaciones. La intención es propiciar la negociación de significados (semiosis) en lugar de imponerlos, de manera parecida al primer nivel, aunque menos inducida y con trabajo colaborativo.
3. Se pide simbolizar y acotar conceptos estratégicos identificados en la etapa anterior, así como atender cuestionamientos para propiciar comparar con denominación tradicional, mediante liga vinculada a tal concepto.
4. A partir del contexto definido, presentar situación problemática abierta en la que los estudiantes puedan incorporar el uso de sus constructos y/o los tradicionales, a efectos de provocar la traducción entre ellos y consolidación de significados.

5. Invitar a encontrar una solución y argumentar su validación, para lo cual se ofrecerá un espacio para interacción de los estudiantes y proposición de soluciones.
6. Solicitar contrastar las soluciones propuestas y compararlas, así como con una solución “clásica” (típica) a consultar en el TD.
7. Pedir atender contenidos para realimentación.

Entre los temas a incluir se planea usar los derivados de la historia de la construcción de los propios conocimientos matemáticos, no tanto de aspectos biográficos, aunque posiblemente salpicados con anécdotas que impriman un cierto toque lúdico

4. Reflexiones finales

Dado que los resultados de investigaciones previas muestran que los profesores también contribuyen a generar los problemas con el uso del lenguaje, para una siguiente etapa se planea la construcción de TD's para su empleo, diferentes de los diseñados para estudiantes, a manera del “libro del maestro” que existió en tiempos pasados.

Se propone invitar a las diferentes academias de la institución a participar en la construcción de TD's. Su participación representa una cooperación para la construcción de ambientes de aprendizaje, la identificación del glosario estratégico de la materia, así como la selección o construcción de problemas abiertos, apropiados para superar los obstáculos de aprendizaje. Además, se pretende aprovechar sus experiencias para propiciar realimentación mediante el aprovechamiento de la presencia de errores consuetudinarios que han identificado, a fin de consolidar aprendizajes y volverlos significativos.

Entre los elementos que se pretende considerar como hilo conductor para la definición de estrategias de enseñanza que impliquen la solución de problemas abiertos están las situaciones problemáticas que se enfrentaron en el desarrollo histórico de los contenidos matemáticos, por ejemplo, pasar por el álgebra sincopada o algo más verbal (retórica), antes de llegar a la etapa simbólica, semejante a los niveles definidos por Bruner.

Entre los indicadores que serán utilizados en la construcción de los TD se cuentan:

Calidad: Los materiales a emplear deberán ser autocontenidos, expresados en lenguaje al alcance de los estudiantes, de manera clara y concisa, dispuestos en un contexto que tenga sentido para los estudiantes, deseable que ese contexto sea motivador y deseablemente lúdico, que sirva para despertar el interés de los alumnos y se dé en un ambiente al alcance al que aprende. Para propiciar la generalización y abstracción de los conocimientos, se pueden mostrar en más de un contexto, pero también incluir provisiones para descontextualizar el conocimiento, esto es para traducir al lenguaje cotidiano los resultados obtenidos con el empleo de modelos matemáticos, en el sentido propuesto por Brousseau [6].

Vinculación: Relacionado con los conocimientos previos que poseen los estudiantes, tanto vertical, como horizontalmente, así como a aspectos de la vida cotidiana de los estudiantes.

Sentido: Que permita a los estudiantes visualizar posibles consecuencias y usos del material, que de alguna forma responda a la pregunta clásica ¿y esto para qué sirve?

Distribución: Que sea susceptible de subir a la red para ser empleado.

Reusable: Que pueda usarse en más de un curso.

Flexible: De manera que otros docentes puedan emplear secciones del material que les sean de utilidad, para emplearlas en otras opciones.

5. Referencias

- [1] Martínez, I. (2005). *Estudio Clínico para la identificación de problemas en el aprendizaje de las matemáticas determinados por deficiencias de lectocomprensión, en bachillerato*. Tesis de Maestría en Ciencias en Enseñanza de las Matemáticas. Universidad de Guadalajara, CUCEI
- [2] Lomelí Plascencia, María Guadalupe. (2005). *Estructuras Lingüísticas y las dificultades que originan en el Proceso de modelaje Matemático*. Tesis de Maestría en Ciencias en Enseñanza de las Matemáticas. Universidad de Guadalajara, CUCEI.
- [3] Figueroa, R. (2005). *Influencia de las habilidades de lecto-comprensión en el aprendizaje de las Matemáticas en el nivel medio superior: estudio correlacional y clínico*. Tesis de Maestría en Ciencias en Enseñanza de las Matemáticas. Universidad de Guadalajara. CUCEI.
- [4] Torfer, C. (2009). *Identificación de obstáculos de lectomatemáticas en la solución de problemas en palabras de cálculo diferencial*. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Universidad de Guadalajara, CUCEI.
- [5] Tavares, L. (2010). *Alternativa didáctica enfocada a lectocomprensión para problemas en palabras que implican el planteamiento de ecuaciones lineales*. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas. Universidad de Guadalajara, CUCEI
- [6] Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, N. 2, pp. 33 – 115.
- [7] Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Ediciones Fausto. Recuperado el 30 de octubre de 2008, de <http://www.psicojack.com/blog/2007/07/libro-vigotsky-lev-s-pensamiento-y.html>; <http://platea.pntic.mec.es/~jescuder/algebra1.htm>
- [8] Pallinsar, A. S. and Brown, A. L. (1984). Reciprocal Teaching of comprehension-fostering and comprehension-monitoring activities. *Cognition and Instruction*, 1.2, 117-175

Propuesta de actividades didácticas para la capacitación de profesores de secundaria en el eje curricular Manejo de la Información

Manuel A. Urrea B., Irma N. Larios R., Maricela Armenta C.
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
maurr@gauss.mat.uson.mx

Nivel educativo: Básico

Resumen

En el presente trabajo se proponen una serie de actividades didácticas diseñadas para promover el desarrollo de conocimientos y habilidades, necesarios para la formación de competencias disciplinares que los profesores de secundaria deben desarrollar al trabajar en el eje curricular de Manejo de la Información en lo que respecta a Probabilidad. Las actividades consisten de situaciones que se les plantean a los profesores con el propósito de que pongan en juego sus conocimientos previos relacionados con el tema, así como para que tengan acercamientos intuitivos respecto de los objetos matemáticos que se pretenden desarrollar en este eje.

1. Introducción

En los últimos años se han realizado modificaciones en los programas de estudio en el nivel básico del sistema educativo mexicano, en primaria inició la implementación de la nueva reforma en el 2009 y en secundaria la reforma empezó a implementarse en el 2006 [2], en ambos casos hay una variante general respecto a la reforma de 1993, tanto para primaria como para secundaria se plantea un modelo educativo basado en el desarrollo de competencias en los estudiantes, y en el caso particular de matemáticas se hace un reagrupamiento de los ejes temáticos en los que se organiza el contenido de esta disciplina. Mientras que en los planes de estudio anteriores (Reforma 1993) la matemática de primaria estaba estructurada en los siguientes seis ejes:

Los números sus relaciones y sus operaciones
Geometría
Tratamiento de la información
La predicción y el azar
Medición
Variación

Con la nueva reforma tanto en primaria como en secundaria se han reagrupado los contenidos de matemáticas en los siguientes tres ejes:

Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico
Espacio, Forma y Medida
Manejo de la Información.

Estos cambios en el sistema educativo exigen la necesidad de capacitación y actualización de la planta docente de ambos niveles educativos, dicha capacitación debe realizarse en dos vertientes tanto en el manejo de contenidos matemáticos como en la manera de implementar la nueva propuesta. Las actividades que en este trabajo se proponen están dirigidas a la capacitación de profesores de secundaria, en particular nuestras actividades están enfocadas al

eje Manejo de la Información, por cuestiones de espacio ejemplificamos con algunas actividades que promueven el desarrollo de ideas relacionadas con probabilidad..

2. Contexto de la propuesta

Tal como se han mencionado en la introducción, los cambios en los planes y programas de estudio del nivel secundaria que se han generado en años recientes han propiciado modificaciones tanto en el enfoque, objetivos y en la estructura de los contenidos, lo anterior hace surgir la necesidad de capacitar y actualizar a los profesores en servicio en las diferentes disciplinas que se imparten en este nivel educativo.

La Secretaría de Educación Pública (SEP) planea sus acciones de actualización del magisterio tratando de responder en términos de lo declarado en el Plan Nacional de Desarrollo, en el que se dice “Se fortalecerán los programas de capacitación de la planta magisterial, de manera que se pueda contar con más profesores certificados y comprometidos con la docencia en todos los niveles educativos”.

Una de las acciones que ha asumido la SEP a través de la Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio es la de integrar un Catálogo Nacional de Formación Continua y Superación Profesional de Maestros de Educación Básica en Servicio, en el cual se integran cursos de actualización, diplomados, especialidades, maestrías y doctorados. Nuestra propuesta está orientada a ser incluida dentro de los cursos de actualización para profesores de secundaria, la mayoría de las actividades propuestas fueron incluidas en un curso que se impartió a profesores de este nivel educativo del estado de Sonora en 2006, por esta razón es que tenemos algunos resultados obtenidos de dicha implementación.

3. Propósitos

El objetivo general de las actividades didácticas propuestas, es apoyar la capacitación del profesorado de la escuela secundaria para mejorar su ejercicio profesional en la enseñanza de las nociones, ideas y conceptos propios de la matemática en general y en particular del eje curricular Manejo de la Información, reflexionando sobre su práctica docente, los materiales didácticos, el uso de los recursos tecnológicos y las experiencias que el entorno le ofrece. Con lo cual se pretende estimular la emergencia de alternativas que potencien la calidad del ejercicio docente en búsqueda de una mayor calidad de la educación que reciben los jóvenes de sus escuelas.

El objetivo general se alcanzará en la medida de que los profesores logren los siguientes objetivos específicos:

- Profundizar en su conocimiento y comprensión sobre los contextos y las secuencias de situaciones problemáticas que dan significado a los contenidos matemáticos, en este caso centrados en el eje de Manejo de la Información.
- Profundizar en sus conocimientos sobre el enfoque didáctico de la propuesta curricular vigente para la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria, la cual está basado en el desarrollo de competencias.
- Experimentar una manera grata y creativa de hacer matemáticas y buscar elementos que permitan a los jóvenes vivir una experiencia semejante en el salón de clases.

Ubicar desde la perspectiva pedagógica vigente en la propuesta curricular para la enseñanza de las matemáticas, el papel que pueden jugar los apoyos tecnológicos en la implementación de las metodologías sugeridas en ella.

4. Propuesta y elementos que la sustentan

Para el diseño de las actividades propuestas se parte de la idea de que los sujetos que aprenden (estudiantes) no son simples receptores que acumulan información proporcionada por quien enseña (profesor), sino que aprenden a través de enfrentar situaciones que les permitan tener nuevas experiencias que, representando un conflicto cognitivo superable, les hacen ajustar o modificar ideas y/o conocimientos anteriores. Por lo anterior, consideramos que enfrentar a los sujetos, en este caso a profesores, a situaciones problema en las que deberán poner en juego sus conocimientos previos, para así poder tener experiencias que les permitan modificar o enriquecer dichos conocimientos, es una estrategia adecuada para promover y estimular el aprendizaje de las matemáticas.

Tomando en cuenta las consideraciones antes planteadas creemos que no hay mejor forma de aprender matemáticas que “haciendo matemáticas”, por lo que las actividades contempladas en el presente curso cuentan con una fuerte vertiente en esa dirección, además como este es un trabajo dirigido a profesores de matemáticas se promueve la reflexión en torno a cuestiones relacionadas con los siguientes aspectos: cómo se aprenden, cuáles estrategias resultan efectivas, qué errores y dificultades son enfrentadas y cómo, qué características debe reunir una actividad para llevarla al salón de clases, qué aportaciones ofrecen a la educación matemática los recursos tecnológicos (recurso computacional como: applets, Excel), cuándo y cómo incorporarlos, etcétera; además de las que resultan de analizar materiales físicos (datos, monedas, ruletas, etc.) y virtuales (simulaciones) de los que dispone el profesor para desarrollar su trabajo. Este planteamiento retoma algunos aspectos planteados en [1] respecto al tratamiento didáctico que se recomienda para contenido de estocásticos.

Los aspectos antes mencionados están dirigidos a orientar el trabajo didáctico del profesor acorde al planteamiento de la reforma, en la que es fundamental el desarrollo de competencias en los estudiantes, entendiendo por competencia la articulación que se debe generar entre conocimientos, habilidades, actitudes y valores.

Metodología

La estrategia que se propone para implementar las actividades diseñadas es la siguiente:

- Iniciar con una ubicación general del curso a cargo del o los instructores, poniendo especial atención en las motivaciones que ha tenido, en las actividades contempladas, en las dinámicas de participación y en las principales expectativas.
- Las situaciones problemáticas previstas se abordarán primeramente por los participantes, individualmente o por equipos, con el propósito de que pongan en juego sus conocimientos previos respecto de la situación planteada.
- Si el primer acercamiento a la actividad es individual se pasará a una discusión por equipos, en la que tendrán la oportunidad de presentar sus estrategias utilizadas para resolver la situación y/o los resultados que hayan obtenido, al mismo tiempo tendrán la oportunidad de escuchar otras propuestas de sus compañeros lo que los puede llevar a replantear la validez de sus conocimientos y estrategias utilizadas.
- Una vez que se realiza la discusión en equipos pequeños se organizará una discusión grupal en la que los participantes tendrán la oportunidad de tener un tercer acercamiento de la misma situación, escuchando las opiniones de más compañeros.

- En la discusión colectivamente se promoverá la reflexión en aspectos que consideramos de gran importancia en la actualización de los profesores tales como las estrategias seguidas o los contenidos matemáticos empleados, las dificultades y aprendizajes que surgen en la actividad, así como el papel que los recursos tecnológicos pueden jugar en el desarrollo de tales situaciones y, en su caso, la pertinencia y forma en que éstas pudieran ser llevadas al salón de clase.

Tanto en el trabajo de equipo como en el grupal el participante tendrá la oportunidad de argumentar a favor de las estrategias que ha utilizado y de los resultados que ha obtenido, así como de refutar los argumentos que planteen sus compañeros. Las acciones antes mencionadas son las que le permitirán al sujeto tener nuevas experiencias de aprendizaje para poder modificar o enriquecer sus conocimientos.

Actividades

Presentamos ahora algunas de las actividades que forman parte de una de las secuencias didácticas que proponemos para el desarrollo de ideas relacionadas con la identificación de situaciones probabilísticas y situaciones no probabilísticas.

Descripción de las actividades.

Las dos primeras actividades que se presentan tienen el propósito de que el profesor-estudiante tenga la oportunidad de enfrentar una situación en la que deberá poner en juego sus conocimientos y/o creencias para determinar cuándo una situación es aleatoria o no.

El propósito de la actividad es que los profesores estudiantes:

- Pongan en juego sus conocimientos y/o creencias de lo que es una situación aleatoria.

- Reflexiones sobre las características que debe tener una situación para ser considerada como aleatoria.

Tal como se señala en la parte de la metodología general, en estas actividades se plantea que el profesor estudiante primero trate de resolver de manera individual los cuestionamientos planteados en cada situación. Una vez que cada participante ha generado sus respuestas se propone que integren equipos de cuatro personas para que discutan sobre las respuestas generadas por cada integrante del equipo.

Después de que han discutido en los equipos se plantea una discusión grupal en la que los equipos deberán plantear los acuerdos o desacuerdos obtenidos y son sometidos al resto del grupo.

Situación 1. La toma de decisiones en nuestras actividades cotidianas¹

En nuestro quehacer diario tomamos una gran cantidad de decisiones, muchas de ellas son para la organización de nuestras actividades inmediatas, en otras ocasiones nos ayudan a planear nuestra vida a mediano o largo plazo. Por ejemplo, al comprar un automóvil mediante un plan de autofinanciamiento, necesitamos tomar en cuenta una serie de factores que determinan la posibilidad de poder cumplir con este compromiso durante un periodo de tres, cuatro o cinco años, dependiendo del plan que seleccionemos; lo mismo sucede cuando

¹ Las actividades se han retomado del material didáctico: *Pensamiento Variacional*, material de trabajo del tercer módulo del diplomado “Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria”, impartido en 2006 a profesores de secundaria del Estado de Sonora.

decidimos adquirir vivienda mediante un plan de financiamiento, en este caso estamos hablando de un compromiso a pagar en un periodo más largo de tiempo.

Actividad 1. Planes de financiamiento

El agente de ventas de automóviles nuevos, le ofrece al cliente potencial dos opciones para el pago de un auto:

Plan 1. En la primera opción de pago le propone hacer un pago inicial del 35% del valor del auto y 36 pagos mensuales fijos de \$3,850.00.

Plan 2. En la segunda opción de pago le propone hacer un pago inicial de 20% del valor del auto y 36 pagos mensuales, el primer pago será de \$3,100.00 y variará en función de la inflación mensual registrada por la Secretaría de Hacienda.

1.1 ¿Es posible saber cuánto pagará mensualmente el cliente si escoge el plan 1? _____
¿Por qué? _____

1.2 Si el cliente acepta el primer plan, ¿Cuánto pagará en total por el automóvil? _____

1.3 Si el cliente acepta el plan 2, ¿Cuánto pagará en total por el automóvil? _____
¿Por qué? _____

1.4 Las situaciones planteadas en cada uno de los planes de pago, ¿Son deterministas o aleatorias? _____
¿Por qué has dado esa respuesta? _____

1.5 Si la compra se hiciera en este momento, ¿Cómo le puede hacer el cliente para estimar lo que pagaría en total por el auto si selecciona el segundo plan? _____

¿Por qué? _____

1.6 Si el cliente decide utilizar el plan 2, ¿Cuáles son los costos totales posibles que puede pagar por el auto? _____

Actividad 2. Cómo planear un operativo vacacional

Durante los periodos vacacionales las autoridades municipales, estatales y federales, montan operativos para salvaguardar la seguridad de las personas que se trasladan de un lugar a otro.

2.1 ¿Cómo crees que le hacen las autoridades para ubicar los puntos conflictivos? _____

2.2 Antes de implementar el operativo, ¿puede la autoridad correspondiente determinar con certeza cuántos agentes colocar en cada punto crítico? _____ ¿Por qué? _____

2.3 Determinar el número de agentes que participarán en el operativo, ¿Es una situación determinista o aleatoria? _____, ¿Por qué? _____

2.4 Antes de implementar el operativo, ¿Puede la autoridad correspondiente saber cuántos accidentes ocurrirán en ese período vacacional? _____ ¿Por qué? _____

2.5 Determinar el número de accidentes que se presentarán en el próximo periodo vacacional, ¿Es una situación determinista o aleatoria? _____ ¿Por qué? _____

2.6 ¿Es posible hacer una estimación del número de accidentes que se pueden presentar en el próximo período vacacional? _____ ¿Cómo crees que se puede hacer? _____

Éstas son sólo dos de las primeras actividades que integran una secuencia didáctica, la cual está formada por un grupo mayor.

5. Conclusiones

Nuestra experiencia al trabajar con profesores de secundaria nos dice que de los contenidos de matemáticas que más descuidados se tienen en el aula son los relacionados con Probabilidad y Estadística, que en la nueva estructura corresponden al eje curricular de Manejo de la Información. Además, al aplicar un instrumento para tener un diagnóstico de los conocimientos y el tipo de razonamiento probabilístico que utilizan los profesores, hemos podido identificar la presencia de conocimientos incorrectos o incompletos así como sesgos en el tipo de razonamiento que utilizan al enfrentar situaciones probabilísticas.

Por lo antes expuesto consideramos que es muy importante promover cursos de actualización y capacitación dirigidos a profesores del nivel básico, con contenido matemático en general y en particular de Probabilidad y Estadística

6. Referencias

- [1] Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. España: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- [2] Dirección General de Desarrollo Curricular, SEP (2006). *Reforma de la Educación Secundaria. Fundamento Curricular: Matemáticas*. Secretaría de Educación Pública. México
- [3] Hugues, E., Jiménez, J., Larios, I., Urrea, M. (2006). *Pensamiento Variacional*. México: Universidad de Sonora .

Construir gráficas de funciones a partir de graficar los incrementos de las variables

Dr. José Carlos Cortés Zavala
Facultad de Físico Matemáticas
Universidad Michoacana
jcortes@umich.mx

Nivel educativo: Medio Superior y Superior

Resumen

En el siguiente artículo se propone un acercamiento gráfico-numérico para realizar gráficas de funciones. Para ello se propone iniciar introduciendo las ideas de diferencias, incrementos y razón de incrementos tanto en forma numérica como gráfica, y a partir de estas ideas iniciar la construcción de gráficas de funciones. El que esto escribe diseñó y desarrolló un software de apoyo a la introducción de estas ideas. Para abordar la temática se exponen ideas teóricas y una exposición de lo propuesto en el software.

1. Planteamiento

Se propone un acercamiento numérico para resaltar la importancia de iniciar la graficación de funciones, para ello se utiliza la graficación de incremento de variables y la graficación de razón de cambio. De esta manera se introduce de forma más intuitiva, el concepto de función derivada. Se introducen las ideas de diferencias, incrementos y razón de incrementos tanto en su forma numérica como gráfica. Para su realización se utiliza un software “*ad-hoc*” diseñado y desarrollado como apoyo a la introducción de estas ideas.

Diversos investigadores señalan la importancia de introducir el concepto de derivada a través del uso de razones de cambio y de igual manera es posible introducir el concepto de función derivada. Basado en esta idea se diseñó y desarrolló un software, denominado “Funciones y Derivadas” Cortés (2002). En él se incorporaron actividades que resaltan aspectos relacionados con diferencias, incrementos y razón de incrementos, tomando como base ideas visuales y que sirven de apoyo para la construcción del concepto de función derivada.

2. Marco Teórico

Hughes (1990) observó que muchos estudiantes calculan algebraicamente las derivadas de diversas funciones, pero no son capaces de determinar, en una gráfica, en qué lugares la función tiene derivada positiva y en cuáles negativa. Además, la autora nota que pocas veces se utiliza un acercamiento numérico para enseñar este concepto. Confrey (1993) indica que la presencia de tablas numéricas puede (1) iluminar la conexión funcional de los valores contenidos en ellas y (2) la presentación algebraica. Scher (1993) realizó un estudio sobre la utilización de múltiples representaciones para conceptualizar la derivada. Él concluye que existe la necesidad de promover el uso de tales representaciones para que el estudiante obtenga un entendimiento adecuado de los conceptos del cálculo, menciona, por ejemplo, que “la noción de razón de cambio debe ser accesible para todos los estudiantes” (Scher, 1993, p. 16). Por su parte Cortés et al. (Cortés et al. 2005) hacen una propuesta basada en un acercamiento numérico para introducir el concepto de función derivada.

El tratamiento numérico y gráfico es usado poco. Propuestas como la de Duval (1988, 1993 y 1995), Confrey (1993), Scher (1993), Mejía (1997), Hitt (2002) y Pluvinage (2005) mencionan

la importancia, que tiene para el aprendiz, el manejo gráfico y numérico. Los aspectos numéricos, gráficos y algebraicos son representaciones de los objetos matemáticos y cada uno de ellos presenta cierto tipo de información del objeto, además permiten cierto tipo de actividades cognitivas en el sujeto. Cuando solamente se usa un tipo de representación se corre el riesgo, como lo menciona Duval (1988), de confundir al objeto con la representación, por lo que este investigador, propone el uso de múltiples representaciones de un objeto.

3. La Propuesta

El planteamiento se ubica dentro de la teoría de sistemas semióticos de representación (Duval 1988, 1993 y 1995), ya que el software permite la manipulación de diferentes representaciones relativas a diferentes registros de representación, además de motivar las tareas de conversión entre representaciones; es decir, permite el tratamiento de representaciones en cada uno de los registros y conversión entre representaciones.

Se introducen las ideas de incrementos de variables tanto en forma numérica como gráfica. En la siguiente sección vamos a mostrar la forma en que se presenta la información para resaltar las ideas de incrementos de variables y la de razón de cambio.

Incrementos de Variables

En el tema de **Incrementos de variables** de forma numérica, éstos se hacen explícitos a partir de una tabla que contiene 4 filas tal y como se muestra en la Figura 1. El objetivo es introducir numéricamente esta noción ya que de acuerdo a los datos encontrados en una experimentación realizada no es fácil que los estudiantes comprendan la noción de incremento de variables. También se realiza la graficación de x y y como un punto, el *incremento de x* en forma horizontal y *el incremento de y* de forma vertical (ver Figura 2).

Inc. x	1	1	1	1	1	1	1	1
x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	4.	6.	36.	118.	276.	534.	916.	1446.
Inc. y		2.	30.	82.	158.	258.	382.	530.

Figura 1

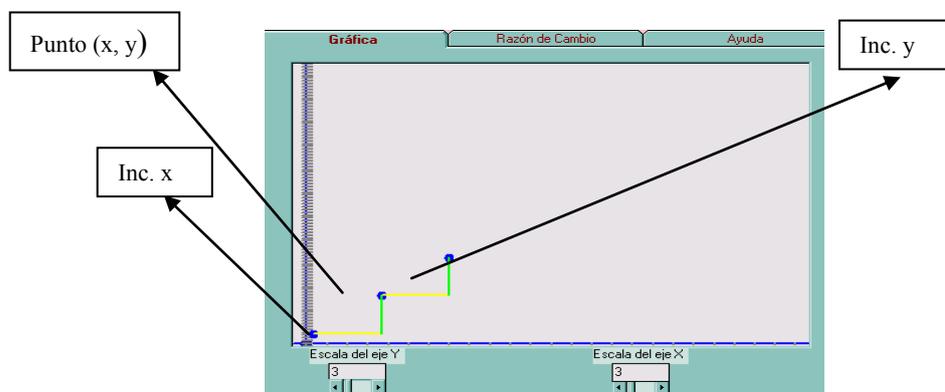


Figura 2

Razones de Cambio

El acercamiento numérico y gráfico al concepto de **Razón de Cambio** se realiza a través del llenado de tablas de valores y de su reflejo en la construcción de graficas. A través de este acercamiento se introduce la pendiente de una recta como la razón de incrementos, es decir, se da significado a lo que representa una razón de cambio. La opción **Razón de Cambio** se aborda como el cociente de dos incrementos, con este resultado se va llenando una tabla de valores (ver Figura 3) la cual representará una nueva función que hemos denominado “función razón de cambio” (ver Figura 4). Si se Selecciona una función cúbica de la forma, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se generan aleatoriamente los parámetros a , b , c y d (fig. 4 y 5).

	Inc. x	1	1	1	1	1	1	1
x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	4.	6.	36.	118.	276.	534.	916.	1446.
inc. y		2.	30.	82.	158.	258.	382.	530.
x	0	1	2	3	4	5	6	7
R. Cambio								

Figura 3

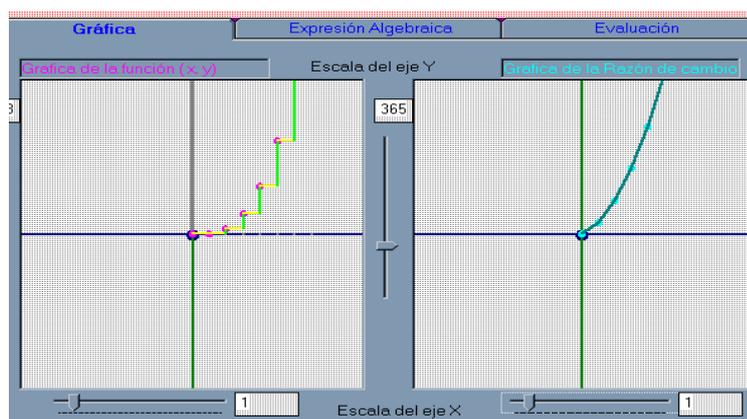


Figura 4

4. Metodología

La experimentación se practicó con cinco estudiantes de bachillerato durante doce horas, repartidas en cuatro sesiones. Se trabajó en una sala equipada con tres computadoras, un pizarrón y dos cámaras de video. Se formaron tres equipos de trabajo (dos con dos estudiantes y uno de uno) y cada uno de ellos trabajó en una computadora con el software desarrollado. En la primera sesión se dio una instrucción sobre la navegación en el paquete, para que en las sesiones siguientes el estudiante navegara libremente los contenidos permitidos en el software. El instructor se desempeñó básicamente como un observador pero podía intervenir para contestar algunas preguntas cuando le eran requeridas o para hacer preguntas que propiciaran que los estudiantes encontraran por sí mismos la estrategia correcta.

5. Resultados

Dentro del desarrollo de la presente experimentación se detectó que la idea de incremento de una variable no es entendida fácilmente por los estudiantes, lo cual dificulta entender la razón de cambio y por supuesto el concepto de derivada. A través del uso del software y de la intervención del profesor, la idea de incrementos de variables fue entendida por los estudiantes

6. Conclusión

Por medio del uso de tablas de valores de funciones es posible que los estudiantes entiendan el concepto de diferencias e incrementos de variables, así mismo el uso de la graficación de incrementos para delinear la gráfica de la función permitirá que el estudiante entienda lo que es una razón de cambio. Utilizando a su vez la razón de cambio podrán construir una nueva función y a partir de ella, los educadores pueden introducir la función derivada.

7. Referencias

- [1] Cortés C. (2002). Desarrollo de software para la enseñanza del cálculo diferencial. Tesis de doctorado. Cinvestav-ipn, México, 2002.
- [2] Cortés et al (2005). Software para la enseñanza de la derivada. *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* Editorial Morevallado. México.
- [3] Confrey, J.(1993). *A constructivist research programme towards the reform of mathematics educations.* (Introduction to symposium for the Annual Meeting of American Education Research Association), April, 1993.
- [4] Duval R. (1988) Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. *Anales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En *Antología en Educación Matemática* (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.
- [5] Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.
- [6] Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Peter Lang, Suisse.
- [7] Hitt F. (2002) *Funciones en contexto.* Editorial Pearson Educación. México.
- [8] Hughes, D.(1990). Visualization and Calculus Reform. In *Visualization in Teaching and Learning Mathematics: A Project (MAA notes #19)*. Walter Zimmerman and Steven Cunningham, eds. Washington DC: Mathematical Association of America, 1-8.
- [9] Mejía, H.(1997). Geometría Analítica, Gráficas y Tablas. *en el octavo seminario nacional de calculadoras y computadoras en educación matemática* Universidad de Sonora 1997. Pp.315-322.
- [10] Scher, D.(1993). Students' Conceptions of the Derivative across Multiple Representations. *Mathematics in College* (Fall): 3-17.

Explorando transformaciones lineales en el plano usando GeoGebra

César Fabián Romero Félix , José Luis Soto Munguía
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
Cesar.rfelix@gauss.mat.uson.mx

Nivel Educativo: Superior

Resumen

En el presente trabajo se describe una actividad que se propone para la enseñanza de transformaciones lineales en el nivel superior. Particularmente en los cursos de álgebra lineal de las carreras de ciencias e ingeniería. Se diseñó la actividad con el objetivo de apoyar a los estudiantes en la construcción de un significado geométrico para las transformaciones lineales. Nos servimos del software GeoGebra para crear un ambiente dinámico con el cual, junto con instrucciones escritas e indicaciones del profesor a cargo, los alumnos puedan identificar transformaciones lineales y no lineales definidas de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R}^2

1. Introducción

El álgebra lineal es una de las principales disciplinas matemáticas enseñadas a nivel universitario aunque es común que se le considere difícil de aprender o enseñar. En la enseñanza de esta materia podemos identificar un tipo de enfoque como el más difundido, aquel que privilegia el formalismo y la estructura axiomática de la disciplina.

En general tal tendencia suele provocar confusión en los estudiantes de manera que no entienden los conceptos lo cual da pie a que trabajen en el nivel de manipular expresiones pero ignoran los significados de éstas o las reglas matemáticas que siguen. Esto ha sido documentado por varios investigadores y algunos acuñaron el término “obstáculo del formalismo” para referirse a esta problemática [6].

En el caso de las transformaciones lineales, uno de los temas principales dentro de un curso álgebra lineal, algunas de las dificultades acarreadas son el no poder reconocer a las transformaciones lineales en distintos registros de representación, no distinguir entre transformaciones lineales y no lineales o incluso no poder pensar en la existencia de transformaciones no lineales.

También sucede que al hacer la conexión con la geometría de los conceptos vistos previamente de manera abstracta mediante ejemplos casi triviales, las transformaciones lineales son identificadas sólo como movimientos geométricos simples (contracciones, expansiones, rotaciones, etc.) o combinaciones de éstos y se descartan transformaciones más complicadas como $T(x,y)=(-2x-y,-x+y)$, o se incluyen entre las lineales aquellas transformaciones que se pueden describir como traslaciones [4].

Esto, como se mencionó, tiene que ver con la forma en que se usan los lenguajes aritmético (de los espacios \mathbf{R}^n), algebraico (de la teoría general de espacios vectoriales) y geométrico (de

los espacios de 2 y 3 dimensiones) en el aprendizaje del álgebra lineal, pues en estos enfoques se utiliza principalmente el lenguaje algebraico para introducir conceptos y resolver problemas, mientras el lenguaje aritmético y el geométrico se dejan para exponer ejemplos. Aquí se pueden observar los problemas de la operación cognitiva de conversión relacionados con el paso de un lenguaje a otro, o más precisamente de un sistema de representación semiótica a otro.

Si tomamos en cuenta la teoría de representaciones semióticas de Duval [3] se suelen pasar por alto las complicaciones de realizar la operación de conversión dándole un carácter trivial cuando hay evidencias de que en álgebra lineal la conversión entre registros juega un papel central en el aprendizaje y que las conversiones que involucran al registro de la escritura simbólica resultan de mayor complejidad [5].

2. Características de la propuesta

Dada esta situación, consideramos necesario que los estudiantes cuenten con una aproximación al concepto de transformación lineal que sea más intuitiva que la del habitual enfoque formalista y por lo tanto diseñamos una actividad didáctica centrada en los significados gráficos de las transformaciones lineales y no lineales en \mathbf{R}^2 . Para apoyar a los estudiantes en la construcción de tales significados diseñamos un ambiente dinámico con GeoGebra además de hojas de trabajo que junto con las instrucciones del profesor servirán de guía para la actividad del estudiante, incluyendo su interacción con el software.

Basados en algunos resultados de varios investigadores en la materia, el diseño de las actividades se guía por los siguientes lineamientos:

- Privilegiar las representaciones gráficas y propiciar la realización de conversiones entre este registro y los de la lengua natural y el algebraico.
- Utilizar ambientes dinámicos diseñados con GeoGebra para facilitar a los estudiantes la observación y comprobación de las propiedades gráficas de una transformación lineal.
- Poner énfasis en la distinción entre transformaciones lineales y no lineales.

La propuesta incluye un archivo HTML visible desde cualquier navegador web y unas hojas de trabajo, las cuales incluyen instrucciones y preguntas para los estudiantes.

En la actividad se les presentan a los estudiantes cuatro funciones de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R}^2 , de las cuales una es transformación lineal, con la intención de que los estudiantes además de identificar las propiedades definitorias gráficamente puedan distinguir entre transformaciones lineales y no lineales. Las transformaciones no lineales se seleccionaron para que de alguna manera fueran unas *menos lineales* que otras para tratar de que el significado que los estudiantes construyan sea más preciso.

En el archivo HTML se presenta gráficamente, por un lado el dominio de la función y por el otro la imagen de ésta. Como se puede apreciar en la siguiente figura.

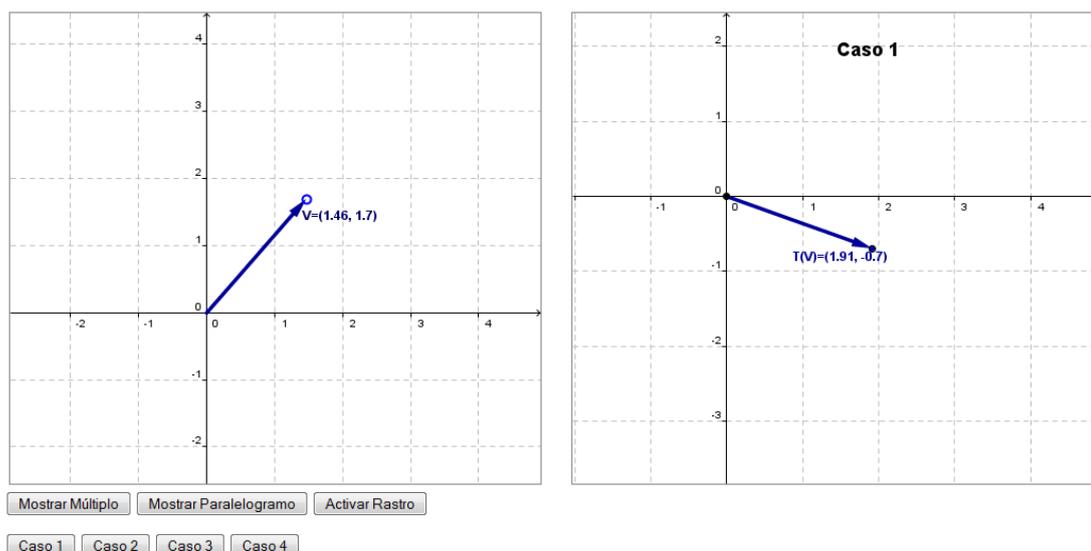


Figura 1: Posición de las gráficas en pantalla

Ambas gráficas corresponden a archivos de GeoGebra de modo que los objetos son modificables directamente en pantalla con el uso del ratón o algún otro dispositivo apuntador. Aunque, para mantener la atención de los estudiantes en las partes que creemos importantes, fijamos algunos objetos para que no pudieran ser manipulados. Por el mismo motivo, también desactivamos la barra de herramientas de GeoGebra ya que todas las construcciones necesarias ya están hechas.

Las instrucciones de las hojas de trabajo tratan de guiar al estudiante para que se percate de las diferencias en comportamiento entre las 4 funciones que se le presentan y que observe que sólo una tiene las propiedades deseadas. Se incluyen tablas, a llenar por el estudiante, para anotar qué propiedades observan a partir de su interacción con el ambiente dinámico en los cuatro casos incluidos. Las tablas son como la que se muestra a continuación.

Tabla 1: Ejemplo de una tabla.

Para estos valores de k:	Anote aquí cómo cambia la gráfica de la derecha
0	
1	
-1	
2	
-2	
Escoja un número entre 5 y -5 Anótelos aquí ____	

Al final de las hojas de trabajo hay otra tabla en la que los estudiantes deben anotar todas las propiedades gráficas que observaron y especificar cuáles funciones cumplen tales propiedades, esto con el motivo de que observen que sólo una es transformación lineal. Entre las transformaciones no lineales, se puede observar que algunas cumplen una de las dos propiedades que definen a una transformación lineal, y que otras sólo lo hacen en ciertas regiones del plano.

3. Sobre el uso de GeoGebra

Como ya se mencionó, la actividad se diseñó con el apoyo del software GeoGebra. La elección de GeoGebra como apoyo tecnológico es principalmente debida a las características dinámicas e interactivas que lo sitúan como un software de geometría dinámica (DGS por sus siglas en inglés), particularmente por la herramienta *elige y mueve* (comúnmente llamada *arrastrar* en otros programas del mismo tipo) que permite la manipulación directa en pantalla de objetos geométricos, dando así la oportunidad de trabajar, en nuestro caso, con *vectores arbitrarios*, análogo a usar letras para representar números arbitrarios. Esta cualidad de ser *variable* se presenta en tanto éstos estén siendo modificados con tal herramienta y en el momento que un objeto deje de ser *movido* pierde el carácter *variable* y se mantiene como un objeto *particular*.

Otras características de GeoGebra esenciales para el diseño de esta actividad es la capacidad de mostrar en pantalla distintas representaciones de los objetos, en particular representaciones gráficas y algebraicas que son las que escogimos, y que éstas estén dinámicamente articuladas, es decir, al modificar alguna representación de un objeto las otras son instantáneamente modificadas de manera acorde.

Una última cualidad que resultó bastante útil es la de exportar las construcciones a un archivo HTML visible desde cualquier navegador web sin necesidad de tener instalado el programa GeoGebra y que dentro de este archivo HTML se pueden abrir varios archivos de GeoGebra que se comuniquen entre sí, mediante código en lenguaje javascript, de manera que al modificar algún objeto desde un archivo de GeoGebra se puede programar una respuesta en el otro archivo, por ejemplo modificar un vector al cambiar el valor de un número en otro archivo, como se muestra en la figura 2.

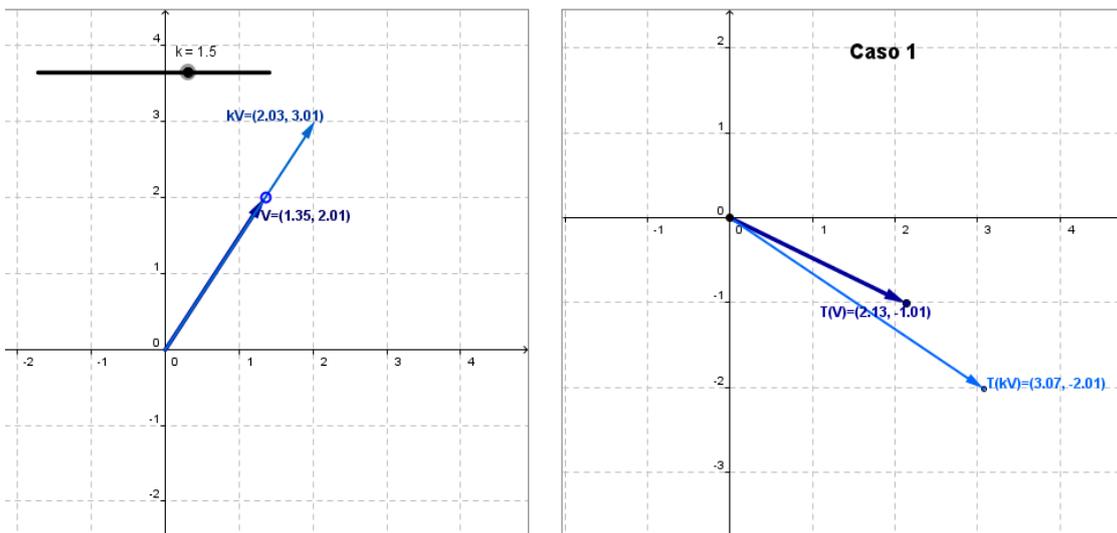


Figura 2: Dos archivos en pantalla comunicados por javascript.

4. Referencias

- [1] Dreyfus, T., Hillel, J., & Sierpinska, A. (1999). Cabri based linear algebra: Transformations. *First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (págs. 209-221). Osnabrück, Alemania: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik.
- [2] Duval, R. (1997). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* , 37-65.
- [3] Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano : registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Ed. Universidad del Valle.
- [4] Molina, J. G., & Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* , 241-273.
- [5] Pavlopoulou, K. (1993). Un problema decisivo para el aprendizaje del álgebra lineal: la coordinación de registros de representación. *Annales de didactique et de sciences cognitives* , 67-93.
- [6] Uicab, R., & Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* , 459-490.

Diseño de software educativo: construcción de algoritmos para el manejo de gráficas y construcciones geométricas interactivas

Lourdes Guerrero M, Christian Morales O
Universidad Michoacana
{gmagana,chris}@umich.mx

Nivel: Medio Superior

Resumen

La computadora permite trabajar con gráficas de ecuaciones matemáticas de manera dinámica e interactiva; sin embargo, para que la computadora sea una buena herramienta de aprendizaje, necesitamos generar algoritmos eficientes que permitan a esta herramienta realizar las acciones precisas para generar expresiones visuales de los objetos matemáticos en diferentes representaciones semióticas. En este trabajo, presentamos los resultados de un trabajo de investigación encaminado al desarrollo de algoritmos eficientes de graficación de cónicas y otras curvas, para permitir la interacción dinámica directa con estas gráficas.

1. Introducción

La geometría analítica es una de las asignaturas del tronco común de muchos bachilleratos; su enseñanza no solamente debe implicar la identificación de formas geométricas, sino también de sus propiedades y relaciones a través de procesos de exploración. Para ello, los estudiantes deben tener oportunidades de interactuar con los objetos geométricos realizando tratamientos en una misma representación y conversiones entre representaciones (Duval, 1993); es decir, tener un contacto directo con los objetos matemáticos a través de sus múltiples representaciones para propiciar un aprendizaje significativo y más duradero (Carpenter & Lehrer, 1999) que aquel que se produce mediante un proceso tradicional.

Así mismo, al disponer en todo momento de diferentes formas de representar un objeto matemático, de tal manera que podamos extraer la esencia del mismo, se logra una mayor comprensión de los conceptos y nociones. La computadora es una de las mejores herramientas para este fin cuando nos apoyamos en el software adecuado a las necesidades de aprendizaje específicas.

En el curso de geometría analítica del bachillerato, generalmente se incluye el estudio de la recta y las cónicas en sus diferentes representaciones y es precisamente, la conversión entre diferentes representaciones, uno de los procesos principales en esta área. Así, se espera que los estudiantes aprendan a graficar las ecuaciones de las cónicas (esto es, realizar una conversión de un registro simbólico a uno gráfico, de acuerdo con la teoría de Duval (1993)), aprendan a reconocerlas a partir de la identificación de características específicas, o a relacionar una gráfica específica con una ecuación.

Cada una de las representaciones en que puede ser expresado un concepto matemático aporta una variedad distinta de información que, en conjunto, permite tener una mejor comprensión del concepto. La teoría de los Registros de Representación de Duval (1999), señala que los estudiantes pueden tener un mejor entendimiento de los conceptos si la instrucción favorece el uso, no solamente de una forma de representarlo, sino diferentes formas de hacerlo que, además, deben conectarse para permitir a los estudiantes transitar de una a otra.

Las diferentes formas de representar un concepto, y las formas en que podemos transitar de una representación a otra, deben ser promovidas mediante experiencias de aprendizaje que ayuden a los estudiantes a conectar y entender los conceptos más allá de solo manipular sus representaciones (Hitt, 2008). Diferentes representaciones nos permiten ver los objetos matemáticos desde diferentes perspectivas; para capturar más información, que nos permita a su vez entenderlos mejor.

La información gráfica está tomando una renovada importancia en el estudio de las matemáticas (Balderas, 2005). Los estudiantes deben tener oportunidades de aprender a interpretar, entender, transformar y comunicar información gráfica. En particular, en el curso de geometría analítica, la representación gráfica de las cónicas, y la posibilidad de realizar tratamientos en el registro gráfico de manera directa, además de promover el desarrollo de habilidades de visualización (Hitt, 1998; Balderas, 2005) en los estudiantes, ayuda a la mejor comprensión de los conceptos propios de esa área de las matemáticas.

