Departamento de Matemáticas

Memorias de la XVIII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas

Editores: Edelmira Rodríguez A., Sonia Sosa L., Fernando Luque V., Carlos Robles C. y Manuel Urrea B.

Mosaicos Matemáticos No. 27
Marzo 2008

Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales

QA11.A1
.S44
2008

Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas (18: 2008 : Hermosillo, Sonora)
Memorias de la XVIII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas: Hermosillo, Sonora, 3 al 7 de marzo de 2008 / editores: Edelmira Rodríguez A....[et al.].-- Hermosillo, Sonora: Editorial Universidad de Sonora. Departamento de Matemáticas, 2008.
x, 161 p. : Il.; 27 cm. -- (Mosaicos matemáticos; No. 27)
ISBN 970-689-416-9
Incluye bibliografía.
1. Matemáticas - Investigaciones - Congresos, conferencias, etc. 2.Matemáticas - Enseñanza - Congresos. I.Rodríguez A., Edelmira, ed.

Área de Análisis Bibliográfico, Coordinación de Bibliotecas. DDA, Universidad de Sonora

© Edelmira Rodríguez A.
Sonia Sosa L.
Fernando Luque V.
Carlos Robles C.
Manuel Urrea B.
(Editores)

© Universidad de Sonora

ISBN: 970-689-416-9

Mosaicos Matemáticos No. 27
Línea Editorial del Comité Editorial del
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
Rosales y Blvd. Encinas
Hermosillo, Sonora
C. P. 83000
Teléfono (01-662) 259-2155
Fax: (01-6622) 259-2219

Impreso en México

Directorio

Dr. Pedro Ortega Romero
Rector

Dr. Enrique Velázquez Contreras
Secretario General Académico

Dr. Heriberto Grijalva Monteverde
Vicerrector Unidad Centro

M.C. Miguel Ángel Moreno Núñez
Director de la División de Ciencias Exactas y Naturales

Dr. Adolfo Minjárez Sosa
Jefe del Departamento de Matemáticas

Consejo Editorial

Dr. Oscar Vega Amaya
Coordinador General

Dr. Guilllermo Dávila Rascón
M.C. Francisco Cándido García Durán
Dra. Martha Dolores Guzmán Partida
Dr. Jesús Adolfo Minjárez Sosa
M.C. Eduardo Tellechea Armenta

Mosaicos Matemáticos No. 27
Marzo 2008

Comité Organizador de la XVIII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas

Dr. Fernando Verduzco González

Presidente

M.C. Sonia Sosa León

Secretaria

M.C. María Mercedes Chacara Montes

M.S.P. Yadira Jiménez Ramos

M.C. Irma Nancy Larios Rodríguez

Dr. Fernando Luque Vásquez

M.C. María Teresa Robles Alcaraz

M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá

M.C. Edelmira Rodríguez Alcantar

M.C. Manuel Alfredo Urrea Bernal

Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
Hermosillo Sonora

Memorias de la XVIII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas

PRESENTACIÓN

La Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas es un evento anual organizado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora que en su edición XVIII se desarrolló del 3 al 7 de marzo de 2008 en instalaciones de la Universidad de Sonora en la ciudad de Hermosillo.

El evento constituye un foro para la exposición y deliberación de ideas relacionadas con la matemática, a través de distintos tipos de actividades. Tiene como objetivos principales el que investigadores, profesores y estudiantes de la región noroeste de México interesados en las matemáticas intercambien conocimientos, opiniones y experiencias entre sí, y el que estos tengan la posibilidad de interactuar con especialistas de instituciones nacionales y extranjeras que acuden como invitados especiales. Así, entre sus objetivos específicos se encuentran:

· Dar a conocer trabajos en Matemáticas Aplicadas, Matemáticas Puras, Matemática Educativa y Computación;

· Fomentar entre los asistentes el interés por el estudio y la investigación en Matemáticas en sus distintos aspectos;

· Propiciar un ambiente matemático que redunde en la superación de profesores y por consiguiente en el mejor aprovechamiento por parte de los alumnos.

En concordancia con lo anterior, con la publicación de las Memorias de la XVIII Semana Regional de Investigación y Docencia se pretende extender el impacto de ese foro a través de la presentación escrita, en un formato de artículo, de algunos de los trabajos presentados. Dichos artículos han resultado favorablemente evaluados para su publicación después de someterse a revisión por especialistas de los temas abordados.

Esperando que lo publicado en las presentes memorias sea de utilidad para muchos lectores y contribuya para que cada vez un mayor número de personas se interesen por conocer, estudiar, aplicar e investigar matemáticas así como por los problemas derivados de su enseñanza y de su aprendizaje, expresamos nuestro más profundo agradecimiento a las muchas personas que contribuyeron con esta publicación, particularmente a los autores y revisores de los artículos.

Los Editores

Hermosillo Sonora México
Marzo de 2008

Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
Hermosillo Sonora

Memorias de la XVIII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas

ÍNDICE

Pág.

◆ Visualización de campos vectoriales analíticos cerca de singularidades esenciales.
Alvaro Alvarez Parrilla, Facultad de Ciencias Universidad Autónoma de Baja California. …… **1**

◆ Radio de estabilidad de un polinomio Hurwitz.
Ricardo Bautista Mercado, Baltazar Aguirre Hernández, Departamento de Matemáticas Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. ..…… **15**

◆ Caracterización de sucesiones cuasirregulares.
Re. Betancourt, C. Figueroa, Ri. Betancourt, R. Riera , L. Ferrer, Departamento de Investigación en Física, Universidad de Sonora. ...…… **21**

◆ Esfuerzo pesquero óptimo en la pesquería de Sardina Monterrey del Golfo de California.
Dora Julia Borbón González, Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. …… **27**

◆ El concepto de función: investigaciones y enseñanza.
José Luis Díaz Gómez, Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. …. **35**

◆ Seguimiento de estudiantes a través de los errores algebraicos.
José Luis Díaz Gómez, Lina Morales Peral, Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. ……... **41**

◆ Hacia la caracterización del significado institucional de referencia de la mediana.
Lorena A. Durazo Grijalva, Enrique Hugues Galindo, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora. …….……..……..… **49**

◆ Orbidades.
Jesús F. Espinoza, Instituto de Matemáticas - UNAM, Unidad Cuernavaca. ……..…. **55**

♦ Enseñanza de ecuaciones diferenciales de primer orden con Maple.
Elizabeth Félix Mendívil, Horacio Leyva Castellanos, Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. ...……... **61**

◆ Estabilidad de sistemas muestreados con retardo.
F. Ricardo García, Baltazar Aguirre Hernández, Rodolfo Suárez, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. …… **67**

◆ Métodos para sistemas lineales semi-infinitos.
Enrique González Gutiérrez, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Murcia …… **73**

◆ Acciones de grupo.
Rosalía Gpe. Hernández Amador, Instituto de Matemáticas - UNAM, Unidad Cuernavaca. ...……..... **81**
◆ Estabilidad de modos deslizantes con controles continuos.
Horacio Leyva Castellanos, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora. …. **85**
◆ Condiciones necesarias para que un polinomio sea semi-Hurwitz.
Carlos Loredo, Baltazar Aguirre, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa. ...……...……. **95**
◆ Modelamiento markoviano del sistema de comunicación móvil celular GSM900.
Alex A. Monclou, Javier Mantilla, Andrés Navarro, Rafael Camerano
Facultad de Ingeniería Electrónica Universidad Pontificia Bolivariana, Bucaramanga, Colombia. ……..…….. **101**
◆ La integral de Henstock-Kurzweil.
Adriana Ocejo Monge, Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. …. **109**
◆ Integral equations for the aggregate claim amount: A numerical application .
Carlos G. Pacheco González, Departamento de Matemáticas, CINVESTAV-IPN…….. **115**
◆ Equilibrios de Nash y una prueba del teorema de punto fijo de Kakutani.
J. Miguel Pérez Urquidi, Fernando Luque Vásquez, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora. …….……...……... **121**
◆ Teoría K algebraica y haces vectoriales.
Daniel Juan Pineda, IM-UNAM, Morelia. . ……...…….. **129**
◆ Una secuencia didáctica sobre el concepto de pendiente para el subsistema de preparatoria abierta.
Reyna del Carmen Romero Córdova, Jorge Ruperto Vargas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora. ……..……... **135**
◆ Procesos de control semi-markovianos con distribución del tiempo de permanencia desconocida.
Luz del Carmen Rosas Rosas, Jesús Adolfo Minjárez Sosa, Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora. ……...……...……...… **141**
◆ Un estudio sobre la parábola: el significado institucional que se promueve en el nivel medio superior.
Patricia Sáenz A., Manuel A. Urrea B., Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora. ……...……...…….. **147**
◆ Introducción a la solución simbólica de ecuaciones integrales.
Inna Shingareva, Carlos Lizárraga Celaya, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora. ……. **155**

Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
Hermosillo Sonora

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo, 2008, pp. 1–13.

VISUALIZACIÓN DE CAMPOS VECTORIALES ANALÍTICOS CERCA DE SINGULARIDADES ESENCIALES

Alvaro Alvarez Parrilla*

Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Baja California

e-mail: alvaro.uabc@gmail.com

Resumen

Se describe un método que permite visualizar campos vectoriales analíticos sin necesidad de integración numérica y con múltiples ventajas sobre los métodos numéricos usuales. Como aplicación se presentan ejemplos de visualización de campos vectoriales analíticos sobre la esfera de Riemann incluyendo algunos que presentan singularidades esenciales.

1 Introducción

Un *campo vectorial real* es una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Usualmente para visualizarlo se tienen dos alternativas:

1. Se construye una malla en $\mathbb{R}^n$ y se coloca el vector correspondiente al campo en cada vértice de la malla,

2. o se encuentra su *flujo asociado*, que es una trayectoria $\phi_{x_0} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 que satisface
$$\begin{cases} \phi'_{x_0}(t) = F(\phi_{x_0}(t)), \text{ con la condición inicial} \\ \phi_{x_0}(0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Algunos inconvenientes relativos a los métodos usuales de visualización son los siguientes: En el caso de vectores colocados en los vértices de la malla: si la malla que se utiliza es muy fina, los vectores se enciman unos en otros, por lo que no se aprecia el comportamiento del campo vectorial; si la malla que se utiliza es muy gruesa, la resolución puede ser insuficiente para poder obtener información relevante del campo.

En el caso de la representación por medio de flujos: es necesario elegir distintas condiciones iniciales para poder observar el comportamiento global del campo; elegir *a-priori* estas condiciones iniciales no es sencillo; la información relativa a la parametrización (tiempo) de las soluciones no es fácilmente accesible a partir de estas representaciones.

Además de estos inconvenientes, es preciso agregar los siguientes: para encontrar el flujo, es necesario resolver un sistema de ecuaciones, a saber (1), lo cual en la gran mayoría de los casos se tiene que hacer numéricamente; el resolver numéricamente el sistema de ecuaciones a su vez acarrea problemas de carácter numérico como: elección adecuada de algún algoritmo

*Este trabajo estuvo parcialmente apoyado por el proyecto UABC 0196.

de integración numérica (Euler, Newton-Raphson, Runge-Kutta, otros); la propagación de errores como función de la variable de integración (tiempo); alta demanda de recursos de cómputo, especialmente cerca de los valores críticos del flujo (los ceros y las singularidades del campo).

De aquí que sería muy conveniente tener un método de visualización que no tuviera estos problemas asociados.

En este trabajo se presenta una generalización a campos Newtonianos bidimensionales, de un método atribuido a Benzinger, Burns y Palmore [4, 5, 9] originalmente aplicado a campos que surgen de funciones racionales y que:

- permite visualizar de forma global el campo vectorial,
- no tiene propagación de error, por lo que es útil para visualizar campos cerca de singularidades,
- provee información relativa a la parametrización de las soluciones (tiempos),
- permite visualizar de forma eficiente los flujos, aun para condiciones iniciales específicas,
- los recursos de cómputo requeridos son mucho menores que los que se necesitan para los otros métodos,
- es fácilmente parallelizable.