La inclusión de la tecnología computacional en el proceso de enseñanza aprendizaje, requiere del uso de software especializado. Sin embargo, la mayoría de las veces solamente se dispone de paquetes de cómputo diseñados por industrias de software, que resultan ser muy genéricos a nivel de la enseñanza, aún siendo software de matemáticas. El resultado es que estos paquetes de cómputo tienen poco potencial para la enseñanza, ya que normalmente no toman en cuenta los aspectos pedagógicos, además de la eficiencia en el diseño algorítmico (Clements & Battista, 2000). Así mismo, la mayor parte del software comercial se evalúa a nivel del funcionamiento, sin seguir una etapa de prueba en donde se ponga en juego su potencialidad real y su conexión con la teoría e investigación bajo la que fueron diseñados.

Un diseño efectivo de software educativo, debe estar basado en modelos de aprendizaje que puedan ser articulados en un ambiente tecnológico (Wong, 2003). Además, su implementación debe estar libre de errores computacionales; los que muchas veces están asociados a la imposibilidad de las computadoras de realizar algunos procesos y ocuparse de algunos conceptos matemáticos, sobre todo aquellos que tienen que ver con la variación continua o la definición de un dominio de variación.

Por tal motivo, el desarrollo de un software efectivo para la enseñanza y la investigación en educación matemática, debe considerar una gran cantidad de elementos tanto de carácter educativo como de tipo computacional; así mismo, debe someterse a diferentes fases de evaluación, tanto en términos de su funcionamiento como en el sentido educativo específico para lo que fue diseñado.

2. Diseño computacional efectivo para el manejo de las curvas

El trazo de figuras geométricas en un sistema computacional se basa en rutinas básicas de dibujo como son el punto, el segmento y la circunferencia. Estos objetos geométricos tienen asociadas propiedades de color y posición de acuerdo con un sistema de referencia asociado a la pantalla de la computadora. Así, las imágenes gráficas de la computadora deben ser generadas mediante rutinas de dibujo apoyadas en estos objetos gráficos básicos: puntos, segmentos, circunferencias y un sistema de coordenadas cartesianas.

Por ejemplo, si queremos que un programa de computadora muestre la gráfica de una función, deberemos diseñar un algoritmo que permita realizar dicha tarea en la pantalla con base en los elementos gráficos básicos. Dicho algoritmo es un plan expresado como una secuencia de acciones precisas que nos llevan al objetivo final; en este caso, una gráfica en la pantalla de la computadora, construida posiblemente mediante un conjunto de pequeños segmentos que

unen de manera consecutiva, una serie de puntos sobre la curva, de tal forma que mientras más segmentos tengamos mejor será la aproximación a la curva real (ver figura 1). Este proceso se ha denominado históricamente como *rectificación de una curva*.

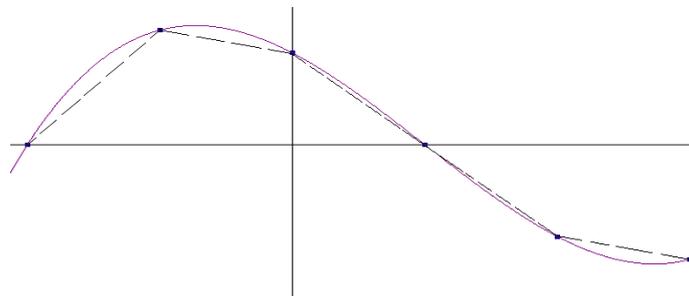


Figura 1. Rectificación de una curva

El algoritmo puede ser tan general, como para permitirnos graficar cualquier tipo de curva; pero debe incluir las restricciones específicas asociadas a los dominios de definición de las curvas. En este sentido, deberemos buscar las mejores estrategias de construcción, para tomar en cuenta las restricciones en el dominio de las variables, que pueden ocasionar errores de cálculo y caídas del sistema de cómputo.

3. El caso de la recta

La recta parecería ser uno de los casos más simples en la construcción de un algoritmo de graficación ya que, teniendo al segmento como figura básica, la recta puede ser expresada mediante un segmento cuya longitud abarque toda la pantalla de la computadora. Por ejemplo, para graficar la recta cuya ecuación es $y = 3x + 5$, podemos graficar un segmento con punto inicial en $(0, 5)$ y punto final en (p, q) , donde p es el ancho de pantalla y $q \geq 3p + 5$ (ver figura 2).

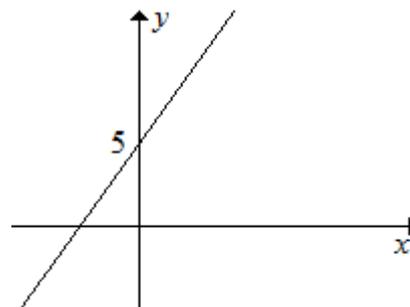
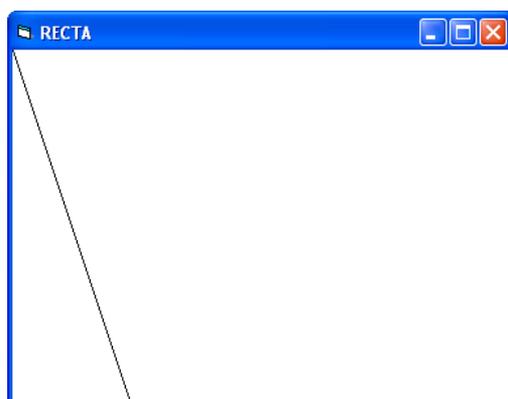


Figura 2. Gráfica de la recta $y = 3x + 5$ en la pantalla de la computadora. Observe que el origen del sistema de coordenadas de la pantalla está en la esquina superior izquierda de la misma. Así mismo, la unidad en el sistema es el pixel por lo que una gráfica que usualmente se visualiza como en la figura de la izquierda, se construye básicamente como en la de la figura de la derecha.

Sin embargo, si el software bajo diseño tiene como intención promover el aprendizaje de conceptos de geometría analítica, se necesita poder trazar rectas en el sentido de la geometría euclidiana; es decir, rectas que no necesariamente están asociadas a un sistema de coordenadas. Debemos por ejemplo, producir rectas verticales a través de un algoritmo, lo cual se vuelve un problema de construcción, cuando se usa una ecuación que incluya a la

pendiente, como lo es $y = mx + b$. Esto se debe a que la pendiente está asociada con la expresión $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ en la que, si $\Delta x = 0$, se produce un “error de máquina” (errores producidos por el uso de valores muy pequeños o muy grandes, divisiones por cero, etc.).

Lo que necesitamos entonces es diseñar un algoritmo eficiente para la graficación de rectas y otras curvas que pueden presentar problemas análogos. En el caso de la recta, el problema se puede resolver utilizando las ecuaciones paramétricas, en lugar de las ecuaciones en coordenadas cartesianas.

4. Ecuaciones paramétricas de la recta

Una recta en el plano puede definirse mediante el conjunto de puntos $P(x, y)$ cuyas coordenadas x y y están dadas mediante una pareja de ecuaciones de la forma:

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

donde f y g son dos funciones continuas de variable t , a la que se denomina parámetro.

Para determinar dos funciones f y g , asociadas con una recta l , observemos lo siguiente:

- 1) Si $Q(x_0, y_0)$ es cualquier punto de la recta, entonces existe t_0 para el cual $x_0 = f(t_0)$ y $y_0 = g(t_0)$
- 2) Si \vec{v} es un vector paralelo a l , entonces \vec{v} y l tienen la misma inclinación.

Entonces, si $P(x, y)$ y $Q(x_0, y_0)$ son dos puntos de l y $\vec{v} = \langle v_x, v_y \rangle$ un vector de posición paralelo a l , tenemos: □

$$\square \quad \vec{PQ} \text{ es paralelo a } \vec{v} \quad \text{y} \quad \theta = \alpha.$$

Entonces:

$$\vec{PQ} = t \left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right), \text{ donde } t \text{ es una constante.}$$

y,

$$\langle x - x_0, y - y_0 \rangle = t \langle v_x, v_y \rangle$$

de donde

$$x = x_0 + t v_x; \quad y = y_0 + t v_y$$

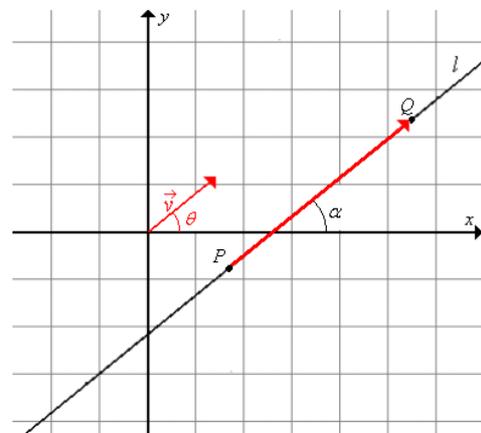


Figura 3. Recta l paralela a \vec{v}

que corresponden a una pareja de ecuaciones paramétricas de la recta l , donde t es el parámetro de las ecuaciones y está definido en el intervalo $(-\infty, \infty)$. □

Por ejemplo, la pareja de ecuaciones $x = 5 - 3t$ y $y = 2 + t$ definen la recta que pasa por el punto de

coordenadas $(5, 2)$ y es paralela al vector $\vec{v} = \langle -3, 1 \rangle$. Así mismo, el conjunto de ecuaciones

$x = 0$
 $y = 5 + t$ define una recta que pasa por $(0, 5)$ y es paralela al vector $\vec{v} = \langle 0, 1 \rangle$; es decir definen, sin restricción alguna, una recta paralela al eje y (recta vertical).

En general, el conjunto de ecuaciones $x = x_0 + tv_x$ $y = y_0 + tv_y$ para $t \in (-\infty, \infty)$, define una recta en el plano x - y que puede graficarse sin tener que restringir sus variables y parámetros y , por consiguiente tampoco el tipo de rectas a graficar.

Esta parametrización de la recta permite que el algoritmo de graficación de rectas sea eficiente en el sentido de que asegura la ausencia de errores de máquina; lo que a su vez, permite generar algoritmos eficaces para que el estudiante pueda interactuar dinámicamente y sin restricciones con los objetos geométricos en pantalla. Estos algoritmos adicionales incluyen entre otros: la detección de la recta para realizar alguna acción sobre ella y , el movimiento de la misma utilizando el ratón de la computadora (ver figura 4).

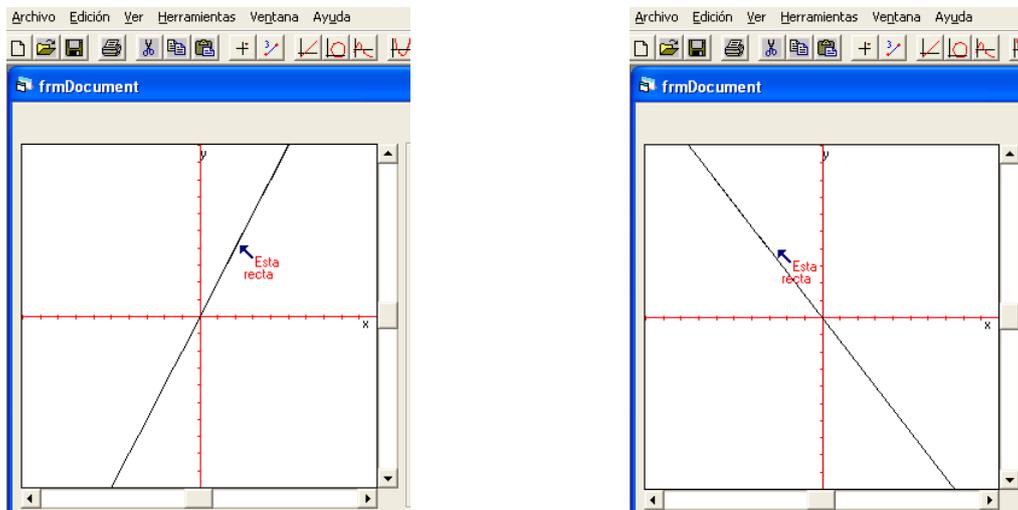


Figura 4. Ratón detectando la recta para girar

Al igual que en el caso de la recta, las ecuaciones cartesianas de las cónicas pueden presentar restricciones en cuanto a la determinación de algunos parámetros, debido a la forma en que intervienen en la ecuación. Por ejemplo, para una elipse centrada en el origen, con radio en x

igual a a y radio en y igual a b , tenemos una ecuación cartesiana de la forma: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

que, en la interacción dinámica para realizar algún tratamiento sobre ella, puede llevar a producir valores de a o b iguales a cero, ocasionando nuevamente un error de máquina. En este caso, el uso de las ecuaciones paramétricas, aunado a la definición geométrica de la elipse, nos permite evitar estos posibles errores de máquina en la dinamización de los objetos.

De:

A:

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \begin{matrix} x = c + a \cos \theta \\ y = k + b \operatorname{sen} \theta \end{matrix}$$

Donde ahora $\theta \in [0, 2\pi]$ es el parámetro.

En el proceso de interacción con la figura, se requiere determinar cualquiera de los elementos que componen al conjunto de ecuaciones paramétricas a partir de las coordenadas dadas por la posición del ratón en cualquier instante. Por ejemplo, si queremos modificar „continuamente“

el valor de a , las ecuaciones paramétricas nuevamente nos llevarían a un posible error de máquina, ya que deberíamos utilizarlas de la siguiente forma:

$$\theta_0 = \text{sen}^{-1}\left(\frac{y-k}{b}\right); \quad a = \frac{x-c}{\cos\theta_0}$$

Para resolver este problema de cálculo, podemos usar la definición de la elipse: “*El lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es una constante*”. Así, si $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ son las coordenadas de los focos de una elipse centrada en el origen cuyo radio mayor está en el eje x , tenemos:

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = k = 2a$$

Por lo que

$$a = \frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{2}$$

De igual manera, en el caso de la hipérbola las ecuaciones paramétricas junto con la definición geométrica de la misma, nos proporcionan los medios para construir un algoritmo de graficación eficiente desde el punto de vista computacional.

5. Conclusiones

La tecnología computacional está siendo parte de nuestra vida cotidiana; particularmente, en la enseñanza, está modificando la forma en que se enseña y se aprende matemáticas. En especial, la tecnología tiene un gran potencial como herramienta de aprendizaje en aquellas áreas del conocimiento en las que la representación gráfica y visualización son mecanismos muy importantes para el entendimiento de conceptos.

La geometría analítica es una de esas asignaturas, en las que la visualización es esencial para analizar y representar, en diferentes registros, las ideas y conceptos fundamentales. Por ejemplo, la tecnología hace que el concepto de lugar geométrico tome, nuevamente, un lugar importante en esa área de estudio; concepto que históricamente da origen a la que actualmente llamamos geometría analítica.

6. Referencias

- [1] Balderas, Patricia (2005). Visualización y uso de tecnología en el aula. En: *Memorias de la XI Jornadas de Investigación en el aula de matemáticas. La Geometría*. Granada, España.
- [2] Carpenter, T., Lehrer, R. (1999) Teaching and Learning Mathematics with Understanding. En: Elizabeth Fennema y Thomas Romberg (Eds.). *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp. 19-32). NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- [3] Clements D., Battista, M. (2000). Designing effective software. En: Anthony E. Kelly y Richard A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 761-776). NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- [4] Duval, R. (1993): Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: Fernando Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*, Editorial Iberoamericana, p.p 173-201. Traducción del documento original publicado por Université Louis Pasteur de Strasbourg, France.

Discrepancias en el cálculo de los cuartiles y posibles consecuencias en el aprendizaje de los estudiantes en dichos conceptos

Alejandrina Bautista Jacobo
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
ale@gauss.mat.uson.mx

Nivel: Medio Superior y Superior

Resumen

El siguiente trabajo pretende analizar las discrepancias que existen en el resultados del cálculo de los cuartiles para datos sin agrupar por parte de algunos autores de textos y software estadístico y las posibles implicaciones en el aprendizaje que podría provocar en los estudiantes esta falta de unanimidad, no solo por dichos autores, sino por los mismos maestros que impartimos dichos cursos. Se prestan las maneras de cómo algunos texto llegan a obtener los cuartiles y la forma operacional de estos conceptos de los software como SPSS, STATA y EXCEL.

1. Introducción

Uno de los principales problemas con el que nos enfrentamos los maestros que impartimos estadística, aparte de la motivación, son las habilidades matemáticas con las que cuentan los estudiantes. Particularmente, en el área de la estadística nos enfrentamos a errores como por ejemplo, el confundir el cálculo de $\sum(f \times m^2)$ por $\sum(f \times m)^2$. En cuanto a las representaciones gráficas, confunden mucho un polígono con una gráfica acumulada (ojivas) y no se diga de las interpretaciones que tienen que dar sobre las gráficas o las medidas de resumen, o en los conceptos de prueba de hipótesis. Son muchos los tipos de errores o los diferentes obstáculos que nos encontramos en el aprendizaje de la estadística, lo interesante aquí es saber identificar qué tipo de obstáculos se presentan para poder abordar esta problemática.

Afortunadamente existen ya investigaciones y asociaciones que trabajan en esta dirección, tales como la IASE (International Association for Statistical Education) o la revista The Journal of Statistics Education, por mencionar algunas, que intentan apoyar al docente, no solo con material didáctico para esta área, sino que además permiten la difusión de investigaciones sobre las dificultades y errores que cometen los estudiantes en la interpretación de los contenidos de estadística. En Batanero y colaboradores [1] se exponen algunas de estas dificultades que experimentan los estudiantes, asimismo, hacen referencia sobre algunas concepciones teóricas que debemos tomar en cuenta los docentes a la hora de detectar estos errores conceptuales.

Este trabajo no trata de profundizar sobre tales concepciones teóricas, pero sí propiciar una reflexión en la comunidad de profesores de estadística sobre las posibles implicaciones que podría provocar en los estudiantes la falta de “unanimidad” en el cálculo de percentiles por parte de los textos de estadística, así como también en algunos paquetes estadísticos y entre los mismos profesores que impartimos tales cursos.

Se mostrarán en particular algunas maneras de obtener los cuartiles para datos no agrupados por partes de distintos autores de textos estadísticos, así como también, los resultados obtenidos para estos valores usando SPSS, STATA y EXCEL.

2. La experiencia en clase

Cuando se habla de implicaciones en este trabajo, se refiere a la incertidumbre que provoca en los estudiantes el realizar estos cálculos y confiar o no en el resultado obtenido, y esto surge precisamente del comentario de un alumno en una clase de estadística cuando se estaba tratando el tema de los cuartiles: *“maestra, una compañera de otro grupo tiene otro procedimientos para calcular los cuartiles, ¿cuál es el correcto? Al explicarles precisamente que existe una discrepancia para el cálculo de los cuartiles entre diferentes autores de texto de estadística surgieron comentarios como: “¿quiere decir que para un mismo grupo de datos puede haber cuartiles diferentes, dependiendo del procedimiento que se utilice.?”*. Al afirmarlo y mencionar que tales procedimientos arrojan valores aproximados, algunos alumnos ponen cara de desconcierto. Esto se debe a que hay alumnos que sí aceptan la idea de que pueda existir más de un procedimiento para calcular los cuartiles. Pero ellos esperarían que tales procedimientos arrojaran los mismos resultados.

Esta situación es precisamente la que se pone de manifiesto en este documento. Ya que quizás no sea un problema el que existiera más de un procedimiento para el cálculo de cuartiles, el detalle está en que tales procedimientos arrojan resultados diferentes.

Tal situación quizás no sea significativo para algunos maestros, e incluso para ciertos autores de textos en este campo, ya que muy poco se comenta al respecto. En Navidi [2] se hace el siguiente comentario: *“...Existen diferentes formas de calcular cuartiles, pero todos dan aproximadamente el mismo resultado.* Con respecto al software se comenta: *“... algunos software usan métodos ligeramente diferentes para calcular cuartiles, por lo que sus resultados no pueden ser exactamente los mismos que los obtenidos por el método que aquí se describió.”*

Álvarez [3] también expone lo siguiente:

“Hay discrepancias en el cálculo de los percentiles entre distintos autores”

Más adelante, en una apartada titulado: Discrepancia en el cálculo de percentiles, Álvarez comenta:

“Sorprende que en una cosa aparentemente tan sencilla como el cálculo de percentiles no haya unanimidad de cálculo entre los diferentes autores, por eso el valor de un determinado percentil de un conjunto de datos puede ser diferente si se utiliza distintos programas informáticos.”

Álvarez también hace referencia a el software estadístico, que es otro aspecto por comentar, ya que al hacer uso de esos recursos para los análisis estadísticos, se presentan precisamente esas discrepancias cuando se le pide a los alumnos que calculen los cuartiles y el diagrama de caja en algunos paquetes como SPSS, STATA o simplemente en EXCEL, los tres muestran para un mismo conjunto de datos valores diferentes para Q_1 y Q_3 . Esto, de alguna manera confunde a los estudiantes. En Schuyten [4] refiere que la diferencia entre el conocimiento declarativo de un concepto y el procedimiento utilizado para su cálculo puede ser un problema para los estudiantes. Incluso hace referencia a la mediana, y señala que los alumnos

tienen dificultades en aceptar que existan diferentes procedimientos y con resultados diferentes para un mismo concepto.

3. Forma de encontrar la posición de los cuartiles para datos no agrupados en algunos textos y software estadísticos

La definición de los cuartiles es presentada de manera muy similar en la mayoría de los textos de estadística. Berenson y Levine [5] los exponen así: “*El primer cuartil, Q_1 , es un valor tal que 25.0% de las observaciones son menores y 75.0% de las observaciones son mayores. El segundo cuartil, Q_2 , es la mediana, 50.0% de las observaciones son menores y 50.0% de las observaciones son mayores. El Tercer cuartil, Q_3 , es un valor tal que el 75.0% de las observaciones son menores y 25.0% son mayores.*”

Al igual que la mayoría de los textos de estadística, exponen las siguientes expresiones para encontrar la posición de los cuartiles para datos no agrupados: Q_1 = valor correspondiente a

$\frac{n+1}{4}$ observación clasificada

Q_2 = mediana, valor correspondiente a $\frac{2(n+1)}{4} = \frac{n+1}{2}$ observación clasificada,

Q_3 = valor correspondiente a $\frac{3(n+1)}{4}$, observación clasificada.

Para encontrar los cuartiles plantean las siguientes reglas:

“1. Si el punto de posicionamiento resultante es un entero, se elige la observación numérica particular correspondiente a ese punto de posicionamiento para el cuartil.

2. Si el punto de posicionamiento resultante está a la mitad del camino entre dos enteros, se selecciona el promedio de sus valores correspondientes.

3. Si el punto de posicionamiento no es ni un entero ni un valor a la mitad del camino entre dos enteros, se usa una regla simple para aproximar el cuartil particular que consiste en redondear al punto de posicionamiento entero más cercano y seleccionar el valor numérico de la observación correspondiente.”

Retomando los datos que presentan como ejemplo: 4.9, 6.3, 7.7, 8.9, 10.3 y 11.7,

$Q_1 = \frac{6+1}{4} = 1.75ta \cong 2da$ observación clasificada, es decir, $Q_1 = 6.3$. La posición para la

mediana sería: $Q_2 = \frac{6+1}{2} = 3.5ta$, de modo que, según las reglas especificadas, el valor de la

mediana será el promedio del 3er y 4to valor, de modo que: $Q_2 = \frac{7.7+8.9}{2} = 8.30$. Por

último, la posición para el tercer cuartil es, $Q_3 = \frac{3(6+1)}{4} = 5.25ta \cong 5ta$ observación clasificada, esto es, $Q_3 = 10.30$.

Como se puede observar, Berenson y Levine presentan una manera sencilla de encontrar los cuartiles.

Por su parte, Lind y colaboradores [6] exponen la expresión $L_p = (n+1)\frac{P}{100}$ para localizar cualquier punto percentil, en donde n es el número de observaciones y P representa el percentil que se busca. Se puede observar que, para el caso particular de los cuartiles, la fórmula expuesta por Lind es exactamente igual a lo expuesto por Berenson. La diferencia aquí radica en la regla para localizar el punto percentil una vez obtenido el resultado de la fórmula. Veamos el ejemplo que presentan Lind y colaboradores:

“...suponga que un conjunto de datos contiene los seis valores: 91, 75, 61, 101, 43 y 104. Busca localizar el primer cuartil. Ordene los valores de menor a mayor: 43, 61, 75, 91, 101 y 104. El primer cuartil se localiza en

$$L_{25} = (n+1)\frac{P}{100} = (6+1)\frac{25}{100} = 1.75$$

La fórmula de localización indica que el primer cuartil se localiza entre el primero y segundo valores, que representa 0.75 de la distancia entre el primero y segundo valores. El primer valor es 43 y el segundo 61. De esta manera, la distancia entre estos valores es 18. Al localizar el primer cuartil, necesita desplazarse una distancia de 0.75 entre el primero y segundo valores; así, $0.75(18)=13.5$. Para completar el procedimiento, sume 13.5 al primer valor e indique que el primer cuartil es 56.5”

Se hace la aclaración que para el caso en donde la fórmula arroja un valor entero, Lind usa el mismo criterio que Berenson para encontrar la posición del cuartil.

Mientras que Lind hace una especie de interpolación lineal, William Navidi expone estos conceptos de la siguiente forma: *“...Existen diferentes formas de calcular cuartiles, pero todos dan aproximadamente el mismo resultado. El método más simple cuando se calcula manualmente es el siguiente: Sea n el tamaño de la muestra. Ordene los valores de la muestra del más pequeño al más grande. Para encontrar el primer cuartil, calcule el valor $0.25(n+1)$. Si éste es un entero, entonces el valor de la muestra en esa posición es el primer cuartil. Si no, tome entonces el promedio de los valores de la muestra de cualquier lado de este valor. El tercer cuartil se calcula de la misma manera, excepto que se usa el valor $0.75(n+1)$. El segundo cuartil usa el valor $0.5(n+1)$. El segundo cuartil es idéntico a la mediana.”*

Ahora bien, si calculáramos el primer cuartil para el ejemplo que presenta Lind usando el procedimiento de Navidi, tendríamos que $Q_1 = \frac{43+61}{2} = 52$, mientras que con la regla de Berenson, éste daría el valor de 61. Tenemos entonces tres valores diferentes: 56.5, 52 y 61 para el primer cuartil de un mismo conjunto de datos. Supongamos que los valores que se presentan en el ejemplo de Lind fueran puntajes en un examen de admisión, y que se decidiera elegir a todos aquellos que están por arriba del primer cuartil. Obviamente se tendría que decidir también la regla para elegir la posición del cuartil, ya que, según la regla de Berenson, se elegirían todos los que están por arriba de 61 sin incluir al 61. Por lo que respecta a Lind y Navidi entrarían todos los que están por arriba de 56.5 y 52 respectivamente, conjunto que si incluiría al valor de 61.

Antes de pasar al software estadístico, se describirá un procedimiento más que se encuentra en Kazmier [7]. Al igual que en los casos anteriores, se expondrá exclusivamente la expresión

para los cuartiles: $C_1(\text{primer cuartil}) = X_{[(n/4)+(1/2)]}$, $C_2(\text{segundo cuartil}) = X_{[(2n/4)+(1/2)]}$ y $C_3(\text{tercer cuartil}) = X_{[(3n/4)+(1/2)]}$

Como se puede observar, la discrepancia con Kazmier consiste en el procedimiento, no en los criterios para elegir la posición de los cuartiles. Por la estructura de la fórmula, ésta siempre dará un valor entero o un valor entre la mitad de dos enteros. En caso de dar un valor entero, Kazmier al igual que los demás elige el dato que se encuentra en esa posición para el cuartil. En caso contrario, elige el promedio de los dos valores enteros. Dependiendo de la cantidad de datos, los cuartiles pueden coincidir con los calculados por Berenson y si la cantidad de ellos es muy grande, se puede llegar a obtener valores muy aproximados entre ellos.

Con respecto al software estadístico, veamos los resultados que presentan para los cuartiles para los datos presentado por Lind.

Estadísticos

VAR00001		
N	Válidos	6
	Perdidos	0
Percentiles	25	56.5000
	50	83.0000
	75	101.7500

Tabla 1. Resultados SPSS

```
. tabstat var1, statistics( p25 p50 p75 )
```

stats	var1
p25	61
p50	83
p75	101

Tabla 2. Resultados STATA

Datos		
43		
61	Q1	64.5
75	Q2	83
91	Q3	98.5
101		
104		

Tabla 3. Resultados EXCEL

La Tabla 1 presenta los resultados hechos en el programa SPSS versión 15, la Tabla 2 son resultados obtenidos usando el software STATA versión 10.0, y la Tabla 3 los resultados en EXCEL. Se puede observar que los resultados obtenidos por SPSS coinciden con Lind y colaboradores, mientras que los valores que se presenta en STATA son los mismos resultados obtenidos por Berenson. Los procedimientos que hace Excel no son muy precisos y hay mucha confusión al respecto por parte de los alumnos.

3. Conclusión

Como se puede observar, son varios los criterios que se usan para encontrar la posición de los cuartiles los cuales arrojan resultados diferentes, salvo la mediana. Y aunque estas discrepancias consistan en los resultados y no en lo conceptual, si es importante que la comunidad de maestros que impartimos cursos de estadística pongamos un poco de atención a esta situación. Sabemos que es válido que se pueda tener varios procedimientos para llegar a una solución. Lo que confunde a los estudiantes es ver como dichos procedimientos no

convergen a un mismo resultado. Esta experiencia la hemos vivido algunos de nosotros en el salón de clase al exponer estos temas. A los alumnos no les queda muy clara esta falta de unanimidad y se quedan con cierta incertidumbre. Pese a las explicaciones que pudiéramos dar, no aceptan muy bien el hecho de que haya varios procedimientos y que arrojen resultados diferentes para un mismo concepto.

Hay dos situaciones más que se observa en la enseñanza de los cuartiles. Una de ellas es que los alumnos no aceptan que el resultado sea un valor que no existe entre los datos. Esto no solo pasa con los cuartiles, sino con cualquier otra medida de posición. La otra situación que se da entre algunos estudiantes es la falta de comprensión del mismo concepto de percentil. Se observa con regularidad entre ellos que confunden el resultado de la fórmula para la posición del cuartil con el valor mismo. Afortunadamente ya existen investigaciones relacionadas con la comprensión de este concepto (Mayén [8], Alcántara y Ríos [9], Cobo y Batanero [10]), que quizás podrían servir de apoyo para iniciar en nuestra comunidad un trabajo alrededor del la comprensión del concepto de percentil.

4. Referencias

- [1] Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P., Vallecillos, A. (1996). *Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales*. Recuperado el 9/12/2009, de la dirección electrónica: <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/erroresestadis.doc>
- [2] Navidi, W. (2006). *Estadística para ingenieros y científicos*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- [3] Álvarez, R. (2007). *Estadística aplicada a las ciencias de la salud*. Madrid: Díaz de Santos.
- [4] Schuyten, G., Belgium, G. (1991). *Statistical thinking in psychology and education*. Recuperado el día 1/12/2009, de la dirección electrónica:
a. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/18/BOOK2/B9-5.pdf>
- [5] Berenson, M. L., Levine, D. M. (1996). *Estadística básica en administración, conceptos y aplicaciones*. México: Prentice Hall Hispanoamericana.
- [6] Lind, D. A., Marchal, W. G., Wathen, S. A. (2008). *Estadística aplicada a los negocios y a la economía*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- [7] Kazmier, L. J. (1978). *Estadística aplicada a la administración y a la economía*. México: McGraw-Hill Interamericana.
- [8] Mayén, S., Díaz, C., Batanero, C. (2009). *Students' semiotic conflicts in the concept of median*. Recuperado el día 1/12/2009, de la dirección electrónica:
[http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ8\(2\)_Mayen.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ8(2)_Mayen.pdf)
- [9] Alcántara, F., Ríos, M de J. (). *Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. Un estudio de caso en estudiantes de educación superior*. Recuperado el día 2/12/2009, de la dirección electrónica:
<http://www.comie.org.mx/congreso/memoria/v9/ponencias/at05/PRE1178975300.pdf>
- [10] Cobo, B., Batanero, C. (2000). *La mediana en la educación secundaria obligatoria: ¿un concepto sencillo?* Recuperado el día 2/12/2009, de la dirección electrónica:
<http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/MEDIANA.pdf>

Importancia de la Lógica en la enseñanza de demostraciones matemáticas

Carlos Arturo Loredo Villalobos
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana – Unidad Iztapalapa
r2ro.loredo@gmail.com

Nivel Educativo: Medio Superior, Superior

Resumen

Establecer la validez de una proposición mediante una demostración es parte de la vida cotidiana de un matemático y la demostración es la base del edificio matemático. Dos de las mayores dificultades que enfrentan los estudiantes de matemáticas a lo largo de su formación son: entender las demostraciones escritas en algún libro y aprender a construir demostraciones por cuenta propia. En este trabajo proponemos que para sanar estas dificultades es necesaria una enseñanza metodológica de lógica matemática.

1. Introducción

Muchos estudios coinciden en la necesidad de dotar al estudiante de matemáticas de una formación lógica elemental (ver p. ej. [2],[4]) y en la dificultad que tienen para entender y realizar demostraciones (ver [3]). En matemáticas interesan principalmente los argumentos correctos basados en deducciones sistemáticas. La lógica nos ayuda a construir proposiciones, a evaluar su certeza y establece reglas específicas de inferencia que permiten determinar cuando un razonamiento es correcto o incorrecto. Consideramos que para aprender a leer, entender y construir demostraciones, es necesario descomponer la prueba en una serie de pasos simples y observar las claves entre ellos. Como primer paso antes de realizar una demostración es importante conocer la forma lógica de la proposición a demostrar. Este paso nos ayuda a elegir el método de prueba más apropiado y a distinguir tanto los posibles supuestos – la(s) hipótesis – como lo que se quiere probar – la conclusión. Teniendo identificado lo anterior la prueba se construye utilizando los conocimientos específicos del campo en el cual se presenta la proposición y auxiliándose de las reglas de inferencia para garantizar que los razonamientos aludidos sean válidos. En el presente trabajo presentamos los elementos lógicos que, a nuestro juicio, son necesarios para un mejor entendimiento de una demostración matemática.

2. Elementos de lógica de enunciados

Para la lógica el lenguaje es importante en tanto sistema semiótico. Las leyes lógicas garantizan que si ciertas expresiones lingüísticas son verdaderas, entonces algunas otras también serán verdaderas y esto dependerá sólo de como están estructuradas, *i.e.* de su forma lógica. Se hacen entonces necesarios la existencia de un lenguaje formal adecuado y un análisis

lógico-semántico. En matemáticas, las pruebas formales son el resultado de sistemas formales, consistentes de un lenguaje formal, de axiomas y de reglas de deducción. A grandes rasgos un lenguaje formal consiste de un conjunto de símbolos iniciales y de reglas de formación. La estructura del lenguaje formal del cálculo de enunciados, abreviado \mathcal{L}_{CE} , consiste de

1. Letras enunciativas: P, Q, R, \dots ó $P_i, Q_i, R_i \dots$ ($i \in \mathbb{N}$)
2. Conectivos lógicos:

\neg negación, $\&$ conjunción, \vee disyunción, \rightarrow condicional, \leftrightarrow bicondicional

Con los conectivos construimos las expresiones lógicas: $(\neg A)$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ y $(A \leftrightarrow B)$, llamadas formas enunciativas. Mediante \mathcal{L}_{CE} podemos escribir la forma lógica de muchas expresiones (véase p. ej. [4]). Los siguientes ejemplos, propios del lenguaje matemático, lo ilustran.

Ejemplo 1. Si una función f es continua en un intervalo y no tiene ceros en él, entonces $f(x) > 0$ o bien $f(x) < 0$.

Sean: $P - f$ es continua en un intervalo, $Q - f$ tiene ceros en el intervalo, $R - f(x) > 0$, $S - f(x) < 0$

$$\text{Forma Lógica: } (P \& \neg Q) \rightarrow (R \vee S)$$

Ejemplo 2. Dos rectas que no son verticales, son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

Consideremos los enunciados: $P -$ dos rectas son verticales, $Q -$ las dos rectas son paralelas, $R -$ las dos rectas tienen la misma pendiente

$$\text{Forma lógica: } \neg P \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$$

2.1. Leyes lógicas

Los conectivos lógicos de \mathcal{L}_{CE} pueden caracterizarse semánticamente por medio de las llamadas tablas de verdad, que se aprenden en un curso de lógica elemental. Cualquier forma enunciativa tiene un valor de verdad que dependerá de los valores de verdad de los enunciados que lo constituyen. La verdad o falsedad de un enunciado depende de la interpretación que se le den a las letras enunciativas.

En lógica interesan aquellas formas enunciativas que son tautológicas. Se llama tautología a una forma enunciativa que toma siempre el valor de verdad *verdadero*, sean cuales sean los valores de verdad de las letras enunciativas que en ella aparecen. Se representa con el símbolo \models . Desde un punto de vista semántico, en la demostración de una proposición se debe hacer ver que dicha proposición es consecuencia lógica de ciertas hipótesis u otras proposiciones. El concepto de consecuencia lógica es fundamental para la lógica y debe ser importante en la base de conocimientos del estudiante de matemáticas.

Definición 1 (Consecuencia lógica). Dadas dos formas enunciativas A y B , se dice que B es consecuencia lógica de A , que se denota $A \models B$, si la implicación $(A \rightarrow B)$ es una tautología.

Definición 2 (Equivalencia lógica). Dadas dos formas enunciativas A y B se dice que son lógicamente equivalentes, denotado $A \equiv B$, si el bicondicional $(A \leftrightarrow B)$ es una tautología.

Algunas tautologías son sumamente importantes y reciben el nombre de *leyes lógicas*. Es importante que los estudiantes conozcan y memoricen algunas de ellas.

1. Identidad: $\models \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$	6. Transitividad: $\models ((\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}) \& (\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C})) \rightarrow (\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C})$
2. Tercero excluso: $\models \mathbb{A} \vee \neg \mathbb{A}$	7. Contraposición: $\vdash (\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}) \leftrightarrow (\neg \mathbb{B} \rightarrow \neg \mathbb{A})$
3. No contradicción: $\models \neg(\mathbb{A} \& \neg \mathbb{A})$	8. Modus ponens: $\models ((\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}) \& \mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{B}$
4. Doble negación: $\models \neg \neg \mathbb{A} \leftrightarrow \mathbb{A}$	9. Modus tollens: $\models ((\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}) \& \neg \mathbb{B}) \rightarrow \neg \mathbb{A}$
5. Importación/exportación: $\models ((\mathbb{A} \& \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{C}) \leftrightarrow (\mathbb{A} \rightarrow (\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}))$	

Tabla 1. Algunos ejemplos de leyes lógicas

2.2. Inferencia lógica

Muchos estudiantes de matemáticas no siempre tienen claro si los argumentos a los que aluden en una prueba son correctos o no, es por ello necesario contar con un conocimiento mínimo sobre inferencia lógica. A el proceso de inferir una proposición \mathbb{B} – llamada conclusión – de ciertas proposiciones dadas $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_n$ – llamadas premisas – se le conoce como razonamiento y se representa por lo general de forma esquemática del modo siguiente:

$$\frac{\begin{array}{c} \mathbb{A}_1 \\ \mathbb{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{A}_n \end{array}}{\mathbb{B}}$$

Las reglas de inferencia son reglas de razonamiento con las cuales deducimos una conclusión correcta. Un razonamiento es válido o correcto cuando, si sus premisas son verdaderas, entonces necesariamente lo es también su conclusión. Las inferencias son importantes pues permiten deducir una proposición a partir de otras proposiciones aceptadas o previamente demostradas como verdaderas. Ahora bien, es conveniente aclarar lo siguiente: una ley y una regla son lo mismo, sólo que dicho de dos maneras distintas. Una ley es la forma enunciativa de un esquema válido de inferencia, mientras que una regla es el enunciado de una instrucción para realizar una inferencia válida. Por ejemplo la ley o regla del *modus ponens* puede escribirse:

Ley (tautología): $((\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}) \& \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{Q}$	Regla de inferencia: $\frac{\begin{array}{c} \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q} \\ \mathbb{P} \end{array}}{\mathbb{Q}}$
---	---

La primera expresión es la forma enunciativa de dicha ley o regla, mientras que la segunda es una instrucción que puede ser enunciada de la siguiente manera: *si tomamos como premisas un condicional y su antecedente podemos inferir el consecuente como conclusión.*

2.3. El condicional

En matemáticas muchas afirmaciones son expresadas mediante condicionales. Los estudiantes llegan a presentar dificultades en el manejo verbal y conceptual del condicional. Al menos debe ser claro para ellos lo siguiente, dado como condicional base $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, existen tres condicionales asociados:

Recíproco. $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$.

Contrario. $\neg\mathbb{A} \rightarrow \neg\mathbb{B}$.

Contrapuesto. $\neg\mathbb{B} \rightarrow \neg\mathbb{A}$.

De estos, únicamente el contrapuesto es lógicamente equivalente al condicional base.

3. Elementos de lógica de predicados

Existen muchas expresiones que no pueden traducirse a \mathcal{L}_{CE} , por eso se hace necesario contar con un lenguaje más complejo: el cálculo de predicados \mathcal{L}_{CP} . La lógica de predicados supone una extensión del análisis lógico formal a través del examen lógico de la estructura de los enunciados. A grandes rasgos la lógica de predicados – una lógica de predicados puros propiamente dicho – esta compuesta por tres elementos: los *términos* (nombres de objetos), los *predicados* (propiedades de los términos) y los *cuantificadores*: universal (\forall) y existencial (\exists). (Consúltense [1] y [6] para más detalles).

Ejemplo 3. El enunciado, *todos los números primos a excepción del 2 son impares*, traducido a \mathcal{L}_{CP} quedaría:

$$\forall x((P(x) \& \neg Q(x, 2)) \rightarrow R(x))$$

donde $x \in \mathbb{Z}$, $P(\alpha)$: α es primo, $Q(\alpha, \beta)$: α es igual a β y $R(\alpha)$: α es impar.

La formalización y análisis de predicados supone un tratamiento exhaustivo, sin embargo consideramos que los estudiantes deben conocer al menos lo siguiente: la caracterización semántica, la negación de los cuantificadores y algunas reglas universalmente válidas.

3.1. Caracterización semántica de los cuantificadores

$$\forall x \mathbb{A}(x) \text{ es } v \iff_{\text{Dfn}} \mathbb{A}(x_0) \text{ es } v \text{ sea cual sea } x_0$$

$$\forall x \mathbb{A}(x) \text{ es } f \iff_{\text{Dfn}} \mathbb{A}(x_0) \text{ es } f \text{ para algún } x_0$$

$$\exists x \mathbb{A}(x) \text{ es } v \iff_{\text{Dfn}} \mathbb{A}(x_0) \text{ es } v \text{ para algún } x_0$$

$$\exists x \mathbb{A}(x) \text{ es } f \iff_{\text{Dfn}} \mathbb{A}(x_0) \text{ es } f \text{ sea cual sea } x_0$$

donde $\mathbb{A}(x_0)$ es una instancia (de sustitución) de $\mathbb{A}(x)$ y x_0 es un elemento del dominio de definición de la variable x .

3.2. Negación de los cuantificadores

$$\neg(\forall x \mathbb{A}(x)) \iff_{\text{Dfn}} \exists x \neg\mathbb{A}(x); \quad \neg(\exists x \mathbb{A}(x)) \iff_{\text{Dfn}} \forall x \neg\mathbb{A}(x)$$

3.3. Fórmulas universalmente válidas

Hacemos hincapié en tres fórmulas:

$$(\forall x \mathbb{A}(x)) \leftrightarrow (\neg(\exists x \neg\mathbb{A}(x))); \quad (\exists x \mathbb{A}(x)) \leftrightarrow (\neg(\forall x \neg\mathbb{A}(x))); \quad \exists x \forall y \mathbb{A}(x) \rightarrow \forall y \exists x \mathbb{A}(x)$$

de las cuales la última nos dice que los cuantificadores universal y existencial no son conmutativos en ambos sentidos. Por ejemplo, la propiedad del inverso aditivo del campo de los números reales ilustra este hecho.

4. Sobre los métodos de prueba

Hemos hablado hasta el momento de la importancia de ciertos aspectos lógicos en la construcción de una demostración. En general no existe un procedimiento único para realizar una demostración – nos referimos en este caso a las demostraciones deductivas –, pero conocer la forma lógica de una proposición nos da idea de cual es el método de prueba más apropiado. Mencionamos brevemente sólo dos métodos: *directo* y *reducción al absurdo*, por considerarlos significativos en el entrenamiento del pensamiento matemático (ver [5]).

4.1. Método directo

Consiste en suponer verdadera la forma lógica de las premisas y a partir de ello llegar a establecer que entonces la forma lógica de la conclusión también es verdadera. Si la forma lógica de la proposición es un condicional $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, la estrategia recomendada es encontrar una sucesión finita de pequeñas implicaciones verdaderas de la forma:

$$\begin{array}{c} \mathbb{A}_1 \\ \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2 \\ \mathbb{A}_2 \rightarrow \mathbb{A}_3 \\ \vdots \\ \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{B} \\ \hline \mathbb{B} \end{array}$$

con $\mathbb{A}_1 \equiv \mathbb{A}$. Cuando \mathbb{A} es verdadera se debe tener que $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ es verdadera, luego por la regla de inferencia *modus ponendo ponens*, \mathbb{B} es verdadera, que es lo que deseamos.

Ejemplo 4. Demostrar la siguiente proposición: *dados dos números racionales x y y tales que $x < y$, existe un número racional z entre ellos.*

Análisis de la demostración. La forma lógica de la proposición es:

$$\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow \exists z (P(x, z) \& P(z, y)))$$

donde $x, y, z \in \mathbb{Q}$ y $P(\alpha, \beta)$: α es menor que β . La presencia de cuantificadores universales nos indica que debemos elegir arbitrariamente dos números racionales x, y y con ellos mostrar que el condicional es verdadero. Si procedemos por el método directo debemos suponer que $P(x, y)$ es verdadera, *i.e.* $x < y$, y debemos concluir que existe un $z \in \mathbb{Q}$ tal que $P(x, z) \& P(z, y)$, *i.e.* existe un $z \in \mathbb{Q}$ tal que $x < z$ y $z < y$. La presencia del cuantificador existencial nos indica que debemos exhibir o construir un cierto objeto matemático que satisfaga, en este caso, las propiedades $P(x, z)$ y $P(z, y)$.

Demostración. (por el método directo). Sean x y y dos números racionales tales que $x < y$. Entonces $x = \frac{p}{q}$ y $y = \frac{r}{s}$, con $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ y $q, s \neq 0$, tales que $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$. Entonces

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} < \frac{2r}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{q} \left(\frac{s}{s} \right) + \frac{r}{s} \left(\frac{q}{q} \right) < \frac{2r}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{ps + rq}{2qs} < \frac{r}{s}$$

Análogamente

$$\frac{p}{q} < \frac{ps + rq}{2qs}$$

Obsérvese que $ps + rq \in \mathbb{Z}$ y $sq \neq 0$, por lo tanto, haciendo $u = ps + rq$, $v = sq$ y $z = \frac{u}{v}$ se tiene $x < z < y$. \square

4.2. Reducción al absurdo

El método de reducción al absurdo de una proposición \mathbb{A} consiste en establecer que la negación de \mathbb{A} , lleva a un absurdo: $(\mathbb{C} \& \neg \mathbb{C})$. Si se muestra que $\neg \mathbb{A}$ implica tal contradicción, entonces en virtud de que $(\mathbb{C} \& \neg \mathbb{C})$ siempre es falsa, se concluye que $\neg \mathbb{A}$ también es falsa. En el caso particular de que la forma lógica de una proposición sea un condicional $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, el método de reducción al absurdo comienza por suponer que \mathbb{A} y $\neg \mathbb{B}$, y por medio de una sucesión de pasos lógicamente válidos, se llega a una proposición contradictoria.

Ejemplo 5. Queremos probar la siguiente proposición: *para cualesquiera números reales a, b , si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$.*

Análisis de la demostración. La forma lógica de la proposición es:

$$\forall a \forall b (\mathbb{P}(f(a, b), 0) \rightarrow (\mathbb{P}(a, 0) \vee \mathbb{P}(b, 0)))$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(\alpha, \beta)$: α es igual a β , $f(\alpha, \beta) : \alpha \cdot \beta$. Obsérvese que el conectivo principal es un condicional. Si procedemos por reducción al absurdo, debemos suponer que $\mathbb{P}(f(a, b), 0)$ es verdadera y adicionalmente que $(\mathbb{P}(a, 0) \vee \mathbb{P}(b, 0))$ es falsa, *i.e.*:

$$\neg(\mathbb{P}(a, 0) \vee \mathbb{P}(b, 0)) \equiv \neg \mathbb{P}(a, 0) \& \neg \mathbb{P}(b, 0)$$

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, supongamos que $a \cdot b = 0$ y que $a \neq 0$ y $b \neq 0$ (hipótesis adicional de reducción al absurdo). Como $a \neq 0$ entonces existe a^{-1} . Por hipótesis $a \cdot b = 0$

$$\Rightarrow a^{-1} \cdot a \cdot b = a^{-1} \cdot 0 \quad \Rightarrow 1 \cdot b = 0 \quad \Rightarrow b = 0$$

Pero esto contradice la suposición de que $b \neq 0$. Por lo tanto $a = 0$ ó $b = 0$. \square

5. Conclusiones

En general no hay recetas para construir una demostración matemática. Sin embargo, sostenemos que el contar con una metodología de lógica matemática permite a los estudiantes entender y elaborar mejor las demostraciones.

6. Bibliografía

- [1] Deaño, A. (1990). *Introducción a la lógica formal*. Madrid. Alianza Universidad Textos.
- [2] Epp, S. (2003) *The role of logic in teaching proof*. The American Mathematical Monthly, vol. 110, no. 10, 886-899.
- [3] Moore, R. (1994). *Making transition to formal proof*. Educational Studies in Math., 27, 249-266.
- [4] Sánchez, J. (1993). *Forma lógica: Aspectos metodológicos*. Contactos, Nva. época, 10, 50 – 61.
- [5] Solow, D. (2008). *Introducción al razonamiento matemático*. México. Limusa.
- [6] Suppes, P. y Hill, S. (2004) *Introducción a la lógica matemática*. México. Reverté.

Propuesta del Diseño de una Secuencia Didáctica para la Enseñanza y el Aprendizaje del Objeto Matemático Potencia

Jesús Manuel Duarte Sánchez, José Luis Díaz Gómez

Departamento de Matemáticas

Universidad de Sonora

Email: jesusm_duarte@hotmail.com; jdiaz@gauss.mat.uson.mx

Nivel educativo: Medio superior

Resumen

Un fenómeno didáctico, detectado en la enseñanza aprendizaje del álgebra en el bachillerato, es la falta de significado de los estudiantes en torno al objeto matemático potencia. Para abordar esta problemática, hemos diseñado una secuencia didáctica a través del análisis didáctico (Gómez, 2002). Con ésta, se pretende coadyuvar en la solución de las dificultades y errores reportados en investigaciones acerca del concepto Potencia; promover algunas competencias de la RIEMS (SEP, 2008) y fomentar el significado del concepto Potencia como una herramienta para la resolución de problemas.

1. Introducción

Un fenómeno didáctico que se presenta en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, es la falta de significado por parte de los estudiantes en los objetos matemáticos que se estudian en los diferentes sistemas educativos. Actualmente, hemos identificado la problemática en torno al objeto matemático potencia, donde se percibe la falta de significado en los estudiantes, debido a su introducción a la enseñanza como una herramienta facilitadora de operaciones en un acercamiento básicamente aritmético y algebraico. Lo cual se pone de manifiesto cuando se utiliza este objeto en los diferentes cursos donde se requiere la manipulación significativa de expresiones algebraicas. La cual ha sido estudiada por diversos investigadores que sustentan los errores y dificultades que presentan los alumnos.

Con base en la problemática detectada, se realizará la propuesta de una secuencia didáctica para la enseñanza aprendizaje de este objeto matemático apoyándonos en el Análisis Didáctico (Gómez, 2002) como metodología de investigación para llevar a cabo el diseño de nuestra propuesta de secuencia didáctica.

1.1 Propósitos

El objetivo general es diseñar una propuesta de Secuencia Didáctica a través del Análisis didáctico para la enseñanza y el aprendizaje del objeto matemático Potencia para estudiantes de primer semestre de bachillerato en la asignatura Álgebra.

Los objetivos específicos son: Coadyuvar a la solución de las dificultades y errores que se reportan en torno del concepto Potencia; Promover algunas competencias de la RIEMS y promover el significado del concepto Potencia como una herramienta para la resolución de problemas.

2. Justificación

Existen diferentes investigaciones en torno a la enseñanza y el aprendizaje de los exponentes (potencia) que sustentan la presencia de algunos errores y dificultades, que presentan los alumnos cuando se pone en juego el uso de esta herramienta (potencia). En este trabajo en concreto, revisamos las investigaciones realizadas por:

Dolores, Martínez, Farfán, Carrillo, y López (2007), quienes encontraron que en el bachillerato, la noción de potencia es manejada en el contexto algebraico como una

multiplicación reiterada. Es decir, $\left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ veces}} = a^n \right)$ donde, esta definición se introduce

mediante ejercicios en los que se realizan transformaciones de expresiones algebraicas, es decir tratamientos en el registro analítico.

Ferrari (2001), manifiesta que la enseñanza de estructuras multiplicativas para introducir la potencia, se convierte en un obstáculo para la aprehensión de otros conceptos por parte de los alumnos, cuando se trabaja con exponentes en el dominio de los números naturales mayores que 1.

Por su parte, Martínez (2000), enumera varios fenómenos didácticos que fueron detectados en la investigación de Lezama (1999) con estudiantes de secundaria, bachillerato y nivel superior entre los que destaca la falta de argumentos para justificar las potencias, cero, uno negativas y fraccionales.

Curricularmente, se ha tratado de subsanar la presencia de los fenómenos anteriormente citados mediante la implementación de Reformas en los diferentes niveles educativos. Con el propósito de conocer más sobre estas reformas, analizamos la Reforma 2006 para Secundaria (RES), por ser el nivel precedente al cual estamos enfocando nuestro trabajo y la Reforma Integral en la Educación Media Superior 2008 (RIEMS) con el propósito de tener los referentes teóricos en la enseñanza y el aprendizaje en ambos niveles educativos.

3. Marco teórico

En este trabajo, utilizaremos el Análisis Didáctico (Gómez, 2002) como metodología de investigación para llevar a cabo el diseño de nuestra propuesta de secuencia didáctica.

Este análisis, es una conceptualización del nivel local de la planificación de un tema matemático específico. En este nivel, el profesor debe considerar la complejidad del contenido matemático y contemplar tanto los diferentes significados de las matemáticas como la diversidad en su enseñanza. De hecho, la negociación y construcción de estos múltiples significados por parte de los alumnos, debe ser uno de los propósitos centrales de la interacción en el aula cuando el profesor propone las actividades didácticas.

En el contexto concreto de la planificación de una hora de clase o del diseño de una secuencia didáctica, el profesor puede organizar la enseñanza basándose en cuatro análisis que sustentan el Análisis didáctico: Análisis de contenido; Análisis cognitivo; Análisis de instrucción y Análisis de actuación.

4. Diseño de la Secuencia Didáctica (Aplicación del Análisis Didáctico)

4.1 Análisis de contenido

El ciclo del análisis didáctico inicia, ubicando el contenido matemático de estudio (concepto Potencia) como parte de la asignatura álgebra del primer semestre de la Dirección General de Educación tecnológica Industrial (DGETI), dependiente de la Subsecretaría de Educación Media Superior vigente a la fecha bajo el nombre de leyes de los exponentes.

Los objetivos que pretendemos coadyuvar con nuestra secuencia son parte del propósito general de la asignatura *–Álgebra–* Desarrollar la capacidad del razonamiento matemático haciendo uso del lenguaje algebraico, a partir de la resolución de problemas de la vida cotidiana, dentro y fuera del contexto matemático, representados en modelos donde se aplican conocimientos y conceptos algebraicos, en un clima de colaboración y respeto (SEMS, 2009).

Para iniciar el estudio del objeto matemático Potencia, analizamos la propuesta del álgebra escolar impartido a maestros de escuelas secundarias y preparatorias (Wu, 2005) y la estructura propuesta en el libro de texto recomendado por el subsistema (DGTI) para la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra. (Acosta, 2006).

4.2 Análisis Cognitivo

En el análisis cognitivo, el profesor debe describir las hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas de las actividades de enseñanza y aprendizaje.

Para concretar este análisis, diseñamos la tabla 1 que nos ayuda a establecer la forma en la que ciertas capacidades contribuyen al logro de las ocho competencias – *ver tabla 1*—. Por lo tanto, este procedimiento nos permite organizar la información sobre el desarrollo matemático de los estudiantes con respecto a un tema específico –*concepto Potencia*— antes y después de la instrucción.

Tabla 1									
Capacidades o sub-competencias para la conceptualización del objeto matemático potencia.									
Capacidades o sub-competencias		Competencias							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Construye y establece distintas representaciones de la potencia.									
C1	Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información.		X			X			
C2	Elabora diagramas que describen la situación problema con sus principales variables.		X			X			
C3	Establece las relaciones que mejor se ajustan al comportamiento de las variables registrado en las tablas y diagramas.		X			X			
Competencias disciplinares matemáticas (SEP, 2008)									
1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.									
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.									
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.									
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.									
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.									
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.									
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.									
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.									

4.3 Análisis de Instrucción

En este análisis, el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción

4.4 Análisis de actuación

“El análisis de actuación debe basarse en el análisis de la actuación de los escolares al abordar las tareas y al interactuar con los compañeros y con el profesor” (Gómez, 2005).

En este apartado, presentamos un análisis de las actuaciones de un estudiante con la primera versión de una actividad (pilotaje) que forma parte de las tareas que conforman la instrucción (secuencia didáctica) con el propósito de ilustrar la aplicación del Análisis Didáctico.

Tarea 1. Problema 1. Una persona se entera de un secreto y a las 10 de la mañana, lo cuenta a sus tres mejores amigos pidiéndoles que lo mantengan en secreto. Diez minutos después éstos rompen el pacto de confianza contándoselo cada una a otros tres íntimos amigos. Si este secreto fuera contado de este modo, siempre cada diez minutos y a tres nuevos amigos que no lo conocían. Considerando que en Hermosillo, Sonora hay 768954 habitantes. ¿A qué horas estarán todos enterados?

Estudiante 1.

Para iniciar el proceso de resolución de la situación problema que se le presenta, este estudiante, elabora un diagrama para simular dicha situación. En este diagrama, incluye cuatro intervalos de tiempo (forma en que se cuenta el secreto) en el sistema de representación numérico y el total de personas que se enteran del secreto en el mismo registro de representación (ver figura 1).

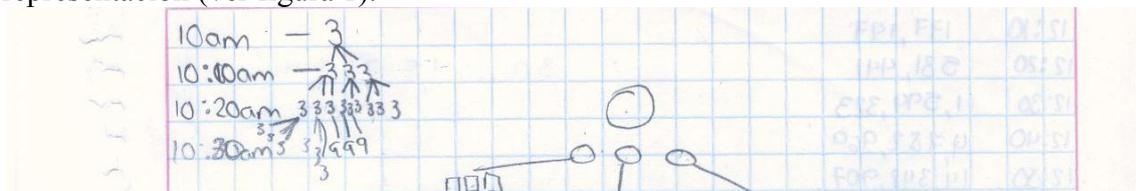


Figura: 1

Consideramos importante comentar que este estudiante no consideró a la persona que cuenta el secreto por primera vez e inicia el diagrama en el segundo intervalo de tiempo. Pero, posteriormente se percata del error y hace la rectificación en un segundo diagrama (ver figura 2). Para continuar con la resolución del problema, nuevamente realiza un tratamiento en dicho registro de representación (diagrama) y en las primeros cuatro intervalos de tiempo el estudiante utiliza figuras (círculos y cuadros) para representar el número de personas que se enteran exactamente a una hora determinada (ver figura 2) mientras que en el resto de los intervalos solo utiliza números. Es decir, el estudiante presenta dificultades para seguir simulando el fenómeno en el mismo registro de representación por lo que se ve en la necesidad de realizar una conversión al registro numérico que le permite seguir avanzando en dicho proceso de resolución.

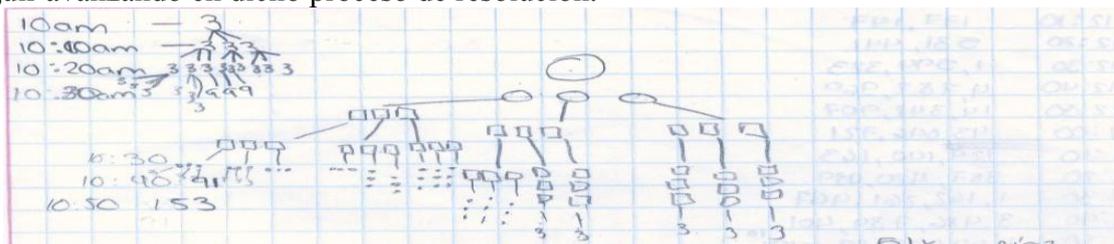


Figura: 2

Para seguir avanzando en vías de llegar a la solución del problema, el estudiante realiza una conversión de la representación semiótica figural (diagrama) a la elaboración de

una tabla (registro de representación numérico tabular). En esta tabla, incluye dos columnas, en la primera incluye los intervalos de tiempo y la etiqueta con hora (conversión), y en la segunda el total de personas que se enteran a una hora determinada (ver figura 3).

Figura:3

Nota: Fue necesario que el profesor le pidiera al estudiante que examinara detalladamente el reactivo 7 (ver figura 4) para poder arribar a la institucionalización del conocimiento que se había puesto en juego.

7. Organiza la información que generaste en los reactivos 1, 2,3 y 4 en la siguiente tabla.

Hora	Personas que se enteran del secreto	Operaciones realizadas para llegar al total de personas que se enteran del secreto.
10:00	1	$1 \times 3 = 3$
10:20	2	$3 \times 3 = 9$
10:40	3	$9 \times 3 = 27$
11:00	4	$27 \times 3 = 81$
11:20	5	$81 \times 3 = 243$
11:40	6	$243 \times 3 = 729$
12:00	7	$729 \times 3 = 2187$
12:20	8	$2187 \times 3 = 6561$
12:40	9	$6561 \times 3 = 19683$
13:00	10	$19683 \times 3 = 59049$

Figura: 4

Una vez que el estudiante hizo lo anterior, se le preguntó que si podría expresar matemáticamente de otra manera $3 \times 3 = 9$. Y el estudiante regresó nuevamente a decir que $3 \times 3 = 9$. Para poder continuar, se le preguntó que si podía abreviar la operación que tenía en la tabla pero que en la abreviación se tenía que incluir el 3 (base). Con el propósito que el estudiante lograra una estructuración de sus conocimientos y lograra dar el salto a la noción de exponente. Que era lo que estábamos tratando de promover en este momento del problema.

4.5 Capacidades que el estudiante 1 puso en juego al abordar el problema

Tomando como referencia la tabla 1 de capacidades y competencias que estamos tratando de promover con las actividades que conforman las tareas, consideramos que este estudiante esta en grandes posibilidades de lograr las siguientes capacidades.

Capacidades	Competencias							
	1	2	3	4	5	6	7	8
C1		x			x			
C2		x			x			
C5		x		x				
C6		x		x				
C8		x		x				
C13	x							
C16		x						

4.6 Los caminos de aprendizaje seguidos por el estudiante uno

$C13 \rightarrow C8 \leftrightarrow C2 \rightarrow C1 \leftrightarrow C5 \leftrightarrow C6 \rightarrow C16$

4.7 Dificultades que los estudiantes pueden encontrar al abordar las tareas

Este estudiante, presentó dificultades con el exponente cero y el exponente uno (ver figura 5), Pareciera que en el segundo renglón de la tercera columna el resultado es correcto (3), solo que la forma como se encuentra expresado (3×1) no corresponde a la situación que

representa. Por otro lado, estos errores ya los habíamos previsto como probables de cometer por parte de los estudiantes ya que se detectaron en las investigaciones que revisamos en torno a los exponentes Martínez (2000) y Ferrari (2001).

7. Organiza la información que generaste en los reactivos 1, 2,3 y 4 en la siguiente tabla.

Hora	Personas que se enteran del secreto	Operaciones realizadas para llegar al total de personas que se enteran del secreto
10	1	
10:10	3	$1 \times 3 = 3$

Figura: 5

Para tratar de subsanar estas dificultades, se le preguntó al estudiante cuantas veces se había contado el secreto a las 10:00; cuantas veces a las 10:10; etc., con el propósito de que éste, encontrara la relación que existe entre el exponente y las veces que se cuenta el secreto.

5. Conclusiones

En este pilotaje, detectamos y corregimos errores en la redacción de la situación problema y en las preguntas de algunos reactivos. Además, con base en este pilotaje, tomamos la decisión de llevar a cabo una serie de replanteamientos, los cuales se le irán presentando a cada alumno, dependiendo de las dificultades que presente a la hora de resolver el problema.

6. Referencias

- [1] Acosta, S. R. (2006). *Álgebra*. México: Dirección General de Educación Tecnológica Industrial, SEP.
- [2] Dolores, C., Martínez, G., Farfán, R. m., Carrillo, C., & López, I. N. (2007). Naturaleza y significado de los exponentes. En *MATEMÁTICA EDUCATIVA, Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (págs. 123-130). México: Díaz de Santos.
- [3] Ferrari Escolá, M. (2001). *Una Visión socioepistemológica. Estudio de la función Logaritmo*. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional CINVESTAV. México.
- [4] Gómez, P. (2005). ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA. 17.
- [5] Gómez, P. (2002). DESARROLLO DIDÁCTICO DE LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS. PROYECTO PARA UNA TESIS. 10.
- [6] Martínez Sierra, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional. CINVESTAV. México.
- [7] SEMS. (2009). *Reforma curricular del Bachillerato tecnológico*. Recuperado el 25 de Julio de 2009, de Programas de estudio de las asignaturas del componente de formación básica y propedéutica: <http://www.dgeti.sep.gob.mx/site/lanzador.phtml?idcont=121>
- [8] SEP. (2008). COMPETENCIAS GENÉRICAS Y EL PERFIL DEL EGRESADO DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR.
- [9] SEP. (2006). *Reforma de Educación Secundaria*. Recuperado el 23 de Febrero de 2009, de <http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas>.
- [10] Wu, H.-H. (2005). *Introduction to School Algebra(Draft)*. University of California, Department of Mathematics, #3840, Berkeley, CA 94720-3840.

Aprendizaje ubicuo en la enseñanza de las matemáticas

Héctor Antonio Villa Martínez, Francisco Javier Tapia Moreno, Claudio López Miranda

Departamento de Matemáticas

Universidad de Sonora

hvilla@gauss.mat.uson.mx, ftapia@gauss.mat.uson.mx, claudio@gauss.mat.uson.mx

Nivel Educativo: Medio Superior y Superior

Resumen

El aprendizaje ubicuo o u-learning beneficia a los estudiantes porque les permite recibir instrucción personalizada a cualquier hora y en cualquier lugar donde puedan llevar una computadora. A pesar de estos beneficios existe una carencia de plataformas de aprendizaje ubicuo. En este artículo presentamos un panorama del aprendizaje ubicuo, de los principales retos que hay que resolver para su implementación, proponemos que se pueden resolver esos retos utilizando una red bayesiana y presentamos una de las escasas implementaciones de aprendizaje ubicuo en matemáticas que se encuentra en la literatura. Finalmente concluimos con nuestras futuras líneas de investigación.

1. Introducción

El aprendizaje ubicuo permite a un estudiante recibir instrucción personalizada en cualquier lugar y a cualquier hora. Como tal, el aprendizaje ubicuo es la unión de dos sistemas de enseñanza. El primer sistema es el aprendizaje en línea personalizado, que permite al estudiante recibir instrucción individualizada y que típicamente se lleva a cabo en una computadora de escritorio a través de internet. El segundo sistema es el aprendizaje móvil que permite al estudiante recibir instrucción a cualquier hora y en cualquier lugar mediante una computadora portátil y tecnologías de comunicaciones como Wi-Fi y GSM.

Típicamente, la implementación de una plataforma de aprendizaje ubicuo se lleva a cabo mediante una interface hombre-máquina que se adapte al nivel de conocimientos, habilidades informáticas, preferencias y a la plataforma computacional que esté siendo empleada por el estudiante. Adicionalmente, la interface puede ayudar al estudiante realizando tareas como generar un plan de estudios apropiado, recomendaciones de material relevante, búsquedas inteligentes y ayuda personalizada. A esta clase de interfaces hombre-máquina se les conoce como *interfaces adaptativas* o *interfaces inteligentes*.

El uso de una interface adaptativa en un ambiente de aprendizaje ubicuo incide positivamente en el aprendizaje del alumno porque le permite estudiar a cualquier hora, en cualquier lugar y desde cualquier computadora en un ambiente personalizado. Así el estudiante puede concentrarse en el estudio de la asignatura, sin tener que perder tiempo buscando material relevante ni depender de sus habilidades informáticas para utilizar la interface.

El objetivo de este trabajo es dar a conocer los principales retos de implementar una plataforma de aprendizaje ubicuo y los ejemplos disponibles en la literatura para la enseñanza de las matemáticas. Para cumplir este objetivo, el resto de este trabajo está organizado como

sigue. La sección 2 define los conceptos básicos del aprendizaje ubicuo. La sección 3 discute los problemas que hay que resolver para implementar una plataforma de aprendizaje ubicuo. La sección 4 presenta un caso de estudio de la utilización del aprendizaje ubicuo en la enseñanza de las matemáticas. Finalmente, la sección 5 presenta las conclusiones obtenidas de la presente investigación.

2. Antecedentes

Esta sección define los conceptos de aprendizaje en línea personalizado (sub-sección 2.1), aprendizaje móvil (sub-sección 2.2) y aprendizaje ubicuo (sub-sección 2.3).

2.1. Aprendizaje en línea personalizado

El *aprendizaje en línea* (e-learning en inglés) se define como la instrucción recibida en una computadora por medio de un CD-ROM, internet o intranet. Clark y Mayer [1] afirman que el aprendizaje en línea puede ser síncrono o asíncrono. El aprendizaje en línea síncrono se realiza en tiempo real en un aula virtual y es conducido por el instructor. El asíncrono, por otra parte, está diseñado para que el individuo estudie a su propio paso. Ambos formatos permiten el uso de aprendizaje colaborativo tales como wikis, grupos de discusión y correo electrónico.

El aprendizaje en línea tradicional ofrece a todos los estudiantes el mismo servicio sin tomar en cuenta sus conocimientos previos, metas, habilidades de comunicación e intereses. Según Shute y Towle [2] desde la década de los setentas se reconoció el impacto de las diferencias humanas en la educación. Es decir, que una instrucción unitaria no satisface a todos los estudiantes y es necesario buscar nuevos paradigmas de enseñanza tales como el aprendizaje en línea personalizado.

El *aprendizaje en línea personalizado* (adaptive e-learning) ofrece una solución a este problema mediante la adaptación a las necesidades particulares de cada estudiante. Mas formalmente, el aprendizaje en línea personalizado se define como un sistema de enseñanza en línea que “adapta la selección y presentación de contenidos de una manera individual al estudiante basándose en su nivel de estudios, sus necesidades, su estilo de aprendizaje, sus conocimientos previos y sus preferencias” [3].

2.2. Aprendizaje móvil

El *aprendizaje móvil* (m-learning) es la adquisición de conocimiento por medio de alguna tecnología de cómputo móvil [4]. Por computadoras móviles se entiende teléfonos celulares, agendas personales digitales (PDAs), netbooks, tablet PCs y tal vez, dependiendo del tamaño, laptops.

Las diferencias del aprendizaje móvil con otros tipos de aprendizaje, en particular el aprendizaje en línea tradicional, se pueden estudiar desde dos puntos de vista: el tecnológico y el de la experiencia educacional. Respecto a la tecnología, el aprendizaje móvil se distingue por el uso de equipo portátil que permite al estudiante acceder los objetos de aprendizaje a cualquier hora y desde cualquier lugar. Con respecto a la experiencia educacional, Traxler [5] compara

el aprendizaje móvil y el aprendizaje en línea usando palabras clave. De esta forma, el aprendizaje móvil es 'personal', 'espontáneo', 'oportunistista', 'informal', 'ubicuo', 'privado', 'sensible al contexto', 'segmentado' y 'portátil', mientras que el aprendizaje en línea es 'estructurado', 'multimedia', 'ancho de banda amplia', 'interactivo', 'inteligente' y 'usable'. El mismo autor remarca que algunas de estas distinciones pueden desaparecer conforme la tecnología móvil avance, pero propiedades como informalidad, movilidad y contexto permanecerán.

2.3. Aprendizaje ubicuo

El *aprendizaje ubicuo* (u-learning) es un sistema de aprendizaje en línea personalizado que permite al individuo estudiar a cualquier hora y en cualquier lado del mundo donde pueda llevar una computadora [6]. En otras palabras, el aprendizaje ubicuo es la combinación del aprendizaje en línea personalizado con el aprendizaje móvil. Fraser [7], Ramón [8] y Wheeler [9] definen al aprendizaje ubicuo usando la fórmula: aprendizaje ubicuo = aprendizaje en línea + aprendizaje móvil. Para hacer énfasis que el aprendizaje ubicuo involucra no el aprendizaje en línea tradicional, sino el aprendizaje en línea personalizado, preferimos usar la siguiente fórmula:

$$\text{aprendizaje ubicuo} = \text{aprendizaje en línea personalizado} + \text{aprendizaje móvil}$$

Las ventajas del aprendizaje ubicuo son evidentes. Tiene las mismas que el aprendizaje en línea personalizado, es decir, permite a los alumnos seleccionar los objetivos de aprendizaje y aplicar su estilo de aprendizaje propio [3, 10, 11]. Además permite al estudiante utilizar cualquier plataforma a su alcance y situarse en casi cualquier parte del mundo. La principal desventaja, por el momento, es el alto costo relativo de los equipos y de la conexión, sobre todo en teléfonos celulares. Sin embargo, conforme la tecnología avance es previsible que los precios se reduzcan.

3. Implementación de una plataforma de aprendizaje ubicuo

Para implementar una plataforma de aprendizaje ubicuo hemos identificado que se necesitan resolver varios problemas agrupados en dos áreas: infraestructura y software. En el área de infraestructura se debe contar con un servidor de internet y equipo de cómputo, tanto de escritorio como portátil, con acceso a internet. En el área de software, el diseño e implementación de una interface adaptativa plantea tres problemas principales: la creación del modelo del estudiante, la generación del contenido y la adaptación del contenido.

Consideramos que los problemas de infraestructura se pueden resolver mediante recursos financieros. Por otra parte, los problemas de software requieren especial atención puesto que su solución involucra aspectos de ciencias de la computación. Por ese motivo en esta sección detallaremos los mencionados problemas de software.

El modelo del estudiante captura información relevante sobre el estudiante, por ejemplo, el nivel de conocimientos previos, metas de aprendizaje, estilo de aprendizaje y tiempo disponible para el aprendizaje. El modelo debe realizar una evaluación inicial del estudiante, tanto de sus conocimientos en la materia de estudio como de sus habilidades informáticas, y luego evolucionar conforme estos conocimientos y habilidades cambian. Algunos problemas

que identificamos para que el modelo funcione de manera adecuada son los siguientes: 1) el modelo debe aprender rápido para ser útil desde el primer momento, 2) debe trabajar con información incompleta, y posiblemente contradictoria, que reciba del estudiante y 3) debe poder evaluar los conocimientos y habilidades del estudiante para así poder evolucionar.

La generación del contenido consiste en producir una interface personalizada para cada estudiante con la capacidad de realizar tareas inteligentes, como búsquedas y recomendaciones, que redunden en un aprendizaje mas efectivo por parte del alumno. Los problemas mas importantes que hay que resolver son: 1) establecer un criterio de relevancia para ordenar los objetos de aprendizaje, 2) generar una trayectoria de aprendizaje de acuerdo a la meta del estudiante y el tiempo disponible para el estudio, 3) mantener una base de datos con los objetos de aprendizaje que el alumno haya encontrado relevantes con el fin de recomendarlos a otros estudiantes con metas semejantes y 4) descubrir y recomendar objetos de aprendizaje que puedan ser de interés para el alumno.

Finalmente, la adaptación del contenido implica cambiar la interface conforme evoluciona el conocimiento del estudiante y presentar una interface consistente en cualquier computadora sin importar el tamaño de la pantalla. Para lograr estos objetivos es necesario 1) contar con una base de datos con las capacidades (por ejemplo tamaño de pantalla) de cada plataforma computacional y 2) adecuar el contenido a las capacidades de la computadora que esté siendo utilizada.

Un método para implementar una interface adaptativa es utilizar una *red bayesiana*, una estructura matemática para razonar con incertidumbre [12]. La aplicación de redes bayesianas está documentada en el aprendizaje en línea personalizado [3, 10, 11], en el modelado del alumno [13, 14] y en el diseño de interfaces adaptativas [15].

4. Caso de estudio: enseñanza de las matemáticas

Son escasas las aplicaciones reportadas del aprendizaje ubicuo, tal y como se define en la Sección 2.3, a la enseñanza de las matemáticas. Esta situación contrasta con los reportes de aplicaciones en matemáticas del aprendizaje en línea [16], del aprendizaje en línea personalizado [17] y del aprendizaje móvil utilizando calculadoras [18], PDAs [19] y teléfonos celulares [20].

Dentro de este panorama destaca MoreMaths [21], un medio ambiente de aprendizaje diseñado para apoyar cursos universitarios de matemáticas. MoreMaths consta de dos componentes desarrollados en Java. Un componente corre en una computadora personal (PC) de escritorio, mientras que el otro corre en una PDA Compaq iPAQ. El aprendizaje toma lugar en la PC, donde el estudiante consulta el material de la clase y recibe retroalimentación personalizada. Después de esta interacción, el estudiante puede llevarse en su PDA material a la medida para su posterior revisión. Una vez finalizada la revisión, el componente en la PC administra un examen sobre dicho material y actualiza el modelo del estudiante.

MoreMaths fue probado en un grupo piloto con 9 estudiantes, 8 de los cuales evaluaron la revisión individualizada en la PDA como “útil” o “muy útil”. Los autores concluyen que los sistemas combinados, computadora de escritorio y móvil, son potencialmente provechosos. Sin embargo, tienen la desventaja de cada estudiante debe contar con los dos equipos.

5. Conclusiones

El aprendizaje ubicuo beneficia a los estudiantes porque les permite estudiar a cualquier hora y en cualquier lugar de una manera personalizada e independiente de la plataforma utilizada. A pesar de estas ventajas no existen muchas implementaciones de plataformas de aprendizaje ubicuo y esto es notable en la enseñanza de las matemáticas, donde también resalta la falta de objetos de aprendizaje adecuados. Consideramos que esta carencia se debe a que el costo de la infraestructura ha impactado negativamente el desarrollo del aprendizaje ubicuo. Sin embargo, ya que es previsible que el costo de la tecnología se abarate con el tiempo, es factible considerar que habrá un incremento en el desarrollo de plataformas de aprendizaje ubicuo.

Por último, dentro de nuestro trabajo futuro de investigación está investigar la aplicación de las redes bayesianas en la implementación de una interface adaptativa en un ambiente de aprendizaje ubicuo y la creación de objetos de aprendizaje para la enseñanza de matemáticas y ciencias de la computación.

6. Referencias

- [1] Clark, R. y Mayer, R. (2002). *e-Learning and the Science of Instruction: Proven Guidelines for Consumers and Designers of Multimedia Learning*. San Francisco, Estados Unidos. Pfeiffer.
- [2] Shute, V. y Towle, B. (2003). *Adaptive E-Learning*. *Educational Psychologist*, 38, 2, 105 – 114.
- [3] Tapia Moreno, F. J. (2007). *Modelo Bayesiano para la Optimización y Personalización del Proceso de Aprendizaje en Línea: Estudio Casuístico*. Tesis doctoral. Las Palmas de Gran Canaria, España. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- [4] Traxler, J. (2005). *Defining mobile learning*. International Conference Mobile Learning 2005. Malta. 261 – 266.
- [5] Traxler J. (2007). *Defining, Discussing, and Evaluating Mobile Learning: The moving finger writes and having writ...*. *International Review of Research in Open and Distance Learning*, 8, 2, 1 – 12.
- [6] Jones, V. y Jo J. H. (2004). *Ubiquitous learning environment: An adaptive teaching system using ubiquitous technology*. *Proceedings of the 21st ASCILITE Conference*, 468 – 474.
- [7] Fraser, J. (2005). *u-Learning = e-Learning + m-Learning* Recuperado el 9/12/2009 de la dirección electrónica. <http://www.infotech.monash.edu.au/promotion/coolcampus/workshop/3rdworkshop/walkaboutlearning.pdf>
- [8] Ramón, O. (2007). *Del e-Learning al u-Learning: la liberación del aprendizaje* Recuperado el 9/12/2009 de la dirección electrónica. <http://sociedaddelainformacion.telefonica.es/jsp/articulos/detalle.jsp?elem=5162>
- [9] Wheeler, S. (2006). *U-Learning: Education for a Mobile Generation* Recuperado el 6/1/2010 de la dirección electrónica. <http://www2.plymouth.ac.uk/distancelearning/U-Learning.ppt>

- [10] Tapia, F., Galán, M., Ocón, A. y Rubio, E. (2005). *Using Bayesian Networks in the Global Adaptive e-Learning Process*. EUNIS 2005.
- [11] Tapia, F. J., López, C.A., Galán, M. y Rubio, E. (2008). *Bayesian Model for Optimization Adaptive e-Learning Process*. Journal of Emerging Technologies in Learning, 3, 2, 38 – 52.
- [12] Neapolitan, R. E. (2003). *Learning Bayesian Networks*. Englewood Cliffs, Estados Unidos. Prentice-Hall.
- [13] Bunt, A., Conati, C. (2002). *Probabilistic Student Modelling to Improve Exploratory Behaviour*. Journal of User Modeling and User-Adapted Interaction, 13, 3, 269 – 309.
- [14] Conejo, R., Millán E., Pérez de la Cruz, J. L. y Trella, M. (2001). *Modelado del alumno: un enfoque bayesiano*. Inteligencia Artificial, Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial, 12, 50 – 58.
- [15] Harrington, R. A. (1996). *Utilizing bayesian techniques for user interface intelligence*. Tesis de maestría. Wright-Patterson AFB, Estados Unidos. Air Force Institute of Technology.
- [16] Gonçalves, M. J. y Kaldeich, C. (2007). *E-Learning in the School: Applied to Teaching Mathematics in Portugal*. Proceedings of the 2007 Informing Science and IT Education Joint Conference, 23 – 47.
- [17] Panjawanonda, A. y Srivihok, A. (2005). *Individualized e-Learning System: Agent for Learning Mathematics in Primary Education in Thailand*. Proceedings of the Pacific Asia Conference on Information Systems, 1160 – 1167.
- [18] Burrill, G., Allison, J., Breaux, G., Kastberg, S., Leatham, K. y Sanchez, W. (2002). *Handheld Graphing Technology in Secondary Mathematics: Research Findings and Implications for Classroom Practice*. Reporte Técnico CL2872. Dallas, Estados Unidos. Texas Instruments.
- [19] Dieterle, E. y Dede, C. (2006). *Straightforward and Deep Effects of Wireless Handheld Devices for Teaching and Learning in University Settings* Recuperado el 10/12/2009 de la dirección electrónica. <http://gseacademic.harvard.edu/~hdul/ubicomp-in-ed-dieterle-dede-final.pdf>
- [20] Yerushalmy, M. y Ben-Zaken, O. (2004). *Mobile phones in Education: the case of mathematics* Recuperado el 10/12/2009 de la dirección electrónica. <http://construct.haifa.ac.il/~michalyr/celularreport.pdf>
- [21] Bull, S. y Reid, E. (2004). *Learning with Mobile Devices Research and Development*. Capítulo Individualised revision material for use on a handheld computer, 35 – 42. Londres, Inglaterra. Learning and Skills Development Agency.

“Células” de Aprendizaje Asincrónico. Experiencia en Didáctica de las Matemáticas

Sergio Pou Alberú

Facultad de Ingeniería Ensenada

Universidad Autónoma de Baja California

spoualb@gmail.com

Manuel Moreno Mecado

Facultad de Ciencias Marinas

Universidad Autónoma de Baja California

malmorenado@gmail.com

Gloria Elena Rubí Vázquez

Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de Baja California

varuelgl@gmail.com

***Modalidad:* Conferencia de Divulgación**

***Nivel educativo:* Superior**

.....Resumen

Se presentan algunos resultados obtenidos al aplicar una estrategia didáctica que mezcló el uso de la tecnología, la enseñanza problémica, el trabajo asincrónico y la docencia presencial con la finalidad de brindar oportunidades a los estudiantes para que exploren nuevas formas de estudio de las matemáticas. Se tipificó el concepto de “células” asincrónicas en la docencia presencial. Se aplicó un cuestionario para conocer el grado de satisfacción de los estudiantes egresados de la experiencia en los semestres posteriores a su aplicación. Se presentan algunos resultados relevantes. Se concluye que la estrategia didáctica es muy recomendable y permite favorecer el aprendizaje de las matemáticas.

1. Introducción

La enseñanza de las matemáticas reúne problemas universales (existe una cierta problemática recurrente en la literatura especializada en diferentes países; [1]) y locales (en cada institución, facultad y aula. [4]). Desde hace más de 20 años, como docentes de matemáticas, nos

hemos enfrentado con dificultades a las que hemos tratado de dar solución implementando diversas estrategias docentes, algunas con muy malos o nulos resultados y otras con resultados mejores. Actualmente, el grupo de Matemática Educativa del Cuerpo Académico de Matemáticas estamos incursionando en modalidades didácticas que incluyen y combinan la enseñanza presencial y el uso de la tecnología, así como la Enseñanza Problemática [3], como alternativa para proponer modelos didácticos que contribuyan al mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en las aulas universitarias. Se presentan los resultados de un modelo.

Desde finales de los años 80, en la Facultad de Ciencias Marinas de la Universidad Autónoma de Baja California (campus Ensenada) hemos tratado de resolver el problema del bajo nivel de conocimiento matemático, así como la actitud desfavorable de los estudiantes de reciente ingreso. Se implementó un curso de Matemáticas 0, con contenidos propios del nivel educativo previo. No fue suficiente. Se implementó para el semestre siguiente un curso de Matemáticas 00, con contenidos aun más básicos. Tampoco fue suficiente. Posteriormente, la Maestra Consuelo Valle, de la Facultad de Ciencias Marinas, desarrolló una página WEB con los contenidos que se espera que los aspirantes a ingresar a la Facultad deben conocer y dominar. Esta página es accesible a distancia y es posible obtener asesoría mediante la misma. Tampoco pareció ser suficiente. Los índices de reprobación en las materias de matemáticas de los primeros semestres continuaron a la alza.

2. Alternativa Problemática asistida con Tecnología

Nuestro grupo de Matemática Educativa atendió a la convocatoria de la HP (Hewlett-Packard) en la que dicha compañía de cómputo ofrecía equipo y soporte para aquellos profesores o investigadores que rediseñaran algún curso de matemáticas en facultades de ciencias o de ingeniería. Se concursó y se ganó la convocatoria proponiendo el rediseño de los cursos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Facultad de Ciencias Marinas) y el de Tópicos Matemáticos (Facultad de Ingeniería Ensenada). En este artículo nos referiremos sobre todo a los resultados obtenidos de este segundo curso, aunque mencionaremos, sobre todo con finalidad de comparación, los de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, mismo que se reporta en extenso en otro sitio.

El equipo donado por HP consistió en 21 computadoras Lap Top tipo Tablet PC con la capacidad de escribir a mano alzada en la pantalla del equipo directamente mediante un lápiz electrónico (Figura 1). Además se incluyeron equipo de red, impresora, cámara fotográfica digital y una aportación en efectivo, entre otras cosas.



Figura 1. Equipo de cómputo utilizado

La estrategia didáctica seguida en el curso de Ecuaciones Diferenciales, en la Facultad de Ciencias Marinas consistió fundamentalmente en hacer uso de las habilidades del software incluido en los equipos para hacer ver a los estudiantes de manera inmediata los resultados que estaban obteniendo, mediante el procedimiento de seleccionar el profesor el monitor del estudiante en cuestión y proyectarlo al frente del grupo. Además el profesor pudo señalar y resolver ejercicios simultáneamente en la pantalla frente al grupo y en las diferentes pantallas de los equipos de cada alumno. Los resultados de esta intervención serán presentados en otro sitio. Por otra parte, el curso de Tópicos Matemáticos, de la Facultad de Ingeniería, fue planeado como curso taller, con valor curricular, pese a que los contenidos fueron semejantes a los de los cursos de matemáticas 0 y 00 referidos más arriba. La diferencia principal en tanto estrategia didáctica fue que en esta ocasión se planeó un trabajo presencial-asincrónico asistido por tecnología [2].

3. Curso Taller Tópicos Matemáticos Presencial y Asincrónico

El curso de Tópicos Matemáticos se presentó a los estudiantes mediante un sistema de educación a distancia (Figura 2) en el que se colocaron los contenidos, referencias, textos, imágenes, videos, ejercicios y todos los elementos que se consideraron útiles para clarificar y contribuir al aprendizaje de los estudiantes. Estos elementos estaban organizados por “semanas” en atención a las 16 semanas de duración del semestre.

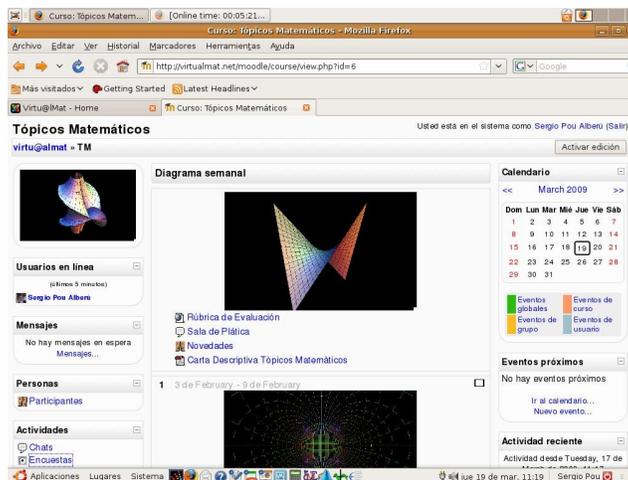


Figura 2. Estrategia presencial asincrónica

La metodología didáctica consistió en trabajo presencial, por equipos (necesariamente, dado el número de estudiantes con relación al número de equipos de cómputo, lo que resultó una medida muy benéfica para incrementar el nivel de interacción). Los estudiantes se presentaban al aula el día y hora en que tenían clase y se entregaba a cada equipo una máquina. El aula contaba con la sub red inalámbrica proporcionada junto con los equipos y ésta a su vez se conectaba a Internet. El profesor se encontraba presente todo el tiempo de la clase. Al estar los contenidos en línea, los estudiantes pudieron acceder a ellos fuera de las horas de clase y al tener la posibilidad de preguntar al profesor también en línea, podían tener asesoría fuera de las horas de clase. La mayoría de los alumnos optó por no utilizar la asesoría en línea, prefiriendo tener la interacción con el profesor y con sus compañeros de grupo en forma presencial. Entre los resultados más destacables de esta estrategia didáctica, queremos hacer notar que se generó de manera

espontánea, lo que dimos en llamar “células de aprendizaje”, por considerarlas como una característica particular de la estrategia didáctica y que se dio en forma natural.

4. Células de Aprendizaje Asincrónico

Los estudiantes se reunieron de manera natural en equipos (fueron estudiantes de primer ingreso, por lo que no todos se conocían previamente). Los equipos inicialmente trataron de trabajar todos al mismo ritmo, tratando de cubrir los materiales y temas designados para cada “semana” en el sitio WEB (ver figura 2). Sin embargo, pronto empezaron a notarse grupos que avanzaban más rápido y grupos que se tardaban más en la resolución de su encomienda. Tradicionalmente, en un curso presencial (aunque sea asistido por tecnología) aquellos materiales que no son cubiertos en su totalidad por algún alumno o equipo de alumnos, o es abandonado por ellos o es visto de manera muy superficial, propiciando el aprendizaje memorístico que tiene por principal objetivo pasar el examen y posteriormente es olvidado con mayor facilidad. Se permitió que los alumnos avanzaran a diferentes ritmos y lo que se logró fue precisamente el nacimiento de estas “células” de aprendizaje asincrónico, que consideramos el mayor de los resultados obtenidos en esta experiencia.