Para presentar este método comenzaremos haciendo un breve repaso de conceptos básicos de geometría diferencial y de variable compleja en la sección §2, después en la sección §3 definimos el concepto de campo vectorial complejos y sus caracterísiticas principales, en la sección §4 introduciremos los campos Newtonianos, esto es aquellos que pueden ser representados por $\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)}\frac{\partial}{\partial z}$, para en la sección §5 presentar propiamente el método aplicado a campos Newtonianos, en la sección §6 se utilizará el método propuesto para visualizar algunos campos vectoriales analíticos sobre la esfera de Riemann incluyendo un campo con una singularidad esencial, mostrando así las bondades del método en cuestión.

2 Antecedentes

Definición 2.1 *Sea* $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ *una* trayectoria *en* $\mathbb{R}^n$ *de clase* C^1*, tal que* $\gamma(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$*. Definimos un* vector tangente en x_0 *como el vector (basado en el origen) dado por* $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$*. Al conjunto de vectores tangentes en* x_0 *lo denotaremos por* $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ *y lo llamaremos el* espacio tangente a $x_0 \in \mathbb{R}^n$*.*

Definimos el haz tangente de $\mathbb{R}^n$*, denotado por* $T\mathbb{R}^n$*, como el conjunto de todas las parejas* (x_0, v) *con* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *y* $v \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$*.*

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable con valores reales y $v \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$. De nuestro curso de cálculo vectorial sabemos que la *derivada direccional de* f *en* x_0 *en dirección de* v

se puede calcular mediante la fórmula:

$$\frac{df}{dt}(x_0 + tv)\Big|_{t=0} = Df_{x_0}v.$$

De manera que considerando en detalle la expresión $Df_{x_0}v$, se tiene que si $v = \gamma'(0) = (\gamma_1'(0), \gamma_2'(0), \cdots, \gamma_n'(0))$, entonces

$$Df_{x_0}v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\gamma_j'(0) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0), \tag{2}$$

donde $v_j = \gamma_j'(0)$ de manera que $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ son las componentes de $v \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$.

Esto nos provee de una identificación clara entre $T_{x_0}\mathbb{R}^n$, el espacio tangente a x_0 en $\mathbb{R}^n$, y el cotangente $T^*_{x_0}\mathbb{R}^n$. Explícitamente tenemos:

$$\begin{aligned} T_{x_0}\mathbb{R}^n &\cong T^*_{x_0}\mathbb{R}^n \\ (v_1, v_2, \cdots, v_n) &\mapsto \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x_0}, \end{aligned} \tag{3}$$

de manera que podemos definir un vector tangente en x_0 como en (3).

2.1 Campo vectorial real

Así pues, podemos definir un campo vectorial como una *sección del haz tangente*, en particular debido a (3) tenemos

Definición 2.2 *Un* campo vectorial real *es una expresión de la forma*

$$X(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

donde las v_j son funciones diferenciables con valores reales.

2.2 Funciones analíticas y algunas de sus propiedades básicas

Recordemos que los números complejos $\mathbb{C}$ se definen como los puntos (x, y) en el plano $\mathbb{R}^2$ dotados con una estructura de campo proporcionada por las operaciones de suma y producto de números complejos.

2.2.1 Funciones analíticas

Existen muchas maneras equivalentes de definir a una función analítica, en particular podemos decir que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *es analítica en* z_0 si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, en cuyo caso lo denotaremos por $f'(z_0)$.

Algunas consecuencias de esto es que $f(z) = u(z) + iv(z)$, donde u, v son funciones con valores reales, es analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$, si y sólo si

- f es de clase C^1 y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0)$, donde $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right\}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right\}$.
- $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, para todo $z \in B(z_0, r)$ con algún $r > 0$.

Un resultado importante acerca de funciones analíticas es el siguiente:

Teorema 1 *(Continuación analítica) Sea f una función analítica en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Sea $Z_f = \{z \in A : f(z) = 0\}$, el conjunto de las raíces de f en A. Si Z_f tiene puntos de acumulación en A entonces $f \equiv 0$.*

Recordemos también el concepto de singularidad aislada y su clasificación: Un punto $a \in \mathbb{C}$ se dice que es una *singularidad aislada de f* si a es analítica en una vecindad de a, mas no necesariamente en a. Las singularidades aisladas se clasifican en *singularidades removibles*, *polos de orden $k > 0$* o *singularidades esenciales*, como se muestra en el cuadro 1.

Cuadro 1: Se muestran los tipos de singularidades aisladas a de f que puede haber.

tipo	$\lim_{z\to a}\lvert f(z)\rvert$	serie	comportamiento geométrico
singularidad removible	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$	existe una extensión analítica de f a este punto
polo de orden $k > 0$	∞	$\sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-a)^n$	existe un menor entero positivo k tal que $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z) \in \mathbb{C}$
singularidad esencial	no existe	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$	$f\left(B(a,r)\backslash\{a\}\right)$ evita a lo mas 2 puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$, para todo $r > 0$

Resulta que es muy útil pensar en que las funciones meromorfas (aquellas que tienen solamente polos o singularidades removibles) son funciones analíticas que pueden tomar el valor ∞. También resultará conveniente poder evaluar a una función en ∞. Para lograr ambas cosas, introducimos la proyección estereográfica

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C} &\to S^2\backslash(0,0,1) \\ z &\mapsto \left(\frac{2\mathfrak{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\mathfrak{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

que permite identificar a la compactificación de $\mathbb{C}$ con S^2, esto es $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}}$, de manera que ahora se podrá hablar de que una función toma el valor ∞, y el comportamiento de f en $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ estará determinado por el comportamiento de $f(1/z)$ cuando $z \to 0$. Así, una función es analítica en ∞ si $f(1/z)$ es analítica en 0, y tiene un polo en $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ si $f(a) = \infty$.

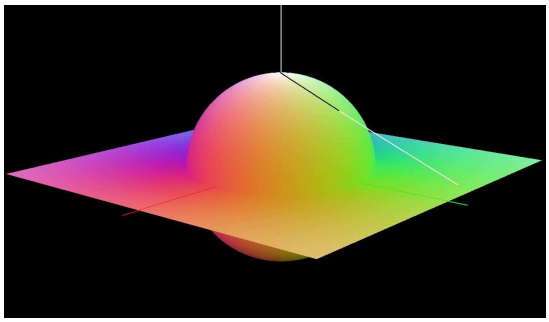


Figura 1: Proyección estereográfica del plano $\mathbb{C}$ a la esfera de Riemann, donde se está utilizando un mapa de colores para identificar los puntos correspondientes en el plano y en la esfera. La línea que parte del polo norte ($\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$) al plano tiene una parte negra para indicar que esta parte de la línea se encuentra por dentro de la esfera.

3 Campos vectoriales complejos y sus flujos reales asociados

En esta sección definiremos el concepto de *campo vectorial complejo* y mostraremos algunas de sus propiedades, particularmente que cada campo vectorial complejo define dos flujos reales perpendiculares entre si. Para mayores detalles y una descripción geométrica mas completa consultar [7] y [8].

3.1 Campos vectoriales complejos

Sea $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ un conjunto abierto y sea f una función analítica en U a excepción de posibles singularidades aisladas. Por el teorema de continuación analítica, se sigue que tanto los ceros como las singularidades aisladas forman un subconjunto discreto de U. Denotemos por $K, S, E \subset U$, a los subconjuntos de *polos, ceros* y *singularidades esenciales* de f, respectivamente. Es claro que estos conjuntos son mutuamente disjuntos y discretos.

Definición 3.1 *Un* campo vectorial complejo $X(z)$ *es un campo vectorial analítico en* $U \setminus (K \cup E)$*, esto es*

$$X(z) = f(z)\frac{\partial}{\partial z} = \big(u(z) + iv(z)\big)\frac{\partial}{\partial z},$$

donde $f(z) = u(z) + iv(z)$ *es analítica en* $U \setminus (K \cup E)$ *con ceros en* S*.*

3.2 El flujo real asociado a un campo complejo

En U, mas precisamente en U^*, existe una correspondencia uno a uno entre campos vectoriales complejos X y un par de campos reales, F y JF dada por:

$$X = f(z)\frac{\partial}{\partial z} = \big(u(x,y) + iv(x,y)\big)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$F(x,y) = 2\mathfrak{Re}(X)(x,y) = u(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + v(x,y)\frac{\partial}{\partial y},$$

$$JF(x,y) = -2\mathfrak{Im}(X)(x,y) = -v(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + u(x,y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Es de notarse que estos campos vectoriales reales tienen la característica de ser perpendiculares entre si, por lo que para precisar al campo vectorial complejo es suficiente conocer solo uno de la pareja de campos vectoriales reales. Por demás cada uno de los campos vectoriales reales tienen un flujo real ψ asociado, que en el caso del campo F se define por

$$\begin{cases} \psi'_{z_0}(t) = F(\psi_{z_0}(t)) \\ \psi_{z_0}(0) = z_0. \end{cases} \tag{5}$$

Por convención cuando hablemos de las *trayectorias de un campo vectorial complejo*, nos referiremos a las trayectorias de sus correspondientes campos vectoriales reales, esto es a los flujos que estos determinan.

Comentario 1 *Es conveniente notar que las soluciones de* (5) *son las mismas soluciones que las del sistema complejo*

$$\begin{cases} \phi'_{z_0}(t) = f(\phi_{z_0}(t)) \\ \phi_{z_0}(0) = z_0. \end{cases} \tag{6}$$

3.3 Valores regulares y críticos del flujo real

Recordemos que cuando se encuentra el flujo asociado al campo vectorial, se está resolviendo la ecuación diferencial que define al flujo $\phi'(t) = f(\phi(t))$, por lo que:

- los valores regulares del flujo corresponden a puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ donde la función $f(z)$ es analítica y distinta de cero,
- mientras que los valores críticos del flujo corresponden a los ceros y las singularidades de $f(z)$.

Es por esto que cuando se visualizan campos vectoriales es preciso considerar, de manera especial, no solo a las singularidades del campo, sino también a sus ceros.

3.4 Pullbacks de campos vectoriales analíticos

Usualmente cuando se estudian campos vectoriales complejos y sus flujos asociados, se piensa en resolver el sistema de ecuaciónes diferenciales dados por (6). Sin embargo, recientemente el autor y Muciño-Raymundo [3] han estudiado el comportamiento de campos vectoriales complejos cerca de sus singularidades, mediante el uso del concepto de pullback de un campo.

A saber, dado un campo vectorial $Y(w)$ definido en $\widehat{\mathbb{C}}_w$ y una aplicación analítica Ψ, el *pullback de Y via Ψ* es el campo vectorial $X(z)$ en $\widehat{\mathbb{C}}_z$ cuya imagen bajo Ψ es $Y(w)$ (recordemos que de acuerdo a la regla de la cadena vectores tangentes en z son llevados a vectores tangentes en w mediante la derivada de Ψ).

Lema 3.2 *Si $Y(w) = g(w)\frac{\partial}{\partial w}$ es un campo analítico complejo en $\widehat{\mathbb{C}}_w$ la aplicación Ψ define un campo analítico complejo $X(z) = f(z)\frac{\partial}{\partial z}$, llamado el* pullback de Y *denotado por $X = \Psi^*(Y)$ y la relación entre X y Y está dada por $f(z) = \frac{g(\Psi(z))}{\Psi'(z)}$.*

4 Campos newtonianos

En los 80's Smale [6, 10] introdujo el concepto de campo Newtoniano en la definición de las gráficas (o grafos) Newtonianos que surgen del estudio del método de Newton para encontrar los ceros de un polinomio. Tomando su definición como guía tenemos que un campo vectorial complejo $X(z) = f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ se dice que es un *campo Newtoniano* si se puede representar como

$$X(z) = -\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{7}$$

para alguna función analítica Ψ.

De aquí se ve inmediatamente que

Lema 4.1 *Un campo $X(z)$ es de la forma (7) (es Newtoniano) si y sólo si proviene de $-t\frac{\partial}{\partial t}$ vía pullback precisamente por Ψ.*

Comentario 2 *Notemos también que si un campo $X(z) = -f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ es Newtoniano, la función analítica Ψ que lo define es el recíproco de una derivada logarítmica.*

4.1 Caso meromorfo: campos racionales

Esta última observación da lugar a que en el caso en que $f(z)$ sea una función racional (cociente de polinomios), exista una fórmula explícita para Ψ: Sea $f(z) = -\frac{p(z)}{q(z)}$ con $q, p \in \mathbb{C}[z]$ sin factores comunes, y p mónico. En particular supongamos que

$$p(z) = \prod_{j=1}^{J}(z - z_j)^{m_j}, \tag{8}$$

donde $m_j \in \mathbb{Z}$ son constantes. Tendremos entonces (vease Teorema 2.3 de [4]):

Teorema 2 *(Benzinger, '91) Una función $f(z) = -\frac{p(z)}{q(z)}$ es una función racional si y sólo si satisface*

$$f(z) = -\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)}$$

para polinomios únicos P_j, $j = 0, \ldots, J$ con $P_j(0) = 0$, y constantes únicas $A_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, J$ tales que $\Psi(z) = C\mathrm{e}^{P_0(z)}\prod_{j=1}^{J}(z - z_j)^{A_j}\mathrm{e}^{P_j(\frac{1}{z-z_j})}$, donde $C \in \mathbb{C}$ es una constante arbitraria.

4.2 Caso general: pullback de $-\mathbf{t}\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}$ vía cubrientes ramificados

Si el campo Newtoniano no es un campo racional, de todas maneras proviene del campo $-t\frac{\partial}{\partial t}$ vía pullback por una función Ψ: dado un campo Newtoniano $X(z) = f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ en principio se tiene que $\Psi(z) = \exp\left[-\int^z \frac{1}{f}\right]$, pero en general no se tiene una expresión explícita para Ψ.

Sin embargo, tomando el punto de vista de que la Ψ es un *cubriente ramificado* de la esfera de Riemann, $\widehat{\mathbb{C}}$, en si misma podremos construir campos Newtonianos.

Definición 4.2 *Un* cubriente $\Psi : V \to W$ *es una aplicación continua sobrejectiva tal que* $\forall w \in W$, $\exists$ *un abierto* $U \ni w$ *en* W *con la característica que* $\Psi^{-1}(U)$ *es una unión disjunta de abiertos* $O \subset V$ *cada uno de los cuales satisface que* $\Psi : O \to U$ *es un homeomorfismo.*

Un cubriente ramificado $\Psi : V \to W$ *es un cubriente excepto en un número finito de puntos de* W*. A los puntos excepcionales se les conoce como* puntos de ramificación.

Sean $\Psi_\alpha : \widehat{\mathbb{C}}_z \to \widehat{\mathbb{C}}_w$, *cubrientes analíticos ramificados*, entonces es posible hacer pullback, vía los Ψ_α, de campos complejos. Notemos además que la composición finita de cubrientes ramificados es un cubriente ramificado, por lo tanto:

Teorema 4.3 *Sea* $Y(t) = g(t)\frac{\partial}{\partial t}$ *un campo complejo en* $\widehat{\mathbb{C}}_t$*, si*

$$\Psi_1 : \widehat{\mathbb{C}}_z \to \widehat{\mathbb{C}}_w \qquad y \qquad \Psi_2 : \widehat{\mathbb{C}}_w \to \widehat{\mathbb{C}}_t,$$

son cubrientes ramificados, entonces $X(z) = f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ *es el pullback vía* $\Psi = \Psi_2 \circ \Psi_1$ *de* $Y(t)$ *si y sólo si*

$$f(z) = \frac{g(\Psi(z))}{\Psi'(z)} = \frac{g(\Psi_2(\Psi_1(z)))}{\Psi_2'(\Psi_1(z))\ \Psi_1'(z)}.$$

Así considerando pullbacks de $Y(t) = -t\frac{\partial}{\partial t}$ podremos construir campos Newtonianos.

5 Visualización de campos newtonianos

Pasemos ahora al método que nos permitirá visualizar campos Newtonianos. La idea detrás del método consiste en que las trayectorias del campo vectorial se encontrarán en las curvas de nivel de una cierta función auxiliar, de manera que para visualizar la trayectoria bastará visualizar las curvas de nivel de dicha función auxiliar.

5.1 La observación fundamental

Sea $X(z) = f(z)\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)}\frac{\partial}{\partial z}$ un campo Newtoniano. Una primera observación está dada por el siguiente:

Lema 5.1 *Sea* $z(t)$ *es una trayectoria que satisface*

$$\Psi\big(z(t)\big) = \Psi(z_0)\mathrm{e}^{-t}, \tag{9}$$

entonces $z(t)$ *es una trayectoria del campo Newtoniano correspondiente a* Ψ*.*

Esto es que *"si un rayo, en la imagen de* Ψ*, contiene a* $\Psi(z_0)$*, entonces también contiene a* $\Psi\big(z(t)\big)$, $\forall t \in \mathbb{R}$*."*

Comentario 3 ***(Interpretación geométrica del lema)***
La interpretación geométrica de esta observación se puede entender en términos del pullback como sigue: Las trayectorias de $z(t)$ provienen del campo que es pullback (vía Ψ) del campo $-t\frac{\partial}{\partial t}$ cuyas trayectorias son líneas rectas (parametrizadas por e^{-t}) que unen 0 con ∞. *Véase la figura 2.*

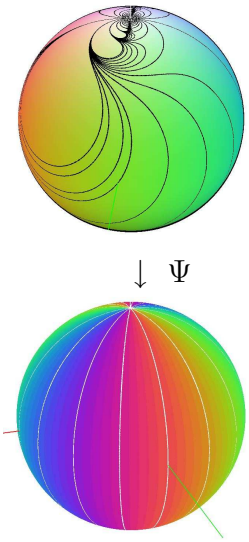


Figura 2: Las trayectorias $z(t)$ pasan a trayectorias de $-t\frac{\partial}{\partial t}$ bajo el cubriente Ψ.

Consideremos ahora el campo vectorial Newtoniano perpendicular al original, esto es $X^{\perp}(\zeta) = if(z)\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\Phi(\zeta)}{\Phi'(\zeta)}\frac{\partial}{\partial \zeta}$, con Φ su correspondiente función. Se sigue entonces que $\Phi = \Psi^{-i}$.

Lema 5.2 *Sea Ψ el cubriente correspondiente a un campo Newtoniano X, y sea Φ el correspondiente cubriente asociado a $X^{\perp}$, entonces*

$$\log|\Phi\big(z\big)| = \arg\big\{\Psi\big(z\big)\big\}, \qquad y \qquad \log|\Psi\big(z\big)| = -\arg\big\{\Phi\big(z\big)\big\}.$$

Llegamos ahora al resultado principal.

Teorema Principal 5.1 *Sea $z(t)$ una trayectoria de un campo Newtoniano $X(z) = -\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)}\frac{\partial}{\partial z}$, entonces*

a) $\log|\Phi(z(t))| = \arg\{\Psi(z_0)\}$ *es constante a lo largo de las trayectorias, y*

b) $\log|\Psi(z(t))| = -t + \log|\Psi(z_0)|$ *es lineal a lo largo de las trayectorias,*

donde $z_0 = z(0)$.

Demostración. Para (a) tenemos que por el lema anterior $\log|\Phi\big(z(t)\big)| = \arg\big\{\Psi\big(z(t)\big)\big\}$, y como $\Psi\big(z(t)\big) = \Psi(z_0)\mathrm{e}^{-t}$, entonces $\arg\big\{\Psi\big(z(t)\big)\big\} = \arg\{\Psi(z_0)\}$ es constante.
Para (b) tenemos de nuevo que $\Psi\big(z(t)\big) = \Psi(z_0)\mathrm{e}^{-t}$, por lo que $\log|\Psi(z(t))| = -t + \log|\Psi(z_0)|$.
■

Corolario 5.3 ***(Visualización de Campos Newtonianos)***

1. *Las trayectorias de un campo Newtoniano* $X(z) = -\frac{\Psi(z)}{\Psi'(z)}\frac{\partial}{\partial z}$*, corresponden a las curvas de nivel de la función real* $h(z) = \log|\Phi(z)| = \arg\{\Psi(z)\}$*. En particular, para visualizar la trayectoria que pasa por el punto* $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$*, es necesario graficar la curva de nivel* $h(z) = h(z_0)$*.*

2. *Ademas, las curvas de nivel de* $g(z) = \log|\Psi(z)| = \arg\{\Phi(z)\}$*, definen bandas de igual tiempo (en el sentido de que las trayectorias* $z(t)$ *que intersectan a dicha banda, tardan el mismo tiempo en atravesarla).*

3. *Por demás no existe propagación de error al encontrar las trayectorias.*

6 Aplicaciones

En la siguientes figuras presentamos la visualización, tanto en el plano como en la esfera de Riemann, de los campos $X(z) = -\frac{z^2(z-1)}{z^2-z+1}\frac{\partial}{\partial z}$ (figura 3) y de $X(z) = -\tan(z)\frac{\partial}{\partial z}$ (figura 4), que son campos Newtonianos bajo los cubrientes $\Psi(z) = \mathrm{e}^{1/z}(z-1)$, y $\Psi(z) = \sin(z)$ respectivamente.

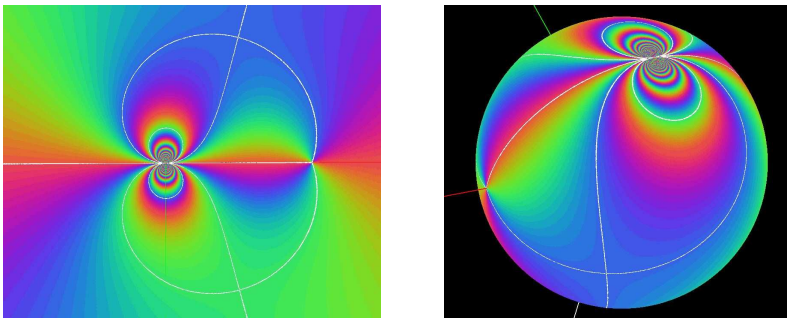


Figura 3: Visualización del campo $X(z) = -\frac{z^2(z-1)}{z^2-z+1}\frac{\partial}{\partial z}$ tanto en el plano complejo como en la esfera de Riemann. Se han trazado las curvas de nivel correspondientes a las líneas de flujo que pasan por los polos del campo.

Si el campo vectorial tiene una singularidad esencial la visualización puede ser bastante difícil, si no es que impossible, utilizando los métodos usuales. Esto es principalmente debido al hecho de que cerca de una singularidad esencial el campo vectorial toma todos los valores complejos, con la posible excepción de uno, por lo que la integración numérica no puede efectuarse cerca de la singularidad esencial.

Aun cuando se visualizan bandas de nivel, en una vecindad de la singularidad esencial las bandas tienden a agruparse por lo que es difícil apreciar el comportamiento del campo vectorial (véase la figura 5 (a)).

Al graficar trayectorias específicas podemos examinar el comportamiento cerca de la singularidad esencial, y puesto que el error no se propaga a lo largo de la trayectoria, entonces

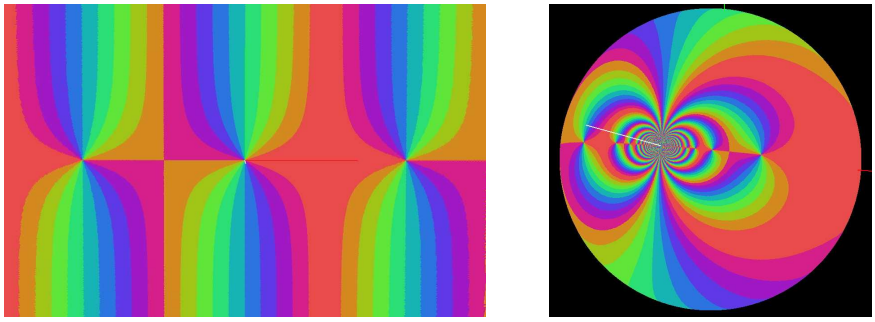


Figura 4: Campo $X(z) = -\tan(z)\frac{\partial}{\partial z}$ visualizado en el plano complejo como en la esfera de Riemann, utilizando las técnicas descritas en el texto. Las fronteras de las bandas de nivel representan líneas de flujo del campo.