En la figura 3 se muestra un ejemplo de interacción de los estudiantes en los equipos de trabajo y en la figura 4 una muestra del trabajo en “células”



Figura 3. Organización del grupo en equipos



Figura 4. Grupos en Células Asincrónicas

Estas “células” consistieron en la agrupación natural de estudiantes con base fundamentalmente en tres criterios. El primero, estudiantes que tenían conocimientos suficientes y que consideraban fácil la materia. El segundo, estudiantes que, por el contrario, sentían sus deficiencias y consideraban el contenido difícil y el tercero, menos común, en donde un estudiante con conocimientos suficientes trabaja como mentor o tutor de otros menos capacitados. La característica de estar el material tanto en línea como la posibilidad de trabajo presencial con este mismo material, favoreció que surgieran estas figuras de trabajo al interior del grupo. El profesor, al correr de dos o tres semanas, se encontraba dando asesorías específicas a los diferentes grupos sobre diferentes temas de los contenidos de distintas “semanas”. Por otra parte, las distintas “células” de los estudiantes seleccionaron la secuencia de temas que les pareció más apropiada a sus necesidades. No todos los estudiantes siguieron la secuencia de

semanas que se habían “programado” de acuerdo con los contenidos del curso, sino que algunos de ellos tomaron, por ejemplo, la semana uno, la cuatro, la dos, y así sucesivamente.

5. Resultados y Discusión

Se aplicó un cuestionario anónimo en forma de escala de Likert de cinco puntos, en donde el valor 1 implicó menos de 10 % de acuerdo, el valor 2 acuerdo entre 10% y 30%, el 3 entre 30% y 50%, el 4 entre 50% y 70% y el 5 más de 70% (Anexo I). En total se aplicaron 90 cuestionarios de los que se recuperaron 72. El contenido de estos cuestionarios fue capturado y analizado mediante el programa SPSS V 10.0. A continuación se presentan algunos de los datos más significativos. En cuanto a género respondieron al cuestionario 20 mujeres y 52 hombres. Con relación a la distribución de los cuestionarios por semestre puede verse que predomina el tercer semestre, seguido del segundo, cuarto, quinto y solo un alumno de sexto semestre respondió al cuestionario. Cinco alumnos no respondieron que semestre cursan.

La percepción de la utilidad de la materia de Tópicos Matemáticos es en general muy alta y no hay distinción entre géneros. Cerca de la mitad de los encuestados (44.4%) opinaron que la materia de TM fue de utilidad para ellos, con grado de acuerdo de más de 70% (nivel 5). Por otra parte, un estudiante no respondió este reactivo (Figura 5).

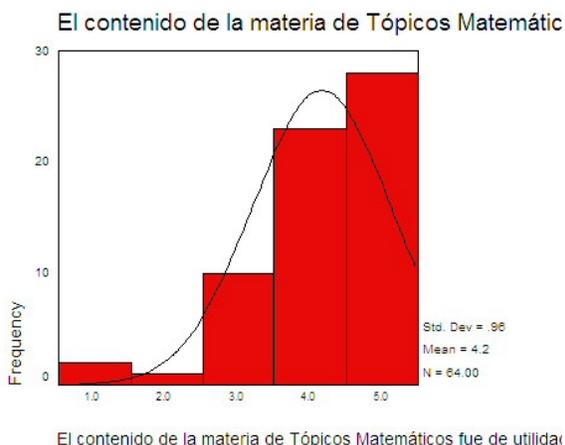


Figura 5. Reactivo referente a la utilidad

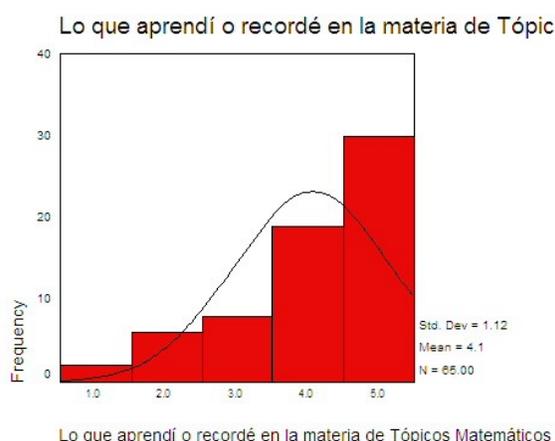


Figura 6. Reactivo referente a aplicación

En este reactivo se exploró el nivel de acuerdo con el enunciado "Lo que aprendí o recordé en la materia de TM lo apliqué en otra materia de algún semestre sucesivo". El nivel de acuerdo es también muy alto (Media de 4.10 en la escala de 5) y el 45.8% de los encuestados coincidieron en calificar con 70% de acuerdo o más este enunciado (Figura 6).

Otro tema que se preguntó a los estudiantes fue relativo a si recomendarían a sus compañeros de nuevo ingreso a la FIE para que sí cursaran la materia de Tópicos Matemáticos, aunque esta no les proporcionara créditos para su carrera. La respuesta es de un muy alto grado de acuerdo, con media 4.24 en la escala de 5 puntos. También cabe mencionar que el 56.9% de los encuestados seleccionó el grado de acuerdo de más de 70% con relación al contenido del reactivo.

En términos generales obtuvimos muy buena apreciación por parte de los estudiantes que se ha visto reflejada también en su opinión para la aplicación del conocimiento y habilidades obtenidas mediante esta estrategia didáctica y en la actitud que tienen frente al estudio de las matemáticas en su carrera.

6. Referencias

- [1] English, L. (2002). Priority Themes and Issues in International Research in Mathematics Education. Chapter 1 Handbook of International Research in Mathematics Education. Lyn D English (Editor). Queensland university of Technology. Lawrence Erlbaum Associates. Publishers. Mahwah, New Jersey. pp 3-16
- [2] Mariotti, M.A. (2002). The influence of Technological Advances on Students Mathematics Learning. Chapter 27. Handbook of International Research in Mathematics Education. Lyn D English (Editor). Queensland university of Technology. Lawrence Erlbaum Associates. Publishers. Mahwah, New Jersey. pp 695-724
- [3] Ortiz, O. A.L. (2002). La Enseñanza Problemática en la Educación Técnica y Profesional. Evento Internacional Pedagogía 2002. La Habana. 146 pp
- [4] Zepeda M. S.M. (2009). Propuesta de entorno computacional como apoyo a la enseñanza del las matemáticas. Memorias del 1er Encuentro Nacional sobre la Enseñanza del Cálculo. CINVESTAV, México. pp 171-174

Anexo

Facultad de Ingeniería Enseñada
 Cuerpo Académico Matemáticas
 LGAC Enseñanza y Divulgación de las Matemáticas
 Exploración de la opinión de los estudiantes sobre la pertinencia del curso de Tópicos Matemáticos

Este cuestionario es anónimo

Estimado Estudiante, este cuestionario forma parte de un trabajo de investigación educativa del Dr. Sergio Pou Alberú. Te agradecería mucho tu cooperación respondiendo con toda sinceridad

Género	M ()
	F ()
Semestre	_____

Utiliza el la siguiente escala como el grado de acuerdo con el enunciado

- 1 el 10% o menos
- 2 entre 10% y 30%
- 3 entre 30% y 50%
- 4 entre 50% y 70%
- 5 más de 70%

1) El contenido de la materia de Tópicos Matemáticos fue de utilidad para mi	
2) Lo que aprendí o recordé en la materia de Tópicos Matemáticos lo apliqué en otra materia del primer semestre	
3) Lo que aprendí o recordé en la materia de Tópicos Matemáticos lo apliqué en otra materia de algún semestre sucesivo	
4) El tiempo y esfuerzo que dediqué a la materia de Tópicos Matemáticos valió la pena	
5) Lo que aprendí o recordé en la materia de Tópicos Matemáticos no lo había visto antes	
6) La materia de Tópicos Matemáticos contribuyó a mi permanencia en la Facultad	
7) Creo que la materia de Tópicos Matemáticos debería ofertarse a los alumnos de nuevo ingreso	
8) Estoy de acuerdo en que desaparezca la materia de Tópicos Matemáticos	
9) Recomendaría a los estudiantes de nuevo ingreso a cursar la materia de Tópicos Matemáticos aunque no les diera créditos	
10) Lo que desconocía antes de cursar la materia de Tópicos Matemáticos todavía no lo domino	

Comparación de heurísticas y algoritmos de búsquedas en el dominio del ajedrez

Omar Edgardo Lugo Sánchez y Julio Weissman Vilanova
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
omare.lugos@correoa.uson.mx

Nivel Educativo: Superior

Resumen

Una etapa fundamental en el desarrollo de un motor de ajedrez computacional es la implementación de algoritmos eficientes de búsqueda de soluciones, basados en el método de Minimax. La eficiencia de dichos algoritmos dependen tanto de la representación de la información, como de métodos heurísticos de ordenamiento. En este trabajo se estudian los principales algoritmos de búsqueda, así como las heurísticas de ordenamiento que mejores resultados presentan en el juego de ajedrez. Con el fin de estudiar las ventajas y desventajas de dichos algoritmos, se realiza un estudio comparativo del uso de diferentes combinaciones de algoritmos y heurísticas.

1. Introducción

La publicación de 1950 de Shannon «Programming a Computer for Playing Chess» [11] aún describe las bases del ajedrez computacional actual. De acuerdo a [11], un motor de ajedrez debe contener al menos 3 módulos: generador de movimientos, función de evaluación y algoritmos de búsqueda.

El generador de movimientos es usado para generar recursivamente los nodos del árbol de juego. En este módulo es programada la estructura de datos que represente internamente un tablero, así como la evaluación de movimientos legales e identificación de estados terminales (jaque mate o tablas). Una buena selección es necesaria para realizar un motor de ajedrez que no sea muy demandante en memoria, y que genere movimientos rápidamente. Entre los métodos de representación más conocidos se puede destacar el 0x86 [8].

La función de evaluación asigna un valor a las hojas del árbol para que, mediante los métodos de búsqueda, se encuentre el camino a una posición ganadora. Lógicamente, cuando una posición ganadora es encontrada (jaque mate a favor), la función de evaluación tiene que retornar el valor mas alto posible $v_{max} > 0$, mientras que una posición perdedora (jaque mate en contra) debe de ser exactamente el mismo valor, pero negado $-v_{max}$, ya que es un juego de suma cero. Debido a la conocida explosión combinatoria del juego de ajedrez, no es posible analizar el árbol de juego en toda su profundidad, por lo que es necesario evaluar las posiciones en estados no terminales que permitan tomar decisiones adecuadas. Dicha evaluación se realiza en función de las *características* del estado del juego (o tablero). Entre las características más importantes se encuentra la ventaja material, la localización de las piezas y el encadenamiento de peones entre otras [8]. Una buena función de evaluación es

indispensable para un motor que juegue razonablemente bien. En [8] se propone una función inicial que da resultados aceptables si se combina con algoritmos eficientes de búsqueda. El aprendizaje y adaptación de la función de evaluación es un área importante de desarrollo en el campo del ajedrez computacional [13][4].

Los algoritmos de búsqueda son la parte medular de todo sistema de ajedrez computacional (y de cualquier juego computacional en general). A través del algoritmo de búsqueda es posible tomar las decisiones que llevan a una posición ganadora, o en su defecto a una posición en donde la esperanza de ganar sea la más alta posible. La profundidad a la que se realiza la búsqueda en un árbol de juegos es equivalente a la predicción que puede realizar el jugador n pasos adelante, lo que determina directamente la calidad del motor de ajedrez. Si bien los métodos de búsqueda son de complejidad exponencial (problema NP-completo), es posible, mediante el uso de heurísticas, reducir el espacio de búsqueda y por consiguiente aumentar la profundidad de ésta.

El trabajo de tesis de licenciatura en Ciencias de la Computación que realiza el primer autor, bajo la supervisión del segundo, tiene como fin el desarrollo de un motor completo de ajedrez, incluyendo métodos sencillos de aprendizaje de la función de evaluación. El trabajo presentado en este documento se centra en el desarrollo, implementación y evaluación de los métodos de búsqueda más utilizados en ajedrez, así como el uso y combinación de diferentes heurísticas.

El documento se encuentra organizado de la manera siguiente; en la sección 1, se presenta el algoritmo básico de *minimax* para búsquedas en juegos, así la variante conocida como poda α - β , que permite la realización práctica del *minimax*, y una variación a la poda α - β conocida como *ventana mínima* que en algunos casos presenta ventajas sobre la poda α - β .

En la sección siguiente se presentan las principales heurísticas de ordenación de movimientos que se utilizan en el juego de ajedrez y se describen los algoritmos de las heurísticas principales. Con el fin de apreciar las ventajas y desventajas que ofrece cada una de las heurísticas, se realiza una comparación práctica sobre la búsqueda, manteniendo la misma función de evaluación, de una posición intermedia en una partida de grandes maestros. Esto permite ilustrar de manera clara en que casos son eficientes las heurísticas y cuando significan una carga extra de cálculo. Por último se presentan las conclusiones del trabajo desarrollado.

2. Algoritmos de Búsqueda

Para que un programa de computadora pueda jugar ajedrez, tiene que determinar la secuencias de jugadas que le permitan ganar la partida, para hacer esto, necesita hacer una búsqueda a través de un árbol de juego, donde cada nodo del árbol representa una configuración del tablero y cada arco representa cada movimiento legal para el jugador en turno en ese estado. El programa de computadora debe encontrar un camino a través del árbol de juego que termine en el resultado más favorable. Para realizar esta búsqueda es fundamental que el programa asuma que el oponente también estará buscando el mejor camino posible.

Así, el valor de un nodo será el valor que maximice la utilidad (o ganancia) del jugador en turno respecto a sus nodos sucesores. Este simple algoritmo llamado MiniMax [11], garantiza encontrar la solución óptima. Sin embargo, al estar el valor de un nodo determinado por el valor de sus nodos sucesores, es necesario calcular el valor de *todos* los nodos del árbol de

juego hasta una profundidad establecida. La complejidad de *minimax* está dada por $\mathcal{O}(\omega^d)$ [11] donde ω es el tamaño de ramificación y d es la profundidad establecida. Debido a que el espacio de búsqueda es enorme y este algoritmo es poco eficiente, poco tiempo después surgió una mejora para este algoritmo conocida como poda α - β .

2.1. Algoritmo de Poda α - β

La idea básica del algoritmo α - β [2] es podar partes irrelevantes del árbol que no tienen influencia en el valor final de la búsqueda. El algoritmo α - β ahorra este tiempo de búsqueda asumiendo la siguiente idea: si ya se conoce que cierto movimiento es peor que el mejor movimiento encontrado en un determinado momento, es posible ahorrar tiempo necesario para calcular que tan malo es este movimiento.

Para hacer esto el algoritmo usa un límite inferior y un límite superior a los que llamamos α y β respectivamente. Los nodos que serán *podados* serán los que tengan un valor fuera de estos límites. Estos límites son inicializados con los valores extremos v_{max} y $-v_{max}$ respectivamente. Cada vez que un valor máximo es encontrado y este es más pequeño que el valor del límite superior, este límite es actualizado con este valor, mientras que el límite inferior es actualizado con el mínimo más grande. En un nivel de minimización, los nodos que tengan un sucesor con un valor más grande que el límite superior pueden ser podados. En un nivel de maximización, los nodos con un valor más pequeño que el límite inferior pueden ser podados. De esta manera la poda de estos subárboles completos deja el valor del nodo raíz idéntica a la obtenida con el algoritmo de *minimax*. El pseudocódigo del algoritmo α - β se presenta en el Algoritmo 1.

Algoritmo 1 BúsquedaAlphaBeta(α , β , d)

Entrada: $d \in \mathbb{N}$ profundidad de búsqueda.

Entrada: $\alpha, \beta \in [-\text{inf}, \text{inf}]$ \triangleright **Variable global** $n \leftarrow$ posición del tablero.

Salida: Valor minimax de la posición actual de n . \triangleright Iniciar con `BúsquedaAlphaBeta(-inf, inf, d)`.

```

1: si  $n$  es terminal o  $d = 0$  entonces
2:   regresar Evaluación de  $n$ .
3: fin si
4:  $Movimientos \leftarrow$  Generar movimientos de  $n$ .
5: Ordenar  $Movimientos$  de acuerdo a una estrategia establecida.
6: para todo  $Movimiento \in Movimientos$  hacer
7:    $n \leftarrow$  Hacer  $Movimiento$ 
8:    $valor \leftarrow -BúsquedaAlphaBeta(-\beta, -\alpha, d - 1)$ .
9:    $n \leftarrow$  Deshacer  $Movimiento$ 
10:  si  $valor \geq \beta$  entonces
11:    regresar  $\beta$ .
12:  fin si
13:  si  $valor > \alpha$  entonces
14:     $\alpha \leftarrow valor$ .
15:  fin si
16: fin para
17: regresar  $\alpha$ .
```

2.2. Búsqueda de ventana mínima PVS

Avances en algoritmos de búsqueda, basados en técnicas de búsqueda de ventanas mínimas [9] demostraron un mejor rendimiento que el algoritmo α - β normal. La idea básica detrás estos métodos es que es mas económico en tiempo comprobar a un subárbol que determinar el valor exacto de este. Se ha mostrado que, para árboles grandes, las técnicas de ventanas mínimas proveen una ventaja significativa[9]. Para árboles sin ordenar, se sabe que su complejidad es asintóticamente equivalentes a un algoritmo α - β simple, aunque puede llegar a revisar más nodos, ya que se asume que la ordenación de los movimientos es perfecta; si la ordenación falla, entonces se tendrá que volver a revisar los subárboles de esos movimientos. El pseudocódigo para ventana mínima con variación principal se presenta en el Algoritmo 2.

Algoritmo 2 BúsquedaPV(α, β, d)

Entrada: $d \in \mathbb{N}$ profundidad de búsqueda.

Entrada: $\alpha, \beta \in [-\text{inf}, \text{inf}]$ \triangleright **Variable global** $n \leftarrow$ posición del tablero.

Salida: Valor minimax de la posición actual de n . \triangleright Iniciar con BúsquedaPV($-\text{inf}, \text{inf}, d$).

```
1: si  $n$  es terminal o  $d = 0$  entonces
2:   regresar Evaluación de  $n$ .
3: fin si
4:  $bSearchPv \leftarrow$  True
5:  $Movimientos \leftarrow$  Generar movimientos de  $n$ .
6: Ordenar  $Movimientos$  de acuerdo a una estrategia establecida.
7: para todo  $Movimiento \in Movimientos$  hacer
8:    $n \leftarrow$  Hacer  $Movimiento$ 
9:   si  $bSearchPv$  entonces
10:     $valor \leftarrow -\text{BúsquedaPV}(-\beta, -\alpha, d - 1)$ .
11:   si no
12:     $valor \leftarrow -\text{BúsquedaPV}(-\alpha - 1, -\alpha, d - 1)$ .
13:   si  $valor > \alpha$  entonces
14:     $valor \leftarrow -\text{BúsquedaPV}(-\beta, -\alpha, d - 1)$ .
15:   fin si
16: fin si
17:  $n \leftarrow$  Deshacer  $Movimiento$ 
18: si  $valor \geq \beta$  entonces
19:   regresar  $\beta$ .
20: fin si
21: si  $valor > \alpha$  entonces
22:    $\alpha \leftarrow valor$ .
23:    $bSearchPv \leftarrow$  False
24: fin si
25: fin para
26: regresar  $\alpha$ .
```

3. Heurísticas de ordenación de movimientos

El algoritmo α - β devuelve *exactamente* el mismo resultado que el algoritmo *minimax*, sin embargo, el número de nodos visitados puede ser bastante diferente. Que tan bien lo haga depende del ordenamiento en que los nodos son explorados. En el peor caso, no ocurren ningún

corte, debido a que los nodos son explorados de la manera incorrecta. Así, el algoritmo $\alpha - \beta$ se convierte un algoritmo *minimax* plano, con una complejidad de $\mathcal{O}(\omega^d)$.

En el mejor caso, la ordenación de los movimientos es perfecta, los mejores movimientos son visitados primero en cada nodo, por lo que el número de cortes es el máximo. En [12] se demostró que la complejidad del mejor caso depende del hecho de que d sea par o impar. Para d par la complejidad temporal será $\mathcal{O}(2\omega^{d/2} + 1)$ y para d impar será $\mathcal{O}(\omega^{(d+1)/2} + \omega^{(d-1)/2} - 1)$. Como una buena ordenación de los movimientos es crucial para lograr una búsqueda efectiva $\alpha - \beta$ en el juego del ajedrez, heurísticas estáticas como dinámicas han sido desarrolladas durante las pasadas décadas. La ordenación estática de los movimientos significa que los movimientos son ordenados dentro del generador de movimientos según ciertas heurísticas que son independientes de la posición actual del nodo del árbol. La ordenación de movimientos dinámica trata de usar información adquirida durante la búsqueda para decidir que movimiento explorar primero.

3.1. Heurísticas estáticas

Dentro del generador de movimientos, a cada movimiento se le asigna un valor basado en alguna heurística estática, y estas son diferentes si son movimientos de captura o de no-captura. Con el fin de asignar un valor a un movimiento de captura, la pieza que captura (el agresor) como también la pieza capturada (víctima) deben ser tomadas en consideración. Una estrategia común es la heurística *MVV/LVA* [3], los movimientos de captura son ordenados por la relación que existe entre víctima más valiosa (*most value victim*), y el agresor menos valioso (*less value agresor*). La forma de expresar esta relación para ordenar los movimientos depende de cada programa de ajedrez.

3.2. Heurísticas asesinas

La idea básica de las heurísticas asesinas es que los movimientos que han sido buenos, aquellos que han causado un corte a cierta profundidad, deberían de ser tratados de nuevo a la misma profundidad. Esta heurística fue propuesta por Slate y Atkin [1]. Ellos sugieren guardar 2 movimientos de captura para cada jugada, y mantener un contador para cada uno de ellos. Así, cada vez que ocurra un corte, el movimiento que ocasionó el corte será comparado con los movimientos de captura; si corresponde a alguno de ellos, entonces el contador correspondiente es aumentado y el movimiento de captura con el contador menor es reemplazado por el movimiento que ocasionó el corte.

3.3. Heurística de historia

La idea detrás la heurística de historia [10] es que cada movimiento que a sido bueno en promedio a través de todo el árbol, debería de ser explorado antes que los otros. Para esto, un valor histórico es mantenido para cada posible movimiento, que es actualizado cada vez que ocurre un corte o cada vez que un mejor movimiento es encontrado. El valor histórico es incrementado por la distancia que existe entre el horizonte de búsqueda y el movimiento que se exploró. La idea es que movimientos que se han probado que son buenos en una profundidad mayor sean recompensados de mayor manera que aquellos que resultaron de búsquedas menos profundas.

Algoritmo 3 Profundidad Iterativa

Entrada: $d \in \mathbb{N}$ profundidad de búsqueda.

Entrada: $\alpha, \beta \in [-\text{inf}, \text{inf}]$ \triangleright **Variable global** $n \leftarrow$ posición del tablero.

Salida: Valor minimax de la posición actual de n . \triangleright Iniciar con `BúsquedaPV(-inf, inf, d)`.

- 1: **para** $d = 1, 2, \dots, d_{max}$ **hacer**
 - 2: $valor \leftarrow -\text{BúsquedaPV}(-\beta, -\alpha, d - 1)$.
 - 3: **fin para**
-

3.4. Profundidad iterativa

Esta es una de las más importantes Heurísticas [8]. La idea básica es que, para realizar una búsqueda *primero profundidad* a una profundidad d , primero se realiza una búsqueda a profundidad **$d-1$** , y los resultados de esta búsqueda se utilizan para efectuar una mejor ordenación de los movimientos, usando tablas de transposición o tablas de refutación. Aunque esto en principio parezca una gran pérdida de tiempo, un análisis más cuidadoso [6] muestra que el tiempo utilizado en los niveles $1, 2, \dots, d-1$ es insignificante comparado con el tiempo gastando en expandir el nivel d .

Una de las ventajas principales de la profundidad iterativa es que cuando se comienza a expandir los nodos a una profundidad d , ya se tiene una buena estimación de los movimientos que se deben comenzar a explorar, mediante el uso de las heurísticas dinámicas y uso de tablas de transposición, lo que permite podar una mayor cantidad de nodos. Igualmente, en casos como un torneo, donde hay una restricción de tiempo para cada movimiento, si se alcanza el tiempo máximo de búsqueda, se tendrá un movimiento aceptable a realizar. La profundidad iterativa es reconocida como un componente fundamental en cualquier programa de ajedrez. El pseudocódigo de profundidad iterativa se muestra en el algoritmo 3.

3.5. Tablas de transposición

El espacio de búsqueda en el ajedrez es en realidad un grafo acíclico, esto significa que podemos llegar a una misma posición varias veces y desde diferentes estados, debido a las diferentes maneras en que las piezas pueden jugarse. Ocasionando mucha redundancia en el árbol de búsqueda. El principal objetivo de las tablas de transposición[7] es poder reconocer posiciones que ya han sido examinadas. así cuando encontremos estas posiciones, la información que guardamos en las tablas puede ser utilizada para 3 propósitos, el primero es que podemos ajustar los límites $\alpha-\beta$ de la ventana de búsqueda, el segundo propósito es que podemos recordar el mejor movimiento encontrado anteriormente mediante profundidad iterativa y ser el primero movimiento en ser explorado, ya que probablemente puede haber ocasionado un corte anteriormente y pueda volver a ocasionarlo. De esta manera la tabla de transposición es usada como una mecanismo de ordenación de movimientos. Por último y el principal propósito de la tabla de transposición es poder reconocer posiciones que ya han sido examinadas completamente, y que ya se ha determinado su valor, por lo que no hay necesidad de volver a examinarlas nuevamente. El uso de las tablas de transposición dentro del algoritmo de *ventana mínima* se ilustra en el pseudocódigo presentado en el algoritmo 4.

Algoritmo 4 BúsquedaPVTT(α, β, d)

Entrada: $d \in \mathbb{N}$ profundidad de búsqueda.

Entrada: $\alpha, \beta \in [-\text{inf}, \text{inf}]$ \triangleright **Variable global** $n \leftarrow$ posición del tablero.

Salida: Valor minimax de la posición actual de n . \triangleright Iniciar con BúsquedaPV($-\text{inf}, \text{inf}, d$).

```
1: ZobristKey  $\leftarrow$  Generar Clave Zobrist de  $n$ 
2: ComprobarTT( $d, \alpha, \beta, \text{ZobristKey}$ )
3: si  $n$  es terminal o  $d = 0$  entonces
4:   regresar  $-\text{Quiesce}(-\beta, -\alpha)$ .
5: fin si
6: bSearchPv  $\leftarrow$  True
7: flag  $\leftarrow$  LimiteSuperior
8: Movimientos  $\leftarrow$  Generar movimientos de  $n$ .
9: Ordenar Movimientos de acuerdo a una estrategia establecida.
10: para todo Movimiento  $\in$  Movimientos hacer
11:    $n \leftarrow$  Hacer Movimiento
12:   si bSearchPv entonces
13:     valor  $\leftarrow -\text{BúsquedaPVTT}(-\beta, -\alpha, d - 1)$ .
14:   si no
15:     valor  $\leftarrow -\text{BúsquedaPVTT}(-\alpha - 1, -\alpha, d - 1)$ .
16:     si valor  $> \alpha$  entonces
17:       valor  $\leftarrow -\text{BúsquedaPVTT}(-\beta, -\alpha, d - 1)$ .
18:     fin si
19:   fin si
20:    $n \leftarrow$  Deshacer Movimiento
21:   si valor  $\geq \beta$  entonces
22:     Guardar( $d, \alpha, \beta, \text{valor}, \text{ZobristKey}, \text{LimiteInferior}$ )
23:     regresar  $\beta$ .
24:   fin si
25:   si valor  $> \alpha$  entonces
26:      $\alpha \leftarrow \text{valor}$ .
27:     flag  $\leftarrow$  ValorExacto.
28:     bSearchPv  $\leftarrow$  False
29:   fin si
30: fin para
31: Guardar( $d, \alpha, \beta, \text{valor}, \text{ZobristKey}, \text{flag}$ )
32: regresar  $\alpha$ .
```

El algoritmo 4 utiliza una tabla *hash* como estructura de datos para guardar los valores de las posiciones, debido a que la búsqueda en dicha estructura es de complejidad logarítmica. Sin embargo, la cantidad de posibles estados (posiciones del tablero) que existen en el ajedrez implicarían el uso de una cantidad de memoria extremadamente grande para guardar la información. Para evitar esto, se define una codificación, en la cual, si bien varias posiciones del tablero comparten una clave, las probabilidades que ambas posiciones se encuentren cercanas son muy bajas. Esta codificación se conoce como *Zobrist*. Mientras mayor sea la memoria asignada a la tabla *hash*, menor número de *colisiones* existirán; esto es, posiciones que puedan encontrarse en una misma búsqueda y compartan clave *Zobrist*. El uso de la codificación *Zobrist*, tal como se requiere en el algoritmo 4 se encuentra en el pseudocódigo del algoritmo 5.

Algoritmo 5 ComprobarTT($d, \alpha, \beta, ZobristKey$)

Salida: Valor para la posición actual.

```
1:  $Indice \leftarrow ZobristKey \% (\text{Tamaño de la tabla Hash})$ 
2: si TablaHash[Indice].ZobristKey == ZobristKey entonces
3:   si TablaHash[Indice].Profundidad  $\geq d$  entonces
4:     si TablaHash[Indice].Bandera == ValorExacto entonces
5:       regresar TablaHash[Indice].valor
6:     fin si
7:     si TablaHash[Indice].Bandera == LimiteInferior && TablaHash[Indice].valor  $\leq \alpha$  entonces
8:       regresar  $\alpha$ .
9:     fin si
10:    si TablaHash[Indice].Bandera == LimiteSuperior && TablaHash[Indice].valor  $\geq \beta$  entonces
11:      regresar  $\beta$ .
12:    fin si
13:  fin si
14: fin si
```

4. Comparación de técnicas y heurísticas

Con el fin de comparar los resultados de las diferentes modificaciones al algoritmo α - β , se analizó, a partir del motor de ajedrez desarrollado, el número de nodos generado por cada método, empezando por la profundidad 1, hasta una profundidad 7. Para esto, se seleccionó la jugada No. 16 de la partida Bobby Fischer (blancas) vs. J. Sherwin (negras) en New Jersey, 9/2/1957 [5]. La posición se muestra en la figura 1.

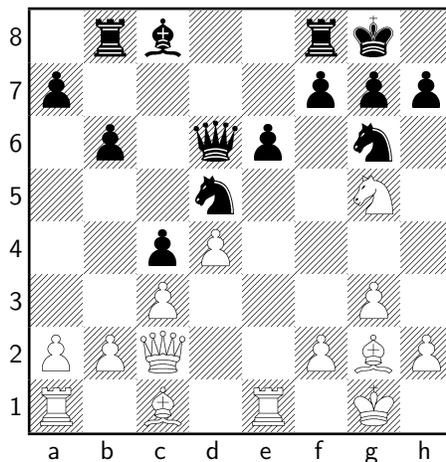


Figura 1. Posición utilizada para la comparación de algoritmos

Es de remarcar que, debido a que todos los métodos utilizan la misma función de evaluación, la variación principal es la misma para cada una de las pruebas. Igualmente, se analizó la velocidad de procesamiento, en nodos por segundo, de los diferentes métodos, siendo mas o menos constante para todos de 140 mil nodos por segundo. El motor se programó en *Visual*

C++ bajo el entorno *.net*, y la velocidad de procesamiento está estimada bajo una *MacBook* con procesador 2.13 Mhz y 1,72 Gb de RAM.

Se probó la eficiencia de los dos algoritmos de búsqueda presentados (la poda $\alpha\text{-}\beta$ y el algoritmo de ventanas mínimas) combinando diferentes heurísticas de ordenamiento. En la tabla 1 se muestran las combinaciones seleccionadas. La heurística MVV/LVA se aplicó en todos los métodos debido a la imposibilidad de contar con un método de poda $\alpha\text{-}\beta$ sin heurísticas a una profundidad significativa. Las combinaciones a y c nos permiten comparar la cantidad de nodos generados debido a la profundidad iterativa, sin aprovechar las ventajas de esta.

Tabla 1. Combinación de Métodos y Heurísticas para las pruebas

Método	$\alpha\text{-}\beta$	PVS	MVV/LVA	Historia	Ref.	Prof. Iter.	Tablas de Transp.
l	X		X				
a	X		X	X			
b	X		X	X			X
c	X		X	X		X	
d	X		X	X	X	X	
e	X		X	X	X	X	X
f	X		X	X		X	X
g		X	X	X		X	X
h		X	X	X	X	X	
i		X	X	X		X	
j		X	X	X		X	X
k		X	X	X	X	X	X

Tabla 2. Comparativo de nodos generados a profundidades de 1 a 7

Método	1	2	3	4	5	6	7
l	124	5,090	9,962	235,103	965,932	11,567,050	65,813,333
a	124	4,787	9,713	156,053	461,844	4,898,899	21,804,429
b	124	4,743	9,049	117,123	328,451	2,607,850	10,245,987
c	124	4,350	7,979	139,097	484,282	4,934,670	20,173,121
d	124	4,409	6,493	132,110	487,076	6,035,801	17,247,365
e	124	4,430	11,856	123,490	475,863	2,833,614	12,506,148
f	124	4,489	10,425	119,167	462,794	3,370,414	13,671,872
g	148	2,804	5,849	120,458	303,682	2,311,321	11,615,960
h	148	2,952	7,690	105,022	397,310	2,720,102	13,296,845
i	148	4,003	7,841	88,288	356,824	3,165,677	14,890,689
j	148	2,923	7,178	76,836	282,321	1,364,310	5,935,786
k	148	3974	7,373	61,439	235,243	1,799,974	7,082,247

El resultado de los nodos generados por cada algoritmo y combinación de heurísticas, para profundidades de búsqueda desde 1 hasta 7, se muestran en la Tabla 2. Se puede apreciar como el crecimiento de nodos es exponencial al aumento de la profundidad, así como el efecto que tiene cada una de las heurísticas empleadas y la ordenación de movimientos basados en

la poda $\alpha - \beta$. En relación a los métodos a y b, podemos apreciar como el uso de la profundidad iterativa implica una menor generación de nodos a profundidades grandes (aunque no significativa) con el uso de las heurísticas más simples. Conforme se utilizan más heurísticas, el uso de la profundidad iterativa es más notorio, como se muestra en la combinación h. Si bien la profundidad iterativa tiene un efecto importante, el uso de tablas de transposición es significativo en el número de nodos generados. La implementación y optimización del uso de las tablas de transposición es una tarea no trivial, y consume importantes recursos (memoria). Sin embargo los beneficios que otorga compensan sus requerimientos.

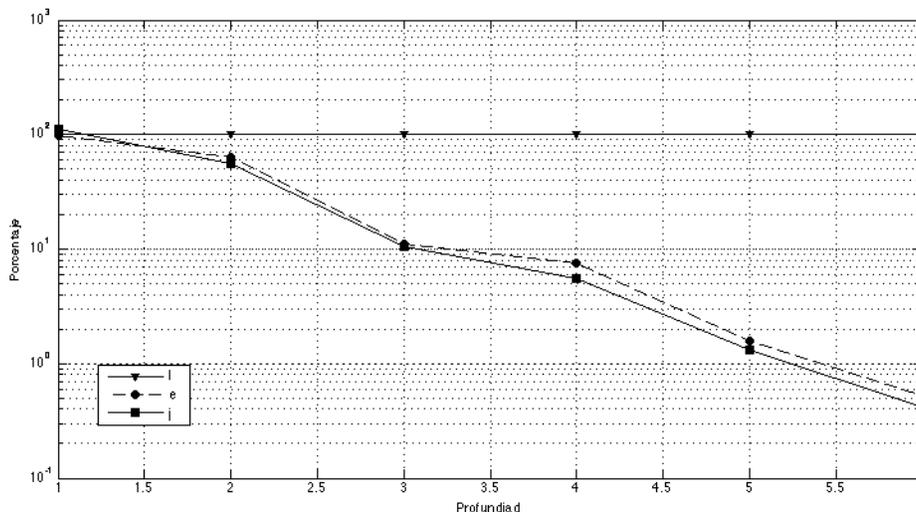


Figura 2. Tiempo normalizado de procesamiento a diferentes profundidades

Con el fin de mostrar los resultados en forma normalizada, que permitan resaltar el aporte de cada método a diferentes profundidades, en la Figura 2 se muestra el tiempo, normalizado respecto al algoritmo básico (poda $\alpha - \beta$ sin heurísticas) de cada algoritmo, utilizando todas las heurísticas, definidos por las combinaciones e y k de la tabla 1. Debido a que la diferencia con el método básico es importante, se presentan los resultados en escala logarítmica. Es posible ver que, a partir de una profundidad $d = 3$, el uso de heurísticas reduce en un 90 % el tiempo de búsqueda. Igualmente, se muestra en forma clara como, a partir de cierta profundidad, la diferencia entre el uso del algoritmo de poda $\alpha - \beta$ respecto al de ventanas mínimas se mantiene mas o menos constante, de 10 %. Esta relación se mantiene regularmente en otras posiciones.

5. Conclusiones

En este trabajo se presentaron los avances de tesis sobre el desarrollo de un motor de ajedrez concernientes a los algoritmos de búsqueda entre adversarios. El algoritmo de búsqueda utilizado es la poda $\alpha - \beta$, así como su variante conocida como ventanas mínimas. Para mejorar el tiempo de búsqueda del algoritmo, se presentaron diferentes heurísticas de ordenamiento. Las

diferentes heurísticas y algoritmos fueron implementados y comparados en una situación real. Todos los métodos presentados fueron implementados en el motor de ajedrez desarrollado el cual se encuentra en versión 2,5, y es completamente funcional.

Debido a las limitaciones de espacio se decidió omitir en este documento los métodos de representación, así como la función de evaluación. La función de evaluación es, junto a los algoritmos de búsqueda, lo que determina la calidad del motor de búsqueda, por lo que, se prevee como trabajo futuro realizar un método que permita ajustar una función de utilidad nominal a partir de la experiencia.

6. Referencias

- [1] S.G. Akl and M.M. Newborn. The principal continuation and the killer heuristic. In *Proceedings of the 1977 annual conference*, New York, NY, USA, 1977.
- [2] A. G. Bell. The alpha-beta heuristic. In *Games Playing with Computers*, Stanford, 1972.
- [3] M. Boulé. *An FPGA Move Generator for the Game of Chess*. PhD thesis, McGill University, Montréal, Québec, Canada, 2002.
- [4] K. Chellapilla and D.B. Fogel. Evolution, neural networks, games and intelligence. In *IEEE*, pages 1471–1496, 1999.
- [5] Chess Games. B. Fischer vs. J. Sherwin, 1957. <http://www.chessgames.com/perl/chessgame?gid=1008366>, 2010.
- [6] J. Gillogly. *Performance Analysis of the Technology Chess Program*. PhD thesis, Carnegie-Mellon University, 1987.
- [7] R. Greenblatt, D. Eastlake, and S. Crocker. The greenblatt chess program. *Proceedings of the AfiPs Fall Joint Computer Conference*, 31:801–810, 1967.
- [8] R.E. Korf. Depth-first iterative-deepening: An optimal admissible tree search. *Artificial Intelligence*, 27:97–109, 1985.
- [9] T.A. Marsland. Relative efficiency of alpha-beta implementations. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Karlsruhe, Germany, 1983.
- [10] J. Schaeffer. The history heuristic. *International Computer Chess Association Journal*, 41:16–19, 1983.
- [11] C.E. Shannon. Programing a computer for playing chess. *Philosophical magazine*, 41:29–48, 1950.
- [12] J. H. Slagle and J. K. Dixon. Experiments with some programs that search gametrees. *Journal of the ACM*, 21:189–207, 1969.
- [13] R.S. Sutton. Learning to predict by the methods of temporal differences. In *Machine Learning 4*, pages 9–44. Kluwer Academic Publishers, 1988.

Aprendizaje de funciones de utilidad basado en Criterio de Metropolis para el juego de *Othello*

Ismael Tesisteco Félix y Julio Waissman Vilanova
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
ismael.tesistecof@correoa.uson.mx

Nivel Educativo: Superior

Resumen

El factor de exploración y explotación es importante en el aprendizaje por refuerzo de funciones de utilidad de un algoritmo tipo Minimax. En este trabajo se hace uso de una técnica de optimización combinatoria para mejorar el factor de exploración y explotación en el algoritmo TD(0). El criterio de Metropolis del algoritmo temple simulado se introduce con el fin de equilibrar el factor exploración y explotación para el aprendizaje de la función de utilidad a partir de la experiencia. Los experimentos muestran que el aprendizaje converge más rápido que con otras políticas (ϵ -greedy, softmax), y la búsqueda no sufre la degradación del desempeño debido a la excesiva exploración. Se presentan resultados comparativos basados en el juego de Othello.

1. Introducción

El aprendizaje reforzado (AR) es un método de aprendizaje que se basa en la interacción entre un agente y su medio, estableciendo una política de operación del agente a través de una serie de señales llamadas *refuerzos* que provee el entorno [9]. La principal ventaja del AR es que no se tiene necesidad de contar con un modelo preciso del entorno así como de la evaluación. Esto lo hace especialmente adaptado al problema de estimar funciones de utilidad en problemas de juegos de suma cero[4].

El aprendizaje por interacción implica un compromiso entre la exploración del espacio de estados y la explotación de la información. Encontrar el equilibrio entre exploración y explotación en el AR es un problema que requiere cierto tratamiento. Si se realiza demasiada explotación se encuentra un óptimo local muy rápidamente. La exploración está basada en tomar acciones al azar para obtener más información sobre el problema. Esta información permite no caer en un óptimo local, pero la exploración excesiva disminuye drásticamente el rendimiento del aprendizaje y en algunos casos podría ser perjudicial con respecto a los resultados del aprendizaje de sí mismo [9]. El equilibrio entre la explotación y la exploración (E/E) ha sido investigado con anterioridad, proponiéndose diferentes métodos en la literatura, entre los que destacan los métodos ϵ -avido [9] y *Softmax* [9].

En este trabajo se propone modificar la estrategia de E/E, basándose en el criterio de Metropolis (CM) [7] utilizado comúnmente en el método de optimización heurística de temple simulado. Con el fin de ilustrar los resultados, se implementó el algoritmo de aprendizaje

reforzado TD(0) en el popular juego de *Othello*, y se comparó los resultados del aprendizaje utilizando la estrategia CM con las estrategias clásicas de E/E ϵ -avida y *Softmax*.

El documento está estructurado de la siguiente manera: Primeramente se presenta el algoritmo base de búsqueda en juegos deterministas de suma cero. En la siguiente sección se presenta el método de aprendizaje reforzado retenido para estimar las funciones de utilidad y la estrategia propuesta para E/E. Enseguida, se presenta la implementación en el juego de *Othello* así como los resultados obtenidos. Por último se presentan las conclusiones y trabajos futuros.

2. Búsquedas en Juegos Deterministas de Suma Cero

Un juego determinista, por turnos de suma cero con información perfecta, es un entorno observable, en el cual hay dos agentes cuyas acciones deben alternar y en el que los valores de utilidad de los agentes al final del juego son siempre iguales y opuestos (*i.e.* ganar (+1), empatar(0) o perder(-1)). Esta oposición en las funciones de utilidad hace de los agentes adversarios. Si el juego, de acuerdo a sus reglas, no permite repeticiones de posición (como el caso del *Othello* o el ajedrez), un juego puede representarse como un grafo acíclico, donde el nodo raíz es la posición inicial, y los movimientos legales de cada jugador van generando el *árbol de juego*. Cada nodo n pertenece al conjunto S de todos los estados que puede tomar el juego.

La estrategia óptima de juego, para uno de los agentes o jugadores, puede determinarse examinando el *valor minimax* de cada nodo del árbol de juego. El valor minimax de un nodo $V_{mm}(n)$ es la utilidad de un agente, estando en un nodo, y *asumiendo que ambos agentes juegan de manera óptima hasta el final del juego*. Si el nodo es terminal, su valor minimax es directamente su utilidad $V(n)$. En caso que se encuentre en un nodo donde los sucesores dependen de una jugada legal del agente seleccionado, su valor minimax será el máximo de los valores minimax de sus sucesores, mientras que si los sucesores de un nodo dependen de una movida legal del adversario, entonces su valor será el mínimo de los valores minimax de los nodos sucesores, de manera que:

$$V_{mm}(n) = \begin{cases} V(n) & \text{si } n \text{ es un nodo terminal} \\ \max_{s \in \text{Sucesores}(n)} V_{mm}(s) & \text{si en } n \text{ se espera un movimiento propio} \\ \min_{s \in \text{Sucesores}(n)} V_{mm}(s) & \text{si en } n \text{ se espera un movimiento del adversario} \end{cases} .$$

El algoritmo Minimax calcula el valor minimax de un nodo en forma recursiva, ofreciendo la información necesaria de cual es el movimiento legal que maximiza la utilidad de un jugador. Sin embargo, el algoritmo contempla una búsqueda exhaustiva en el árbol de juego, por lo que su complejidad temporal es de $\mathcal{O}(b^d)$, donde b es el número de jugadas legales promedio y d la profundidad del árbol de juego (el número de jugadas faltantes estimadas). Por ejemplo, el *Othello* tiene en promedio 8 jugadas legales por tablero, así que, para la posición inicial, es necesario general 8^{60} nodos, lo cual es prácticamente irrealizable. Por esta razón, existen modificaciones al algoritmo Minimax más eficientes.

El algoritmo de poda α - β se basa en evitar explorar nodos en ramas del árbol de juego, de las cuales es *seguro* que no es posible encontrar un mayor valor minimax en un nodo del agente seleccionado, por lo que es teóricamente equivalente al algoritmo minimax. La poda α - β

se basa en la aplicación de maximizaciones y minimizaciones sucesivamente. Por ejemplo, consideremos un nodo en el que mueve el agente seleccionado con únicamente dos niveles, de los cuales se conocen ciertos valores de utilidad y otros no. Supongamos entonces que el valor de utilidad del nodo n se puede calcular como:

$$V_{\text{minimax}}(n) = \text{máx} \left(\text{mín}(1, 0, 1), \text{mín}(-1, x, y), \text{mín}(1, -1, z) \right) = 0.$$

En este ejemplo se puede observar que no fue necesario conocer los valores de x , y y z para calcular $V_{\text{minimax}}(n)$ (fueron *podadas*). Igualmente es posible ver que, en la tercer rama, fue necesario calcular los dos primeros términos, hasta encontrar un valor menor a 0, por lo que el orden de búsqueda impacta directamente en el número de nodos generados. En particular, la poda α - β tiene una complejidad de $\mathcal{O}(b^{d/2})$ en el mejor de los casos, y en el peor de los casos tendrá la complejidad del algoritmo minimax. Como se puede apreciar, el ordenamiento de los sucesores es fundamental para incrementar la eficiencia del algoritmo, lo que ha dado lugar a una serie de métodos y algoritmos que quedan fuera del alcance de este trabajo. En el Algoritmo 1 se presenta una versión compacta y elegante de la poda α - β conocido como *negamax* [1].