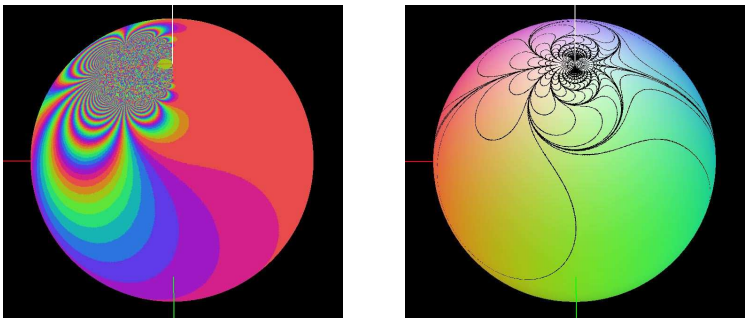


Figura 5: Visualización de $X(z) = \mathrm{e}^z \frac{\partial}{\partial z}$ cerca de la singularidad esencial en ∞. En (a) hemos graficado bandas de nivel. En (b) se muestran algunas trayectorias.

podemos visualizar las trayectorias cerca de la singularidad esencial (véase la figura 5 (b)). También podemos graficar las trayectorias específicas junto con las bandas de nivel como en la figura 6.

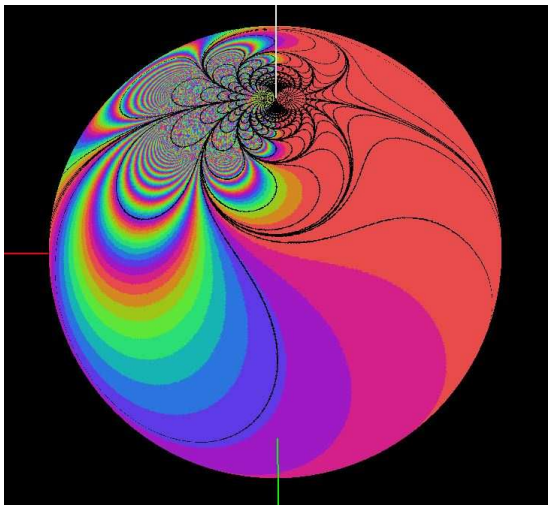


Figura 6: Visualización de $X(z) = \mathrm{e}^z \frac{\partial}{\partial z}$ cerca de la singularidad esencial en ∞.

La ventaja de visualizar también las bandas de nivel es que nos proveen de información referente a la parametrización de las soluciones. Por ejemplo, a pesar de que aparentemente las trayectorias parecen ser simétricas en la figura 5 (b), las bandas de nivel en la figura 6 indican que las trayectorias se acercan a ∞ mucho mas rápido por el lado derecho (en la figura).

7 Conclusiones

A manera de conclusión señalamos que en el presente trabajo se ha presentado un método novedoso para visualizar campos Newtonianos que

- permite visualizar de forma global el campo vectorial,
- no tiene propagación de error, por lo que es útil para visualizar campos cerca de singularidades, incluyendo singularidades esenciales,
- provee información relativa a la parametrización de las soluciones (tiempos que tarda en recorrer una trayectoria, algo que las soluciones usuales no proveen),
- permite visualizar de forma eficiente los flujos, incluyendo trayectorias específicas,
- requerimiento de cómputo menor que el que necesitan los métodos usuales (puesto que no se utiliza integración numérica),
- es fácilmente paralellizable, con tan solo particionar la región donde se busca la visualización.

Existen múltiples preguntas pendientes de resolver, aquí solo mencionamos las siguientes:

- El problema de visualización de campos vectoriales complejos en otras superficies de Riemann.
- Generalizar el método a campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$, existe ya una generalización (véase [1, 2] y/o la cita original [9]), sin embargo no desde el punto de vista de pullbacks de campos.
- Tener una mejor descripción de los campos Newtonianos en los distintos casos arriba mencionados.

Bibliografía

[1] Alvarez-Parrilla, A.; *Complex analytic vector field visualization without numerical integration*, en prensa, 2007. Se puede descargar de `http://alvaro.uabc.googlepages.com`.

[2] Alvarez-Parrilla, A; *Visualización de campos vectoriales analíticos sin integración numérica*, en prensa UACJ, 2007. Se puede descargar de `http://alvaro.uabc.googlepages.com`.

[3] Alvarez-Parrilla, A.; Muciño-Raymundo, J.: *Complex Analytic Vector Fields on Riemann Surfaces*, preprint, 2007.

[4] Benzinger, Harold E.: *Plane autonomous systems with rational vector fields.* Trans. Amer. Math. Soc. 326 (1991), no. 2, 465–483.

[5] Burns, Scott A.; Palmore, Julian I.: *The Newton transform: an operational method for constructing integrals of dynamical systems.* Advances in fluid turbulence (Los Alamos, NM, 1988). Phys. D 37 (1989), no. 1-3, 83–90.

[6] Hirsch, M.W.; Smale, S.: *On algorithms for solving* $f(x) = 0$. Comm. Pure Appl. Math., **32**, (1979), 281–312.

[7] Muciño-Raymundo, J.: *Complex structures adapted to smooth vector fields.* Math. Ann. 322, (2002), 229–265.

[8] Muciño-Raymundo, J.; Valero-Valdéz, C.: *Bifurcations of meromorphic vector fields on the Riemann sphere.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. 15, (1995), 1211–1222.

[9] Palmore, Julian I.; Burns, Scott A.; Benzinger, Harold E.: *Ecology models and Newton vector fields.* Nonlinearity in biology and medicine (Los Alamos, NM, 1987). Math. Biosci. 90 (1988), no. 1-2, 219–232.

[10] Smale, S.: *A convergent process of price adjustment and global Newton methods.* J. Math. Econom. **3**, (1976), 107–120.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo, 2008, pp. 15–20.

RADIO DE ESTABILIDAD DE UN POLINOMIO HURWITZ

Ricardo Bautista Mercado, Baltazar Aguirre Hernández

e-mail: bahe@xanum.uam.mx

Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa

Resumen

Dado un polinomio Hurwitz[1] *$p(t)$, si variamos un poco los coeficientes el polinomio resultante también será Hurwitz. Esto quiere decir que el conjunto de polinomios Hurwitz es un conjunto abierto, entonces existe una bola de polinomios con centro en $p(t)$ tal que la bola consiste de polinomios Hurwitz. En este trabajo explicamos como encontrar la bola de radio máximo r, es decir la bola abierta de radio r que contiene unicamente polinomios que son Hurwitz. También veremos que en la frontera de esta bola existe un polinomio que no es Hurwitz pero es semiHurwitz (tiene al menos una raíz con parte real igual a cero).*

1. Introducción

Para poder entender, predecir ó mejorar un sistema físico en muchos casos es necesario en primer lugar representar el proceso matemáticamente usando para ello polinomios, sin embargo puesto que un modelo es sólo una aproximación al proceso real que puede incluir variables conocidas en forma previa pero que no son manipulables, es natural que nos preguntemos lo siguiente: ¿cual es la perturbación más pequeña en los parámetros involucrados que desestabiliza el sistema?

Definición 1.1 (Familia de polinomios)

$$F(t,T) := \{f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 | (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0) \in T \subseteq \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Asumiendo que $p(t) \in F(t,T)$ es estable para el punto central p^0 de T, entonces la familia de polinomios $F(t,T)$ es estable en una vecindad suficientemente pequeña de p^0 por la continuidad de las raíces, además mover el origen del espacio de parámetros de tal forma que $p^0 = 0$ siempre es posible, así pues podemos encontrar una familia $F(t,\rho T)$ tal que su interior consista sólo en polinomios estables pero tal que si incrementamos ρ esto no sucede. Este valor ρ es llamado el radio de estabilidad de la familia de polinomios y es una medida de la perturbación desestabilizadora más pequeña.

[1] Decimos que un polinomio es Hurwitz si todas sus raíces tienen parte real negativa.

2. Bolas estables

La determinación del radio de estabilidad en el caso general presentado en la introducción se simplifica cuando restringimos la frontera del espacio de coeficientes T a una hiperesfera. Este problema fue resuelto primero por Soh en [5].

Definición 2.1 *Dado un polinomio $p(t)$ definimos la bola abierta de polinomios como sigue*

$$\mathcal{B}(p(t), r) := \{h(t) : ||p(t) - h(t)|| < r\}$$

la cual tiene como frontera la hiperesfera

$$\mathcal{S}(p(t), r) := \{h(t) : ||p(t) - h(t)|| = r\}$$

donde $r \in \mathbb{R}$ y $||\cdot||$ es una norma arbitraria definida sobre un espacio vectorial de polinomios de dimensión n

La siguiente proposición garantiza que alrededor de cada polinomio estable es posible construir una bola abierta que consista de polinomios estables, sin embargo será hasta el Teorema 2.4 que estableceremos la existencia de la bola maximal estable para un polinomio Hurwitz dado.

Proposición 1 *Dado un polinomio Hurwitz*

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + a_{n-2} t^{n-2} + \cdots + a_1 t + a_0$$

existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

a) $\mathcal{B}(p(t), r)$ consiste en polinomios Hurwitz del mismo grado

b) $r < |a_0|$

Definición 2.2 *Dado un polinomio $p(t)$ de grado n que además es Hurwitz definimos*

$$R_{p(t)} = \left\{ \ \epsilon > 0 : \ \ \mathcal{B}(p(t), \epsilon) \text{ consiste de polinomios Hurwitz de grado } n \ \right\}.$$

Por el teorema de intersección de la frontera y por el teorema anterior, tenemos que $R_{p(t)}$ es no vacío y está acotado superiormente, esto significa que existe el supremo de $R_{p(t)}$

Definición 2.3 (radio de estabilidad)

$$\rho_{p(t)} := \sup_{\epsilon \in R_{p(t)}} \epsilon$$

Teorema 2.4 *Dado un polinomio Hurwitz $p(t)$ de grado n existe $\rho_{p(t)}$ tal que $\rho_{p(t)} := \sup_{\epsilon \in R_{p(t)}} \epsilon$ y tal que si $r > \rho_{p(t)}$ entonces $\mathcal{B}(p(t), r)$ tiene algún polinomio que no es Hurwitz o es de grado distinto de n*

Aunque hasta ahora sólo hemos trabajado con polinomios Hurwitz (sistemas asintóticamente estables) es posible que nos baste trabajar con polinomios semiHurwitz (sistemas estables pero no asintóticamente estables) para tal efecto damos los siguientes teoremas

Teorema 2.5 *Dado un polinomio Hurwitz $p(t)$ de grado n, existe al menos un polinomio de*

$$\mathcal{S}(p(t), \rho_{p(t)}) = \{g(t) : ||p(t) - g(t)|| = \rho_{p(t)}\}$$

tal que tiene una de sus raíces en $\imath\mathbb{R}$ o es de grado menor que n

Teorema 2.6 *Al menos un polinomio sobre $\mathcal{S}(p(t), \rho_{p(t)})$ tiene una de sus raíces en $\imath\mathbb{R}$ o su grado es menor que n*

Teorema 2.7 *Ningun polinomio en $\mathcal{S}(p(t), \rho_{p(t)})$ tiene raíces en $\mathbb{C}^+$*

En síntesis cuando acotamos el espacio de coeficientes a una bola abierta con centro un polinomio Hurwitz tenemos las siguientes propiedades para el radio de estabilidad:

Teorema 2.8 (Propiedades del Radio de Estabilidad de un Polinomio Hurwitz) *Sea $p(t)$ Hurwitz*