Algoritmo 1 $\text{negamax}(n, d, \alpha, \beta, j)$

Entrada: n nodo del árbol, $d \in \mathbb{N}$ profundidad máxima de búsqueda.

Entrada: $\alpha, \beta \in [-\text{inf}, \text{inf}]$, $j \in \{-1, 1\}$.

Salida: Valor minimax del nodo n . \triangleright Iniciar con $\text{negamax}(n, d, -\text{inf}, \text{inf}, 1)$.

```

1: si  $n$  es terminal o  $d = 0$  entonces
2:   regresar jugador  $\times V(n)$ .
3: fin si
4:  $N \leftarrow$  lista de sucesores de  $n$ .
5: para todo  $n' \in N$  hacer
6:    $\alpha \leftarrow \text{máx}(\alpha, -\text{negamax}(n', d - 1, -\beta, -\alpha, -j))$ .
7:   si  $\alpha \geq \beta$  entonces
8:     regresar  $\alpha$ .
9:   fin si
10: fin para
11: regresar  $\alpha$ .
```

Sin embargo, aún con la drástica reducción de nodos debido a la poda, el número de nodos que deben inspeccionarse es demasiado grande para ser practicable, por lo que en la práctica solamente se realiza una búsqueda en profundidad limitada, y a partir de ese momento se estima la utilidad del nodo n' como si fuera un nodo terminal. La función de estimación de utilidad $\hat{V} : S \rightarrow \mathbb{R}$ estima la utilidad esperada en el nodo n' , si a partir de éste se continuara jugando de forma óptima. Es claro que la función será más precisa mientras más cerca se encuentre el nodo n' de un nodo terminal.

El uso de funciones de estimación de utilidad se debe a la gran cantidad de nodos existentes, por lo que en general no es posible almacenarla en forma tabular, como un conjunto de pares ordenados. Típicamente la función de estimación se calcula en relación a un conjunto de *características* del nodo n , tal que $\varphi_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ es la i -ésima característica de un nodo, la cual

puede ser las posiciones de las piezas, el número de piezas, la ocupación de lugares claves, etc. Si se consideran p características, entonces todos los nodos pueden ser representados por su *vector de características* $\varphi(n) = [\varphi_1(n), \dots, \varphi_p(n)]$. Así, es posible estimar la utilidad de cada nodo como $\hat{V}(n) = f(\varphi(n), \theta)$, donde θ es un vector de parámetros. En juegos computacionales se han utilizado típicamente dos tipos funciones de aproximación parametrizadas, las funciones lineales y las redes neuronales [8]. En particular, las funciones de estimación lineal están dadas por:

$$\hat{V}(n) = f(\varphi(n), \theta) = \theta^T \varphi(n)$$

donde $\theta \in \mathbb{R}^p$ se conoce como el vector de *pesos*, el cual le asigna mayor o menor valor a cada una de las características. El desarrollo y establecimiento de la función de estimación de utilidad es parte fundamental de los métodos de búsqueda en juegos, la cual influye directamente en la calidad de la toma de decisión.

3. Aprendizaje de funciones lineales de estimación de utilidad

El AR es un conjunto de técnicas que asumen nulo conocimiento sobre un entorno y ajusta una función de evaluación a partir de la interacción con el medio y de los resultados (refuerzos o recompensas) que el entorno regresa al cabo de una serie de acciones. En el caso de juegos deterministas la función de evaluación es la función de estimación del valor minimax.

Si se supone que se realiza una partida, comenzando en el nodo n_0 , y terminando en el nodo n_T , el valor de un nodo puede aproximarse como la suma de todos los refuerzos futuros, de manera que $\hat{V}(n_0) \approx r_0 + \dots + r_T$, o lo que es equivalente $\hat{V}(n_0) \approx r_0 + \hat{V}(n_1)$. Sin embargo, esta aproximación implica que en el calculo del valor de un nodo influyen de la misma manera los nodos más cercanos que los más lejanos. Si bien en el caso de juegos deterministas esto es cierto, la complejidad temporal de un juego no permite mantener en la memoria el árbol de juego completo. Una opción es considerar un *factor de descuento*, de la forma

$$\hat{V}(n_0) \approx r_0 + \gamma \hat{V}(n_1), \tag{1}$$

donde $\gamma \in (0, 1)$ se conoce como *factor de descuento* o *factor de olvido*.

La idea básica de los algoritmos de AR se condensa en el método de *diferencia temporales* [9], la cual es usar las evaluaciones sucesivas de $\hat{V}(n)$ para su ajuste. Consideremos que un juego se encuentra en el tiempo t y el nodo n_i , $\hat{V}_t(n_i)$ representa la evaluación en el tiempo t del nodo n_i . Enseguida se aplica la acción a_t y hace que el entorno (juego) transite del nodo n_i al nodo n_j en el tiempo $t + 1$, mientras el agente reciba una señal de refuerzo r_i . El valor del nodo n_i debería ser en el tiempo $t + 1$, de acuerdo a (2):

$$\hat{V}_{t+1}(n_i) = r_i + \gamma \hat{V}_t(n_j).$$

Así, la diferencia temporal entre las dos evaluaciones sucesivas de n_i es $r_i + \gamma \hat{V}_t(n_j) - \hat{V}_t(n_i)$. Esta diferencia entre dos evaluaciones no puede considerarse un error absoluto, debido a que el valor real de $V(n_i)$ es desconocido, pero sí implica que la función utilizada para estimar $\hat{V}(n_i)$ presenta inconsistencias. Este *error temporal* se utiliza para actualizar la función de estimación como

$$\hat{V}_{t+1}(n_i) = \hat{V}_t(n_i) + \alpha(r_i + \gamma \hat{V}_t(n_j) - \hat{V}_t(n_i)).$$

En caso que $\hat{V}(n)$ se estime por una función $f(\varphi(n), \theta)$, la actualización se realiza respecto al vector de parámetros y queda naturalmente como

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \alpha(r_i + \gamma f(\varphi(n_j), \theta_t) - f(\varphi(n_i), \theta_t)) \nabla_{\theta} f(\varphi(n_i), \theta_t), \quad (2)$$

donde $\nabla_{\theta} f(\varphi(n_i), \theta_t)$ es el gradiente de f respecto a θ evaluado para n_i y θ_t . El pseudocódigo de este método, llamado $TD(0)$, se presenta en el Algoritmo 2.

Algoritmo 2 $TD(0)(\alpha, \gamma, \text{Número_juegos}, \text{Juego}, \varphi)$

Entrada: $\alpha, \gamma \in (0, 1)$, $\text{Número_juegos} \in \mathbb{N}$.

Entrada: Juego, donde se pueda interactuar con el agente adversario y devuelva el estado actual y la recompensa.

Entrada: $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^p$, Función para obtener el vector de características de un estado.

Salida: $\theta \in \mathbb{R}^p$ vector de parámetros.

- 1: Inicializa θ arbitrariamente.
 - 2: **para** $i = 1$ hasta Número_juegos **hacer**
 - 3: $s \leftarrow s_0$, estado inicial del entorno.
 - 4: $\phi \leftarrow \varphi(s)$.
 - 5: $V \leftarrow \theta^T \phi$.
 - 6: **repetir**
 - 7: Seleccionar una acción con un algoritmo tipo *Minimax*.
 - 8: Modificar la acción de acuerdo a una estrategia de Exploración–Explotación.
 - 9: Aplicar acción y esperar que el contrario aplique su acción.
 - 10: Recuperar el estado actual s' y el valor de recompensa r .
 - 11: $\phi' \leftarrow \varphi(s')$.
 - 12: $V' \leftarrow \theta^T \phi'$.
 - 13: $\theta \leftarrow \theta + \alpha(r + \gamma V' - V) \phi$
 - 14: $s \leftarrow s', V \leftarrow V', \phi \leftarrow \phi'$
 - 15: **hasta** Fin de la partida
 - 16: **fin para**
 - 17: **regresar** θ .
-

Entre las estrategias más clásicas de E/E se encuentra la ϵ -ávida, la cual consiste en seleccionar la acción (o jugada) que lleve al nodo sucesor con mayor valor minimax con una probabilidad de $1 - \epsilon$, mientras que, con probabilidad ϵ se selecciona una acción en forma aleatoria entre todas las movidas legales.

El método ϵ -ávido tiende a encontrar muy rápidamente mínimos globales si el valor de ϵ es muy pequeño, mientras que, si el valor es muy grande (cercano a 0,5, los valores de los parámetros estimados tienden a oscilar mucho). Una estrategia clásica es comenzar con valores de ϵ grandes y reducirlos conforme pasa el tiempo.

Sin embargo, la exploración (la cual se realiza con una probabilidad de ϵ), se realiza en forma aleatoria, lo que puede conducir muchas veces a explorar regiones del espacio de descripción del juego que son claramente indeseables, lo que nos lleva a una pérdida en la eficiencia del algoritmo de aprendizaje. Con el fin de priorizar la búsqueda en las regiones del espacio más prometedoras, se desarrollo el método de *Softmax*.

La estrategia de *Softmax* consiste en seleccionar la acción a tomar como una distribución polinomial en relación a las jugadas legales posibles. El método más común de softmax utiliza una distribución de Boltzmann [9] para establecer dichas probabilidades por jugada legal. Sea s un estado del tablero de juego y $a \in \mathcal{A}(s)$ una jugada legal a partir de s . Si se considera s_a como el estado sucesor de s al aplicar la acción a , la probabilidad de aplicar la acción a en el estado s está dada por la función:

$$p(s, a) = \frac{\exp(\hat{V}(s_a)/\tau)}{\sum_{b \in \mathcal{A}(s)} \exp(\hat{V}(s_b)/\tau)},$$

donde τ es un parámetro positivo llamado *temperatura* y $\hat{V}(s_a)$ es la función de estimación del valor del estado sucesor al elegir la acción a .

La estrategia *Softmax* proporciona una gran cantidad de exploración mientras que los valores de los estados sucesores son similares, pero con el tiempo, al aumentar significativamente el valor de un estado sucesor, esta estrategia tiende a explorar menos, tendiendo a estabilizarse a un valor. Sin embargo, es necesario para poder implementar *Softmax* el cálculo de *todos* los valores minimax de los sucesores posibles, lo que lo hace extremadamente lento. Por esta razón se propone modificar la estrategia de E/E inspirados en el algoritmo de optimización heurística de temple simulado.

El temple simulado pertenece a la clase de procesos computacionales los cuales semejan a la naturaleza [3] que ha demostrado ser un algoritmo de aproximación eficaz para resolver problemas de optimización combinatoria. El núcleo de este algoritmo es el criterio de Metropolis, desarrollado en 1953 [7]. Observando la similitud entre el proceso de calentamiento de los sólidos y los problemas de optimización combinatoria, Kirkpatrick introdujo el criterio de Metropolis en la optimización para resolver el problema de quedarse atrapados en los óptimos locales [5].

En el algoritmo temple simulado el criterio de Metropolis se utiliza para decidir si la transición de la situación actual (la solución) i para un nuevo estado j ocurre. La probabilidad de transitar del estado i al j , $\Pr(i \rightarrow j)$ se puede definir, en el caso de un problema de maximización, como

$$\Pr(i \rightarrow j) = \begin{cases} 1, & \text{si } f(j) \geq f(i), \\ \exp\left(\frac{f(j)-f(i)}{t}\right), & \text{en otro caso} \end{cases},$$

donde $f(j)$ y $f(i)$ son los valores de la función de costo del problema de optimización y t es el tiempo transcurrido. Las funciones de costo $f(j)$ y $f(i)$ se pueden comparar con la energía de los estados j y i en un sólido calentado. Obviamente, el algoritmo temple simulado no es ávido al no rechazar todas las soluciones subóptimas, y el estado óptimo puede llegar con el tiempo.

Para aplicar el criterio de Metropolis como estrategia de E/E, se utiliza la función de estimación de valor $\hat{V}(s_{MM})$ del estado sucesor si se aplicara la acción obtenida con el método minimax, así como la estimación del valor de un estado sucesor a partir de una acción b seleccionada al azar entre los movimientos legales, $\hat{V}(s_b)$.

De manera análoga a la utilizada en el algoritmo de temple simulado, la probabilidad de seleccionar la acción al azar se calcula en relación su valor, así como el valor del sucesor que

se considera hasta el momento el mejor, de la forma

$$\Pr(b) = \begin{cases} 1, & \text{si } \hat{V}(s_b) \geq \hat{V}(s_{MM}), \\ \exp\left(\frac{\hat{V}(s_b) - \hat{V}(s_{MM})}{t}\right), & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Esto nos dice que, si al explorar (tomar una acción al azar), esta mejora la función de valor, entonces explora. En caso contrario toma la acción con minimax. Al principio se explora mucho con esta estrategia, pero conforme las partidas avanzan, se deja poco a poco de explorar. Esto se debe a que se está acercando a un buen óptimo local y sólo explora si tomar la acción al azar lleva a un mejor óptimo local. Por otra parte conforme avanzan las partidas el valor de t disminuye, lo que significa que va dejando de explorar.

4. Experimentos

Las diferentes estrategias de E/E fueron probadas en el juego Othello comparando los resultados obtenidos con el algoritmo de aprendizaje TD(0) y las estrategias ϵ -avida, *Softmax* y CM. El *Othello* emplea un tablero de 8 filas por 8 columnas y 64 fichas idénticas, redondas, blancas por una cara y negras por la otra. Las casillas se denotan numerando las columnas, comenzando por la esquina superior izquierda del tablero, con letras de la A a la H, e igual con las filas, con números del uno al ocho. De inicio, se colocan dos fichas con cara blanca en D4 y E5, y dos con cara negra en E4 y D5 [6].

Empezando por quien lleva las fichas negras los jugadores deben hacer un movimiento por turnos, a menos que no puedan hacer ninguno, pasando en ese caso el turno al jugador contrario. El movimiento consiste en colocar una ficha de forma que flanquee una o varias fichas del color contrario y voltear esas fichas para que pasen a mostrar el propio color. Se voltean todas las fichas que se han flanqueado en ese turno al colocar la ficha del color contrario. Esas fichas, para que estén flanqueadas, deben formar una línea continua recta (diagonal, horizontal o vertical) de fichas del mismo color entre dos fichas del color contrario. Cuando ya no puedan colocarse más fichas en el tablero, gana el jugador con más fichas de su propio color. El juego se programó en el lenguaje interpretado *Python* [2] y se puede descargar en [10].

El Othello tiene aproximadamente 10^{54} estados posibles y hacer una tabla de pares estado-acción no es prácticamente posible, así como intentar realizar el algoritmo de búsqueda con toda la profundidad. Es por eso que se hace una función de estimación de utilidad. Mientras más factores sean tomados en cuenta por la función de utilidad, mayor flexibilidad tendrá el algoritmo de aprendizaje para ajustar buenas estrategias. En este trabajo se optó por comparar los resultados de las diferentes estrategias de E/E manteniendo una función de utilidad simple.

La función de utilidad que se utilizó fue asignar un peso a cada casilla, promoviendo una estrategia de juego por posición. Utilizando la simetría del tablero de *Othello*, sólo es necesario una octava parte de él para representar grupos de casillas, como se aprecia en la figura (1). Con esto se requieren solamente 10 parámetros para definir la función de aproximación de la forma

$$V(s) = \sum_{(i,j) \in P} \theta_{i,j} \phi_{i,j}(s)$$

(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,3)	(0,2)	(0,1)	(0,0)
(0,1)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,3)	(1,2)	(1,1)	(0,1)
(0,2)	(1,2)	(2,2)	(2,3)	(2,3)	(2,2)	(1,2)	(0,2)
(0,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(3,3)	(2,3)	(1,3)	(0,3)
(0,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(3,3)	(2,3)	(1,3)	(0,3)
(0,2)	(1,2)	(2,2)	(2,3)	(2,3)	(2,2)	(1,2)	(0,2)
(0,1)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,3)	(1,2)	(1,1)	(0,1)
(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,3)	(0,2)	(0,1)	(0,0)

Figura 1. Equivalencia de casillas

donde $s \in S$ es la posición de fichas en el tablero, $P = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$ son los diferentes grupos de casillas y $\theta_{i,j}$ es el peso para el grupo de casillas. Las características $\phi(s)_{i,j}$ están dadas por

$$\phi(s)_{i,j} = \frac{N_{i,j} - B_{i,j}}{N_{i,j} + B_{i,j}},$$

desde el punto de vista del jugador de fichas negras, donde $N_{i,j}$ es el número de piezas negras en las casillas identificadas con (i,j) mientras que $B_{i,j}$ es el número de piezas blancas.

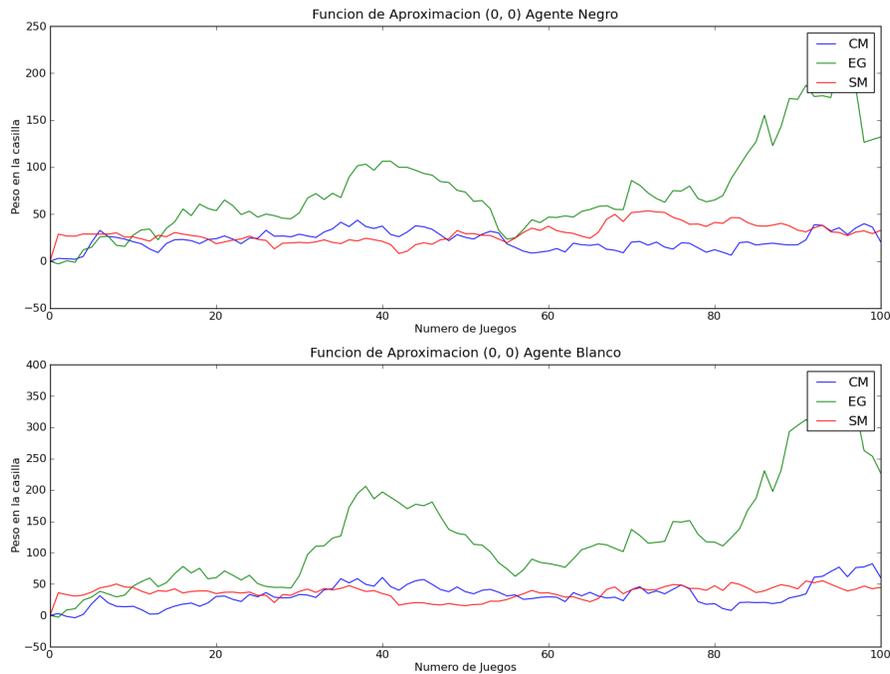


Figura 2. Peso del aprendizaje en las casillas (0,0).

El aprendizaje se realizó para ambos jugadores, utilizando la misma estrategia de E/E a lo largo de 7000 partidas de Othello. Ambos agentes se inicializaron con todos los pesos iguales a cero. Una vez que se contó con el aprendizaje de los agentes, se enfrentaron entre sí a los agentes que aprendieron con diferentes estrategias de E/E. En todos los casos, tanto para el jugador negro como el jugador blanco, los agentes que estimaron su función con CM derrotaron a los agentes que estimaron los parámetros con las estrategias ϵ -ávida y *Softmax*. En todos los casos, cuando se enfrentaron dos agentes que aprendieron con la misma estrategia de E/E, el jugador negro salió victorioso, de lo que se puede concluir que en el juego de *Othello* comenzar el juego ofrece cierta ventaja al jugador.

La Figura 2 muestra el peso $\theta_{0,0}$ a lo largo de las partidas de aprendizaje con las tres estrategias de E/E tanto para el jugador negro como para el jugador blanco. Se puede apreciar que la estrategia ϵ -ávida (línea verde) explora mucho y no tiende a establecerse en un valor a lo largo de las partidas. La política *Softmax* (línea roja) explora muy poco, pero converge lentamente a un mínimo local, mientras que para CM (línea azul) el factor de exploración es pequeño al principio, pero tiende a un valor cercano al que se encuentra con *Softmax*.

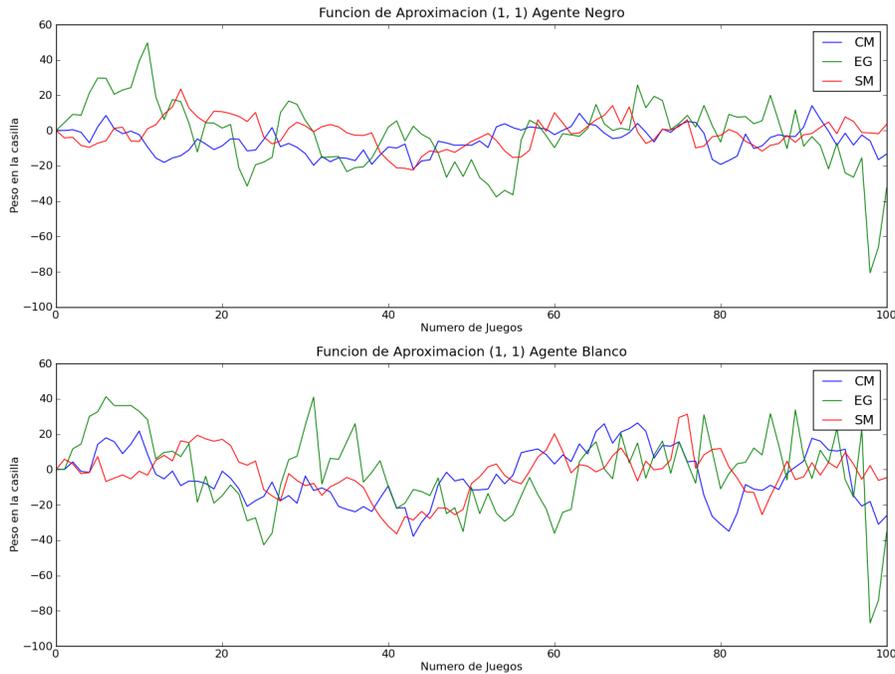


Figura 3. Peso del aprendizaje en las casillas (1,1).

La Figura 3, representa el aprendizaje del valor $\theta_{1,1}$ para las tres estrategias. En este caso, las políticas convergen a un peso negativo dado que ocupar esta casilla es una mala decisión [6]. Aunque al utilizar la estrategia ϵ -ávida se estima un peso más grande que con las demás, no ofrece un buen balance con los demás pesos. Con *Softmax* el valor es muy pequeño, mientras que CM encuentra un buen equilibrio.

5. Conclusiones

En este trabajo se estudió el efecto de la estrategia de exploración–explotación en la estimación, por aprendizaje reforzado, de los parámetros de funciones de estimación de utilidad para juegos deterministas de suma cero. Para esto, se programó una versión del algoritmo de poda α – β , la cual se implementó en el juego de *Othello*.

Se propuso el uso del criterio de Metropolis, utilizado ampliamente en los métodos de temple simulado, como otra estrategia más de E/E, y se comparó los resultados del aprendizaje obtenidos con dicha estrategia en relación a las estrategias ϵ –ávida y *Softmax*. Los resultados muestran que la estrategia de Metropolis es claramente mejor que ϵ –ávida, y que tienden a mejorar, aunque por poco margen, a la estrategia *Softmax*.

El experimento se realizó utilizando el algoritmo TD(0), que si bien ha demostrado en la práctica ser eficiente en el aprendizaje de funciones de utilidad, existen otros algoritmos de aprendizaje más sofisticados, como TD(λ) o TDLeaf, con los cuales deberá ser probada la estrategia CM. Igualmente, como trabajo futuro se encuentra el uso de funciones de utilidad no lineales, específicamente el uso de redes neuronales, y su adaptación utilizando técnicas de aprendizaje reforzado.

6. Referencias

- [1] Althöfer, I. (1990). *An incremental negamax algorithm*, Artificial Intelligence, 43, 1, 57–65.
- [2] Barry, P. y Griffiths, D. (2009). *Head First Programming: A Learner’s Guide to Programming Using the Python Language*. O’Reilly Media.
- [3] Boettcher, S. y Percus, A. (2000). *Nature’s way of optimizing*, Artificial Intelligence, 119, 1–2, 275–286.
- [4] Fudenberg, D. y Tirole, J. (1991). *Game Theory*. Cambridge, MIT Press.
- [5] Kirkpatrick, S. Gelatt, C. D. y Vecchi M. P. (1983). *Optimization by simulated annealing*, Science, 220, 4598, 671–680.
- [6] Landau, T. (1987). *Othello: Brief & Basic, An introduction to strategy and tactics for the game of Othello*. New York. Milton Bradley Co.
- [7] Metropolis, N. Rosenbluth, A. W. Rosenbluth, M. N. Teller, A. H. y Teller, E. (1953). *Equation of calculations by fast computing machines*, The Journal of Chemical Physics, 21, 6, 1087–1092.
- [8] Russell, S. y Norvig, P. (2002). *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Prentice Hall.
- [9] Sutton, R. S. y Barto, A. G. (1998). *Reinforcement Learning: An Introduction*. Cambridge, MIT Press.
- [10] Tesisteco, I. (2010). *Página personal*. <http://yoliztli.cs.buap.mx/~efi/Othello.rar>.

Ecuaciones diferenciales parciales no lineales: separación de variables, soluciones simbólicas

Inna Shingareva, Carlos Lizárraga Celaya

Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

e-mail: inna@fisica.uson.mx, carlos@fisica.uson.mx

Resumen

El presente trabajo considera la construcción de soluciones exactas de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) no lineales mediante los métodos de separación de variables y de álgebra computacional. Se aplican los métodos analíticos (separación ordinaria de variables, separación parcial de variables, separación generalizada de variables mediante diferenciación y separación en partes “splitting”) para obtener soluciones exactas y simbólicas de varias clases de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. En particular, se obtienen soluciones exactas y simbólicas (mediante el sistema Maple) de la ecuación de onda no lineal, la ecuación de sine-Gordon y dos ecuaciones no lineales de tercer orden. Para la ecuación de sine-Gordon, se describen sus cuatro clases diferentes de soluciones exactas tipo solitón y se visualizan los resultados analíticos.

1 Introducción

Es bien conocido que la *separación de variables* es uno de los métodos más importantes y poderosos para resolver ecuaciones diferenciales parciales lineales (EDP), en la cual la estructura de una EDP en particular nos permite buscar soluciones exactas separables (aditivamente o multiplicativamente), por ejemplo $u(x, t) = \phi(x) \circ \psi(t)$, donde la multiplicación o la adición se denota por el operador \circ .

En general, el método de separación de variables en ecuaciones diferenciales parciales nos permite reducir el problema original a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE), el cual se puede resolver por cuadraturas. La aplicación exitosa de este método a varias ecuaciones lineales de la física-matemática nos lleva a buscar una transformación de variables tal que en las nuevas variables la EDP se puede resolver mediante un *ansatz* separable (aditivo o multiplicativo) para encontrar una solución.

En general, todavía no existe un método que nos permita decidir si una EDP dada admite soluciones separables y como encontrar estas. Aunque para algunas clases particulares de ecuaciones diferenciales parciales existen criterios algorítmicos de separabilidad que nos permiten decidir si la separación de variables existe y encontrar las soluciones explícitamente.

Aunque para algunas ecuaciones diferenciales parciales no lineales específicas, es posible aplicar esta idea de la separación de variables, como sucede en el caso de EDPs lineales, la

amplia clase de EDPs no lineales no permiten la aplicación de este método directamente. Por lo tanto, en las últimas décadas este tema ha sido estudiado extensivamente con respecto a EDP no lineales y han sido desarrollado nuevos métodos que forman una familia de métodos de separación de variables, tales como la separación ordinaria de variables, separación parcial de variables, separación generalizada de variables, separación funcional de variables, separación incompleta de variables. En este trabajo consideramos algunos ejemplos de los primeros tres métodos.

Además, aunque en algunos casos es posible realizar una separación de variables, se obtienen expresiones muy complejas de resolver, por lo que construimos algoritmos y programas apoyados en sistemas de álgebra computacional para resolver varias clases de ecuaciones no lineales. Los programas (desarrollados en *Maple* y *Mathematica*) para resolver ejemplos en el presente trabajo y otras numerosas ecuaciones se pueden encontrar en [6]. También este enfoque simbólico nos sirve para la búsqueda de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que admiten una separación de variables.

2 Separación ordinaria de variables

En esta Sección, consideraremos el primer método (más simple) de la familia de métodos de separación de variables y una ecuación no lineal, donde es posible realizar la *separación ordinaria de variables* (como en el caso lineal).

Consideremos la *ecuación de onda no lineal* de la forma

$$u_{tt} = a(e^{\lambda u} u_x)_x.$$

Si aplicamos el método de separación ordinaria de variables y buscamos las soluciones exactas en la forma $u(x, t) = \phi(x) + \psi(t)$, podemos demostrar que la solución exacta de esta ecuación tiene la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\lambda C_1 C x^2 - 2\lambda C_1^2 x a + 2\lambda C_1 C_2 a}{2C a \cos(t\sqrt{\lambda C_1} + C_2\sqrt{\lambda C_1}) + 2C a} \right).$$

3 Separación parcial de variables

En esta Sección, consideraremos el segundo método de la familia de métodos de separación de variables y una ecuación no lineal, donde es posible realizar la *separación parcial de variables* (diferente del caso lineal). Se hace un análisis de la ecuación y se buscan todos los casos especiales donde la ecuación dada admite una separación ordinaria de variables.

Consideremos la ecuación no lineal de tercer orden

$$u_t u_{xx} + a u_x u_{tt} = b u_{xxx} + c u_{ttt},$$

donde a , b , y c son parámetros. Si aplicamos el método de separación de variables y buscamos las soluciones exactas de la forma $u(x, t) = \phi(x) + \psi(t)$, podemos demostrar que las soluciones exactas de esta ecuación existen para los tres casos especiales y tienen las siguientes formas:

1) si $\psi_t = C_1$, obtenemos $u(x, t) = C_1 t + C_2 + C_3 x + C_4 e^{C_1 x/b}$ (donde $\psi(t) = C_1 t + C_2$ y $\phi(x) = C_2 + C_3 x + C_4 e^{C_1 x/b}$);

2) si $\phi_x = C_1$, obtenemos $u(x, t) = C_1x + C_2 + C_3t + C_4e^{aC_1t/c}$ (donde $\phi(x) = C_1x + C_2$ y $\psi(t) = C_2 + C_3t + C_4e^{aC_1t/c}$);

3) si buscamos la solución en la forma $\phi(x) = C_1e^{-A_1\lambda x} + A_2\lambda x$, $\psi(t) = C_2e^{A_3\lambda t} + A_4\lambda t + C_3$ con los coeficientes desconocidos A_1 , A_2 , A_3 , y A_4 , entonces podemos encontrar estos coeficientes, $A_3 = 1$, $A_2 = c/a$, $A_1 = a$, $A_4 = -ab$, y la solución final $\phi(x) = C_1e^{-a\lambda x} + c\lambda x/a$, $\psi(t) = e^{\lambda t}C_2 - ab\lambda t + C_3$, y $u(x, t) = C_1e^{-a\lambda x} + c\lambda x/a + e^{\lambda t}C_2 - ab\lambda t + C_3$.

4 Separación de Variables Generalizada

Ahora consideramos el tercer método de la familia de métodos de separación de variables, es decir, una generalización de las *soluciones ordinarias separables* representadas en la forma

$$u(x, t) = \phi_1(x)\psi_1(t) + \dots + \phi_n(x)\psi_n(t), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde las funciones $\phi_i(x)$, $\psi_i(t)$ (con diferentes índices i) son independientes entre si y $\phi_i(x)\psi_i(t)$ son soluciones particulares de una EDP no lineal dada. En este caso decimos que $u(x, t)$ es la *solución separable generalizada*.

El concepto de la *separación no lineal de variables* fue introducido por primera vez por Galaktionov [1] en el estudio de ecuaciones parabólicas no lineales cuyas soluciones explotan (*blow-up*) en el tiempo, donde la solución se representa de la forma $u(x, t) = \phi(t)\psi(x) + \eta(t)$. Una gran cantidad de EDPs no lineales de varios tipos que admiten las soluciones separables generalizadas son presentadas por Polyanin *et al.* [3], [4]. Además, se pueden encontrar numerosas soluciones exactas y simbólicas en [5] y [6]. En esta Sección encontraremos soluciones separables generalizadas para algunos problemas mediante diferenciación y separación en partes (*splitting*).

1) *Soluciones separables generalizadas por diferenciación. Ecuación de sine-Gordon. Visualización de soluciones tipo solitón.* Consideremos la ecuación de sine-Gordon

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u,$$

la cual tiene numerosas aplicaciones en la física (por ejemplo, en las teorías de campos relativistas, la física de estado sólido, la óptica no lineal, etc.). Si aplicamos la transformación $u(x, t) = 4 \arctan(U(x, t))$, el método de separación generalizada de variables, y buscamos las soluciones exactas en la forma $u(x, t) = \phi(x)/\psi(t)$, llegamos a la siguiente ecuación:

$$2(\phi_x^2 - \psi_t^2) + (\psi^2 + \phi^2) \left(\frac{\phi_{xx}}{\phi} + \frac{\psi_{tt}}{\psi} \right) = \psi^2 - \phi^2.$$

Luego si derivamos esta ecuación con respecto a x y t y separamos las variables, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs):

$$\frac{\phi_{xxx}}{\phi^2\phi_x} - \frac{\phi_{xx}}{\phi^3} = C, \quad \frac{\psi_{ttt}}{\psi^2\psi_t} - \frac{\psi_{tt}}{\psi^3} = C,$$

donde C es una constante de separación. Estas EDOs se pueden integrar dos veces:

$$\phi_x^2 = \frac{1}{4}C\phi^4 + A_1\phi^2 + A_2, \quad \psi_t^2 = \frac{1}{4}C\psi^4 + B_1\psi^2 + B_2,$$

donde A_1, A_2, B_1, B_2 son constantes arbitrarias. Si sustituimos $\phi(x)$ y $\psi(t)$ en el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias mencionada anteriormente, obtenemos las relaciones $B_1 = 1 - A_1, B_2 = -A_2$ y las ecuaciones se convierten en

$$\phi_x^2 = \frac{1}{4}C\phi^4 + A_1\phi^2 + A_2, \quad \psi_t^2 = -\frac{1}{4}C\psi^4 + (A_1 - 1)\psi^2 - A_2.$$

Ahora consideramos algunos casos particulares importantes, de los cuales obtendremos y visualizaremos *soluciones tipo solitón*. Entre ellas encontraremos las *soluciones tipo 1-solitón* que se pueden clasificar de dos tipos, *pliegue* y *antipliegue*. Un *pliegue* es una solución cuyos valores límites en el infinito izquierdo ($-\infty$) es 0 y en el infinito derecho ($+\infty$) es 2π , y un *antipliegue* es una solución cuyos valores límites son 0 y -2π , respectivamente. Además, la *solución tipo 1-solitón* produce *soluciones de onda solitaria*, es decir *solitones del tipo forma de joroba* o *antisolitones* que se propagan sin cambiar su forma en direcciones opuestas.

Las *soluciones tipo 2-solitones* se pueden clasificar en varios casos diferentes: *interacción entre dos pliegues*, *interacción entre dos antipliegues*, *interacción entre un pliegue y un antipliegue*, *interacción entre un antipliegue y un pliegue*, y una solución especial llamada la *solución oscilante tipo "breather"*. Además, las *soluciones tipo 2-solitones* producen otras soluciones que representan la *interacción entre dos solitones o antisolitones iguales del tipo forma de joroba* y la *interacción entre un solitón y antisolitón* o la *interacción entre un antisolitón y solitón*.

1. Para $C = 0, A_2 = 0, A_1 > 1$ obtenemos las siguientes soluciones exactas:

a) $\phi(x) = D_1 e^{xk_1}, \psi(t) = E_1 e^{tk_2},$

$$u_1(x, t) = 4 \arctan (A e^{xk_1 - tk_2}),$$

donde $k_1 = \sqrt{A_1}, k_2 = \sqrt{A_1 - 1}, D_1 = e^{-C_1 k_1}, E_1 = e^{-C_1 k_2}, A = D_1/E_1$ y $A_1 > 1$ es una constante arbitraria.

b) $\phi(x) = D_1 e^{xk_1}, \psi(t) = E_2 e^{-tk_2},$

$$u_2(x, t) = 4 \arctan (A e^{xk_1 + tk_2}),$$

donde $D_1 = e^{-C_1 k_1}, E_2 = e^{C_1 k_2}, A = D_1/E_2$ y $A_1 > 1$ es una constante arbitraria. Estas soluciones representan la *solución tipo 1-soliton*, el caso *solución tipo pliegue* de la ecuación de sine-Gordon.

c) $\phi(x) = D_2 e^{-xk_1}, \psi(t) = E_1 e^{tk_2},$

$$u_3(x, t) = 4 \arctan (A e^{-xk_1 - tk_2}),$$

donde $D_2 = e^{C_1 k_1}, E_1 = e^{-C_1 k_2}, A = D_2/E_1$ y $A_1 > 1$ es una constante arbitraria.

d) $\phi(x) = D_2 e^{-xk_1}, \psi(t) = E_2 e^{-tk_2},$

$$u_4(x, t) = 4 \arctan (A e^{-xk_1 + tk_2}),$$

donde $D_2 = e^{C_1 k_1}, E_2 = e^{C_1 k_2}, A = D_2/E_2$ y $A_1 > 1$ es una contante arbitraria. Estas soluciones representan la *solución tipo 1-solitón*, el caso *antisolitón* o *solución tipo antipliegue*

de la ecuación de sine-Gordon. Además verificamos que estas soluciones son las soluciones exactas, presentamos las gráficas correspondientes y animación de estas soluciones. Estas soluciones del tipo solitón y antisolitón producen las soluciones u_{ix} y u_{it} ($i = 1, \dots, 4$), las cuales representan *soluciones de onda solitaria*, es decir solitones o antisolitones del tipo forma de joroba, que se propagan sin cambio de forma en direcciones opuestas. Presentamos las animaciones correspondientes de estas soluciones de onda solitaria.

2. Para $C = 0$, $A_2 \neq 0$, $A_1 > 1$, obtenemos, por ejemplo, las siguientes soluciones exactas más complicadas:

$$u_1(x, t) = -4 \arctan \left(\frac{k_2(e^{2C_1k_1} A_2 - e^{2xk_1})e^{k_2(t+C_1)-k_1(x+C_1)}}{k_1(e^{2C_1k_2} A_2 + e^{2tk_2})} \right),$$

$$u_2(x, t) = -4 \arctan \left(\frac{k_2(e^{2xk_1} A_2 - e^{2C_1k_1})e^{k_2(t+C_1)-k_1(x+C_1)}}{k_1(e^{2tk_2} A_2 + e^{2C_1k_2})} \right),$$

donde $k_1 = \sqrt{A_1}$, $k_2 = \sqrt{A_1 - 1}$, C_1 , A_1 , y A_2 son constantes arbitrarias. Estas soluciones pertenecen a la clase de soluciones tipo 2-solitones y fueron investigadas numericamente por primera vez por Perring y Skyrme [2]. Estas soluciones describen la *interacción de dos soluciones iguales del tipo pliegue o antipliegue*. Verificamos que estas soluciones son soluciones exactas y presentamos las animaciones correspondientes de estas soluciones. Las soluciones mencionadas anteriormente, es decir, *soluciones tipo 2-solitones*, el caso de la *interacción de dos soluciones iguales del tipo pliegue o antipliegue*, produce las soluciones u_{ix} y u_{it} ($i = 1, 2$), las cuales representan, respectivamente la *interacción de dos solitones o antisolitones del tipo forma de joroba*, la *interacción de un solitón y un antisolitón* o la *interacción de un antisolitón y un solitón*. Presentamos las animaciones correspondientes de estas interacciones.

3. Para $C \neq 0$, $A_2 = 0$, $A_1 > 1$ ($A_1 = 4$, $C = 4$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$) obtenemos, por ejemplo, las siguientes soluciones exactas:

$$u_{1,2}(x, t) = \pm 4 \arctan \left(\frac{2\sqrt{\tanh(2x)^2 - 1} \tanh(t\sqrt{3})}{\tanh(2x) \sqrt{3 - 3 \tanh(t\sqrt{3})^2}} \right),$$

Estas soluciones describen un *antipliegue* o *pliegue* que se mueve hacia la frontera, $u_x(0, t) = 0$, y luego se refleja en la frontera en forma de un *pliegue* o *antipliegue*, respectivamente. En otras palabras, podemos decir que estas *soluciones tipo 2-solitones* representan la *interacción de un antipliegue con un pliegue* o la *interacción de un pliegue con un antipliegue*, respectivamente. Verificamos que estas soluciones son soluciones exactas y presentamos las animaciones correspondientes de estas soluciones. Notemos que en este caso u_{ix} y u_{it} ($i = 1, 2$) no tienen valores reales.

4. Para $C \neq 0$, $A_2 = 0$, $0 < A_1 < 1$, $A_1 = 1 - \omega^2$, $\omega = \sqrt{1 - 0.9}$, $C = 4$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, obtenemos las siguientes soluciones especiales:

$$u_{1,2}(x, t) = \pm 4 \arctan \left(\frac{(2k^2(-1 + e^{2xk} \sqrt{e^{-4xk}}))e^{xk} |\cos(\omega t)| \sin(\omega t)}{(-4e^{2xk} + 4\omega^2 e^{2xk} - 1) \omega \cos(\omega t)} \right),$$

donde $k = \sqrt{1 - \omega^2}$. Estas soluciones se llaman las *soluciones oscilantes del tipo "breather"* de la ecuación de sine-Gordon y describen una estructura del tipo pulso de un *antisoliton* o *soliton del tipo forma de joroba*, respectivamente. Por lo tanto, en este caso las soluciones son funciones periódicas en el tiempo t con frecuencia ω para una posición x fija. Presentamos las animaciones correspondientes de estas soluciones para la frecuencia $\omega = \sqrt{1 - 0.9}$. Si consideramos el caso $\omega \approx 1$, por ejemplo $\omega = \sqrt{1 - 0.1}$, las soluciones obtenidas describen las *soluciones oscilantes del tipo "breather" de amplitud pequeña*.

2) *Soluciones separables generalizadas mediante la separación en partes (splitting)*. Consideramos la ecuación diferencial parcial no lineal de tercer orden

$$u_{xt} + (u_{xx})^2 - uu_{xx} = \nu u_{xxx}.$$

Si aplicamos el método de separación generalizada de variables, buscamos soluciones exactas en la forma $u(x, t) = \phi_1(x)\psi_1(t) + \psi_2(t)$, y aplicamos el procedimiento de separación en partes (splitting), llegamos a la siguiente *ecuación funcional*:

$$\sum_{i=1}^4 \Phi_i(x)\Psi_i(t) = 0,$$

donde $\Phi_1 = \phi_{1x}$, $\Psi_1 = \psi_{1t}$, $\Phi_2 = -\phi_{1xx}$, $\Psi_2 = \psi_1\psi_2$, $\Phi_3 = -\phi_{1xx}\phi_1 + (\phi_{1x})^2$, $\Psi_3 = \psi_1^2$, $\Phi_4 = -\phi_{1xxx}$, $\Psi_4 = \nu\psi_1$. Si conocemos las soluciones de esta ecuación funcional, por ejemplo, la solución $\Psi_1 = A_1\Psi_3 + A_2\Psi_4$, $\Psi_2 = A_3\Psi_3 + A_4\Psi_4$, $\Phi_3 = -A_1\Phi_1 - A_3\Phi_2$, $\Phi_4 = -A_2\Phi_1 - A_4\Phi_2$, llegamos al siguiente sistema de EDOs:

$$\begin{aligned} \psi_{1t} &= A_1\psi_1^2 + A_2\nu\psi_1, & \psi_1\psi_2 &= A_3\psi_1^2 + A_4\nu\psi_1, \\ -\phi_{1xx}\phi_1 + (\phi_{1x})^2 &= -A_1\phi_{1x} + A_3\phi_{1xx}, & -\phi_{1xxx} &= -A_2\phi_{1x} + A_4\phi_{1xx}. \end{aligned}$$

Es fácil de probar que las últimas dos ecuaciones son consistentes si y sólo si la función $\phi_1(x)$ satisface la ecuación $\phi_{1x} = B_1\phi_1 + B_2$.

Si integramos estas ecuaciones, encontramos las soluciones exactas: $\phi_1 = B_2x + B_3$ (si $B_1 = 0$), $\phi_1 = -B_2/B_1 + e^{B_1x}B_3$ (si $B_1 \neq 0$), $\psi_1 = -1/(A_1t - B_4)$ (si $A_2 = 0$), $\psi_1 = -\nu A_2/(A_1 - e^{-\nu A_2 t} B_4 \nu A_2)$ (si $A_2 \neq 0$), y $\psi_2 = A_3\psi_1 + A_4\nu$. Luego, podemos determinar las relaciones entre las constantes arbitrarias A_1, A_2, A_3, A_4, B_1 , y B_2 , y por consecuencia llegamos a las ecuaciones: $-A_4B_1 + A_2 - B_1^2 = 0$, $B_1(B_2 - A_3B_1 + A_1) = 0$, y $B_2(B_2 - A_3B_1 + A_1) = 0$.

Todas estas fórmulas nos permiten determinar las soluciones exactas de la forma $u(x, t) = \phi_1(x)\psi_1(t) + \psi_2(t)$. Si consideramos, por ejemplo, el caso $A_2 = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = -A_1$, obtenemos la forma final de la solución exacta

$$u(x, t) = \frac{x + C_1}{t + C_2} + C_3, \quad C_1 = \frac{B_3 + A_3}{B_2}, \quad C_2 = \frac{B_4}{B_2}, \quad C_3 = A_4\nu.$$

5 Conclusiones

En el presente trabajo consideramos varios métodos analíticos para la construcción de soluciones exactas y simbólicas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales mediante los sistemas de álgebra computacional. Desarrollamos nuevos algoritmos matemáticos para obtener

soluciones analíticas de un conjunto de clases de EDP no lineales en la forma general que surgen en varias áreas de las matemáticas y las ciencias. En particular, consideramos la ecuación de onda no lineal, ecuación de sine-Gordon y dos ecuaciones no lineales de tercer orden. Resolvemos estas ecuaciones no lineales mediante el método de separación ordinaria de variables, el método de separación parcial de variables para obtener soluciones exactas, y soluciones separables generalizadas mediante diferenciación y separación en partes (splitting). Para la ecuación de sine-Gordon encontramos las cuatro diferentes clases de soluciones exactas del tipo solitón y visualizamos los resultados analíticos. Debido a su generalidad matemática, los resultados obtenidos se pueden aplicar a numerosos problemas particulares en varias áreas de las matemáticas y ciencias. Aunque frecuentemente casi cada ecuación diferencial parcial no lineal define su propia clase y no se puede generalizar, existen muchos ejemplos de ecuaciones donde se puede aplicar el mismo método. Por ejemplo, ya que la ecuación de sine-Gordon es un caso particular de la ecuación de Klein–Gordon, $u_{tt} - u_{xx} = F(u)$ (donde $F(u)$ es una función arbitraria), se puede aplicar los algoritmos y programas construidos para varias funciones $F(u)$ (con sólo algunos modificaciones).