1. *$\mathcal{B}(p(t), \rho_{p(t)})$ consiste de polinomios Hurwitz de grado n*
2. *Si $r > \rho_{p(t)}$ entonces $\mathcal{B}(p(t), r)$ tiene al menos un polinomio que no es Hurwitz o tiene grado menor que n*
3. *Al menos un polinomio en $\mathcal{S}(p(t), \rho_{p(t)}) = frontera[\mathcal{B}(p(t), \rho_{p(t)})]$ tiene una de su raíces en $\imath\mathbb{R}$ o es de grado menor que n*
4. *Ningún polinomio en $\mathcal{S}(p(t), \rho_{p(t)})$ tiene raíces en $\mathbb{C}^+$*

2.0.1. Algunas normas en espacios vectoriales

Con $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ (espacio de vectores n-dimensional) tenemos varias normas denominadas normas-p: Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, entonces

Norma-1 : $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$

Norma-2: $||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$

Norma-∞: $||x||_\infty = \text{máx}_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Observación 1 *Aunque en este trabajo solo utilizaremos la norma euclidiana, las propiedades del radio de estabilidad enunciadas en el teorema 2.8 valen para cualquier norma que se utilice ($|| \ ||_2$, $|| \ ||_1$, $|| \ ||_\infty$, norma discreta, etc)*

2.1. El radio de estabilidad para $||\ \ ||_2$

Dados

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \\ q(t) &= b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n \end{aligned}$$

definimos el producto escalar como $< p(t), q(t) >:= a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$
entonces la norma euclidiana del polinomio $p(t)$ es como sigue

$$||p(t)||_2^2 =< p(t), p(t) >= a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2$$

Definición 2.9 *Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n, $\beta_0 = \{t, t^2, \ldots, t^n\}$, $\beta_n = \{1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}\}$ y $\beta_w = \{t^2 + w^2, \ldots, t^{n-1} + w^2 t^{n-3}, t^n + w^2 t^{n-2}\}$ entonces*

$\Delta_0 := \{P(t) \in \mathcal{P}_n : P(0) = 0$ *y* β_0 *genera a* $P(t)\}$

$\Delta_n := \{P(t) \in \mathcal{P}_n : gr(P(t)) < n$ *y* β_n *genera a* $P(t)\}$

$\Delta_w := \{P(t) \in \mathcal{P}_n : P(\pm \imath w) = 0$ *y* β_w *genera a* $P(t)\}$

Observación 2 $dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$

$\Delta_0, \Delta_n, \Delta_w$ *son subespacios de* $\mathcal{P}_n$

$dim(\Delta_0) = dim(\Delta_n) = n$

$dim(\Delta_w) = n - 1$

Definición 2.10 *Sea $p(t)$ un polinomio Hurwitz de grado n entonces definimos*

- d_0*:= distancia de* $p(t)$ *al subespacio* Δ_0
- d_n*:= distancia de* $p(t)$ *al subespacio* Δ_n
- d_w*:= distancia de* $p(t)$ *al subespacio* Δw *con* $w \geq 0$
- $d_{\text{mín}} = \text{ínf}_{w \geq 0}\, d_w$

Teorema 2.11 *El radio de estabilidad de $p(t)$ con $|| \cdot ||_2$ es*

$$\rho_{p(t)} = \text{mín}(d_0, d_n, d_{\text{mín}})$$

Observación 3 *Es fácil probar que $d_0 = |a_0|$ y $d_n = |a_n|$*

Teorema 2.12 *La distancia d_w de $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ a Δ_w está dada por*

i) $n = 2m$:

$$d_w^2 = \frac{[p^e(w)]^2}{1 + w^4 + \cdots + w^{4m}} + \frac{[p^o(w)]^2}{1 + w^4 + \cdots + w^{4(m-1)}} \tag{1}$$

ii) $n = 2m + 1$:

$$d_w^2 = \frac{[p^e(w)]^2 + [p^o(w)]^2}{1 + w^4 + \cdots + w^{4m}} \tag{2}$$

donde

$$\begin{aligned} p^e(w) &= a_0 - a_2 w^2 + a_4 w^4 + \cdots + (-1)^m a_{2m} w^{2m} \\ p^o(w) &= a_1 - a_3 w^2 + a_5 w^4 + \cdots + (-1)^{m-1} a_{2m-1} w^{2m-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.13 *Calcular el radio de estabilidad de $p(t) = 2 + 4t + 3t^2 + t^3 \in \mathcal{H}$*
$d_0 = |2| = 2$
$d_3 = |1| = 1$

Primero calculamos $p(\imath w) = \overbrace{2 - 3w^2}^{p^e(w)} + \imath w \underbrace{[4 - w^2]}_{p^o(w)}$ *para poder obtener $p^e(w)$ y $p^o(w)$. Luego puesto que el grado del polinomio es impar podemos usar la ecuación (2) obtenida en el teorema anterior*

$$\begin{aligned} d_w^2 &= \frac{[p^e(w)]^2 + [p^o(w)]^2}{1 + w^4} = \frac{[2 - 3w^2]^2 + [4 - w^2]^2}{1 + w^4} \\ &= \frac{4 - 12w^2 + 9w^4 + 16 - 8w^2 + w^4}{1 + w^4} \\ &= \frac{20 - 20w^2 + 10w^4}{1 + w^4} \end{aligned}$$

entonces la distancia de $p(t)$ al subespacio de polinomios que son divisibles por $t^2 + w^2$ es la siguiente

$$d_w = \sqrt{\frac{20 - 20w^2 + 10w^4}{1 + w^4}}$$

Evaluando d_w en los puntos $w \geq 0$ que satisfacen $\frac{d(d_w)}{dw} = 0$ obtenemos un punto crítico en $w = 1{,}27202$ tal que

$$d_{\text{mín}} = \inf_{w \geq 0} d_w = 1{,}9544$$

Por lo tanto

$$\rho_{p(t)} = \text{mín}\{2, 1, d_{\text{mín}}\} = 1$$

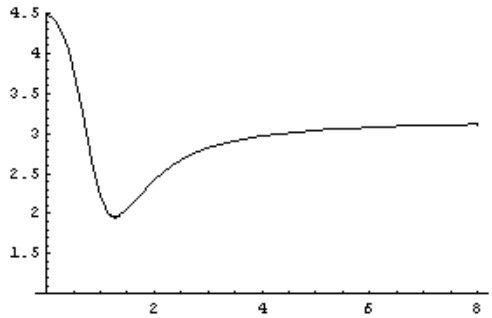


Figura 1: w vs $d_w(w)$

Referencias

[1] Aguirre, Baltazar; Ibarra Carlos and Suárez, Rodolfo. Sufficient Algebraic Conditions for Stability of Cones of Polynomials. Systems and Control Letters, 46 (4):255-263,2002

[2] Barmish, B.R. New Tools for Robustness of Lynear Systems. Macmillan Publishing Company, New York, NY, 1994.

[3] Bartlet,A.C., Hollot, C.V. and Lin, H. Root locations of a entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges. Math. Control Signals Systems, 1(1):61-71,1988.

[4] Bhattacharyya, S.P. ; Chapellat, H. and Keel, L.H. Robust Control: The Parametric Approach. Prentice Hall, 1995.

[5] Soh C; Berger C; and Dabke K. On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 30, pp 1033-1036, 1989.

[6] Ángel M. Cuenca Lacruz; Julián J. Salt Llobregat. Automática Industrial y Control. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2005.

[7] Jurgen Ackermann. Robust Control. Springer-Verlag, London, 1993.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México.
Mosaicos Matemáticos 27, Marzo, 2008, pp. 21-26.

CARACTERIZACIÓN DE SUCESIONES CUASIRREGULARES

Re. Betancourt [1], C. Figueroa [1], Ri. Betancourt[2], R. Riera[1], L. Ferrer[1]

[1] Departamento de Investigación en Física, Universidad de Sonora
[2] Tecnológico de Monterrey, campus Sonora Norte

e-mail: cfigueroa@industrial.uson.mx

Resumen

Se analizan dos sucesiones ternarias ξ_1, ξ_2 ; se demuestra que ξ_1 presenta la propiedad Pisot, lo que la hace derivable de una red de una dimensión superior por el método de corte y proyección, y ξ_2 sin la propiedad de Pisot, por lo que para la construcción de esta secuencia cuasirregular es necesario utilizar la regla de sustitución a partir de un bloque generador. También se demuestra que los espectros de éstas secuencias son singulares continuos. En términos de la Matriz Característica, en el límite cuando la generación es infinita, se obtiene la razón áurea y las proporciones en que se encuentran las diferentes letras en la sucesión.

1 Introducción

Desde la década del 70 del siglo pasado se viene estudiando con mucho interés los sistemas a capas. Esaky y Tsu [1] fueron los primeros en proponer la construcción de heteroestructuras consistentes en secuencias alternadas de capas delgadas de materiales metálicos o semiconductores dopados o no; a este tipo de heteroestructuras le llamaron superredes (SL). Entre estos sistemas se encuentran los Pozos Cuánticos, los Superpozos, etc. Actualmente el interés se ha enfocado en el estudio de las Heteroestructuras Cuasirregulares (QH) que no son mas que configuraciones intermedias entre los cristales periódicos con estados de Bloch extendidos y los sólidos aleatorios desordenados con estados exponencialmente localizados.

Los primeros estudios realizados en QH crecidas según una secuencia cuasirregular (QS) revelaron nuevas características en su espectro como ser singular continuo, autosimilaridad y fractalidad [3]. En estudios más recientes se han encontrado nuevos tipos de cuasicristales con características interesantes [4, 5]. Todo esto ha estimulado una gran cantidad de trabajos tanto teóricos como experimentales, que hacen que este tema goce de actualidad debido a que se hacen atractivos para la construcción de dispositivos microelectrónicos, nanoelectrónicos y optoelectrónicos.

Para estudiar estos sistemas se han introducido los conceptos de Alfabeto, Matriz Característica, Razón Áurea y otros, que se dan por conocidos y se pueden ver en las referencias [2, 6].

Entre las QSs más estudiadas están las de Fibonacci, Thue Morse, Periodo doble, Circular y Rudin-Shapiro. Para todas estas QSs, el operador $\hat{H}$ presenta un espectro puramente singular continuo, con excepción de la Rudin-Shapiro. Las reglas de sustitución ξ son primitivas, sólo tienen propiedad de Pisot, la Fibonacci y la Thue Morse, mientras las otras no.

Una de las propiedades más interesantes de estas estructuras es que muchas excitaciones elementales poseen un espectro singular continuo, a diferencia, por ejemplo, de un pozo cuántico, que es típicamente discreto y las superredes periódicas que son a intervalos o bandas. Bajo condiciones bastante generales, esta propiedad se ha demostrado en varias QSs, gracias a un teorema debido a Bovier-Ghez, con excepción de la Rudin-Shapiro que no cumple las hipótesis del teorema y es un problema científico aún sin resolver [7, 8]. Con este estudio se hace un análisis de las propiedades matemáticas de sucesiones que usan un algoritmo preciso de secuenciación para predecir importantes propiedades físicas.

2 Teorema de Bovier-Ghez

Sea un operador de Schrödinger unidimensional

$$\hat{H} = \Delta + \hat{V},$$

donde Δ es el operador de Laplace y $\hat{V}$ es un operador diagonal cuyos elementos diagonales $(V_n)_{n\in Z}$ son obtenidos por una regla de sustitución. El análisis del espectro está basado en la discusión de la ecuación de Schrödinger escrita en forma vectorial.

$$\Psi_E(n+1) = \begin{pmatrix} E-V & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi_E(n),$$

$$\Psi_E(n) \equiv \begin{pmatrix} \Psi_E(n) \\ \Psi_E(n-1) \end{pmatrix},$$

donde Ψ_E es la solución de la ecuación de Schrödinger escrita usualmente $\hat{H}\psi_E = E\psi_E$ [7].