Agradecimientos

Nos gustaría agradecer el evaluador de este trabajo que mencionó comentarios interesantes. Este trabajo ha sido realizado gracias a financiamiento de CONACYT, proyecto No. 55463.

Bibliografía

- [1] Galaktionov, V. A.: On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations. *Differential and Integral Equations* 3, 863–874 (1990).
- [2] Perring, J. K. and Skyrme, T. H. R.: A model of unified field equation. *Nucl. Phys.* 31, 550–555 (1962).
- [3] Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F.: Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton 2004.
- [4] Polyanin, A. D., Zhurov, A. I.: Exact Solutions to Nonlinear Equations of Mechanics and Mathematical Physics. *Doklady Physics* 43 (6) pp. 381–385 (1998).
- [5] I. Shingareva and C. Lizárraga-Celaya: Maple and Mathematica. A Problem Solving Approach for Mathematics, Second Edition. Springer, Wien-New York, 2009.
- [6] I. Shingareva and C. Lizárraga-Celaya: Nonlinear Partial Differential Equations with Maple, Mathematica, and Matlab, in Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. Second Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton 2011 (to appear).

La bifurcación Takens-Bogdanov m -paramétrica n -dimensional

Francisco A. Carrillo N.¹, Fernando Verduzco G.² y Joaquín Delgado F.³

^{1 2} Departamento de Matemáticas,
Universidad de Sonora,

³ Departamento de Matemáticas,
Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa.

¹ carrillo@gauss.mat.uson.mx,

² verduzco@gauss.mat.uson.mx,

³ jdf@xanum.uam.mx.

Nivel Educativo: SUPERIOR.

Resumen

Originalmente, Takens en 1974 [8] y Bogdanov en 1975 [3], dieron condiciones suficientes para que un sistema no lineal m -paramétrico en el plano sea topológicamente equivalente a la deformación versal (o desdoblamiento universal) de la bifurcación Takens-Bogdanov. Tiempo después, Y.A. Kuznetsov, con otro tipo de cálculos obtuvo el caso particular $m = 2$. En este artículo presentamos una generalización al resultado de Takens y Bogdanov, siguiendo la filosofía del análisis de Kuznetsov, pero desde otro punto de vista y con otro tipo de herramientas matemáticas, esta generalización es en el sentido de que encontramos condiciones suficientes para un sistema no lineal n -dimensional k -parametrizado, cuya matriz Jacobiana evaluada en un punto crítico de interés, tiene un valor propio cero de multiplicidad algebraica y geométrica igual a dos y el resto de los valores propios con parte real diferente de cero, tal que la dinámica sobre la variedad central bidimensional de este sistema, sea topológicamente equivalente a la deformación versal mencionada anteriormente.

1. Introducción

Takens [8] y Bogdanov [3] dieron de manera independiente, sus respectivas deformaciones versales para la bifurcación doble cero (como también se le conoce a la bifurcación Takens-Bogdanov), es decir, encontraron una familia bidimensional bi-parametrizada de campos vectoriales cuyo flujos locales contienen todas las posibles pequeñas perturbaciones de un sistema no lineal bidimensional, cuya matriz jacobiana evaluada en un punto de equilibrio de interés, tiene un valor propio cero de multiplicidades tanto algebraica como geométrica igual a dos, y al sistema mismo. Kuznetsov [7] analizó una familia de campos vectoriales bi-parametrizada en el plano, usando la deformación versal dada por Bogdanov.

En este artículo, presentamos una generalización del análisis dado Takens [8] y Bogdanov [3], para una familia de campos vectoriales n -dimensional m -parametrizada, esta generalización se hizo desde un punto de vista diferente al presentado por Kuznetsov para el caso particular $m = 2$ en [7], lo cual nos permitió obtener un cálculo explícito de las superficies de bifurcación –ver el Theorema 1.

Analizaremos una familia de campos vectoriales k -parametrizados, en un punto de equilibrio de interés, cuya matriz Jacobiana evaluada en este punto de equilibrio, tiene un valor propio cero con multiplicidades algebraica y geométrica igual a dos, y el resto de los valores propios con parte real diferente de cero. Damos condiciones suficientes sobre esta familia de campos vectoriales, tales que las dinámicas sobre la variedad central bidimensional de esta familia de campos vectoriales es topológicamente equivalente a la deformación versal de la bifurcación doble cero, dada por Bogdanov [3].

2. La bifurcación Takens-Bogdanov

Consideremos un sistema en el plano de la forma

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + f(x), \quad (1)$$

donde $f(x)$ es un vector cuyas entradas contienen términos no lineales, tal que $f(0) = 0$. Se utiliza la teoría de las formas normales para determinar la forma más sencilla de (1) que mantenga sus características esenciales.

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + f_2(x) + \mathcal{O}(x^3), \quad (2)$$

estas formas normales no son únicas, aquí por ejemplo

$$f_2(x) = \begin{pmatrix} ax_1^2 \\ bx_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ ax_1^2 + bx_1x_2 \end{pmatrix},$$

la dinámica para el sistema (2) alrededor del origen es una “cúspide”, ver Figura 1, pero

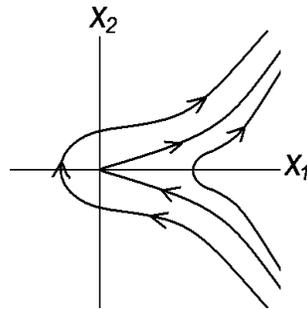


Figura 1. Punto cúspide para $a > 0$.

esta cúspide es muy inestable y se puede “romper” con cualquier pequeña perturbación al sistema. Si $ab \neq 0$, Takens y Bogdanov demostraron cada uno por separado que se pueden despreciar los términos cúbicos y las formas normales se pueden truncar hasta orden 2, es decir,

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ ax_1^2 + bx_1x_2 \end{pmatrix},$$

El caso no semisimple se refiere al caso cuando la multiplicidad geométrica del valor propio cero es uno.

Nuestro objetivo es encontrar condiciones suficientes sobre el campo vectorial F , tales que la dinámica sobre la variedad central en $x = x_0$, sea localmente topológicamente equivalente a la deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov genérica, en el plano

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \beta_1 + \beta_2 z_1 + a z_1^2 + b z_1 z_2,\end{aligned}\tag{4}$$

donde

$$ab \neq 0.\tag{5}$$

4. Dinámica sobre la variedad central

En esta sección usaremos la teoría de la variedad central para determinar la dinámica sobre la variedad central m -parametrizada bidimensional en el punto de equilibrio $x = x_0$ para $\mu \approx \mu_0$.

4.1. Forma de Jordan

Consideremos la expansión de Taylor alrededor de (x_0, μ_0) , para el campo vectorial $F(x, \mu)$ en (3)

$$\begin{aligned}F(x, \mu) &= DF(x_0, \mu_0)(x - x_0) + F_\mu(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}D^2F(x_0, \mu_0)(x - x_0, x - x_0) + F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\mu - \mu_0, x - x_0) + \dots\end{aligned}\tag{6}$$

De la hipótesis H2) tenemos que,

Proposición 1. La matriz $A = DF(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es similar a la matriz

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix},$$

donde $J_1 \in \mathbb{R}^{(n-2) \times (n-2)}$ es tal que

$$\sigma(J_1) = \{\lambda_j \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, \text{ para } j = 3, \dots, n\}.$$

Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$ los vectores propios derechos generalizados de A asociados al valor propio $\lambda = 0$:

$$Ap_1 = 0; \quad Ap_2 = p_1.\tag{7}$$

Sea $P = (p_1, p_2, P_0)$, donde $P_0 \in \mathbb{R}^{(n-2) \times (n-2)}$ la matriz que contiene los vectores propios derechos generalizados asociados a los valores propios de la matriz J_1 . Se sabe que

$$P^{-1}AP = J.\tag{8}$$

Entonces, si

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ Q_0 \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} q_2^T A = 0, \\ q_1^T A = q_2^T. \end{cases}$$

Es decir, $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$ son los vectores propios izquierdos generalizados de A asociados al valor propio $\lambda = 0$.

Prueba: Esta prueba la puede consultar en [4]. □

4.2. Cambio de coordenadas

En esta sección usaremos un primer cambio de coordenadas para poner el campo vectorial de la parte derecha de (3) en su forma de Jordan.

Considérese el cambio de coordenadas y de parámetros

$$y = P^{-1}(x - x_0), \quad \alpha = \mu - \mu_0, \quad (9)$$

entonces (3) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{y} = & Jy + P^{-1}F_\mu(x_0, \mu_0)\alpha + \frac{1}{2}P^{-1}D^2F(x_0, \mu_0)(Py, Py) + \\ & P^{-1}F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, Py) + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Definamos $v_0 = (p_1 \ p_2)$, y $w_0 = (q_1 \ q_2)^T$, entonces $P = (v_0 \ P_0)$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} w_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}$. Ahora definamos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y = P^{-1}(x - x_0) = \begin{pmatrix} w_0(x - x_0) \\ Q_0(x - x_0) \end{pmatrix},$$

es decir, $y_1 = w_0(x - x_0) \in \mathbb{R}^2$, y $y_2 = Q_0(x - x_0) \in \mathbb{R}^{n-2}$. Con estas transformaciones de coordenadas tenemos que (10) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = & J_0y_1 + w_0F_\mu(x_0, \mu_0)\alpha + \frac{1}{2}w_0D^2F(x_0, \mu_0)(v_0y_1, v_0y_1) + \\ & w_0D^2F(x_0, \mu_0)(v_0y_1, P_0y_2) + \frac{1}{2}w_0D^2F(x_0, \mu_0)(P_0y_2, P_0y_2) \\ & + w_0F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, v_0y_1) + w_0F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, P_0y_2) + \dots \\ \dot{y}_2 = & J_1y_2 + Q_0F_\mu(x_0, \mu_0)\alpha + \frac{1}{2}Q_0D^2F(x_0, \mu_0)(v_0y_1, v_0y_1) + \\ & Q_0D^2F(x_0, \mu_0)(v_0y_1, P_0y_2) + \frac{1}{2}Q_0D^2F(x_0, \mu_0)(P_0y_2, P_0y_2) \\ & + Q_0F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, v_0y_1) + Q_0F_{\mu x}(x_0, \mu_0)(\alpha, P_0y_2) + \dots \end{aligned}$$

Con el fin de simplificar el sistema anterior, usaremos la siguiente

Definición 1. Dados $\nu \in \mathbb{R}^n$, $\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$ y $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n \times (r \times s)}$, $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$, donde $L_i \in \mathbb{R}^{r \times s}$,

definimos el producto

$$\nu \bullet \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \nu_i L_i.$$

Por lo tanto, el sistema puede ser escrito como el sistema extendido

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{\alpha} \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 & w_0 F_\mu(x_0, \mu_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0) & J_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(y_1, \alpha, y_2) \\ 0 \\ \mathcal{F}_2(y_1, \alpha, y_2) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(y_1, \alpha, y_2) &= \frac{1}{2} [(w_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0)] (y_1, y_1) \\ &\quad + [(w_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (v_0, P_0)] (y_1, y_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} [(w_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (P_0, P_0)] (y_2, y_2) \\ &\quad + [(w_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) v_0] (\alpha, y_1) + [(w_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) P_0] (\alpha, y_2) + \dots, \\ \mathcal{F}_2(y_1, \alpha, y_2) &= \frac{1}{2} [(Q_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0)] (y_1, y_1) \\ &\quad + [(Q_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (v_0, P_0)] (y_1, y_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} [(Q_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (P_0, P_0)] (y_2, y_2) \\ &\quad + [(Q_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) v_0] (\alpha, y_1) + [(Q_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) P_0] (\alpha, y_2) + \dots. \end{aligned}$$

Puede consultar los detalles de estos cálculos y los posteriores en [4].

Para calcular la variedad central local m -parametrizada en el punto de equilibrio $y = 0$, primero consideramos el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \alpha \\ \zeta \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

donde $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & -K_2 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ y $\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & K_2 & I_{n-2} \end{pmatrix}$, con $K_2 = J_1^{-1} Q_0 F_\mu(x_0, \mu_0)$.

Entonces, a través de (12) el sistema (11) se transforma en

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0 & R_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \alpha \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(\xi, \alpha, \zeta) \\ 0 \\ f_2(\xi, \alpha, \zeta) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

donde $R_0 = w_0 F_\mu(x_0, \mu_0)$, y

$$\begin{aligned} f_1(\xi, \alpha, \zeta) &= \mathcal{F}_1(\xi, \alpha, \zeta - K_2 \alpha), \\ f_2(\xi, \alpha, \zeta) &= \mathcal{F}_2(\xi, \alpha, \zeta - K_2 \alpha). \end{aligned}$$

De la teoría de la variedad central, el sistema (13) tiene una variedad central $\zeta = h(\xi, \alpha) = \mathcal{O}(|\xi, \alpha|^2)$, con $h(0, 0) = Dh(0, 0) = 0$, y la dinámica sobre esta variedad central está dada por

$$\dot{\xi} = J_0\xi + R_0\alpha + f_1(\xi, \alpha, h(\xi, \alpha))$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(\xi, \alpha, h(\xi, \alpha)) &= \mathcal{F}_1(\xi, \alpha, h(\xi, \alpha) - J_1^{-1}Q_0F_\mu(x_0, \mu_0)\alpha) \\ &= [(w_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) v_0](\alpha, \xi) \\ &\quad + [(w_0 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) (P_0J_1^{-1}Q_0F_\mu(x_0, \mu_0), v_0)](\alpha, \xi) \\ &\quad + \frac{1}{2} [(w_0 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0)](\xi, \xi) + \mathcal{O}(|\alpha|^2) + \mathcal{O}(|\xi, \alpha|^3). \end{aligned}$$

Observe que no es necesario calcular la variedad central $h(\xi, \alpha)$ por que ésta no afecta los términos cuadráticos en f_1 .

Entonces, hemos probado el siguiente

Lema 2. Sea el sistema no lineal

$$\dot{x} = F(x, \mu),$$

que satisface las condiciones de no hiperbolicidad $H1) - H2)$ en el punto de equilibrio (x_0, μ_0) . Entonces la dinámica sobre la variedad central m -parametrizada bidimensional en el punto de equilibrio $x = x_0$ para $\mu \approx \mu_0$, está dada por

$$\dot{\xi} = J_0\xi + R_0\alpha + R_1(\alpha, \xi) + \frac{1}{2}R_2(\xi, \xi) + \mathcal{O}(|\alpha|^2) + \mathcal{O}(|\xi, \alpha|^3), \quad (14)$$

donde $\xi = w_0(x - x_0)$, $\alpha = \mu - \mu_0$, $A_0 = P_0J_1^{-1}Q_0$, y

$$R_0 = w_0F_\mu(x_0, \mu_0), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} R_1 &= (w_0 \bullet F_{\mu x}(x_0, \mu_0)) v_0 \\ &\quad + (w_0 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) (A_0F_\mu(x_0, \mu_0), v_0), \end{aligned} \quad (16)$$

$$R_2 = (w_0 \bullet D^2F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0). \quad (17)$$

5. Teorema principal

En esta sección probaremos el teorema principal del artículo. La prueba la dividiremos en una serie de lemas, con los cuales transformaremos el sistema (14) en el caso genérico de la deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov.

5.1. Equivalencia topológica entre la variedad central y la deformación versal

Primero reescribimos (4) como

$$\dot{z} = J_0z + \beta_1e_2 + \beta_2z_1e_2 + h_0(z), \quad (18)$$

donde $e_2 = (0, 1)^T$, y

$$h_0(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ az_1^2 + bz_1z_2 \end{pmatrix}.$$

Luego, nuestro objetivo es encontrar un cambio de coordenadas

$$\xi = z + L_0\alpha + \alpha^T L_1 z + \frac{1}{2} z^T L_2 z,$$

donde $L_0 \in \mathbb{R}^{2 \times m}$, $L_1 \in \mathbb{R}^{2 \times (m \times 2)}$, $L_2 \in \mathbb{R}^{2 \times (2 \times 2)}$, tal que (14) sea transformado en (18). Observe que

$$\dot{\xi} = (I + \alpha^T L_1 + z^T L_2) \dot{z} \Leftrightarrow \dot{z} = (I + \alpha^T L_1 + z^T L_2)^{-1} \dot{\xi},$$

pero para $|z| \approx 0$, tenemos que $(I + \alpha^T L_1 + z^T L_2)^{-1} = I - \alpha^T L_1 - z^T L_2 + \dots$, entonces,

$$\dot{z} = J_0 z + \tilde{R}_0 \alpha + \alpha^T \tilde{R}_1 z + \frac{1}{2} z^T \tilde{R}_2 z + \dots,$$

donde,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_0 &= J_0 L_0 + R_0, \\ \tilde{R}_1 &= \bar{L}_1 + R_1 - L_1 J_0 + L_0^T R_2 - \tilde{R}_0^T L_2 \\ \tilde{R}_2 &= \bar{L}_2 + R_2 - 2L_2 J_0, \end{aligned}$$

con,

$$\begin{aligned} L_0 &= \begin{pmatrix} L_{01}^T \\ L_{02}^T \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} L_{11} \\ L_{12} \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{pmatrix}, \\ \bar{L}_0 &= \begin{pmatrix} L_{02}^T \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{L}_1 = \begin{pmatrix} L_{12} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{L}_2 = \begin{pmatrix} L_{22} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observación 1. En el transcurso de las pruebas de los siguientes lemas, haremos uso del siguiente hecho elemental: si la matriz $X = (X^1 \ X^2) \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ es dividida en dos columnas, entonces

$$XJ_0 = (X^1 \ X^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0 \ X^1).$$

Lema 3. Existe L_0 tal que $\tilde{R}_0 \alpha = \beta_1 e_2$.

Prueba: Observe que $R_0 = w_0 F_\mu(x_0, \mu_0) = \begin{pmatrix} R_{01}^T \\ R_{02}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^T F_\mu(x_0, \mu_0) \\ q_2^T F_\mu(x_0, \mu_0) \end{pmatrix}$, entonces, si definimos

$$L_{02} = -F_\mu^T(x_0, \mu_0) q_1, \quad \text{y} \quad \beta_1 = q_2^T F_\mu(x_0, \mu_0) \alpha,$$

el resultado se sigue. □

Observación 2. Obsérvese que L_{01} aún permanece sin determinarse.

Lema 4. Existe L_2 tal que $\frac{1}{2}z^T \tilde{R}_2 z = (az_1^2 + bz_1z_2)e_2$.

Prueba: Primero, de (17),

$$R_2 = (w_0 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0) = \begin{pmatrix} (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0) \\ (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} (q_i \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) (v_0, v_0) &= \\ & \begin{pmatrix} p_1^T (q_i \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1 & p_1^T (q_i \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 \\ p_2^T (q_i \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1 & p_2^T (q_i \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1^T D_i p_1 & p_1^T D_i p_2 \\ p_2^T D_i p_1 & p_2^T D_i p_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con $D_i = q_i \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)$. Luego, si definimos

$$\begin{aligned} L_{21} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p_2^T D_2 p_2 + p_1^T D_1 p_2 & l_{12}^1 \\ l_{12}^1 & l_{22}^1 \end{pmatrix}, \\ L_{22} &= \begin{pmatrix} -p_1^T D_1 p_1 & \frac{1}{2}p_2^T D_2 p_2 \\ \frac{1}{2}p_2^T D_2 p_2 & 2l_{12}^1 - p_2^T D_1 p_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde l_{12}^1 y l_{22}^1 estan sin determinar. El resultado se sigue, con

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1, \\ b &= p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1 + p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2. \end{aligned} \tag{19}$$

□

Lema 5. Existen L_{01} y L_{12} tales que $\alpha^T \tilde{R}_1 z = \beta_2 z_1 e_2$.

Prueba: Recordemos que

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= \begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} \\ \tilde{R}_{12} \end{pmatrix} = \bar{L}_1 + R_1 - L_1 J_0 + L_0^T R_2 - \tilde{R}_0^T L_2 \\ &= \begin{pmatrix} L_{12} + R_{11} - L_{11} J_0 + L_0^T R_{21} - \tilde{R}_0^T L_{21} \\ R_{12} - L_{12} J_0 + L_0^T R_{22} - \tilde{R}_0^T L_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si definimos

$$L_{12} = L_{11} J_0 - R_{11} - L_0^T R_{21} + \tilde{R}_0^T L_{21},$$

entonces

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{11} &= 0, \\ \tilde{R}_{12} &= R_{12} + L_0^T (R_{22} + R_{21} J_0) - \tilde{R}_0^T (L_{22} + L_{21} J_0) + R_{11} J_0. \end{aligned}$$

entonces usando la observación 1,

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{12} &= \left(\tilde{R}_{12}^1 \mid \tilde{R}_{12}^2 \right) \\ &= \left(R_{12}^1 + L_0^T R_{22}^1 - \tilde{R}_0^T L_{22}^1 \mid R_{11}^1 + R_{12}^2 + L_0^T (R_{21}^1 + R_{22}^2) - \tilde{R}_0^T (L_{21}^1 + L_{22}^2) \right).\end{aligned}$$

Ahora, de (16) y (17), se sigue que para $i, j = 1, 2$,

$$R_{1i}^j = \left[q_i \bullet (F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 F(x_0, \mu_0)) \right] p_j$$

$$R_{2i}^j = \begin{pmatrix} p_1^T D_i p_j \\ p_2^T D_i p_j \end{pmatrix},$$

entonces, si definimos

$$\begin{aligned}L_{01} &= \frac{1}{b} \left((p_1^T D_1 p_2 + p_2^T D_2 p_2) R_{01} + (l_{12}^1 + l_{22}^2) R_{02} - R_{11}^1 - R_{12}^2 \right), \\ l_{12}^1 &= \frac{1}{3} p_2^T \left(D_1 + \frac{b}{4a} D_2 \right) p_2,\end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{12}^2 &= 0, \\ \tilde{R}_{12}^1 &= \left[\frac{2a}{b} (p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 + p_2^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2) \right. \\ &\quad \left. - p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 \right] F_\mu^T(x_0, \mu_0) q_1 \\ &\quad - \frac{2a}{b} \sum_{i=1}^2 (q_i \bullet (F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 F(x_0, \mu_0))) p_i \\ &\quad + (q_2 \bullet (F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 F(x_0, \mu_0))) p_1,\end{aligned}$$

esto es,

$$\alpha^T \tilde{R}_1 z = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha^T \tilde{R}_{12}^1 z_1 \end{pmatrix} = \left(\alpha^T \tilde{R}_{12}^1 \right) z_1 e_2,$$

entonces, si definimos $\beta_2 = \alpha^T \tilde{R}_{12}^1$, el resultado se sigue. □

Antes de establecer el teorema principal, definamos

$$\begin{aligned}S_1 &= F_\mu^T(x_0, \mu_0) q_2, \\ S_2 &= \left[\frac{2a}{b} (p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 + p_2^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2) \right. \\ &\quad \left. - p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 \right] F_\mu^T(x_0, \mu_0) q_1 \\ &\quad - \frac{2a}{b} \sum_{i=1}^2 (q_i \bullet (F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 F(x_0, \mu_0))) p_i \\ &\quad + (q_2 \bullet (F_{\mu x}(x_0, \mu_0) - (A_0 F_\mu(x_0, \mu_0))^T D^2 F(x_0, \mu_0))) p_1.\end{aligned} \tag{20}$$

Además, para desdoblar la bifurcación doble cero de la variedad central, la transformación $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$T(\mu) = \begin{pmatrix} S_1^T(\mu - \mu_0) \\ S_2^T(\mu - \mu_0) \end{pmatrix}$$

debe tener rango dos, es decir, S_1 y S_2 deben ser linealmente independientes. Entonces como consecuencia de los lemas 3-5 podemos establecer ahora el resultado principal

Teorema 6. Dado el sistema no lineal

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (21)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ con $m \geq 2$, tal que, existe (x_0, μ_0) , que satisface las condiciones

H1) $F(x_0, \mu_0) = 0$,

H2) $\sigma[DF(x_0, \mu_0)] = \{\lambda_{1,2} = 0; \operatorname{Re}(\lambda_j) \neq 0, j = 3, \dots, n\}$, (no hiperbolicidad)

H3) $ab \neq 0$, (no degeneracidad)

H4) S_1 y S_2 son linealmente independientes, (transversalidad)

donde

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1, \\ b &= p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1 + p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2, \end{aligned}$$

y S_1, S_2 son dados por (20). Entonces, la dinámica sobre la variedad central del sistema (21) en $x = x_0$ y $\mu \approx \mu_0$, el cual es dado por (14), es localmente topológicamente equivalente a la deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \beta_1 + \beta_2 z_1 + a z_1^2 + b z_1 z_2, \end{aligned}$$

donde $\beta_1 = S_1^T(\mu - \mu_0)$, y $\beta_2 = S_2^T(\mu - \mu_0)$.

6. Un ejemplo de aplicación

En esta sección presentaremos un ejemplo con cuatro parámetros como una ilustración del teorema 6.

Un ecosistema depredador-presa.

Consideremos el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \varepsilon x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= -\gamma x_2 + \frac{x_1 x_2}{1 + \alpha x_1} - \delta x_2^2, \end{aligned} \quad (22)$$

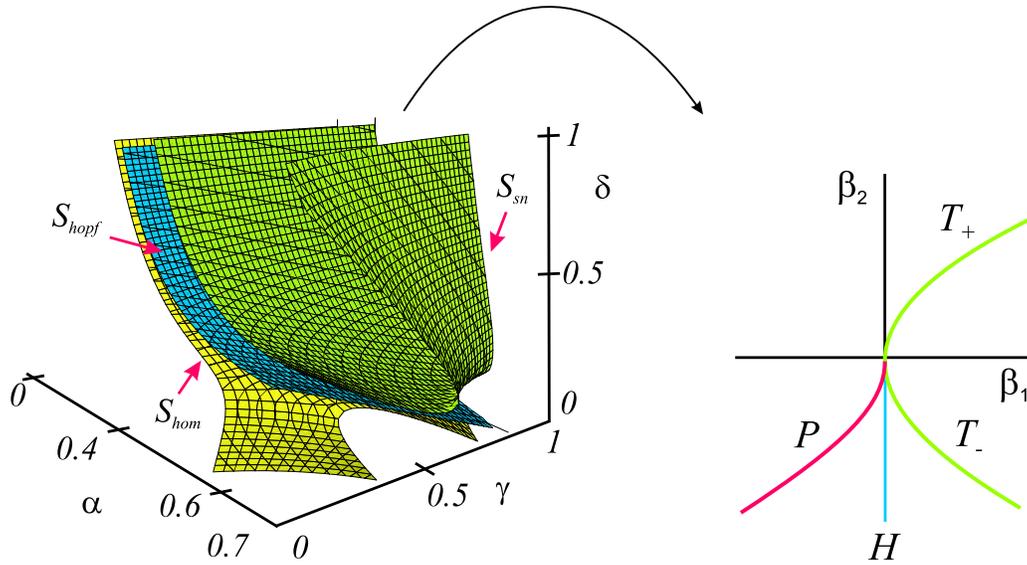


Figura 3. Superficies de bifurcación: S_{sn} superficie de la bifurcación silla-nodo, S_H superficie de la bifurcación de Hopf y S_{hom} superficie de la bifurcación homoclínica.

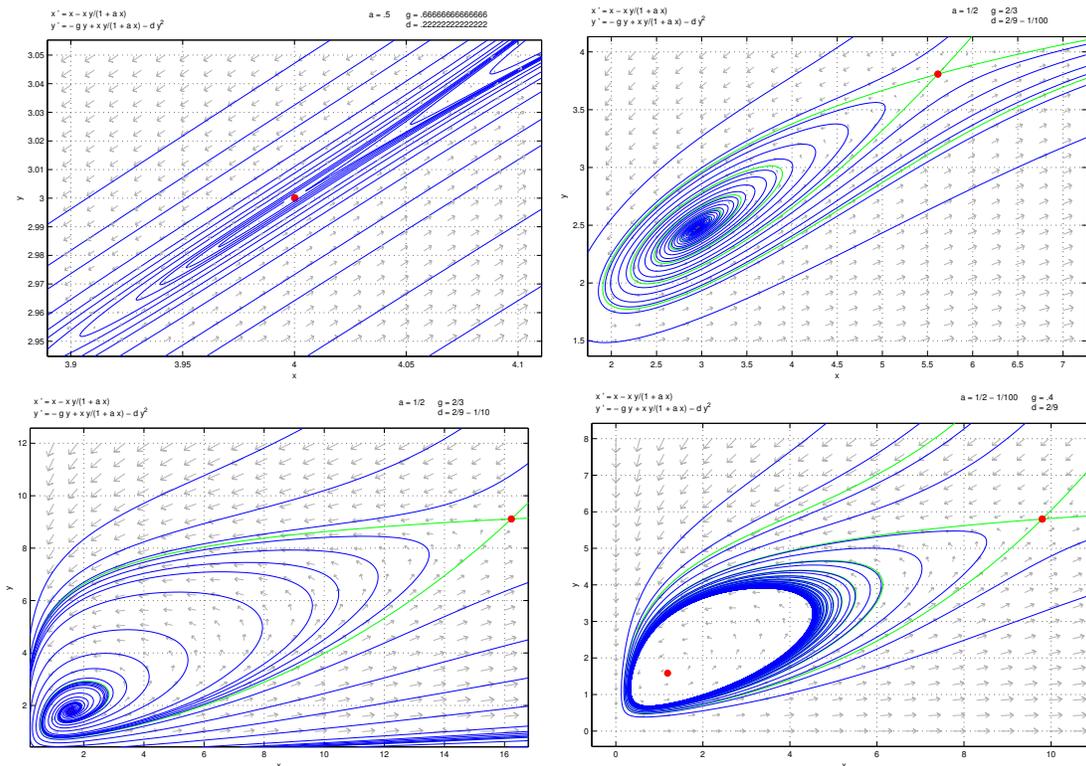


Figura 4. Diferentes dinámicas del sistema (22), de izquierda a derecha, de arriba a abajo: (a) Punto cúspide en $x_0 = (4, 3)^T$ para $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{2}{3}$, $\delta = \frac{2}{9}$. (b) Foco estable. (c) Continuación del foco estable. (d) Un ciclo límite estable.

Las ecuaciones (22), modelan la dinámica de un ecosistema de un depredador con una presa. Las variables x_1 y x_2 son números poblacionales (a escala) del depredador y la presa, respectivamente, mientras α , γ , ε , y δ son parámetros no negativos que describen el comportamiento de las poblaciones aisladas y su interacción (ver [2] citado en [7]). Suponiendo que $\varepsilon = 0$ está fijo. Con el fin de que en el diagrama de bifurcación del sistema con respecto a los tres parámetros restantes (α, γ, δ) , pueda ser exhibida la bifurcación de codimension dos Takens-Bogdanov, consideraremos que $\alpha \in (0, 1)$ y $\alpha\gamma < 1$.

Si consideramos $\mu = (\alpha, \gamma, \delta)^T$, entonces

$$(x_0, \mu_0) = \left(\left(\frac{1}{\alpha^2}, \frac{\alpha+1}{\alpha} \right)^T, \left(\alpha, \frac{1-\alpha}{\alpha(1+\alpha)}, \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \right)^T \right)$$

es una familia de puntos de equilibrio cuya linealización tiene un valor propio cero doble, y

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\alpha} \\ -\frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \end{pmatrix},$$

son los vectores propios derechos e izquierdos (generalizados) respectivamente, asociados al valor propio cero. Además, de (19),

$$a = \frac{1}{2} p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1 = \frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^3},$$

$$b = p_1^T (q_1 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_1 + p_1^T (q_2 \bullet D^2 F(x_0, \mu_0)) p_2 = \frac{\alpha^2(\alpha-1)}{(\alpha+1)^2},$$

y, de (20),

$$S_1^T = \left(\frac{1}{\alpha^4(1+\alpha)}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1+\alpha}{\alpha^3} \right),$$

$$S_2^T = \left(\frac{2(\alpha^2 - 2\alpha - 1)}{\alpha^2(\alpha+1)^2(\alpha-1)}, \frac{\alpha^2 - 3\alpha - 2}{\alpha^2 - 1}, \frac{\alpha^2 - 2\alpha - 1}{\alpha(\alpha-1)} \right).$$

Así las condiciones $H1)$, $H2)$, $H3)$ y $H4)$ son satisfechas para toda $\alpha \in (0, 1)$. Por lo tanto, si elegimos $\alpha = \frac{1}{2}$, el sistema (22) es localmente topológicamente equivalente a

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \beta_1 + \beta_2 z_1 + \frac{2}{27} z_1^2 - \frac{1}{18} z_1 z_2, \end{aligned}$$

donde

$$\beta_1 = \langle S_1, \mu \rangle, \quad \text{y} \quad \beta_2 = \langle S_2, \mu \rangle \quad \text{con} \quad \mu^T = \left(\alpha - \frac{1}{2}, \gamma - \frac{2}{3}, \delta - \frac{2}{9} \right).$$

Las superficies de bifurcación en el espacio de parámetros es mostrado en la Figura 3. En la Figura 4 se muestran las diferentes bifurcaciones que el sistema (22) experimenta para diferentes valores de α , γ y δ .

7. Referencias

- [1] Arrowsmith, D.K., Place, C.M. Bifurcations at a cusp singularity with applications. *Acta Applicandae Mathematicae* 2, 101-138. 1984.
- [2] Bazykin, A. *Mathematical Biophysics of Interacting Populations*. Nauka, Mmoskow. In Russian. 1985.
- [3] Bogdanov, R.I. Versal deformations of a singular point of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues. *Funct. Anal. Appl.* **9**, 144-145. 1975.
- [4] Carrillo, F.A., Verduzco, F. and Delgado, J. Analysis of the Takens-Bogdanov bifurcation on m -parameterized vector fields. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Vol. 20, No. 4. Abril 2010.
- [5] Carrillo, F.A. and Verduzco, F. Control of the Planar Takens-Bogdanov Bifurcation with Applications. *Acta Appl. Math.* 105: 199-225. 2009.
- [6] Guckenheimer, J., Holmes, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 42. Springer-Verlag. 1983.
- [7] Kuznetsov, Y.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 112. Springer. Second Edition 2000.
- [8] Takens, F. Forced oscillations and bifurcations. *Comm. Math. Inst. Rijkuniversiteit Utrecht*, 3, 1-59. 1974.
- [9] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics, Vol. 2. Springer-Verlag. Second Edition. 2003.

Visualización de campos vectoriales analíticos generalizados

Alvarez-Parrilla A.¹, Frías-Armenta M.E.², López-Gonzalez E.³ y Yee-Romero C.⁴

^{1,4} Carrera de Matemáticas
Universidad Autónoma de Baja California

¹ alvaro.uabc@gmail.com

⁴ cyeer.mx@gmail.com

² Departamento de matemáticas
Universidad de Sonora
martineduardofrias@gmail.com

³ Instituto de Ingeniería y Tecnología
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
elgonzal@uacj.mx

Nivel Educativo: Superior

Resumen

El problema de visualización de campos vectoriales no es trivial en particular porque los métodos tradicionales utilizan técnicas de integración numérica. Los autores del presente trabajo han propuesto un método de visualización de campos vectoriales analíticos complejos que tiene grandes ventajas sobre los métodos tradicionales.

Recientemente los autores generalizaron dicho método para que pueda ser utilizado con campos vectoriales analíticos generalizados de dimensión real n . En este trabajo se presenta, a manera de ejemplo de la generalización, un campo vectorial en dimensión dos que no es un campo vectorial analítico complejo, pero que si es analítico generalizado, y se procede a su visualización.

1. Introducción

Los campos vectoriales son objetos matemáticos interesantes y útiles, tanto desde el punto de vista de las matemáticas puras como desde el punto de vista de aplicaciones. Los campos vectoriales aparecen en múltiples contextos: muchos fenómenos físicos son modelados por campos vectoriales (campos eléctricos, magnéticos, campos de velocidades, etc.); y existen muchas aplicaciones interesantes (vease por ejemplo [2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]). Por demás la visualización de campos vectoriales, además de ser bella por si misma, puede ser de gran utilidad para mejor entender ciertos conceptos teóricos.

Recientemente en [1] se desarrolló un método (que denominaremos *método Newtoniano*) que permite visualizar campos vectoriales analíticos complejos sobre superficies de Riemann. Este *método Newtoniano* tiene varias ventajas sobre los métodos de visualización tradicionales, entre las que destacan:

- Permite visualizar de forma global el campo vectorial.
- No tiene propagación de error, por lo que es útil para visualizar campos cerca de singularidades.
- Provee información relativa a la parametrización de las soluciones (tiempos).
- Permite visualizar de forma eficiente los flujos, aun para condiciones iniciales específicas.
- Los recursos de cómputo requeridos son mucho menores que los que se necesitan para los otros métodos.
- Permite visualizar *todo campo vectorial analítico complejo sobre cualquier superficie de Riemann*.
- Es fácilmente paralelizable.

Posteriormente en [3], utilizando un formalismo basado en *álgebras normales*, se procedió a extender el *método Newtoniano* a una familia mas grande de campos vectoriales denominados *campos vectoriales analíticos generalizados* [9]. A la generalización la denominaremos *método Newtoniano generalizado*. En este artículo se presenta un ejemplo de un campo que no es un campo vectorial analítico complejo pero que si pertenece a esta familia (esto es, es un *campo vectorial analítico generalizado*) y se procede a su visualización utilizando el *método Newtoniano generalizado*.

La organización del trabajo es como sigue: En la sección 2 se presenta, de manera esquemática, el *metodo Newtoniano* para visualizar campos vectoriales analíticos complejos. Después en la sección 3 se presenta un ejemplo de un campo vectorial polinomial que no proviene de un campo vectorial analítico complejo, y que por lo tanto no puede ser visualizado con el *método Newtoniano*. En la sección 4 se presenta el esquema de la generalización comenzando con las definiciones correspondientes a álgebras normales, funciones analíticas generalizadas y se enuncian los teoremas (sin demostración) que dan lugar al *método Newtoniano generalizado*. En la sección 5 retomamos el ejemplo presentado en la sección 3, mostrando que pertenece a la familia de campos que pueden ser visualizados con el *método Newtoniano generalizado*. Por último, en la sección 6 se hacen algunos comentarios finales sobre el *método Newtoniano generalizado*.

2. El caso de campos vectoriales analíticos complejos

En [1] se muestra primero que todo campo de Newton pueden ser visualizado mediante el uso de una integral de movimiento definida por la función que define al campo de Newton, y luego utilizando el resultado de [2] donde se muestra que todo campo vectorial analítico complejo es un campo de Newton.

En esta sección presentamos este método de manera resumida (consultar las referencias para mayores detalles), para que nos sirva como pauta para una generalización a campos vectoriales *analíticos generalizados*.

Se comienza con un campo vectorial real de dimensión 2

$$F(x, y) = u(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (1)$$

cuya matriz jacobiana es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Enseguida introduciendo el **campo de números complejos** $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ (campo en el sentido algebraico, esto es un álgebra conmutativa con unidad donde todos sus elementos no-cero son invertibles) y la variable $z = (x, y) = x + iy$, se prueba que el campo vectorial analítico complejo

$$X(z) = f(z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2)$$

con $f(z) = u(z) + iv(z)$, tiene la propiedad de que $\Re(X(z)) = F(z)$.

Después se hace uso de las técnicas de variable compleja para integrar funciones analíticas, de manera que es posible mostrar que X es un campo de Newton, esto es que

$$X(z) = f(z) \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\Phi(z)}{\Phi'(z)} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3)$$

por lo que las trayectorias de $X(z)$ están dadas como el pullback de las trayectorias de $-w \frac{\partial}{\partial w}$ via

$$\Phi(z) = \exp \left[-\int^z \frac{d\zeta}{f(\zeta)} \right]. \quad (4)$$

Así pues, el flujo de $F(x, y)$ corresponde con las curvas de nivel de $h(z) = \text{Arg}(\Phi(z))$.

3. Un ejemplo de un campo vectorial que no es analítico complejo

Consideremos el siguiente campo vectorial

$$F(x, y) = u(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (5)$$

donde

$$u(x, y) = \frac{1}{6} \left(2 + 6x + \frac{-22 + 20x + 7y}{4 + 5x^2 + 8x(-1 + y) + y(-4 + 5y)} + \frac{5(2 + 4x + 5y)}{4 + 5x^2 + 8x(1 + y) + y(4 + 5y)} \right),$$

$$v(x, y) = \frac{1}{6} \left(-4 + 6y - \frac{5(-4 + 5x + 4y)}{4 + 5x^2 + 8x(-1 + y) + y(-4 + 5y)} + \frac{4 - 7x - 20y}{4 + 5x^2 + 8x(1 + y) + y(4 + 5y)} \right).$$

Al calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{15} \left(15 - \frac{(-4 + 3u)(-82 + 120u + 117v)}{(4 + 5u^2 + 8u(-1 + v) + v(-4 + 5v))^2} + \frac{22}{4 + 5u^2 + 8u(-1 + v) + v(-4 + 5v)} \right).$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{6} \left(6 + \frac{25(4+3u)(-2+3v)}{(4+5u^2+8u(1+v)+v(4+5v))^2} - \frac{50}{4+5u^2+8u(1+v)+v(4+5v)} \right),$$

$$+ \frac{5(-4+5u+4v)(-4+8u+10v)}{(4+5u^2+8u(-1+v)+v(-4+5v))^2} - \frac{20}{4+5u^2+8u(-1+v)+v(-4+5v)}$$

$$+ \frac{2(2+4u+5v)(-4+7u+20v)}{(4+5u^2+8u(1+v)+v(4+5v))^2} - \frac{20}{4+5u^2+8u(1+v)+v(4+5v)} \Big)$$

se observa que estas son distintas, por lo que matriz jacobiana de $F(x, y)$ **no** es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \text{ con } a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Con este ejemplo se muestra que no todos los campos vectoriales, ni siquiera todos los polinomiales de la forma

$$P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

son campos vectoriales que provengan de un campo analítico complejo, y por lo mismo no cumplen con las hipótesis de la técnica desarrollada en la sección 2. Surge entonces la pregunta natural:

¿Es posible extender el método de la sección 2 de manera que se pueda aplicar a una familia mas grande de campos vectoriales?

En las siguiente sección se enuncia una generalización a una familia de campos vectoriales, de dimensión dos sobre los reales.

4. La generalización

En [3], los autores generalizaron la metodología desarrollada en [1, 2] utilizando el concepto de *álgebras normales*. En esta sección se presentan las definiciones y conceptos básicos necesarios para poder presentar la generalización. Ver [1] para mayores detalles.

4.1. Algebras normales

Consideremos un álgebra \mathbb{A} conmutativa, asociativa, normada con unidad e de dimensión finita sobre \mathbb{R} . Un elemento $a \in \mathbb{A}$ es *regular* si existe un único inverso $a^{-1} \in \mathbb{A}$. Dada una base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{A} , la multiplicación en el algebra se puede representar como

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^n c_{ijk} e_k,$$

donde $c_{ijk} \in \mathbb{R}$ son los *coeficientes de estructura del álgebra* en la base \mathcal{B} .

La *primera representación fundamental* es el isomorfismo de álgebras $R : \mathbb{A} \rightarrow M(n, \mathbb{R})$, dado por

$$R(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_n R_n,$$

donde $R_i = (c_{ijk})$ es la matriz cuya entrada k, j es c_{ijk} para $i = 1, 2, \dots, n$.
Dada una matriz B de $n \times n$ con entradas en los reales con *forma normal*

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & B_l \end{pmatrix},$$

donde $B_i \in M(k_i, \mathbb{R})$ ($i = 1, 2, \dots, l$) son matrices cuadradas tomadas de alguna de las cuatro siguientes formas

$$(\mu), \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \mu & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \mu & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ I_2 & C & 0 & & 0 \\ 0 & I_2 & C & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C \end{pmatrix}, \text{ con } C = \begin{pmatrix} \nu & \nu \\ -\nu & \nu \end{pmatrix},$$

$\mu, \nu, \nu \in \mathbb{R}$ y $k_1 + \cdots + k_l = n$, podemos asociar un álgebra de matrices \mathcal{N} asociativa, conmutativa que contiene a B llamada *álgebra normal de matrices* de B . De aquí en adelante \mathcal{N} denotará un álgebra normal de matrices.

4.2. Funciones analíticas generalizadas

Definición 1. Decimos que una función g es *analítica en el álgebra* \mathbb{A} (o *analítica generalizada*) en x si tiene derivada $g'(x)$ en el sentido de Lorch, esto es si existe un elemento del álgebra $g'(x)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|g(x+h) - g(x) - g'(x)h\|}{\|h\|} = 0,$$

en cuyo caso $g'(x)$ se le llama *la derivada de g en x* , que corresponde, bajo la primera representación fundamental, a la *matriz jacobiana $Jg(x)$ de derivadas parciales de g en x* .

Teorema 1. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial en $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Supongase que existe una matriz invertible A tal que $A[Jf(A^{-1}(x))]A^{-1} \in \mathcal{N}$ para toda $x \in \Omega$, entonces el campo vectorial

$$g = A \circ f \circ A^{-1} : \Omega' \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es analítico en el álgebra \mathbb{A} cuya primera representación fundamental es \mathcal{N} , donde $\Omega' = A(\Omega)$.

Teorema 2. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial analítico sobre un álgebra \mathbb{A} con primera representación fundamental \mathcal{N} , y sea \mathcal{E} la base canónica de \mathbb{R}^n . Entonces existe una base $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ de elementos invertibles del álgebra \mathbb{A} tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Omega \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ A \downarrow & & \downarrow A \\ \Omega' \subset \mathbb{A} & \xrightarrow{g} & \mathbb{A} \end{array}$$

donde A es la matriz asociada al cambio de base $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$, y $g(\zeta)$ es función de la variable $\zeta = \sum_{j=1}^n x_j \beta_j$. Además

$$\frac{dg}{d\zeta}(\zeta) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \text{ regular}}} \frac{g(\zeta + h) - g(\zeta)}{h}$$

tiene sentido y representa la derivada $g'(\zeta)$.