La herramienta básica para establecer la naturaleza del espectro es el formalismo de la matriz de transferencia. Es decir, el estudio de las propiedades de las soluciones de la ecuación de Schrödinger, conducen al análisis del producto de matrices 2×2 de la forma $P_n(E) = \prod_{k=1}^{n} T_E(\omega_{n-k})$, donde ω_k es la letra k-ésima en la secuencia de sustitución ξ y $T_E : \mathcal{A} \to SL(2)$ es el mapa que se asigna, para un valor constante de la energía *E*, a cada letra en el alfabeto de una matriz unimodular 2×2 [8],

$$T_E(\omega_n) = \begin{pmatrix} E - v(\omega_n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto incluye, en particular, un Laplaciano continuo con un potencial constante, de un número finito de formas diferentes. La idea principal para probar la singularidad del espectro de $\hat{H}$ es la identificación de un conjunto O de exponentes de Lyapunov nulos,

$$\Upsilon(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left\| T_E^u \right\|,$$

conocidos por ser de medida de Lebesgue cero, resultado basado en el teorema de Kotani. Hacer esto requiere un análisis bastante cuidadoso de las propiedades asintóticas de $P_n(E)$, lo cual es posible por la estructura autosimilar del potencial [8].

Obtener la naturaleza del espectro de una QH a partir de un análisis detallado del mapa de trazas, fue la idea central manejada por Bovier-Ghez. De hecho es posible conjeturar la existencia de una estructura de renormalización de grupo exacta, como se presenta en los mapas de trazas, siendo este responsable de las propiedades espectrales particulares observadas en muchas QHs.

Para determinar la naturaleza del espectro se postulan los siguientes teoremas [2, 7]:

Teorema 1. Sea ξ una sustitución primitiva no constante definida en un alfabeto finito, $\mathcal{A}$. Sea v un mapa no constante de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{R}$ y $\hat{H}$ el operador de Schrödinger (1). Supongamos que existe un mapa de trazas cuya sustitución asociada ϕ, definida en un alfabeto $\mathcal{B}$ es semiprimitiva. Supongamos además que existe un $k<\infty$ tal que $\xi^k(o)$ contiene la palabra bb para algún $b\in\mathcal{B}$. Entonces, el espectro de $\hat{H}$ es singular y está soportado en un conjunto de medida de Lebesgue cero.

Teorema 2. Supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 1. Si además existe $n_0<\infty$ s.t. $\xi^{n_0}(o) = \xi^m(\gamma_0)\xi^m(\gamma_0)\omega$, donde $\gamma_0 \in C$, $\omega \in \mathcal{A}^*$ y m son números arbitrarios, entonces el espectro de $\hat{H}$ es puramente singular continuo soportado en un conjunto de Cantor de medida de Lebesgue cero.

3 Matriz Característica

Entre las magnitudes que han demostrado su utilidad para describir a las QSs están la Matriz Característica, la proporción de letras y la razón áurea. La Matriz Característica (CM) es aquella matriz que en su fila i y columna j tiene un entero no negativo igual al número de veces que está la letra j-ésima en la regla i-ésima.

La razón áurea es un número que caracteriza a cada secuencia y es igual a [9]:

$$\tau^i = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}^i}{F_n^i}.$$

La proporción entre las letras es:

$$f^{jk} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n^j}{F_n^k}.$$

Es posible demostrar que la razón áurea es autovalor de la traspuesta de la CM (o autovalor por la izquierda de la CM). Además, el autovector correspondiente da las poblaciones relativas de las distintas letras [9].

4 QSs Ternarias

Las sucesiones que nos interesan se definen por las siguientes reglas de sustitución:

$$\xi_1(A) = AC, \qquad \xi_2(A) = BC,$$
$$\xi_1(B) = BA, \qquad \xi_2(B) = BA,$$
$$\xi_1(C) = B, \qquad \xi_2(C) = AB.$$

Ambas tienen por alfabeto $\mathcal{A} = \{\mathrm{A, B, C}\}$. Las matrices características son, respectivamente

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estas dos sucesiones son primitivas. En el caso de la regla ξ_1 los autovalores y autovectores son:

$$\lambda_1 = 1.7548,\ \lambda_2 = 0.1225 + i0.7448,\ \lambda_3 = 0.1225 - i0.7448,$$

y

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1.3247 \\ 1.7548 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -0.6623 - i0.5622 \\ 0.1225 + i0.7448 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -0.6623 + i0.5622 \\ 0.1225 - i0.7448 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De esto se sigue que ξ_1 tiene la propiedad de Pisot, lo que la hace derivable de una red de dimensión superior por el método de corte y proyección. Su razón áurea es $\tau = \lambda_1 = 1.7548$ y la proporción entre las letras por v_1. El número total de letras es $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} + F_{n-3}$ para $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_{-n} = 0\ \ \forall n \geq 2$.

Definiendo las trazas de la siguiente forma:

$$x_n = tr[A_n], \qquad y_n = tr[B_n], \qquad z_n = tr[C_n], \qquad w_n = tr[C_n A_n],$$
$$r_n = tr[A_n B_n], \quad s_n = tr[B_n C_n], \quad v_n = tr[A_n B_n C_n].$$

El mapa de trazas es,

$$x_{n+1} = w_n, \quad z_{n+1} = y_n, \quad r_{n+1} = x_n v_n - s_n,$$
$$y_{n+1} = r_n, \quad w_{n+1} = v_n, \quad s_{n+1} = y_n r_n - x_n, \quad v_{n+1} = x_n(y_n v_n - w_n) - y_n s_n + z_n.$$

En este caso la regla de sustitución auxiliar ϕ es

$$\phi(x) = w, \quad \phi(z) = y, \quad \phi(r) = xv,$$
$$\phi(y) = r, \quad \phi(w) = v, \quad \phi(s) = yr, \quad \phi(v) = xyv.$$

Esta regla de sustitución es semiprimitiva debido a que existe un subconjunto $C = C(\mathrm{x, y, w, r, v}) \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathrm{x, y, z, w, r, s, v})$ para el cual: la sucesión ϕ es primitiva en C, ya que $\phi^4(C)$ contiene todas las letras de C y $\phi^4(\mathcal{B})$ contiene al menos una letra de C.

Si aplicamos los teoremas de Bovier-Ghez tenemos que para $\xi^4(A)$ aparece el cuadrado de la letra $B \in \mathcal{B}$ por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema 1 y podemos decir que el espectro de $\hat{H}$ asociado a la superred es singular continuo y está soportado por un conjunto de medida de Lebesgue cero.

Para la segunda de las sucesiones, o sea ξ_2, los autovalores y autovectores son:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 0,$$

y

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esta sucesión no tiene la propiedad de Pisot por lo que no es derivable de una red de dimensión superior por el método de corte y proyección. Esto indica que para la construcción de esta QH es necesario utilizar la regla de sustitución a partir de un bloque generador o semilla, su razón áurea es $\tau = \lambda_1 = 2$, la proporción entre las letras esta dada por v_1.

Definiendo las trazas de la siguiente forma:

$$x_n = tr[A_n], \quad y_n = tr[B_n], \quad z_n = tr[C_n], \quad w_n = tr[C_n B_n],$$
$$r_n = tr[B_n A_n], \quad s_n = tr[C_n A_n], \quad v_n = tr[A_n C_n B_n], \quad h_n = tr[A_n B_n C_n].$$

El mapa de trazas es

$$x_{n+1} = w_n, \quad z_{n+1} = r_n, \qquad r_{n+1} = w_n r_n + s_n - z_n x_n,$$
$$y_{n+1} = r_n, \quad s_{n+1} = y_n v_n - s_n, \quad h_{n+1} = y_n(r_n v_n - z_n) - x_n v_n + w_n,$$
$$w_{n+1} = x_n(y_n r_n - x_n) - y_n^2 + 2, \quad v_{n+1} = y_n w_n(x_n r_n - y_n) + y_n x_n s_n - y_n z_n(x_n^2 - 1) - x_n h_n + w_n.$$

La regla de sustitución auxiliar es

$$\phi(x) = w, \quad \phi(z) = r, \quad \phi(r) = wr, \quad \phi(v) = ywxr,$$
$$\phi(y) = r, \quad \phi(w) = xyr, \quad \phi(s) = yv, \quad \phi(h) = yrv.$$

Esta regla de sustitución es semiprimitiva debido a que existe un subconjunto $C = C(\mathrm{x, y, w, r}) \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathrm{x, y, z, w, r, v, h})$ para el cual la sucesión ϕ es primitiva en C, ya que $\phi^4(C)$ contiene todas las letras de C y $\phi^2(\mathcal{B})$ contiene al menos una letra de C.

Para $\phi^2(A)$ aparece el cuadrado de la letra $CB \in \mathcal{B}$ por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema 1 y podemos decir que el espectro de $\hat{H}$ asociado a la superred es singular continuo y está soportado por un conjunto de medida de Lebesgue cero.

5 Conclusiones

Se ha analizado dos QSs ternarias relativamente simples y demostrado que ξ_1 presenta propiedad de Pisot, lo que la hace derivable de una red de dimensión superior por el método de corte y proyección, además que ξ_2 no tiene la propiedad de Pisot, por lo que para la construcción de esta QH es necesario utilizar la regla de sustitución a partir de un bloque generador. Se obtienen sus mapas de trazas y los principales momentos de la aplicación del teorema de Bovier-Ghez. De aquí se concluye que el espectro de problemas simples sobre estas QSs es singular continuo. Hasta el momento no hay estudios experimentales de estas sucesiones concretas, aunque sí en sucesiones similares [6,10] cuyo estudio teórico ya ha sido reportado [2, 6, 11].

Referencias

1. Esaky, L. y Tsu, R., IBM J. Res. Dev. **14**, 61 (1970).
2. René Betancourt Riera, "Análisis teórico de sucesiones cuasirregulares", Tesis en opción al título de Maestro en Ciencias Físicas, Fac. de Física, Universidad de la Habana, (2004).
3. Arraiga, J. y Velasco, V. R., J. Phys. Condens. Matter **9**, 8031-8039 (1997).
4. Fujita, N. y Nizeki, K., Phys. Lett. **85**:23, 4924 (2000).
5. Janot, C., Loreto, L. y Farinato, R., Phys. Stat. Sol. B **22**, 121-132 (2000).
6. Perez-Alvarez, R. y F. Garcia-Moliner, "Quasiregular Heterostructures", capítulo invitado en "Contemporary Problems of the Condensed Matter Physics", Nova Science Publishers, ed. por S. Vlaev y M. Gaggero-Sager (2001).
7. Bovier, A. y J. M. Ghez, Commun. Math. Phys. **158** (1), 45 (1993).
8. Bovier, A. y J. M. Ghez, J. Phys. A: Math. Gen., **28**, 2313 (1995).
9. R. Pérez-Álvarez, R. Betancourt Riera, y W. Pardo Tamayo, Rev. Cub. de Física Vol. **20**, No. 2, 125 (2003).
10. Zhu, Y-y y N-b Ming, Phys. Rev. B **42**:6, 3676 (1990).
11. R. Betancourt Riera, W. Pardo Tamayo y R. Pérez-Álvarez, Rev. Cub. de Física Vol. **20**, No. 2, 120 (2003).

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México.
Mosaicos Matemáticos 27, Marzo, 2008, pp. 27-33.

ESFUERZO PESQUERO ÓPTIMO EN LA PESQUERÍA DE SARDINA MONTERREY DEL GOLFO DE CALIFORNIA

Dora Julia Borbón González

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

email: dborbon@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Se calculó el nivel de esfuerzo pesquero óptimo bajo distintos escenarios económicos para la pesquería de sardina Monterrey del Golfo de California. Se aplicó el Principio del Máximo de Pontryagin para la maximización del flujo de ingresos netos provenientes de la pesquería, desde sus inicios hasta la temporada de pesca 2002/2003, determinación del nivel de biomasa óptima y esfuerzo óptimo. Los resultados muestran que el esfuerzo pesquero ejercido excede el nivel de esfuerzo óptimo, calculado para distintos costos del viaje de pesca, en años anteriores a las temporadas de pesca 1991/1992 y 1992/1993 cuando ocurrió una fuerte caída en las capturas de sardina Monterrey, por lo que no puede soslayarse el notable efecto del aumento del nivel de esfuerzo aplicado en esos años sobre la disponibilidad de este recurso pesquero.

1. Introducción

La sardina Monterrey (*Sardinops caeruleus* Girard, 1854) del Golfo de California pertenece a un grupo de peces pelágicos pequeños que sustentan las pesquerías masivas más importantes en el mundo y aportan más de un tercio de la captura mundial de peces. Son pescados comercialmente para una amplia variedad de usos (INP-SEMARNAP, 1999). Esta especie es la más importante, por sus volúmenes de captura, de las siete especies que sostienen la pesquería de pelágicos pequeños en el Golfo de California, su contribución a esta pesquería ha representado por varios años más del 80 % de la captura total (Martínez-Zavala *et al.*, 2000).

La explotación de la sardina Monterrey en el Golfo de California se inició a finales de la década de los sesentas luego del colapso de la pesquería de sardina frente a la costa de California y costa occidental de Baja California (Lluch-Belda *et al.*, 1986). La pesquería de la sardina en el Golfo de California sufrió un pronunciado descenso en la captura en las temporadas 1991-1992 y 1992/1993, cuando sólo se capturaron aproximadamente 7,000 toneladas (Cisneros-Mata *et al.*, 1995), aunque las capturas ascendieron paulatinamente en las temporadas siguientes, dada la importancia económica y social de esta pesquería es interesante analizar los posibles factores que influyeron para un descenso tan pronunciado en las capturas, entre ellos el nivel de esfuerzo pesquero aplicado.

Un problema importante en pesquerías es la determinación del nivel de esfuerzo idóneo que debiera aplicarse en la pesca de un recurso tomando en consideración objetiva y cuantitativamente los aspectos económicos que determinan la productividad de dicha actividad. Una de las herramientas que es posible utilizar para el estudio de este problema es teoría de control óptimo, dado que se puede plantear como un problema de control óptimo (Clark, 1990, Hannesson, 1993), cuya solución permite calcular los niveles de esfuerzo óptimo acorde a las

variables económicas involucradas, cuando se especifica como variable de control al esfuerzo pesquero.

Formalmente, en pesquerías un problema de control óptimo a tiempo continuo se define especificando un sistema dinámico que expresa la tasa de cambio de la biomasa explotada x mediante el balance de los factores que determinan su crecimiento natural y el efecto asociado a los procesos de extracción, la variable de control u, las restricciones a las que están sujetas x, u y el funcional objetivo a optimizar (Clark, 1990; Cohen, 1987).

El problema de control unidimensional a tiempo continuo se expresa en forma general mediante las siguientes ecuaciones:

Sistema dinámico	$\frac{dx}{dt} = f(x,t,u),\ x \in \Re,\ u \in \Re,\ t \in [t_0, T]$	(1)
Condición inicial	$x(t_0) = x_0$.	(2)
Condición terminal	$x(T) = x_T$.	(3)
Restricción de admisibilidad	$\mathrm{U}(u(t), t) = 0$, o bien $u(t) \in \mathrm{U},\ U \in \Re$	(4)
Restricción de variación de estado	$\mathrm{B}\ (x(t), t) = 0$.	(5)
Valor de liquidación	$\psi(T, x(T))$.	(6)
Funcional objetivo	$J(x, u, T, x(T)) = \psi(T, x(T)) + \int_{t_0}^{T} l(x, t, u)\, dt$.	(7)
Problema de optimización	$\max_{\mathrm{u}} \{J(x, u, T, x(T))\}$.	(8)

Si se especifica como objetivo la maximización del flujo de ingresos netos descontado en el tiempo, que se percibirán por la explotación del recurso en un determinado horizonte temporal, la funcional objetivo se expresa como el valor presente del flujo de ganancias sobre el horizonte $[t_0, T]$, esto es

$$J(x, u, T, x(T)) = \int_{t_0}^{T} e^{-\int_0^t \delta(z)dz} R(x, u)\, dt\ , \tag{9}$$

donde δ es la tasa de descuento y R es la ganancia instantánea asociada con una tasa de captura $h(t)$. Si $p(t)$ denota el precio en el mercado a un tiempo t de una unidad de biomasa capturada y $C(x(t))$ el costo de captura de la misma, entonces R resulta ser

$$R(x, u(t)) = (p(t) - C(x(t)))h(t)\ . \tag{10}$$

La función de control óptimo que maximiza la funcional objetivo (9) sobre el horizonte temporal $[t_0, T]$ se denota como $u_s(t)$, la correspondiente función de respuesta $x_s(t)$ se denomina respuesta óptima o senda óptima.

Se llevó a cabo este estudio con el fin de analizar la idoneidad del esfuerzo pesquero aplicado en la pesquería sonorense de sardina Monterrey desde sus inicios. Se especificó como objetivo la maximización del valor presente del flujo de ingresos netos provenientes de la explotación del recurso y como variable de control al esfuerzo pesquero, se aplicó el principio del máximo de Pontryagin para la obtención la senda óptima y el esfuerzo óptimo.

2. Materiales y métodos

La información básica de la pesquería, utilizada para el ajuste estadístico de parámetros del modelo de biomasa agregada, desde la temporada de pesca 1969/1970 a la 2002/2003, se obtuvo

del Centro Regional de Investigaciones Pesqueras de Guaymas, Sonora y se reporta en Borbón-González (2007). La tasa de crecimiento de la biomasa se modeló con la ecuación de Gompertz-Fox (Fox, 1970),

$$\frac{dx}{dt} = rx(t)\ln\left(\frac{x(t)}{K}\right) - qE(t)x(t), \tag{11}$$

sujeta a la condición inicial $x(0) = x_0$, donde $r < 0$, $K > 0$ y $q > 0$; dx/dt es la razón de cambio de la biomasa respecto al tiempo, $E(t)$ la tasa de esfuerzo pesquero, r es la tasa de crecimiento específica de la población, K es la capacidad de carga del sistema y q es el coeficiente de capturabilidad. En la identificación de los parámetros del modelo se usó la definición de la tasa de captura por unidad de esfuerzo $U(t)$ (Schnute 1977),

$$U(t) = q\,x(t). \tag{12}$$

Se resolvió la ecuación diferencial (11) en términos de $U(t)$ y se obtuvieron los estimadores de los parámetros, los resultados se muestran en la Tabla 1. Estos valores se usaron, junto con la información económica, en el análisis bioeconómico de la pesquería. En este análisis, el funcional objetivo se definió como

$$J\{x(t), E(t)\} = \int_{t_0}^{T} e^{-\delta t}\{q\,x(t)\,p(t) - q\,x(t)C(x)\}E(t)\,dt, \tag{13}$$

donde $C(x) = \dfrac{\mu(x(t))}{qx(t)}$ es el costo por unidad de biomasa y $\mu(x(t))$ es el costo por unidad de esfuerzo. En el caso general, la tasa de descuento se consideró una función del tiempo, $\delta(t)$.

Para efectuar la maximización del funcional objetivo se aplicaron las condiciones de optimalidad expresadas en el principio del máximo de Pontryagin (Pontryagin *et al.*, 1962), obteniendo la expresión implícita para la variable respuesta, x_s, que define la senda óptima en el caso no-autónomo (Clark, 1990),

$$F'(x_s(t)) = \delta(t) + \frac{F(x_s(t))C'(x_s(t)) - \dfrac{dp}{dt}}{(p(t) - C(x_s(t)))}, \tag{14}$$

donde $F(x(t))$ es la función de crecimiento de Gompertz y $F'(x(t))$ es su derivada, $C'(x(t))$ es la derivada de la función costo. En el caso autónomo, cuando $\delta(t) = \delta$, $\mu(x(t)) = c$ y $p(t) = p$, se genera la llamada regla áurea de Clark,

$$F'(x_s) - \frac{C'(x_s)F(x_s)}{p - C(x_s)} = \delta. \tag{15}$$

Se exploraron distintos escenarios económicos para el cálculo de la biomasa óptima y se procedió al cálculo del esfuerzo óptimo. La ecuación usada para calcular el esfuerzo óptimo, $E_s(t)$, fue la siguiente,

$$E_s(t) = \frac{F(x_s(t)) - \dfrac{dx_s}{dt}}{qx_s(t)}. \tag{16}$$

Los escenarios para el cálculo del esfuerzo óptimo se generaron al especificar distintos valores para las variables económicas (precio, costo y tasa de descuento), en algunos cálculos se

usaron los promedios de las series históricas recopiladas de precio de la harina de pescado y tasa de descuento. El costo estimado por viaje de pesca se especificó considerando un barco estándar representativo de la flota pesquera.

Se diseñó una estrategia de control para analizar si el esfuerzo pesquero aplicado fue o no el idóneo: dado que el problema de Control Óptimo resuelto en este trabajo es lineal en la variable de control, la dinámica del esfuerzo pesquero es de naturaleza "bang-bang-singular" (Clark, 1990), lo cual significa que el control es fijado por un período de tiempo en el límite inferior o superior del conjunto de controles admisibles. Ésto es, se deberá aplicar esfuerzo cero cuando la biomasa poblacional sea menor que $x_s(t)$ y aplicar esfuezo máximo cuando la biomasa sea mayor que $x_s(t)$, pero si la biomasa se encuentra sobre la senda óptima $x_s(t)$ entonces deberá aplicarse un esfuerzo igual a $E_s(t)$ (Borbón-González, 2002).

3. Resultados

3.1 Ajuste del modelo

La Figura 1 muestra la evolución en el tiempo de las capturas de la pesquería de peces pelágicos pequeño del Golfo de California y de sardina Monterrey. En la Tabla 1 se reportan los valores de los estimadores de los parámetros obtenidos para el modelo, dado por la ecuación (1), ajustado a los datos de esta pesquería.

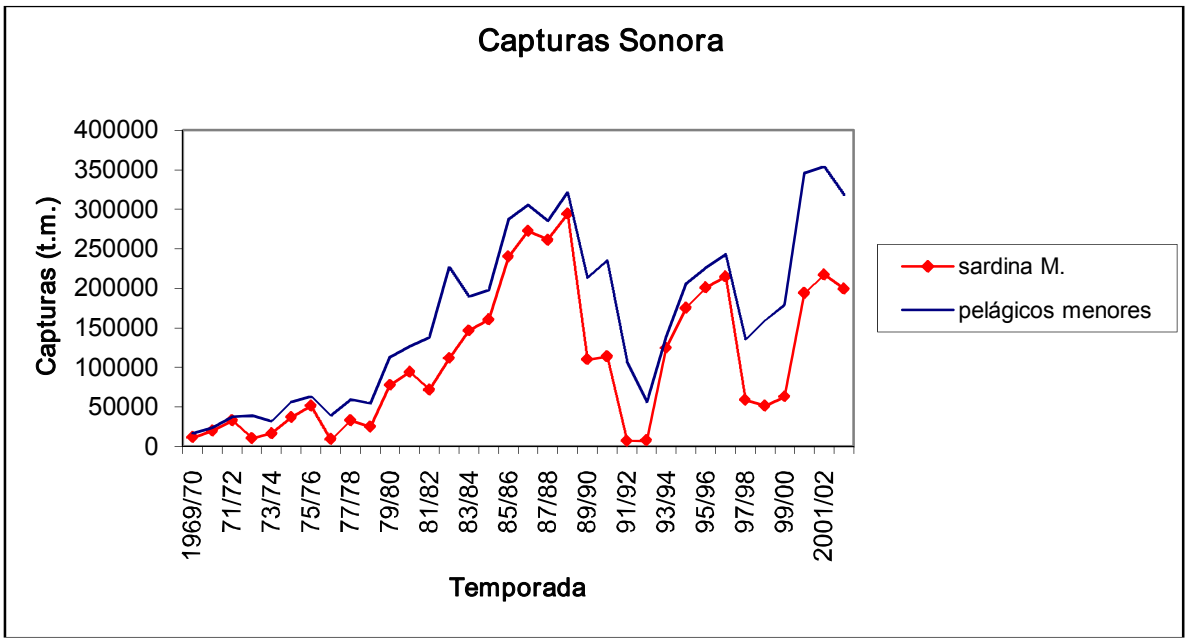


Figura 1. Capturas, en toneladas métricas, de la pesquería de peces pelágicos pequeños del Golfo de California, en Sonora; se muestran también las capturas de la especie principal de esta pesquería, sardina Monterrey.