Definición 2. Diremos que un campo vectorial X es un *campo vectorial analítico generalizado* si la función f que lo representa es una función analítica generalizada.

4.3. Campos de Newton

Definición 3. Un campo vectorial $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es un *campo de Newton* si existe un campo vectorial $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = -[J\phi(x)]^{-1}\phi(x)$.

Obteniéndose el siguiente corolario.

Corolario 3 (Los campos vectoriales analíticos generalizados son de Newton). Sean

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad g : \Omega' \subset \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$$

como en el teorema 2. Entonces tanto f como g son campos de Newton. En particular existe $\Phi : \Omega' \subset \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ analítica generalizada tal que

$$g(\zeta) = -\frac{\Phi(\zeta)}{\Phi'(\zeta)}$$

y

$$f(x) = -[J\phi(x)]^{-1}\phi(x)$$

con $\phi(x) = (\Phi \circ A)(x)$.

Corolario 4 (Visualización de campos analíticos generalizados). Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial analítico sobre un álgebra \mathbb{A} con primera representación fundamental \mathcal{N} . Entonces las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

corresponden a las curvas de nivel de la función real

$$h(\zeta) = \text{Arg}(\Phi(\zeta)) = \text{Arg}(\phi(x)) = \tilde{h}(x).$$

En particular, para visualizar la trayectoria que pasa por el punto $\zeta_0 = A(x_0)$, es suficiente con trazar la curva de nivel $h(\zeta) = h(\zeta_0) = \tilde{h}(x_0) = \tilde{h}(x)$.

5. El ejemplo visitado de nuevo

Retomemos el ejemplo de la sección 3. Si tomamos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

al calcular $A \cdot JF(A^{-1}(x, y)) \cdot A^{-1}$ obtenemos

$$A \cdot JF(A^{-1}(x, y)) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a(x, y) & b(x, y) \\ -b(x, y) & a(x, y) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

con

$$a(x, y) = 1 - \frac{2}{x^2 + (-2 + y)^2} + \frac{x(-6 + 4x + 3y)}{(x^2 + (-2 + y)^2)^2} + \frac{x(4x - 3(2 + y))}{(x^2 + (2 + y)^2)^2} - \frac{2}{x^2 + (2 + y)^2}$$

y

$$b(x, y) = \frac{4y(48 - 96x - 24x^2 - 16x^3 - 9x^4 + 2x^5 + 2(-3 + 2x)(4 + x^2)y^2 + (3 + 2x)y^4)}{(x^4 + (-4 + y^2)^2 + 2x^2(4 + y^2))^2}.$$

Por lo tanto $A \cdot JF(A^{-1}(x, y)) \cdot A^{-1}$ pertenece al álgebra normal de los complejos, por lo que se puede aplicar la metodología de las secciones 4.2 y 4.3 para visualizar el flujo de una manera sencilla, como a continuación se muestra.

Sea

$$G(x, y) = (A \circ F \circ A^{-1})(x, y) = u_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + v_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

entonces

$$u_1(x, y) = -1 + x + \frac{6 - 4x - 3y}{2(x^2 + (-2 + y)^2)} + \frac{6 - 4x + 3y}{2(x^2 + (2 + y)^2)},$$

$$v_1(x, y) = \frac{x(-12 + 12x + x^3)y + 2(-2 + x^2)y^3 + y^5}{x^4 + (-4 + y^2)^2 + 2x^2(4 + y^2)}.$$

el cual define un campo vectorial analítico complejo, puesto que

$$JG(x, y) = A \cdot JF(A^{-1}(x, y)) \cdot A^{-1} \in \mathcal{N},$$

por lo que al hacer el cambio de variable $z = x + yi$, vemos que se cumple con

$$G(z) = \Re e \left(g(z) \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

donde

$$g(z) = u_1 \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + v_1 \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) i = \frac{2 - z^2 + z^3}{4 + z^2}$$

De acuerdo a (4) la función Φ asociada al campo G esta dada por

$$\Phi(z) = \exp \left[- \int^z \frac{d\zeta}{g(\zeta)} \right],$$

de manera que

$$\Phi(z) = \left(\frac{z-1-i}{z-1+i} \right)^i (z+1)^{-1} = \frac{e^{2\arctan(1-z)}}{z+1},$$

mientras que la integral de movimiento h esta dada por:

$$h(z) = \text{Arg}(\Phi(z)) = -\arctan\left(\frac{y}{1+x}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{4y}{2 + (-2+x)x + y(2+y)}\right)$$

y la función \tilde{h} asociada al campo F es:

$$\tilde{h}(x, y) = (h \circ A)(x, y) = -\arctan\left(\frac{2x+y}{1+x+2y}\right) + \log\left(1 - \frac{4(2x+y)}{2+5x^2+y(-2+5y)+x(2+8y)}\right).$$

Así pues para visualizar las trayectorias correspondientes al campo F es preciso encontrar las curvas de nivel de $\tilde{h}(x, y)$. Estas se presentan en la figura 1.

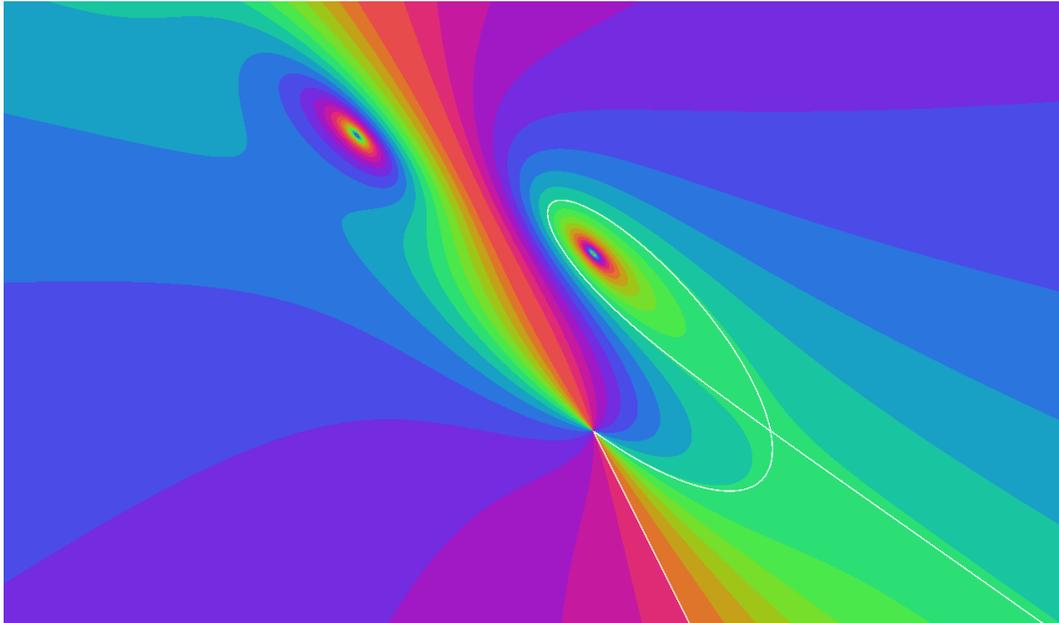


Figura 1. Visualización del campo vectorial dado por (5), utilizando la metodología nueva. En este caso se ha trazado también la trayectoria que pasa por uno de los polos (curva en blanco), algo que sería muy difícil con los métodos tradicionales.

A manera de comparación se presenta en la figura 2 la visualización con los métodos tradicionales.

6. Conclusiones

En el presente trabajo se muestra el uso del *método de Newton generalizado* para visualizar un campo vectorial polinomial de dimensión dos que **no** es un campo vectorial analítico

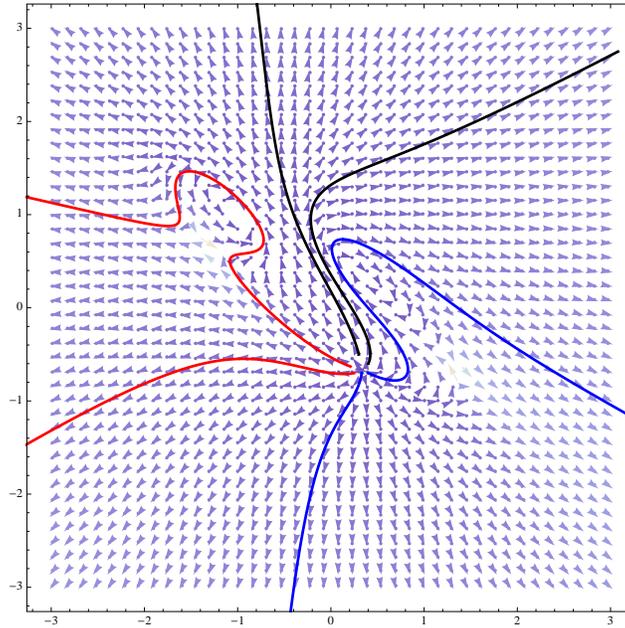


Figura 2. Visualización del campo vectorial dado por (5) utilizando los métodos tradicionales. En este caso se han trazado también algunas trayectorias particulares para ayudar a la visualización del campo. La visualización se realizó con el programa *Mathematica*®, que utiliza integración numérica.

complejo. Para esto se muestra que este campo vectorial es un *campo vectorial analítico generalizado*, por lo que si es posible utilizar el *método de Newton generalizado* que tiene las mismas ventajas que el *método de Newton*.

7. Referencias

- [1] Alvarez-Parrilla, A.; Solorza-Calderón, S.; Yee-Romero, C.: *Complex analytic vector field visualization without numerical integration*, preprint, 2009.
- [2] Alvarez-Parrilla, A.; Gómez-Arciga, A.; Riesgo-Tirado, A.: *Newton vector fields on the plane and on the torus*, *Complex Variables and Elliptic Equations*, Vol. 54, No. 5, May 2009, 440–461.
- [3] Alvarez-Parrilla, A.; Frías-Armenta M.E.; López-Gonzalez E.; Yee-Romero, C.: *Generalized analytic vector field visualization*, preprint, 2010.
- [4] Alvarez-Parrilla, A.; Muciño-Raymundo, J.: *Dynamics of Complex Analytic Vector Fields with Essential Singularities I*, preprint, 2008.
- [5] Benzinger, Harold E.: *Plane autonomous systems with rational vector fields*. *Trans. Amer. Math. Soc.* 326 (1991), no. 2, 465–483.
- [6] Dedieu, J.P.; Shub, M.: *Newton Flow and Interior Point Methods in Linear Programming*. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 15, No. 3 (2005), pp. 827–839.

- [7] Hirsch, M.W.; Smale, S.: *On algorithms for solving $f(x) = 0$* . Comm. Pure Appl. Math., **32**, (1979), 281–312.
- [8] Hockett, K., Ramamurti, S.: *Dynamics near the essential singularity of a class of entire vector fields*. Transactions of the American Mathematical Society vol. 345, N. 2 October (1994) 693–703.
- [9] López-González, E.: *Differential equations over algebras*, preprint, 2010.
- [10] Muciño-Raymundo, J.: *Complex structures adapted to smooth vector fields*. Math. Ann. **322**, (2002), 229–265.
- [11] Muciño-Raymundo, J.; Valero-Valdéz, C.: *Bifurcations of meromorphic vector fields on the Riemann sphere*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **15**, (1995), 1211–1222.
- [12] Newton, T.; Lofaro T.: *On using flows to visualize functions of a complex variable*. Mathematics Magazine, Vol. 69, No. 1 (Feb., 1996), 28–34.
- [13] Palmore, Julian I.; Burns, Scott A.; Benzinger, Harold E.: *Ecology models and Newton vector fields*. Nonlinearity in biology and medicine (Los Alamos, NM, 1987). Math. Biosci. **90** (1988), no. 1-2, 219–232.
- [14] Smale, S.: *A convergent process of price adjustment and global Newton methods*. J. Math. Econom. **3**, (1976), 107–120.

Un paseo por la Probabilidad y la Estadística: de Bahía de Kino a Varadero (parte 1)

Claudio A. López Miranda y Francisco J. Tapia Moreno
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.
(claudio@gauss.mat.uson.mx y ftapia@gauss.mat.uson.mx)

Nivel Educativo: Básico y Superior

Resumen

Durante un viaje a Bahía de Kino, surgió la siguiente pregunta entre los autores: ¿Hay alguna manera de ilustrar los resultados teóricos de probabilidad y estadística, como por ejemplo el Teorema del Límite Central (TLC?). La respuesta a esta interrogante se presentó en Varadero, Cuba. ¿Es cierto que el TLC es siempre válido para $n \geq 30$? La respuesta es no, ya que depende del sesgo de la distribución poblacional. ¿Cómo se comporta el máximo de una distribución binomial? ¿Para qué valores la distribución de Poisson tiene probabilidad significativamente distinta de cero en función del parámetro lambda? ¿Cómo se simula un tráfico de aviones? ¿Sabía que el estimador insesgado S^2 para la varianza de poblaciones normales siempre es menor que el punto medio de su intervalo de confianza? La simulación permite ver a la probabilidad y la estadística como nunca antes. Nuestro trabajo es presentado en dos partes: en la parte 1 hacemos un análisis exploratorio de datos mediante computadora y damos un paseo por la probabilidad, mientras que en la parte 2 presentamos dos técnicas de Montecarlo para ilustrar el TLC, entre otras cosas. A propósito ¿Sabe Usted de dónde son los cantantes?

1. Introducción

Típicamente la enseñanza de la estadística en el nivel superior se basa en la explotación de datos recolectados de estudios previos o ejemplos de libros de texto; y limitando al cálculo manual de las estimaciones y gráficas para realizar estadísticas descriptivas y de inferencia. Por lo tanto, el uso de un paquete de cómputo para simular (crear) la materia prima (los datos) de muestras aleatorias de una población, tiene un potencial enorme. La simulación de vv.aa. permiten un análisis estadístico más allá de la mera comprensión y aplicación del conocimiento.

Los paquetes de cómputo científico como Matlab, SPSS, R, Excel; o bien, el software de libros de texto como STATDISK o lenguajes de programación como C++, nos permiten llevar el aprendizaje de la estadística a un proceso de síntesis del conocimiento. Por ejemplo, podemos estudiar los procesos de Poisson simulando el tráfico de llamadas en una central telefónica; o analizar cómo influye el valor de un parámetros en el comportamiento de las funciones de densidad como la binomial, geométrica y Lognormal, etc.; hasta demostrar intuitivamente el teorema del límite central (TLC).

Este presenta dos formas de utilizar los paquetes de cómputo como herramienta de aprendizaje de la estadística, los cuales pueden motivar a ser implantados en un curso convencional. En esta primera parte realizaremos un análisis exploratorio de datos con SPSS (ver Sección 2); mientras que en la Sección 3, usamos el paquete Matlab para ilustrar, mediante gráficas, cómo influyen los parámetros en la distribución de probabilidades de una variable aleatoria (v.a.) como la binomial, Poisson (ver Sección 3, aunque debido a la falta de espacio, en la presentación de la ponencia analizaremos la chi-cuadrada y lognormal en un ambiente dinámico e interactivo, entre otras).

2. Análisis exploratorio de datos mediante SPSS

Desde un punto de vista muy general, el análisis exploratorio de datos consiste en resaltar las estadísticas descriptivas mediante la cuales se deducen las pesquisas de investigación, que sirven para establecer las hipótesis estadísticas o inferir conclusiones sobre la población de la cual proviene la muestra. Un análisis exploratorio completo requiere del uso de un paquete de cómputo estadístico, ya que de otra manera el tiempo durante los cursos sería insuficiente y tendríamos un análisis de datos muy pobre, tanto en profundidad como en cantidad. El análisis exploratorio tiene como objetivo inferir a priori de manera visual o por intuición, cuál podría ser la distribución de los datos y las características principales de la población

2.1. Estadísticas descriptivas numéricas mediante SPSS

Esta sección contiene un análisis exploratorio de datos de la Tabla 1, los cuales representan valores de pH sanguíneo en 80 individuos (ejemplo tomado de [2].) Los resultados se presentan a partir de la Tabla 2, la cual contiene un conjunto de estadísticas muy completa, ya que nos ofrece tanto las medidas centrales, de dispersión, un intervalo de confianza, el coeficiente de simetría y de curtosis de la muestra. Dicha tabla se complementa con los valores extremos identificados por su valor y por su posición relativa en la Tabla 3. La Tabla 4 contiene los estimadores para la media poblacional; mientras que la Tabla 5 las pruebas de bondad de ajuste Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk. Ambas pruebas de ajuste sugieren aceptar la normalidad de la distribución a un nivel de 99% de confianza. Las estadísticas descriptivas están completas con las medidas de posición relativa o percentiles de la Tabla 6. Un dato interesante en la Tabla 2 es la media recortada, que resulta de eliminar el 5% de los datos inferiores y superiores, así, podríamos omitir los efectos de datos distantes que provengan por errores que no son de muestreo.

2.2. Análisis exploratorio con estadísticas descriptivas gráficas

Con el fin de inferir intuitivamente la posible distribución de los datos, presentamos el análisis gráfico-descriptivo mediante el histograma porcentual de frecuencias y su curva de ajuste en la Figura 1; el diagrama de tallo y hojas (Figura 2); así como el diagrama de caja de la Figura 3 que muestra la concentración, simetría, dispersión e identificación de datos distantes moderados y extremos (*outliers*). La gráfica cuantilar para prueba de normalidad aparece en la Figura 4.

El ajuste la curva normal estimada en el histograma es bueno. Por otro lado, con el diagrama de tallo y hojas, el alumno puede deducir por inspección la posibilidad de que los datos provengan de una población con forma de campana. La similitud y simetría entre las Figuras 1 y 2 confirma a priori la posible normalidad. Por otro lado, la Figura 3 muestra que la mediana está muy cerca del centro de la caja y prácticamente coincide con la media (Tabla 2) confirmando de nuevo una simetría.

Tabla 1. Conjunto de datos de pH sanguíneo de 80 individuos

7.33	7.32	7.34	7.40	7.28	7.29	7.35	7.33	7.34	7.28
7.31	7.35	7.32	7.33	7.33	7.36	7.32	7.31	7.35	7.36
7.26	7.39	7.29	7.32	7.34	7.30	7.34	7.32	7.29	7.30
7.33	7.33	7.35	7.34	7.33	7.36	7.33	7.35	7.31	7.33
7.37	7.38	7.38	7.33	7.35	7.30	7.31	7.33	7.35	7.33
7.27	7.33	7.32	7.31	7.34	7.32	7.34	7.32	7.31	7.36
7.30	7.37	7.33	7.32	7.31	7.33	7.32	7.30	7.29	7.38
7.33	7.35	7.32	7.33	7.32	7.34	7.32	7.34	7.32	7.33

Tabla 2. Estadísticas descriptivas para el pH sanguíneo

		Estadístico	Error Tip.	
pH	Media	7.3301	0.00302	
	Intervalo de confianza	7.3241		
	Para la media al 95%	7.3361		
	Media recortada al 5%	7.3300		
	Mediana	7.3300		
	Varianza	0.001		
	Desv. Tip.	0.02698		
	Mínimo	7.26		
	Máximo	7.40		
	Rango	0.14		
	Amplitud intercuartil	0.03		
	Asimetría	0.153		0.269
	Curtosis	0.511		

Tabla 3. Valores extremos (outliers)

		Número del caso	Valor
pH	Mayores	1	7.40
		2	7.39
		3	7.39
		4	7.38
		5	7.38
	Menores	1	7.26
		2	7.27
		3	7.28
		4	7.28
		5	7.29

a. En la tabla de valores extremos mayores sólo se muestra una lista parcial de los casos con el valor 7.38.

b. En la tabla de valores extremos menores sólo se muestra una lista parcial de los casos con el valor 7.29.

Tabla 4. Estimadores de la media

	Estimador-M De Huber ^a	Biponderado De Tukey ^b	Estimador-M De Hampel ^c	Onda de Andrews ^d
ph	7.3294	7.3291	7.3293	7.3291

Tabla 5. Pruebas de normalidad

Kolmogorov-smim ^a ov				Shapiro-wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
ph	0.139	80	0.001	0.974	80	0.095

Tabla 6. Medidas de posición

	Percentiles						
	5	10	25	50	75	90	95
Promedio Ponderado (definición 1) pH	7.2805	7.3000	7.3200	7.3300	7.3475	7.3690	7.3800
Bisagras de Tukey pH			7.3200	7.3300	7.3475		

Así mismo, los datos extremos moderados fuera de los bigotes de la caja, indican que las colas de la distribución de la cual provienen los datos podría ser un poco más pesadas que las de una distribución normal ideal. Esto último también puede apreciarse en la gráfica cuantilar q-q normal de la Figura 4, ya que los valores inferiores en la muestra son un poco mayor que los esperados de la normal; lo contrario sucede con los valores superiores. Sin embargo, la aproximación de los cuantiles centrales es bastante aceptable, haciendo factible que la distribución del pH sanguíneo sea normal. En general, varía mucho la apariencia de la gráfica de probabilidad con tamaños de muestra de menos de 30, y sólo con tamaños de muestra muchos más grandes predomina el patrón lineal (para un análisis más completo de ajuste de distribuciones ver [4]).

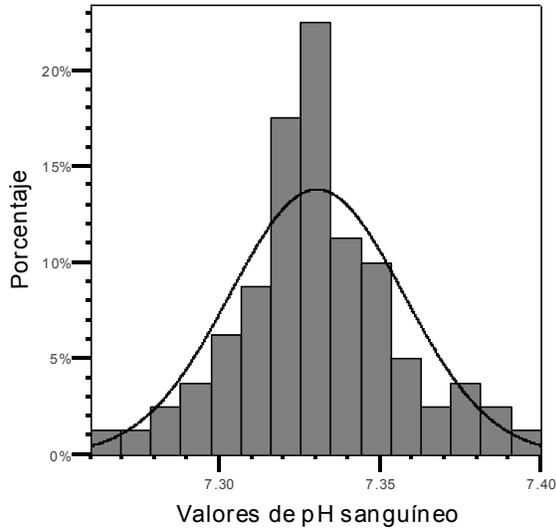


Figura. 1. Histograma porcentual y curva de ajuste de normalidad

Frecuencia	Tallo & Hojas
4.00	Extremos (≤ 7.280)
3.00	729 . 000
5.00	730 . 00000
7.00	731 . 0000000
14.00	732 . 000000000000000
18.00	733 . 00000000000000000
9.00	734 . 000000000
8.00	735 . 00000000
4.00	736 . 0000
2.00	737 . 00
3.00	738 . 000
3.00	Extremos (≥ 7.390)

Ancho de Tallo .01
Casos por hoja: 01 caso(s)

Figura. 2. Diagrama de tallo y hojas del pH

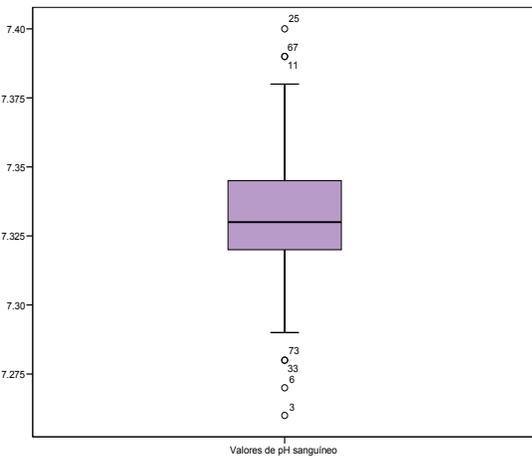


Figura 3. Diagrama de caja del ph

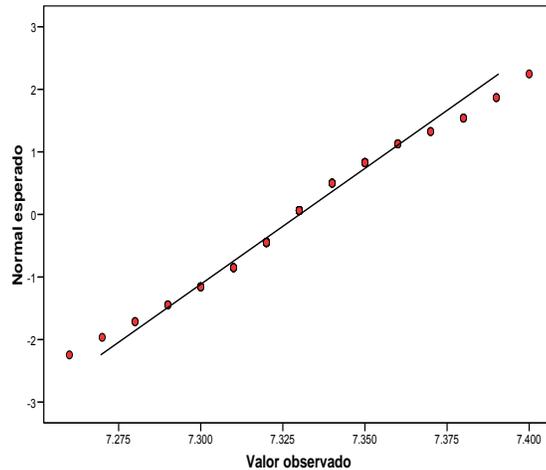


Figura 4. Gráfica cuantilar q-q normal de pH

3. Análisis mediante computadora del efecto de los parámetros de una distribución

El propósito aquí, es mostrar cómo puede utilizarse un programa de computadora, para analizar el efecto de los parámetros en la distribución de probabilidades de una variable en particular. Por cuestiones de espacio, sólo presentamos dos casos especiales, las variables discretas binomial y de Poisson. Aunque una simulación en tiempo real permitirá ampliar los resultados

3.1. Parámetro p y n de la distribución binomial

En la distribución binomial de (1), n representa el número de ensayos independientes de un experimento, mientras que p es la probabilidad constante de éxito en cada réplica. Si n se mantiene fijo, la pregunta de interés es ¿qué forma tiene la distribución para diferentes valores de p ? Por el contrario, si p es constante, ¿qué diferencias hay para distintos valores de n ?

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}; x = 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

La Figura 5 muestra la distribución binomial para $p = 0.01, 0.2, 0.5, 0.8, 0.99$ y $n = 20$. Note en primera instancia que el parámetro p es un factor de forma; ya que para valores pequeños (grandes) de $p = 0.01$ (0.99), la distribución tiene un sesgo negativo (positivo). En general, el sesgo es negativo para $p < 1/2$ y positivo para $p > 1/2$; además para $p = 1/2$ la distribución es simétrica. Observe también que p es un parámetro de desplazamiento, la distribución es la misma (aunque invertida) para un valor p y un valor $(1 - p)$. Por ejemplo, los valores en $p = 0.2$ se invierten cuando $p = 0.8$. El punto máximo disminuye conforme p aumenta de 0 hasta 0.5.

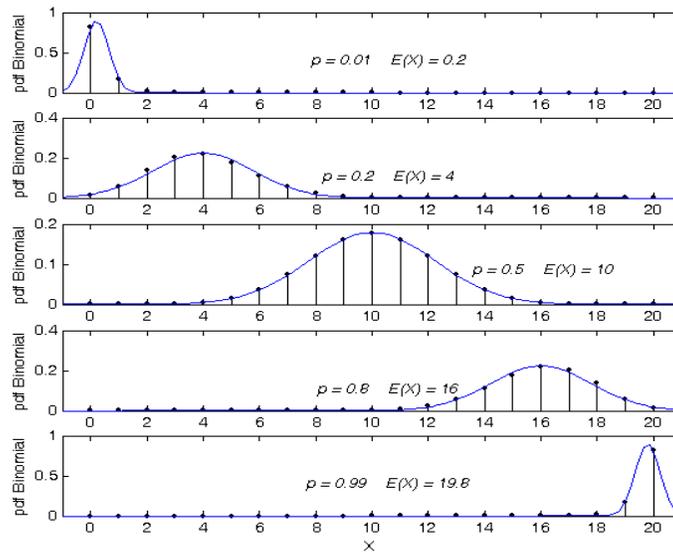


Figura 5. Distribución binomial con $p = 0.01, 0.02, 0.5, 0.8, 0.99$ y $n = 20$.

Observe que los valores de X con probabilidades significativamente mayores a cero son cuasi *simétricas* con respecto al valor esperado de la variable ($E(X) = np$), ¡y se encuentran a menos de tres veces su desviación estándar ($\sigma = \sqrt{np(1-p)}$)! Es importante hacer notar que gracias a esta *simetría*, la curva punteada en la Figura 5 representa muy buena aproximación de la distribución normal a la binomial, en los valores de X precisamente con probabilidades positivas.

3.2. Parámetros λ y t en la distribución de Poisson.

La distribución de Poisson viene dada por (2), con media y varianza iguales a λt . El parámetro t representa el intervalo $[0, t]$ en el cuál se observa la v.a. X , el número de ocurrencias de un suceso por unidad medición (tiempo, área, volumen). t es un factor de escala, ya que comprime o expande la distribución. La Figura 6 muestra el comportamiento de (2) para distintos valores t y un λ fijo. Conforme t se incrementa, el número de ocurrencias se diversifica expandiendo la distribución, cuyo sesgo se va perdiendo conforme t aumenta. Lo mismo ocurre si fijamos t y variamos λ . Conforme λ crece el centro se desplaza hacia el valor esperado (λ). Los valores de X con probabilidad distinta de cero, estarán concentrados a ± 2 desviaciones de la media. Lo anterior se confirma en la Figura 7, en la cual aparece también la aproximación de la normal.

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda t} x^{-\lambda t}}{x!}; x = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

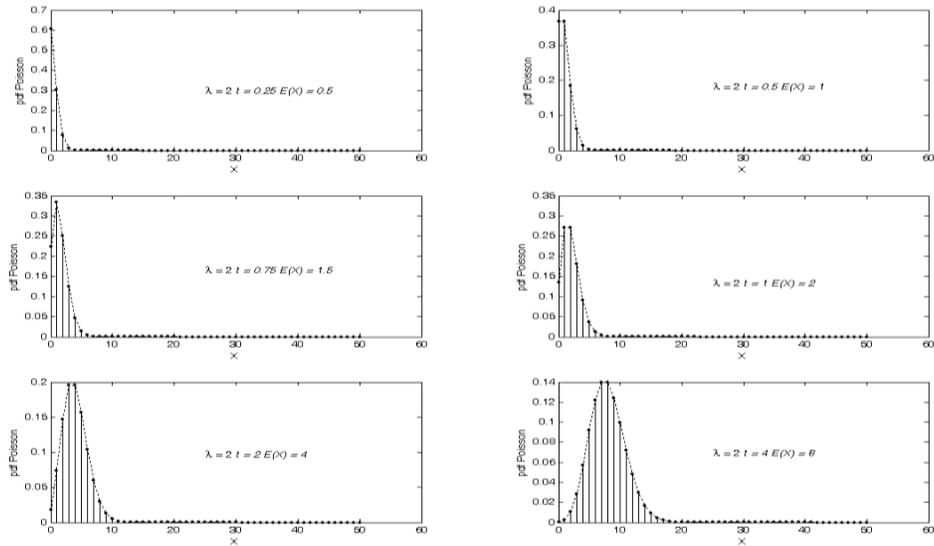


Figura 6. Distribución de Poisson con λ fijo ($\lambda = 2$) y t variable ($t = 1/4, 1/2, 3/4, 1, 2, 4$).

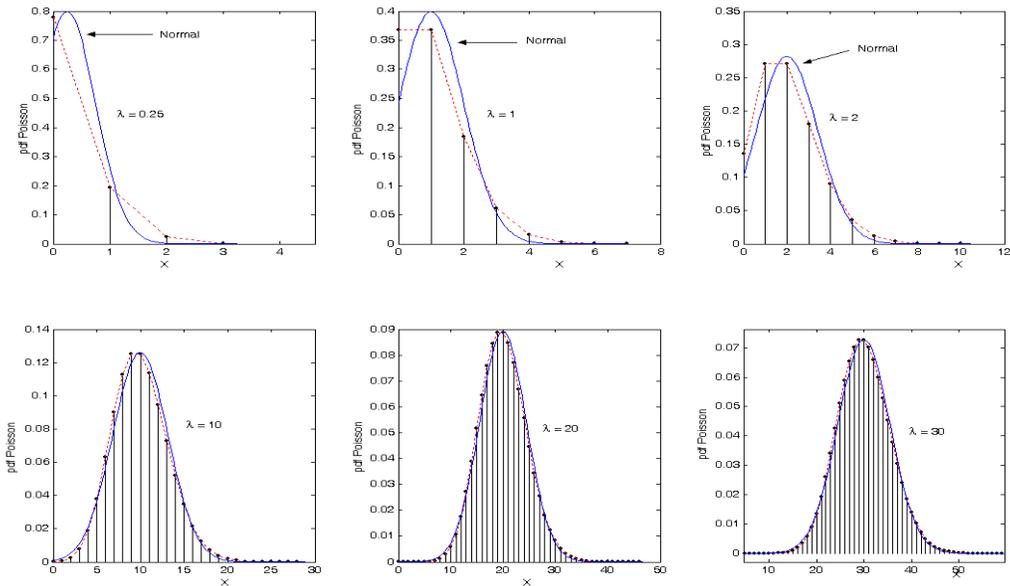


Figura 7. Distribución de Poisson con $t = 1$ fijo y λ variable ($\lambda = 1/4, 1, 2, 10, 20, 30$)

El sesgo negativo hace que la aproximación normal esté sobrada para pequeños valores de λ ; pero, conforme λ crece, dicho sesgo desaparece y la aproximación se vuelve exacta, confirmando los resultados teóricos de la aproximación normal y del TLC.

4. Referencias

- [1] Triola, Mario F. “*Estadística*”, Novena Edición, Pearson-Addison Wesley (2004).
- [2] Pérez López César, “*Técnicas Estadísticas con SPSS*”, Ed. Prentice Hall, p. 183 (2001).
- [3] Devore Jay L., “*Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*”, Ed. Thompson. 7º Ed., p. 176 (2008).
- [4] Cuthbert Daniel y Wood Fred., “*Fitting Equations Data*”. J. Wiley & Sons, Inc. New York, NY, USA (1980).

Un paseo por la Probabilidad y la Estadística: de Bahía de Kino a Varadero (parte 2)

Claudio A. López Miranda y Francisco J. Tapia Moreno
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.
(claudio@gauss.mat.uson.mx y ftapia@gauss.mat.uson.mx)

Nivel Educativo: Básico y Superior

Resumen

En esta segunda parte de nuestro trabajo, presentamos dos técnicas básicas de Montecarlo para simular muestras de vv.aa. de cualquier población discreta o continua. Daremos un “paseo” por la estadística para mostrar que el Teorema del Límite Central (TLC) no siempre es válido para . Además, ilustraremos de manera interactiva, en la ponencia, la simulación del tráfico de aviones y los intervalos de confianza, que muestran que, para poblaciones que provienen de una distribución normal, S^2 siempre es menor que el punto medio de su intervalo.

1. Introducción

A continuación damos las dos técnicas básicas de Montecarlo para simular muestras de vv.aa. a partir de la función de distribución acumulada (fda) o mediante una transformación adecuada, como la requerida para generar muestras de una distribución normal. Dichas técnicas se usan para analizar un proceso de Poisson que modela el tráfico de aviones; así como para demostrar intuitivamente el TLC aplicado sobre una población uniforme (simétrica) y lognormal (sesgada).

2. Simulación de muestras de variables aleatorias

De acuerdo con Pérez [1], el procedimiento general para simular muestras de variables aleatorias de cualquier población (finita o infinita, discreta o continua), a partir de su densidad $f(x)$, requiere obtener la distribución acumulada $F(x)$ y poseer un generador de números (pseudor) aleatorios con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$, la cual es denotada por $U [0, 1]$.

2.1. Simulación de variables aleatorias discretas

Para generar muestras de una variable aleatoria discreta X mediante simulación Montecarlo, que toma los valores $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con probabilidades $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, dividimos el intervalo $[0, 1]$ en n sub-intervalos, tal que la longitud del i -ésimo sub-intervalo sea p_i . Por lo tanto, si el número aleatorio generado r cae en el intervalo i , la muestra seleccionada será x_i ¡precisamente con la probabilidad deseada p_i ! La Fig. 1 muestra la gráfica escalonada de $F(x)$, para una v.a. X con la distribución de la Tabla 1. $F(x)$ está representada por los valores a_i 's, tal que

(1)

Tabla 1. Distribución de probabilidades de X discreta.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.41	0.26	0.18	0.10	0.05
$a_i = F(x_i)$	0.41	0.67	0.85	0.95	1.00

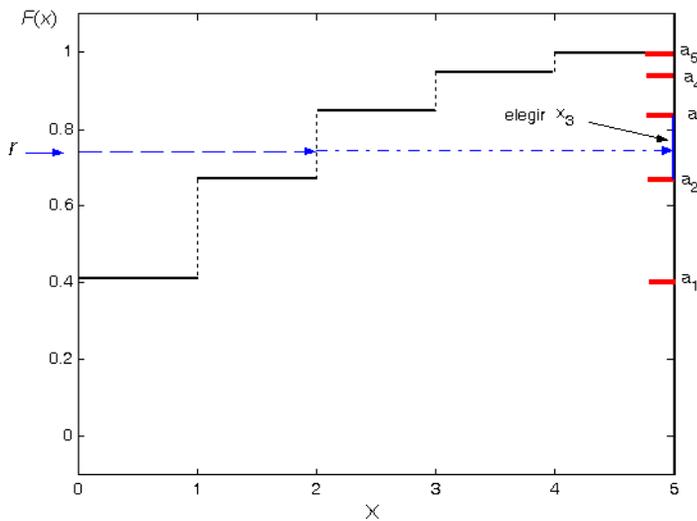


Fig. 1. Generación de muestras de v.a. discreta a través de $F(x)$.

```

Begin
Introducir valores ;
Introducir probabilidades
 $a[1] = p[1]$ ;
For  $i = 2$  to  $n$ 
     $a[i] = a[i-1] + p[i]$ ;
end
For  $i = 1$  to  $M$ 
     $seleccion = 1$ ;
     $i = 1$ ;
    Elegir número aleatorio  $r \ U [0, 1]$ ;
    While ( $r \leq a[i]$ ) do
         $i = i + 1$ ;
    end
     $muestra [seleccion] = x [i]$ ;
     $seleccion = seleccion + 1$ ;
end
return  $muestra$ ;
end

```

Fig. 2. Pseudocódigo para simular muestras de tamaños M para una v.a. discreta X

2.2. Simulación de variables aleatorias continuas¹

El procedimiento es similar al de la sección previa, sólo que la función escalonada se sustituye por la función monótona continua $F(x)$. El procedimiento que utiliza la *transformación inversa de F* es como sigue [1]:

- Tome un número r con distribución $U [0, 1]$ de tantas cifras como precisión se desee.
- Considere el valor r como un valor de $F(x)$ y tomar como valor observado en la muestra aquel valor de x tal que $r = F(x)$, es decir,
- Repita el proceso con distintos números aleatorios hasta completar el tamaño de muestra.

La Fig. 3 ilustra el procedimiento anterior, donde la proyección de r es a través de la inversa de F . Así, se garantiza que la secuencia de números x obedecerán la distribución implícita $f(x)$ de la variable. Por ejemplo; si queremos generar un muestra para una v.a. X que representa el tiempo de duración de un dispositivo electrónico (sin desgaste), cuya población obedece la distribución exponencial de parámetro λ ; basta con obtener un número r con distribución $U [0, 1]$ y usar la transformación $x = -\ln(r) / \lambda$, debido a que

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad ; \quad (2)$$

donde $1/\lambda$ es el tiempo esperado de duración de los dispositivos.

¹ Dedicado con mucho amor a mi esposa Francis, quien hace que mi vida sea plena ¡Hay que Nina...muá! C.A.L.M.

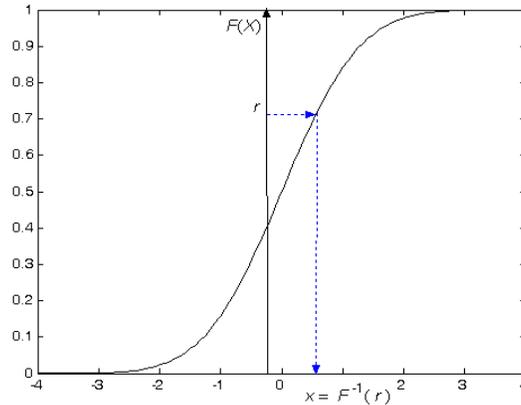


Fig. 3. Generación de muestras de variables continuas a través de la transformación

2.3. Muestras de variables aleatorias con distribución normal

Desafortunadamente no siempre es posible obtener la inversa de la distribución acumulada F ; por ejemplo con la distribución normal. Aunque en la Fig. 3 se muestra la distribución acumulada de la normal, analíticamente no existe una expresión cerrada para su cálculo, por lo que debemos recurrir a la integración numérica haciendo impráctico el procedimiento anterior. En este caso, se procede de acuerdo a la teoría de transformaciones, método equivalente al de la sección previa pero extendido a varias variables. Para más información consultar el Capítulo 7 de [2]. A continuación damos la “receta” de un procedimiento muy conocido para generar muestras aleatorias de una distribución normal [2].

Paso 1. Generar dos números aleatorios r_1 y r_2 con distribución $U [0,1]$ en el cuadrado unitario (3)

Paso 2. Hacer (4)

(5)

Entonces, ambas z_1 y z_2 tienen distribución normal estándar

Paso 3. Hacer . x_1 y x_2 tendrán la distribución

2.4. Aplicación de la simulación de muestras de variables aleatorias: proceso de Poisson.

Suponga que en un aeropuerto de una ciudad determinada, tanto el arribo de aviones X como los despegues Y , se comportan con una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 1$; es decir, en promedio arriba y despegas 1 avión por minuto. Si al iniciar el día existe un determinado número de aviones K en tierra, simularemos el tráfico de aviones en tierra Z durante la primera hora del día. Gracias a la simulación se pueden analizar para diferentes tasas de arribo y despegues, así como distinto número inicial de aviones en tierra. El espacio son 60 minutos, por lo tanto, se requieren 60 muestras para los arribos y 60 para los despegues. Al final de cada intervalo de tiempo ; tal que . Los resultados se muestran en la Fig. 4, de abajo hacia arriba, representan el tráfico de aviones en los 60 minutos de la primera hora del día para $K = 10, 20, 35, 55$ y 70 ; mientras que y ; respectivamente. En el primer caso existe la misma tasa de arribos y despegues, por lo que el promedio se mantiene en 10. En el segundo caso el tiempo de observación se redujo a un cuarto de minuto, por lo que el período de observación es más estrecho, etc. En el quinto caso, donde la tasa es (1:4), $K = 70$ y el promedio esperado de aviones en tierra resulta 73.

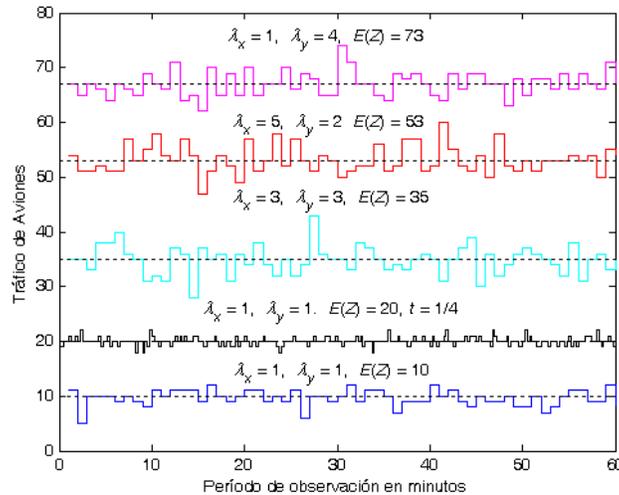


Fig. 4. Simulación del tráfico de aviones

2.5. Demostración empírica del Teorema de Límite Central

El TLC establece en palabras que la suma de n vv.aa. independientes tiene aproximadamente la distribución normal, sin importar cuál sea la distribución de las variables. Sean X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de tamaño n extraída de una población X con media poblacional μ y desviación estándar σ . Debemos notar que para que las extracciones resulten independientes es necesario un muestreo con reemplazo o una población infinita. En caso de poblaciones finitas de tamaño N , la independencia se garantiza cuando el tamaño de muestra es menor que el 5% de la población ($n < 0.05N$). En este trabajo supondremos que se cumplen las condiciones de independencia, tal que las variables X_1, \dots, X_n , resultan independientes e idénticamente distribuidas (*i.i.d.*).

Una de las aplicaciones más utilizadas del TLC es para aseverar que la media muestral \bar{X}_n está normalmente distribuida con media μ y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; ya que en este caso la media y la desviación estándar de las X_i es la misma. La pregunta de interés es ¿para qué valor de n dicha aproximación es “suficientemente” buena? En otras palabras, ¿cuál debe ser el tamaño de la muestra para afirmar que el TLC tiene una aproximación razonable? El conocimiento popular de la estadística asegura que para $n \geq 30$ la aproximación es buena. Sin embargo, mostraremos que la respuesta depende de la distribución de la población de origen. Es decir, de la simetría o asimetría (sesgo). Por ejemplo, si la distribución original es simétrica como la binomial o la uniforme, el TLC es “bueno” para n mucho menor que 30 (ver Sección 3 Parte I). En el caso de la distribución uniforme los resultados sugieren que es suficiente $n \approx 10$ (Por cuestión de espacio este caso tendrá que esperar hasta la presentación de la ponencia). La visualización del TLC se hará a partir de la distribución lognormal. El experimento consiste en aplicar el procedimiento de simulación de muestras de vv.aa. de la Sección 2.2. Se simulan $M = 1,000$ muestras de tamaño n por cada caso; generando así 1,000 valores de \bar{X}_n ; luego, se calcula el histograma para analizar la posible distribución de \bar{X}_n y se contrasta con la curva normal del TLC, $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. Aunque en el trabajo se presentan cuatro gráficas estáticas, en la ponencia se verá el comportamiento dinámico variando el tamaño de la muestra. La simulación dinámica e interactiva resulta muy interesante en la conceptualización de los conocimientos, ya que se analizarán desde tamaños de muestra $n = 1$ hasta $n = 50$ ¡cada una con 1,000 réplicas!

Además, generaremos los intervalos de confianza y el sesgo de los estimadores puntuales de μ y σ , los muy conocidos $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$, respectivamente. ¿Por qué no aprovechar la oportunidad y mostrar el sesgo del estimador de máxima verosimilitud $\hat{\mu}_{ML}$ y $\hat{\sigma}_{ML}$; el cual implica al controversial denominador n en vez de $(n-1)$. ¡El potencial de la simulación es ilimitado!

Caso 2. TLC aplicado a la distribución lognormal (distribución sesgada)

A continuación analizamos la distribución de X para muestras que provienen de una población con distribución lognormal, la cual es una distribución sesgada [3]. Nota: Primero simule una v.a. normal Y ; luego hacer $X = e^Y$; así X tendrá distribución lognormal. Veremos que tan “bueno” podría resultar la aproximación del TLC. Recordemos que una v.a. X tiene la distribución lognormal si $\ln X$ tiene la distribución normal con media μ y desviación estándar σ . La función de densidad lognormal viene dada por (6).