Tabla 1. Estimadores de los parámetros del modelo de biomasa agregada de Gompertz-Fox ajustado a los datos de la pesquería de sardina Monterrey del Golfo de California

	Parámetros			*Variabilidad explicada por el modelo*
	r	K	q	89 %
Estimador	-0.154	1,414,000	27×10^{-6}	
Error estándar	0.035	300,000	5×10^{-6}	

3.2 Esfuerzo óptimo

Dado que el esfuerzo óptimo es una función de la biomasa óptima x_s, una vez que se generaron los valores de x_s, determinados por los distintos escenarios establecidos por los valores considerados para las variables económicas, se eligieron los valores más representativos y se calcularon los valores del esfuerzo óptimo correspondiente. En las Figuras 2 y 3 se muestra la evolución en el tiempo del esfuerzo aplicado en la pesquería contra el esfuerzo óptimo calculado para los casos autónomos (para el cual se usó los valores promedio de precio y tasa de descuento) y no-autónomo, para distintos costos del viaje de pesca, respectivamente.

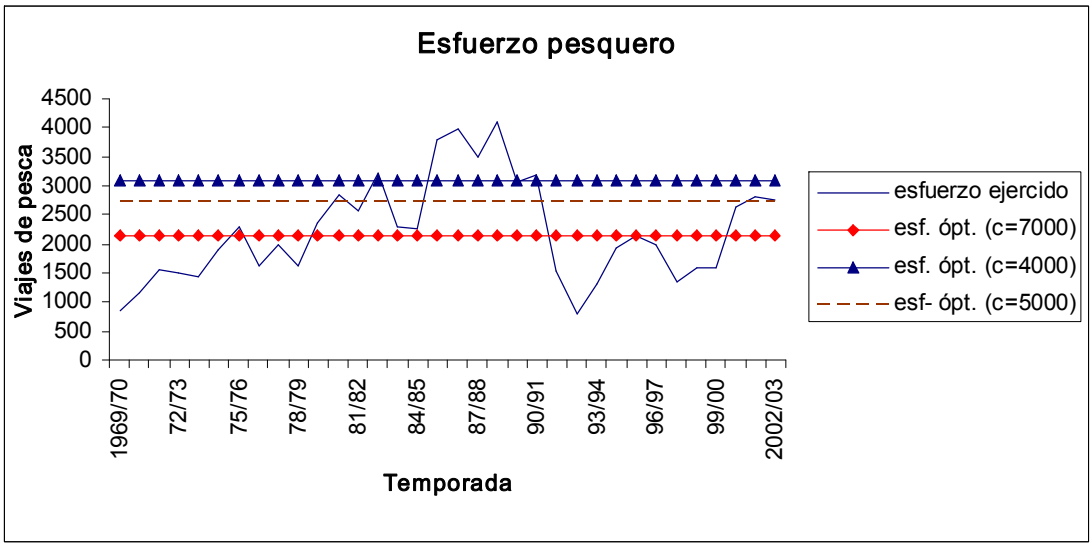


Figura 2. Esfuerzo real y óptimo, calculado éste último para el caso autónomo considerando tres distintos valores del costo del viaje de pesca (4000, 5000 y 7000 dólares/viaje).

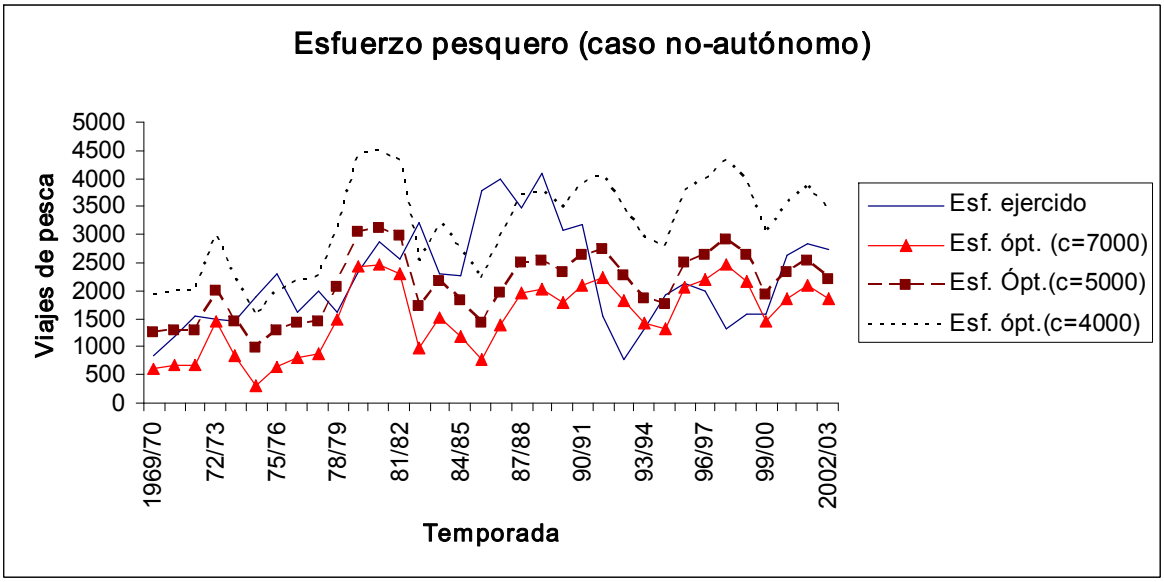


Figura 3. *Esfuerzo real y óptimo, calculado éste último para el caso no-autónomo cuando se consideran tres distintos costos del viaje de pesca.*

4. Discusión de resultados

En el cálculo del esfuerzo óptimo para el caso autónomo, se seleccionó entre los diversos escenarios económicos explorados los niveles de biomasa óptima calculados cuando se fija el costo del viaje de pesca en 4000, 5000 y 7000 dólares y se calcularon los valores respectivos del esfuerzo óptimo mostrados en la Figura 2; en ésta se observa que, tomando como referencia un precio de 4000 dólares por viaje, el esfuerzo ejercido sobrepasó al óptimo desde la temporada 85/86 hasta la temporada 1990/91 (con excepción de la temporada 1989/90 en la que son prácticamente iguales). Para complementar el análisis de la idoneidad del esfuerzo aplicado en la pesquería se calculó el esfuerzo óptimo en el caso no-autónomo para tres costos del viaje de pesca (4000, 5000 y 7000 dólares/viaje); en este caso se observa en, la Figura 3, que incluso con el costo más bajo de 4000 dólares/viaje, el esfuerzo real ejercido en la pesquería sobrepasa al esfuerzo óptimo durante las temporadas de pesca 1975/76, 1982/83 y desde la temporada 1985/86 hasta la temporada 1988/89. Por lo anterior, puede pensarse que el incremento del esfuerzo ejercido en estas temporadas tuvo una influencia decisiva en la notable caida en las capturas en las temporadas 1991/92 y 1992/93 (ver Figura 1). Aunque ha sido conocido por muchos años que la variabilidad climática puede afectar el reabastecimiento de los stocks de peces con juveniles, también se ha señalado que los stocks fuertemente pescados pueden ser más sensitivos a la variabilidad climática (Worm y Myers, 2004). La necesidad de limitar el esfuerzo pesquero con el objetivo de recuperación de stocks pesqueros y restablecer las bases para un desarrollo sostenible de diversas pesquerías ha sido planteada desde varios años atrás (Beddington y Rettig, 1984; Caddy, 1998; ASMFC, 2005); el control directo del esfuerzo pesquero como herramienta de manejo de una pesquería es de especial interés en aquellas pesquerías donde no existe un sistema efectivo de manejo y/o es difícil la implementación de un sistema de cuotas de captura como un control indirecto del esfuerzo pesquero (Alemany y Álvarez, 2003), lo cual parece ser el caso de la pesquería de sardina Monterrey, por lo que esta medida podría ser una opción para el manejo sostenible de esta pesquería.

Referencias

Alemany, F., Álvarez, F. 2003. Determination of effective fishing effort on hake *Merluccius merluccius* in a Mediterranean trawl fishery. SCI. MAR. 67(4): 491-499.

ASMFC. 2005. Addendum VII to Amendment 3 to the Interstate Fishery Management Plan for American Lobster. Atlantic States Marine Fisheries Commission. U.S.A.

Beddington, J.R, Rettig, R.B. 1984. Approaches to the regulation of fishing effort. FAO. Rome.

Borbón-González, D.J. 2002. "Control Óptimo de una pesquería sujeta a un régimen de oscilaciones inducidas por colapsos y recuperaciones de los niveles de biomasa: El caso de la anchoveta norteña (*Engraulis mordax* Girard)". Tesis de doctorado. CICESE.

Borbón-González, D.J. 2007. La pesca de sardina en Sonora ¿actividad sostenible?. EPISTEMUS. No. 2, p. 26-29.

Caddy, J.F. 1998. Issues in Mediterranean fisheries management: geographical units and effort control. Studies and Reviews. General Fisheries Council for the Mediterranean. No. 70. FAO, Rome. 56 p.

Cisneros-Mata, M.A., Nevárez-Martínez, M.O., and Hamman, M.G. 1995. The rise and fall of the Pacific sardine, *Sardinops sagax caeruleus* Girard, in the Gulf of California, México. CalCOFI Rep. 36: 136-143.

Clark, C.W. 1990. Mathematical Bioeconomics: The optimal management of renewable resources. Second Edition. John Wiley & Sons, New York.

Cohen, Y. 1987. A review of harvest theory and applications of optimal control theory in fisheries management. Canadian Journal of Fisheries Aquatic Science, 44: 75-83

Fox, W. 1970. An exponential surplus-yield model for optimizing exploited fish populations, Trans. Amer. Fish. Soc. 1: 80-88.

Hannesson, R. 1993. Bioeconomic Analysis of Fisheries. Halsted Press, New York.

INP-SEMARNAP. 1999. Sustentabilidad y Pesca Responsable en México. Evaluación y Manejo 1997-1998. Secretaría de Medio Ambiente, Recursos Naturales y Pesca. México. 93-116 p.

Martínez-Zavala M.A, Cisneros-Mata, M.A., Anguiano-Carrasco, M.L., Santos-Molina, J.P., Nevárez-Martínez, M.O., Godínez-Cota, A.R. y Montemayor-López, G. 2000. Diagnosis de la pesquería de pelágicos menores del Golfo de California de 1996/97 y 1997/98. CRIP-Guaymas.

Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.S., y Mishchenko, E.F. 1962. The Mathematical Theory of Optimal Processes. Interscience. New York.

Schnute, J. 1977. Improved estimates from the Schaefer production model: Theoretical considerations. Journal of the Fisheries Research Board of Canada, **34**: 583-603.

Worm, B., Myers, R. A. 2004. Managing fisheries in a changing climate. Nature. 429: 15.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México.
Mosaicos Matemáticos 27, Marzo, 2008, pp. 35-40.

Nivel: Medio Superior y Superior

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN: INVESTIGACIONES Y ENSEÑANZA

José Luis Díaz Gómez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

email: jdiaz@gauss.mat.uson.mx

Resumen

El concepto de función ha generado un conjunto creciente de investigaciones alrededor de él, motivados por el interés en mejorar los problemas de enseñanza y aprendizaje de este concepto y que atacan el problema desde distintos puntos de vista. En esta plática presentaremos un breve resumen de algunas investigaciones sobre el concepto de función que han permitido identificar las dificultades por las que pasa el estudiante y