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (6)$$

Se puede demostrar que (ver [3])

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{\mu - \ln x}{\sigma^2} - \frac{1}{x} \quad (7)$$

Los resultados de la simulación se muestran en las Fig. 5, 6 y 7. La Fig. 5 ilustra la densidad lognormal para distintos valores de los parámetros μ y σ . Observe que con $\mu = 1$ y $\sigma = 1$ la densidad tiene un sesgo muy grande hacia la izquierda. Este es el caso más complicado de la distribución y sobre ella se ilustrará la aproximación del TLC. La Fig. 7 contiene los histogramas de frecuencia relativas con 20 intervalos para los mil valores de x y distintos tamaños de muestra $n = 5, 10, 20$ y 30 . Las frecuencias relativas fueron normalizadas entre la longitud de los intervalos para obtener un histograma de área unitaria, tal como debe ser si queremos contrastarla con la función de densidad teórica normal (TLC). Observe que para $n = 5$, el histograma está sesgado, conforme n se incrementa de 10 a 20 dicho sesgo se va perdiendo. En los tres casos ($n < 30$) la aproximación del TLC no es buena. El incremento de n produce un mayor grado de concentración de los histogramas en torno al valor medio de la población (4.48). Aunque el histograma para $n = 30$ hace parecer una buena aproximación a la distribución Normal, la curva de probabilidad de la Fig. 6 indica que aún se requiere un tamaño de muestra mayor a 30 para aproximar mejor las colas de la distribución (el promedio de \bar{x} resultó 4.52 ligeramente arriba de

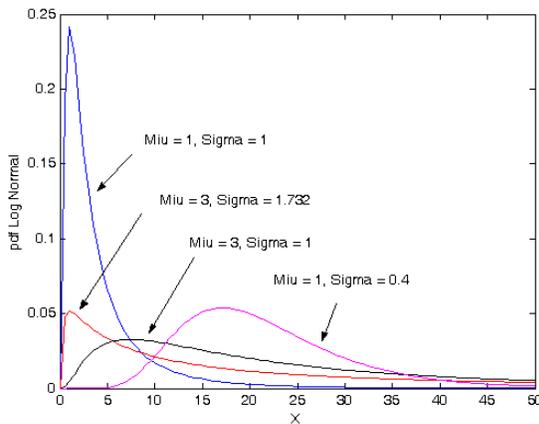


Fig. 5. Función de densidad lognormal

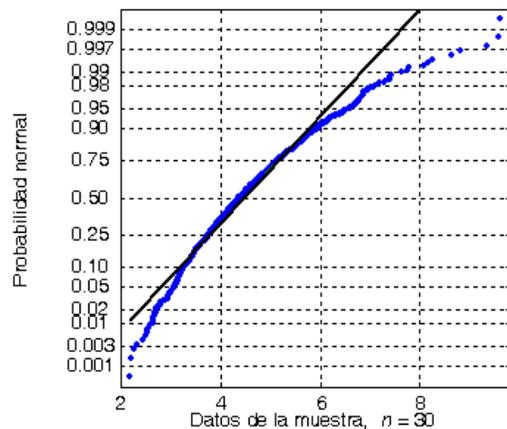


Fig. 6. Gráfica de probabilidad normal

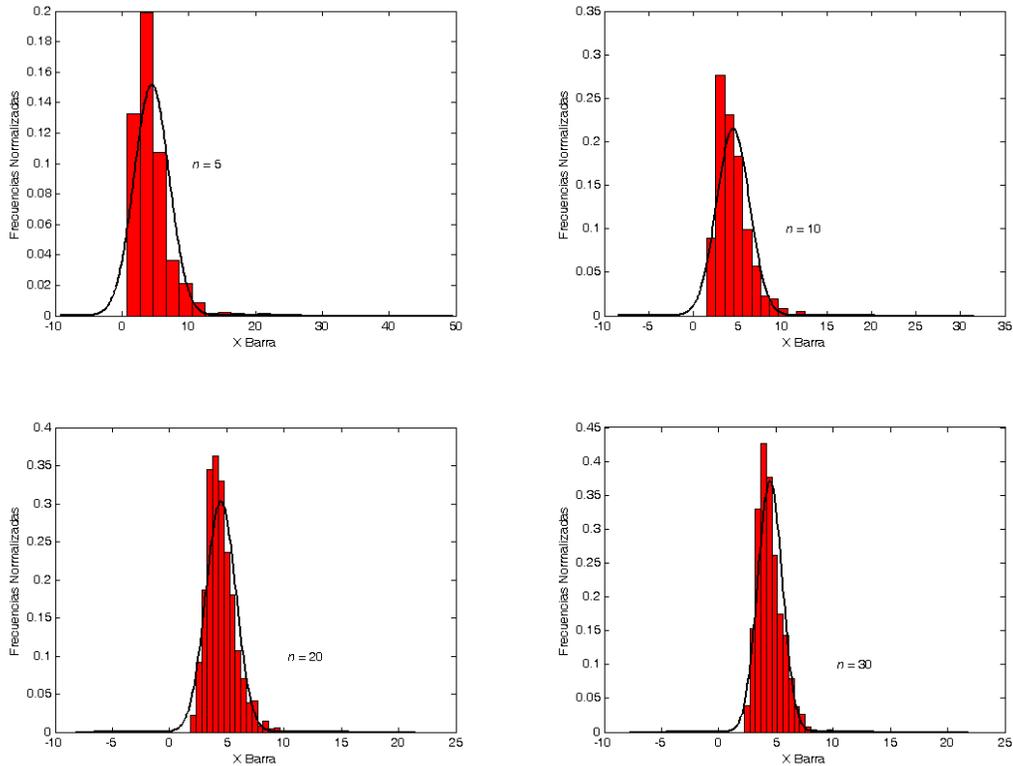


Fig. 7. Histograma de frecuencias normalizado y curva de ajuste normal para $n = 5, 10, 20$ y 30 .

la media poblacional).

En resumen, debemos tener cuidado con la aplicación del TLC cuando la distribución de la población tenga un sesgo o asimetría importante; en estos casos es posible que se requiera un $n > 30$ para que la aproximación del TLC se considere “buena”.

3. Conclusiones

Las simulaciones mostradas en la Parte 1 y en la Parte 2 de nuestro trabajo, permiten corroborar visualmente resultados importantes de la estadística, como la posible normalidad de un conjunto de datos, el efecto de los parámetros, los alcances y limitaciones de la aplicación del TLC, ó analizar un fenómeno aleatorio como el tráfico de aviones. En síntesis, podemos concluir que través de las herramientas de cómputo y la simulación de muestras de vv.aa., es posible propiciar un aprendizaje mucho más analítico y práctico de la estadística. Se crea un ambiente dinámico e interactivo de enseñanza y aprendizaje, que a la larga puede resultar en una simplificación de resultados complejos o teóricos. Las simulaciones fomentan el pensamiento crítico y creativo, muy necesario en esta materia. Así también, permiten analizar y evaluar con mayor profundidad el comportamiento de los fenómenos estadísticos. La estadística debe ser práctica, y en este ámbito, ¡el potencial de la simulación es ilimitado! *A propósito, ¡ los cantantes son de La Loma!*

Referencias

- [1] Pérez López César, “*Muestreo Estadístico: conceptos y problemas resueltos*”, Ed. Pearson., España (2005).
- [2] Press William H. et al. “*Numerical Recipes in C++. The Art of Scientific Computing*”. Press Syndicate of the University of Cambridge., 2th Edition (2003).
- [3] Devore Jay L., “*Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*”, Ed. Thompson, 7^o Edición, (2008).

Inferencia Estadística para Cadenas de Markov

Martha Cecilia Palafox Duarte
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
cecypalafox@gauss.mat.uson.mx

Nivel: Superior

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es hacer inferencia sobre las probabilidades de transición de una cadena de Markov homogénea no paramétrica a través del enfoque de verosimilitud. Esto, se ilustra con datos reales de direcciones del viento y algunas suposiciones matemáticas son probadas mediante métodos gráficos y simulaciones computacionales.

1. Introducción

Una clase muy importante de procesos estocásticos la constituyen los procesos de Markov. Estos tienen la característica general que dado el valor actual del proceso X_t , los valores futuros X_s para $s > t$ son independientes de los valores pasados X_u para $u < t$. Una cadena de Markov es un proceso de Markov a tiempo discreto cuyo espacio de estados T es finito o numerable. Algunos ejemplos de cadenas de Markov ampliamente estudiados en la literatura de Probabilidad son: Caminatas aleatorias unidimensional, la ruina del jugador, cadena de Erenfest, modelos de colas, entre otros. Una cadena de Markov está completamente determinada si se especifican su matriz de transición, P , y la distribución inicial del proceso X_0 , π_0 . Es decir, es posible calcular cualquier probabilidad asociada a la cadena usando la Ley de Probabilidad Total. En la teoría de probabilidad para cadenas de Markov se pone mucho énfasis en el estudio de las matrices de transición de orden n , clasificación de estados de la cadena, propiedades asintóticas, existencia y unicidad de distribuciones estacionarias, etc.

Por otra parte, el tratamiento que le da el enfoque estadístico a cadenas de Markov es muy diferente al enfoque probabilista. Bajo el paradigma estadístico un problema relevante y poco estudiado es hacer inferencia sobre las probabilidades de transición basados en una muestra observada i_1, \dots, i_n de la cadena. Entiéndase por inferencia no sólo una estimación puntual del parámetro de interés P sino también estimación por intervalos de las probabilidades P_{ij} que la conforman.

El objetivo de este trabajo es usar el enfoque de verosimilitud para hacer inferencia sobre las probabilidades de transición de una cadena de Markov no paramétrica. Se ejemplificará esta metodología con datos reales de una cadena de direcciones de viento. Además se propondrá un método gráfico para validar la propiedad de Markov. Por último se aplicará el enfoque probabilista para analizar el sistema con el paso del tiempo.

2. Inferencias vía verosimilitud para cadenas de Markov no paramétricas

Supóngase que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cadena de Markov homogénea a tiempo discreto con espacio de estados finito $T = \{1, 2, \dots, m\}$. Formalmente, la propiedad de Markov es

$$\Pr\{X_{n+1}=j | X_0=i_0, \dots, X_{n-1}=i_{n-1}, X_n=i_n\} = \Pr\{X_{n+1}=j | X_n=i_n\} \quad (2.1)$$

para toda $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n, j \in T$ y $n \in \mathbb{N}$. Además, supóngase que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cadena no paramétrica. Es decir, las probabilidades de transición en un paso, $P_{ij} = \Pr\{X_{n+1}=j | X_n=i\}$, no pueden ser indexadas a través de un vector de parámetros. Además, cumplen que $P_{ij} \geq 0$ con $i, j \in T$ y que $\sum_{j \in T} P_{ij} = 1$, para todo $i \in T$. La distribución inicial se denotará como $\pi_0(i) = \Pr\{X_0=i\}$, con $i \in T$.

Sea i_1, \dots, i_n' una muestra observada de tamaño n' de la cadena $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Sea $F = [f_{ij}]$ la matriz de frecuencias observadas. Es decir, f_{ij} es el número de veces que la cadena fue del estado i al estado j en un paso en toda la muestra observada. Para $i \in T$ fijo se supodrá que f_{i1}, \dots, f_{im} siguen

una distribución multinomial $(n_i, P_{i1}, \dots, P_{im})$, donde $n_i = \sum_{j=1}^m f_{ij}$. Así, para un $j \in T$ fijo, la distribución marginal de f_{ij} sigue una distribución binomial (n_i, P_{ij}) . Por tanto, la función de verosimilitud de P_{ij} basada en esta distribución es

$$L(P_{ij}; f_{ij}) \propto P_{ij}^{f_{ij}} (1 - P_{ij})^{n_i - f_{ij}} \quad (2.2)$$

La función de verosimilitud relativa de P_{ij} es

$$R(P_{ij}; f_{ij}) = \frac{L(P_{ij}; f_{ij})}{L(\hat{P}_{ij}; f_{ij})} = \left(\frac{P_{ij}}{\hat{P}_{ij}} \right)^{f_{ij}} \left(\frac{1 - P_{ij}}{1 - \hat{P}_{ij}} \right)^{n_i - f_{ij}}, \quad (2.3)$$

donde $\hat{P}_{ij} = f_{ij}/n_i$ es el estimador de máxima verosimilitud (EMV) de P_{ij} (Véase Palafox, 2009, pág. 56). Nótese que $R(\cdot; f_{ij})$ toma valores en el intervalo $[0, 1]$ y alcanza su máximo en $P_{ij} = \hat{P}_{ij}$. Valores de P_{ij} que hacen que $R(\cdot; f_{ij})$ tome valores cercanos a cero son implausibles. En contraste, valores de P_{ij} con una verosimilitud relativa cercana a uno son altamente plausibles.

Los intervalos de verosimilitud separan los valores plausibles de los no plausibles a un nivel c (Sprott, 2000, pág. 14). Un intervalo de verosimilitud de nivel c de plausibilidad se define como

$$IV(c) = \{P_{ij}; R(P_{ij}) \geq c\},$$

donde $0 \leq c \leq 1$. Valores de P_{ij} en el $IV(c)$ tienen verosimilitud relativa mayor o igual que c y valores de P_{ij} fuera del intervalo tienen verosimilitud relativa menor. Nótese que haciendo variar c entre 0 y 1 se obtiene una familia de intervalos anidados que es equivalente a la función de verosimilitud relativa y reproduce su gráfica.

Por otra parte, un sólo intervalo de verosimilitud no proporciona información acerca de la simetría de la función de verosimilitud respecto a \hat{P}_{ij} y de cómo cambia la plausibilidad dentro del intervalo.

Por ello, se sugiere dar el EMV de P_{ij} junto con intervalos de verosimilitud de nivel $c=0.036, 0.15$ y 0.25 . Se recomienda usar estos niveles puesto que bajo condiciones de regularidad, (Serfling, 1980, págs. 155-156), estos intervalos de verosimilitud tienen asociadas probabilidades de cobertura aproximadas del 0.99, 0.95 y 0.90, respectivamente, (Kalbfleisch, 1985, pág 107). Podemos decir que la probabilidad de cobertura es la fracción de veces que el intervalo contiene al valor verdadero del parámetro en un número muy grande de repeticiones de la muestra con el parámetro fijo (Palafox, 2009, pág. 43). Cuando a los intervalos de verosimilitud se les asocia una confianza, se le llama intervalos de verosimilitud-confianza.

A continuación se presenta un estudio de simulación para verificar que los intervalos de verosimilitud propuestos tienen las probabilidades de cobertura mencionadas.

3. Estudio de Simulación

Para llevar a cabo dicho estudio se fijó el tamaño de la muestra n , el espacio de estados T , distribución inicial π_0 y matriz de transición P . Enseguida, se calcularon los intervalos de verosimilitud a los diferentes niveles de $c= 0.036, 0.15, 0.25$ asociados a una confianza y después se verificó si el intervalo cubre o no el verdadero valor del parámetro P_{ij} . Se realizó el proceso 10000 veces y se estimaron las probabilidades de cobertura con las frecuencias relativas observadas.

Tabla 1

Nivel c	$1 - \alpha$	PC(P_{11})	PC(P_{26})	PC(P_{53})	PC(P_{75})
0.036	0.99	0.988	0.982	0.982	0.977
0.15	0.95	0.946	0.93	0.944	0.942
0.25	0.90	0.893	0.905	0.911	0.89

La Tabla 1 muestra los resultados de las probabilidades de coberturas estimadas para algunas P_{ij} considerando $n=2184$, $T=\{1, \dots, 8\}$, $\pi_0=\{0.3, 0.21, 0.15, 0.12, 0.13, 0.04, 0.027, 0.23\}$ y matriz de transición P

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.54 & 0.31 & 0.06 & 0.033 & 0.02 & 0.01 & 0.007 & 0.012 \\ 0.36 & 0.44 & 0.1 & 0.04 & 0.026 & 0.007 & 0.0062 & 0.009 \\ 0.25 & 0.28 & 0.27 & 0.083 & 0.06 & 0.03 & 0.01 & 0.005 \\ 0.18 & 0.11 & 0.1 & 0.31 & 0.18 & 0.08 & 0.035 & 0 \\ 0.12 & 0.075 & 0.031 & 0.22 & 0.32 & 0.16 & 0.07 & 0.006 \\ 0.16 & 0.057 & 0.023 & 0.034 & 0.25 & 0.27 & 0.12 & 0.08 \\ 0.37 & 0.1 & 0.06 & 0.02 & 0.1 & 0.12 & 0.14 & 0.06 \\ 0.36 & 0.2 & 0.033 & 0.23 & 0.066 & 0 & 0.033 & 0.066 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.1)$$

Se observa que dichas probabilidades de coberturas son similares a lo teóricamente indicado. Además se realizaron otras simulaciones variando n , T , π_0 y $P=[P_{ij}]$ obteniendo resultados semejantes.

4. Método Gráfico

Para validar la propiedad de Markov dada en (2.1) se propone, por cuestiones prácticas, dar evidencia que se cumple la siguiente igualdad:

$$\Pr\{X_2=i_2|X_0=i_0, X_1=i_1\}=\Pr\{X_2=i_2|X_1=i_1\}, \quad (4.1)$$

donde $i_0, i_1, i_2 \in T$. Para cada una de estas ternas, la probabilidad a la izquierda en (4.1) será estimada con

$$Y(i_0, i_1, i_2) = \frac{\text{No. de veces que } X_n \text{ pasa de } i_0, i_1, i_2}{\text{No. de veces que } X_n \text{ pasa de } i_0, i_1}. \quad (4.2)$$

Por otro lado, la probabilidad a la derecha en (4.1) será estimada con

$$X(i_1, i_2) = \frac{\text{No. de veces que } X_n \text{ pasa de } i_1, i_2}{\text{No. de veces que } X_n \text{ sale de } i_1}. \quad (4.3)$$

La propuesta gráfica de validación de la propiedad de Markov consiste en mostrar que para cada terna $i_0, i_1, i_2 \in T$, los puntos en el plano cartesiano conformados por las frecuencias observadas X y Y en (4.2) y (4.3) se encuentran alrededor de una línea recta de 45 grados de inclinación. Cualquier desviación de esto es considerado como evidencia en contra de que la cadena cumple con la propiedad de Markov. Además se recomienda realizar un histograma del cociente de estas dos probabilidades y observar que la mayor frecuencia está concentrada alrededor del valor uno.

5. Ejemplo: Direcciones del Viento

En este ejemplo se analizan datos de direcciones del viento categorizados según los puntos cardinales,

Puntos Cardinales	Intervalo Asociado (Grados)
N	[337.5, 22.5)
NE	[22.5, 67.5)
E	[67.5, 112.5)
SE	[112.5, 157.5)
S	[157.5, 202.5)
SO	[202.5, 247.5)
O	[247.5, 292.5)
NO	[292.5, 337.5)

Los registros fueron hechos cada hora en una estación meteorológica ubicada en las instalaciones del Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT) en la ciudad de Guanajuato, Gto., México, durante el verano del 2006. La longitud de la cadena es de $n=2184$ y el espacio de estados es $T=\{N, NE, E, SE, S, SO, O, NO\}$.

En la Figura 1A y Figura 1B se muestran las graficas de validación descritas en la Sección 4 con los datos de direcciones del viento. Se observa que la gran mayoría de puntos caen alrededor de la recta. Nótese que algunas probabilidades estimadas son iguales a cero, esto se debe a que dichas trayectorias, pasar de i_0 , i_1 a i_2 , no ocurrieron dentro de la muestra observación de la cadena de tamaño $n=2184$. Además, se observa en el histograma que la mayor frecuencia esta concentrada en el número uno.

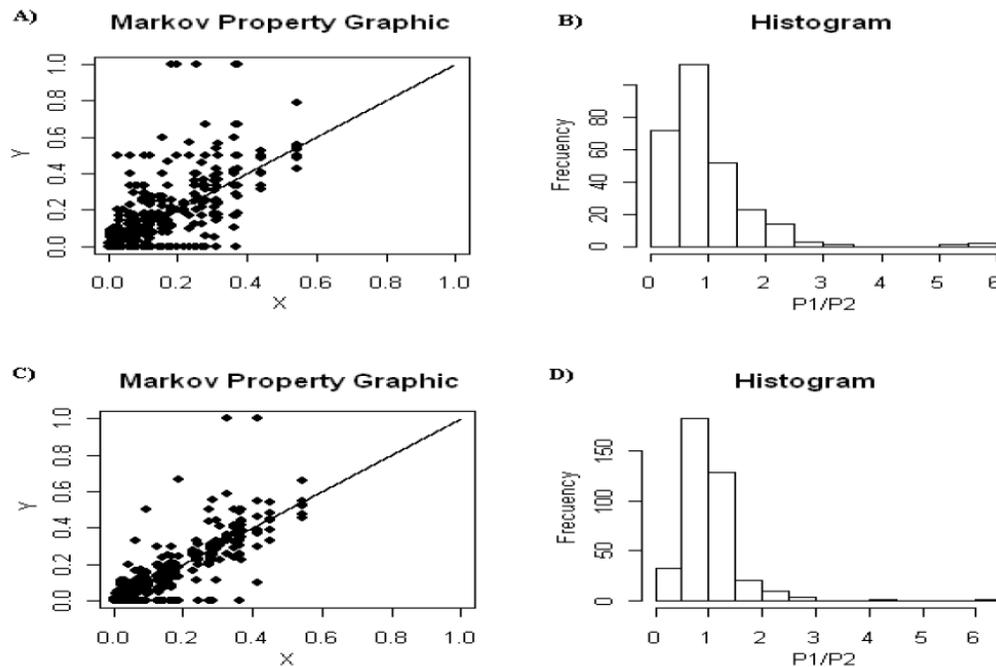


Figura 1

Por otra parte, en la Figura 1C y 1D se muestran las mismas gráficas pero con datos simulados de una cadena de Markov legítima. Se observa una gran concentración de puntos alrededor de la recta y se siguen presentando probabilidades estimadas iguales a cero con el tamaño de muestra $n=2184$. En el histograma se tiene la mayor frecuencia en 1. El objetivo principal de mostrar estas gráficas es exhibir el comportamiento de la metodología presentada en la Sección 4 y observar similitudes entre los datos reales y simulados, pues en ambas situaciones los puntos caen alrededor de la recta, en el histograma se presenta la mayor frecuencia alrededor del número uno y algunas probabilidades estimadas son iguales a cero.

Con lo anterior se tiene evidencia para suponer que los datos de direcciones de viento pueden ser modelados como una cadena de Markov no paramétrica. Aplicando los resultados de la Sección 2 se puede realizar el proceso inferencial para cada una de las probabilidades de transición. La matriz de las probabilidades de cambio estimadas se presetan en (3.1). Ahí se indican las probabilidades de cambio de una dirección a otra, como por ejemplo, la probabilidad de que el viento permanezca en el norte (N) dado que se encuentra en esa misma dirección es de 0.54. También que es muy poco probable pasar de una dirección norte a una dirección sur. En general, es más probable permanecer en la misma dirección si el viento se encuentra en alguna dirección específica.

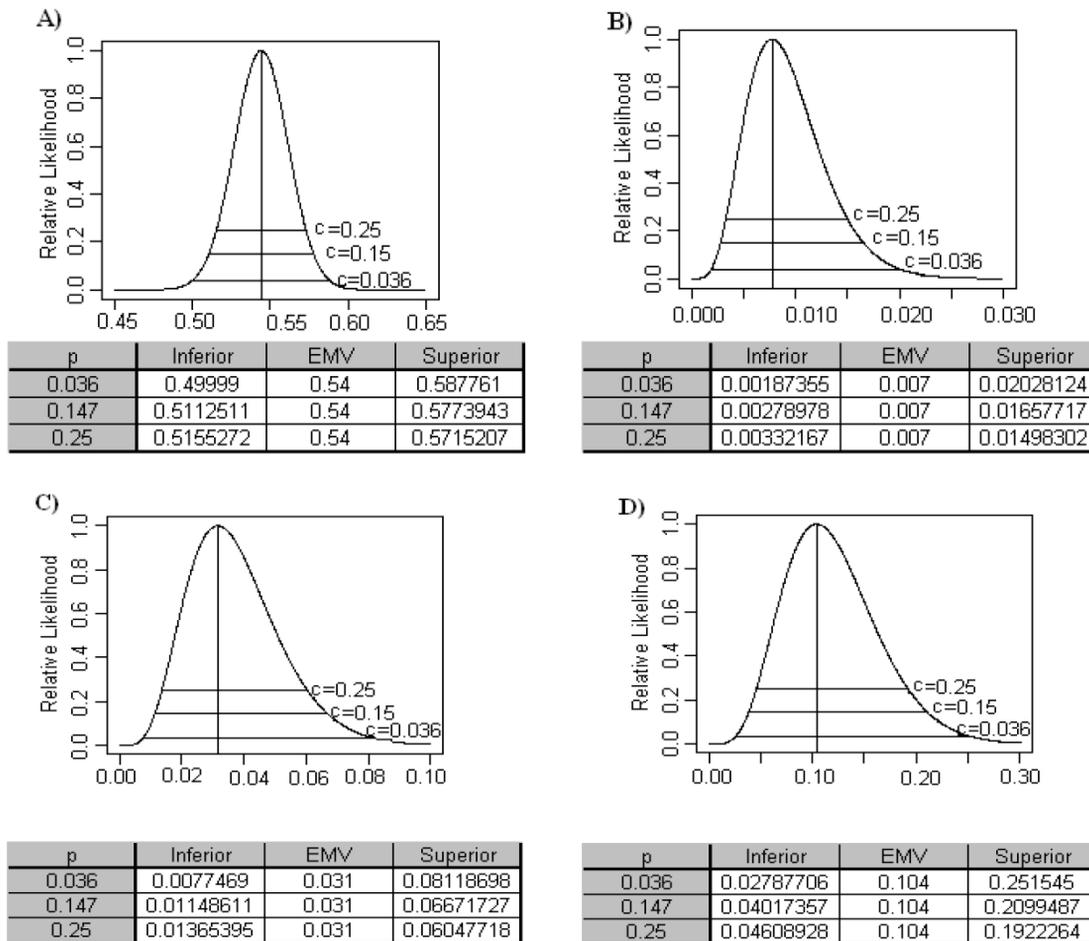


Figura 2

La Figura 2 muestra las funciones de verosimilitud relativa, para $P_{N,N}$, $P_{NE,SO}$, $P_{S,E}$, $P_{O,S}$. También se indican los EMV para cada una de las probabilidades y los intervalos de verosimilitud de nivel de plausibilidad $c=0.036$, 0.15 , 0.25 . En la Figura 2A, podemos observar que a un nivel de 0.036 , valores menores que 0.49 y mayores que 0.58 son poco plausibles para $P_{N,N}$. De manera similar, se pueden interpretar el resto de las figuras.

Desde el punto de vista probabilístico, la matriz estimada \hat{P} en (3.1) presenta las siguientes características: Finita, irreducible, recurrente positiva y aperiódica (Palafox, 2009, pág. 66). Por lo tanto su distribución estacionaria y distribución límite existen, y es la misma. Esta dada por

$$\pi=(0.38,0.29,0.094,0.079,0.072,0.04,0.022,0.014).$$

En esta distribución se observa que las probabilidades más altas se presentan en las direcciones N y NE. Esto es congruente ya que en Guanajuato, Gto. son predominantes los vientos alisios.

6. Conclusiones

En este trabajo el método de Verosimilitud es considerado para hacer inferencia sobre las probabilidades de transición de una cadena de Markov homogénea y no paramétrica. Se muestra como hacer la estimación puntual y por intervalos sobre dichas probabilidades.

Además se propone una validación gráfica de la propiedad de Markov. Todo esto es ejemplificado con datos reales de direcciones del viento provenientes de una cadena de Markov no paramétrica. Finalmente, se describieron las características probabilísticas de esta cadena y se dio la distribución límite de esta.

7. Referencias

- [1] Basawa, I.V. y Prakasa Rao, B.L.S. (1980). *Statistical Inference for Stochastic Process*. Academic Press Inc.
- [2] Berger, J.O., Liseo, B. y Wolper, R.L. (1999). Integrated Likelihood Methods for Eliminating Nuisance Parameters. *Statistical Science*. V.14, pág. 1-28.
- [3] Caballero, M. E., Rivero, V. M., Uribe, G. y Velarde, C. (2004). *Cadenas de Markov: un enfoque elemental*. Sociedad Matemática Mexicana.
- [4] Casella, G. y Berger, R. (2002). *Statistical Inference*. segunda edición. Pacific Grove, Ca: Duxbury Press.
- [5] Cinlar, E. (1975). *Introduction to stochastic processes*. Prentice-Hall, Inc.
- [6] Cox, D. R. y Hinkley, D.V. (1974). *Theoretical Statistics*. London: Chapman and Hall.
- [7] Feller, W. (1950). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. V. I. Princenton University.
- [8] Hoel, P. G., Port, S.C. y Stone, C. J. (1972). *Introduction to Stochastic Processes*. University of California, Los Angeles: Houghton Mifflin Company.
- [9] Johnson, R. (1995). *Just the Essentials of Elementary Statistics*. Duxbury Press.
- [10] Kalbfleisch, J. G. (1985). *Probability and Statistical Inference*. V. 2: Statistical Inference. segunda edición. Nueva York: Springer-Verlag.
- [11] Karlin, S. (1975). *A First Course in Stochastic Processes*. Academic, Press Inc.
- [12] Karlin, S. y Taylor, H. M. (1998). *An Introduction to Stochastic Modeling*. Academic, Press Inc.
- [13] Mendenhall, W. (1982). *Introducción a la Probabilidad y la Estadística*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- [14] Montoya, J. A., Díaz-Francés, E. y Sprott, D. (2009). On a criticism of the profile likelihood function. *Statistical Papers*. V. 50, pág. 195-202.
- [15] Nakamura-Savoy, M. (2000). *Notas curso Elementos de Estadística y Probabilidad*. Guanajuato, Gto.
- [16] Norris, J.R. (1998). Markov Chains. *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics* (No. 2). University of Cambridge.
- [17] Palafox, M.C. (2009). *Inferencia Estadística para Cadenas de Markov*. Universidad de Sonora.
- [18] Ross, S. M. (1999). *Simulación*. Prentice Hall, Hispanoamericana.
- [19] Serfling, R. J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons.
- [20] Sprott, D. A. (2000). *Statistical Inference in Science*. Nueva York: Springer.

El Análisis Didáctico en el marco del Enfoque Ontosemiótico

Vicenç Font Moll
Departamento de Didáctica de las CCEE y de la Matemática
Universidad de Barcelona
vfont@ub.edu

Norma Rubio Goycochea
Departamento de Ciencias
Pontificia Universidad Católica del Perú
nrubio@pucp.pu

Nivel educativo: Superior

Resumen

En este taller se mostraron las herramientas que el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática propone al profesor para analizar, valorar y, de ser factible, mejorar la práctica profesional. Para ello, con la participación activa de los asistentes al taller y aplicando los niveles de análisis que propone este enfoque, se realizó un análisis didáctico de la transcripción de un episodio de una clase de matemáticas de secundaria en la que se institucionaliza la resolución de un problema. En dicho episodio participan tres alumnos en interacción con el profesor.

1. Introducción

La reflexión sobre los diversos factores presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje es parte de la labor docente. La necesidad de realizar un análisis sistemático que permita esta reflexión requiere de herramientas teóricas que lo faciliten. Durante la realización del taller se presentó una metodología de análisis didáctico que se basa en cinco niveles de análisis propuestos por el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS).

D'Amore, Font y Godino (2007); Font y Contreras (2008); Font y Godino, (2006); Godino y Batanero (1994); Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006); Godino, Contreras y Font, (2006); Godino, Font y Wilhemi (2006); Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2008) proponen, en el marco del EOS, cinco niveles para el análisis de procesos de instrucción:

- Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
- Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
- Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
- Identificación del sistema de normas y metanormas.
- Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Los niveles de análisis propuestos en el marco EOS y las herramientas de cada nivel permiten realizar un análisis didáctico completo que permita describir, explicar y valorar procesos de instrucción..

2. Análisis didáctico

En este taller, se aplicaron los niveles de análisis didáctico del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática adaptados de la manera siguiente:

Nivel 1. *Identificación de prácticas matemáticas*. En un proceso de estudio, la aplicación de este nivel lleva a describir la secuencia de prácticas matemáticas, durante las cuales se activan elementos distintos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica y un medio donde se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.).

Nivel 2. *Identificación de objetos y procesos matemáticos*. La finalidad de este nivel de análisis es describir la complejidad de las prácticas matemáticas tomando en consideración la diversidad de objetos y procesos, ya que el agente realiza prácticas orientadas a la resolución de situaciones-problema, en las que se deben considerar, entre otros aspectos, las configuraciones de objetos y los procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas.

Nivel 3. *Descripción de interacciones en torno a conflictos*. En nuestro caso y dada la gran diversidad de interacciones didácticas ocurridas en cualquier proceso de estudio, para este nivel nos centramos en las interacciones en torno a conflictos de tipo semiótico.

Nivel 4. *Identificación de normas*. En este nivel consideramos que tanto las prácticas matemáticas como las interacciones están condicionadas y soportadas por un conjunto de normas y metanormas que regulan las acciones y que deben ser analizadas.

Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa ya que sirven para comprender y responder a la pregunta ‘¿qué ha ocurrido aquí y por qué?’.

Nivel 5. *Valoración de la idoneidad interaccional del proceso de estudio*. Este nivel se ocupa del análisis de tipo valorativo. La didáctica de la matemática no debería limitarse solo a la descripción, sino que debería aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de estudio. Son necesarios, por tanto, criterios “idoneidad” o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y “guiar” su mejora, evaluando la pertinencia del proceso de instrucción matemática y señalando pautas para la mejora del diseño y la implementación del proceso de estudio.

En este taller, que tuvo una duración de cinco días con sesiones de dos horas cada día, y con una asistencia promedio de 40 profesores, se propuso, como contexto de reflexión, el análisis didáctico de una transcripción de un episodio de una clase de matemáticas de secundaria en la que el profesor institucionaliza la resolución de un problema.

La primera tarea dada a los profesores para iniciar el análisis didáctico de este episodio fue que, en base a su experiencia profesional, realizaran un primer análisis didáctico. En este primer análisis cada grupo de profesores participantes utilizaron algunos de los niveles didácticos comentados anteriormente y en la puesta en común del gran grupo se observó que, si bien cada grupo no utilizó todos los niveles de análisis didáctico, todos aparecieron en la puesta en común. A continuación, durante el desarrollo del taller se presentaron y aplicaron las herramientas teóricas correspondientes a cada uno de los cinco niveles de análisis didáctico comentados anteriormente.

3. Conclusiones

Se observó que los profesores tuvieron en cuenta en sus análisis didácticos iniciales diferentes aspectos. Así, por ejemplo, algunos centraron su atención en el hecho de que en el episodio de

clase analizado el profesor realizaba un proceso de institucionalización de la resolución de un problema; otros realzaron objetos matemáticos (proporcionalidad, ecuaciones, etc.) presentes, según ellos, en la transcripción. La mayoría de profesores expresó apreciaciones negativas en torno a la práctica profesional del profesor del episodio. Para argumentarlas, mencionaron, entre otros aspectos, el hecho de que el profesor no había gestionado bien algunas intervenciones de los alumnos o bien que había creado un clima emocional desfavorable para dos de ellos; también sugirieron cómo tendría que haber actuado el profesor del episodio.

En este primer análisis cada grupo de profesores participantes utilizaron algunos de los niveles didácticos y todos aparecieron en el gran grupo.

Antes que responder a la pregunta ‘¿qué se ha hecho mal y cómo se debería mejorar?’, el tipo de análisis que se desarrolló en el taller permitió responder a la pregunta ‘¿qué ha ocurrido aquí y por qué?’. El estudio exhaustivo de los aspectos descriptivos y explicativos de una situación didáctica es necesario para poder argumentar posteriormente valoraciones sobre esta situación.

Nuestra conclusión es que el modelo de análisis didáctico que propone el EOS aplicado en este trabajo es útil para la investigación sobre la práctica docente de los profesores de matemáticas, así como también puede ser útil para el grupo de profesores interesados en reflexionar sobre su propia práctica. Esto último, basándonos en la experiencia positiva de este taller. Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. Para el diseño de estos programas son necesarias herramientas para el análisis de la práctica docente como las que aquí se han propuesto.

4. Agradecimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2009-08120/EDUC.

5. Referencias

- [1] D’Amore, B., Font, V.; Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, 28(2), 49-77.
- [2] Font, V.; Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52.
- [3] Font, V.; Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.
- [4] Font, V., Godino, J. D. & Contreras, A. (2008). From representations to onto-semiotic configurations in analysing the mathematics teaching and learning processes in L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (eds.), *Semiotics in Math Education: Epistemology, Historicity, and Culture*. Sense Publishers: The Netherlands.
- [5] Godino, J. D.; Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355
- [6] Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39(1-2), 127-135

Educación a Distancia. Una discusión al seno de la matemática educativa

Gisela Montiel Espinosa (Coordinadora)

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, del
Instituto Politécnico Nacional

gmontiel@ipn.mx

Martha Cristina Villalba, Francisco Javier Tapia

Universidad de Sonora

Ricardo Ulloa Azpetia

Universidad de Guadalajara

Nivel educativo: Superior

Resumen

La discusión del grupo se orientó a problematizar la innovación y la investigación en educación a distancia dentro de la matemática educativa; se compartieron los resultados teóricos y empíricos producto de las experiencias de formación a distancia en las que han participado sus miembros. Nuestro propósito fue el de dilucidar lo que le es propio al escenario y a la modalidad, y cómo esto condiciona los nuevos procesos de formación

1. Introducción

La Educación a Distancia (ED) en México está logrando consolidación como oferta educativa formal en los niveles medio superior, superior y posgrado; que si bien surgen como alternativa a la falta de cobertura de la educación presencial, comienzan a configurar nuevos ambientes de formación básica, profesional y especializada, capaces de adaptarse a los esquemas variables de la sociedad actual. Sin embargo, con las oportunidades de innovación viene también la responsabilidad de entender los nuevos procesos de formación que se llevan a cabo en estos ambientes de aprendizaje. ¿Qué caracteriza a estos procesos?, ¿cómo se afectan estos procesos cuando el ambiente de aprendizaje está en constante cambio?, ¿la tecnología es solo una herramienta para cumplir el objetivo educativo o éste se modifica ante la mediación tecnológica?, ¿tiene sentido comparar el escenario presencial con el escenario a distancia, para evaluar la calidad educativa?,..., son solo algunas de las múltiples preguntas que pueden plantearse dado el estado actual de la oferta educativa a distancia. Ante la vivencia de experiencias particulares los especialistas plantearon preguntas más orientadas a la comprensión de las interacciones humanas, y propuestas para constituir comunidades de colaboración y producción de innovaciones didácticas basadas en la investigación.

2. Innovación – Investigación - Planeación

El grupo contó con la exposición de tres especialistas con experiencia en distintos ámbitos de la educación a distancia y la interacción con los participantes mostró la importancia que tuvo hacer explícitos los elementos de *innovación*, *investigación* y *planeación* que cada uno ha enfrentado. Aunque es común hablar de educación a distancia en línea en la academia o en lo cotidiano, en ambas se desconoce mucho del funcionamiento de ésta modalidad, principalmente de la demanda de comunicación, interacción y estudio independiente que impone la modalidad.

Martha Villalba presentó una experiencia de formación docente a distancia en la Universidad de Sonora, con la que se dio respuesta a la demanda de la Secretaría de Educación y Cultura

del Estado. Atendieron a profesores de matemáticas del nivel secundaria en un diplomado en línea, apoyándose en puntos estratégicos donde el Estado cuenta con centros de cómputo con conexión de banda ancha. En la exposición de las dificultades enfrentadas fue posible reconocer algunas relacionadas con la modalidad, otras con los contenidos didácticos y algunas más con la estrategia de selección de los participantes. Ésta última resulta ser una variable importantísima que queda fuera de control para quien oferta el programa de formación, pues regularmente la selección se hace desde las Secretarías de Educación. Sin embargo, la experiencia muestra que los procesos de formación con docentes en servicio (adultos trabajando) y la demanda de atención, interacción, comunicación y trabajo autónomo son las variables que más influyen para que los porcentajes de deserción en la modalidad a distancia superen el 60%.

La variable del manejo tecnológico se cubrió significativamente en el diplomado pues contó con el apoyo técnico y de diseño instruccional por parte de especialistas en elaboración de material didáctico para la modalidad virtual, y se elaboraron tutoriales para facilitar la navegación y el trabajo en la plataforma que llevarían a cabo los profesores participantes.

Martha Villalba cerró su intervención mostrando la necesidad de hacer investigación de esta experiencia y propuso hacer un análisis, enmarcado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, de la actividad generada. Su reflexión se amplió en varias direcciones, tales como el diseño, la autonomía, la colaboración, el escenario, el medio y el *tiempo*. Ésta última quizá sea la directriz para caracterizar la educación a distancia en línea; pues, como mencionó Villalba, se desconoce la función didáctica del tiempo *no cronológico* de esta modalidad. Y es justo la variable *manejo del tiempo* lo que hace de la educación a distancia en línea una modalidad tan atractiva.

Por su parte Francisco Tapia hizo un planteamiento pedagógico-tecnológico que nos situó en una discusión, de grandes diferencias de opinión, sobre desarrollos tecnológicos inteligentes capaces de distinguir las necesidades del que aprende para proponer un diseño didáctico particular. Desde el *aprendizaje en línea personalizado*, paradigma que fundamenta este planteamiento, se reconoce que hay diferencias en las maneras de aprender, en lo que se aprende, en cómo se aprende, en el aprovechamiento, en las maneras de razonar y en las preferencias para llevar a cabo actividades didácticas. De esto deviene necesario un diseño didáctico que se adapte a éstas particularidades y sea accesible una población amplia, es decir, se articula el aprendizaje en línea personalizado con el aprendizaje móvil.

Probablemente la discusión de los participantes, con esta intervención, generó diversidad de opiniones porque mostró una modalidad de educación a distancia alejada de la tradición escolar, presencial y a distancia. Hubo reacciones de incredulidad, de asombro, de aceptación y de rechazo.

Quizá, es que mayor lejanía de la tradición mayor el desconocimiento de cómo funcionan los procesos de enseñanza-aprendizaje, y es el control de lo que sucede en una experiencia didáctica lo que nos ha permitido evaluar, rediseñar, investigar, etc.

La construcción de sistemas de tutoría inteligente sería, indudablemente, un avance tecnológico-educativo de gran relevancia, sin embargo, reconocemos que la diversidad de paradigmas en enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en particular constituiría una gran dificultad para lograrlo.

Finalmente, con la intervención de Ricardo Ulloa se presentaron y discutieron las acciones o consideraciones previas a la innovación, y que articularemos de manera general, con el propósito de sintetizar, como *planeación*.

Los primeros cursos en la modalidad a distancia en línea se caracterizaron por ser digitalizaciones de los cursos en la modalidad presencial y por lo tanto había dominio de los materiales de texto (en su mayoría estáticos) apoyados con exposiciones de video que jugaban el papel de la exposición del profesor. Esto es, se trasladaron las costumbres didácticas de la presencialidad. Sin embargo, los ambientes virtuales se vieron más afectados por las innovaciones tecnológicas no-educativas que se desarrollaron para la Web que por los paradigmas de enseñanza-aprendizaje, y ello ha impuesto que previo a la implementación de un curso en línea se hagan más consideraciones sobre qué recursos tecnológicos utilizar y cómo se incorporarlos en un diseño didáctico.

Actualmente, los investigadores educativos están articulando las potencialidades de dichos desarrollos tecnológicos con las teorías del aprendizaje (cognitivas, constructivistas, sociales, entre otras) para constituir modelos de aprendizaje en línea que fundamenten el diseño instruccional. En esta dirección, Ricardo Ulloa resaltó algunos elementos teóricos y metodológicos para el diseño y la evaluación de cursos a distancia, tales como la consideración de la distancia transaccional y la mediación tecnológica; la elección de plataformas de trabajo en línea y el uso de programas computacionales especializados para matemáticas; la creación de bancos de datos y guías de estudio; etc.

La reflexión de esta intervención tomó dos direcciones fuertemente relacionadas: el trabajo interdisciplinario y colaborativo en el diseño instruccional, y la evaluación de la calidad de los materiales y programas académicos. El reto de mantenerse vigente en un escenario que cambia constantemente requiere de especialistas en diversas áreas (programadores, diseñadores, didactas, tecnólogos educativos, técnicos,...), trabajando bajo lineamientos o normatividades que regulen la actividad educativa en esta modalidad, para asegurar la calidad de su oferta y el éxito de quienes se forman en ella.

3. Interacción con los participantes

Como suele suceder en las discusiones que involucran el uso de tecnología en la educación, los asistentes participaron con preguntas técnicas, teóricas y didácticas; algunos estaban más interesados en el cómo hacer educación a distancia, otros en entender qué es aprender a distancia, y algunos en compartir sus experiencias como profesores o como alumnos a distancia. En todos los casos hubo elementos para reflexionar sobre la importancia de la innovación y la investigación, dejando siempre en claro que si bien nos interesa comprender la virtualidad el foco de atención está puesto en las interacciones humanas que producen enseñanza y aprendizaje.

Contamos con la presencia de un público con muchas inquietudes y preguntas, en su mayoría interesados porque ven a la modalidad como una realidad dentro de sus instituciones, ya sea en la apertura de nueva oferta educativa o por la iniciativa, de muchas instituciones, de complementar los cursos presenciales con actividades en línea.

Aunque se hizo énfasis, reiteradamente, en pensar a la modalidad a distancia como un nuevo escenario fue común que en los periodos de preguntas se hicieran comparaciones puntuales entre la modalidad presencial y la modalidad a distancia, sin embargo, la intervención de los

expositores mostró con claridad la pertinencia de tratarlas por separado, atendiendo a las posibilidades y limitaciones de cada una.

4. Conclusiones

Las tres exposiciones lograron despejar incógnitas y dar a conocer, a los asistentes, características importantes de la educación a distancia en línea, pero sobre todo mostraron la necesidad que hay de constituir equipos especialistas en el trabajo y la investigación, al seno de la matemática educativa. Creemos que el propósito de un grupo de discusión es la de generar más preguntas alrededor del tema y, en la medida de lo posible, delinear líneas de trabajo para responderlas.

Con este escrito dejamos constancia de algunos de los muchos elementos que hay por trabajar, investigar, discutir y compartir en esta temática; dejando abierta la puerta para que más colegas y grupos se sumen a este esfuerzo.

**Memorias de la XX Semana
Regional de Investigación y
Docencia en Matemáticas**

**Se terminó de imprimir en el mes de
Enero de 2011 en los Talleres Gráficos
de la Universidad de Sonora y
consta de 250 ejemplares**



“El saber de mis hijos
hará mi grandeza”

Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas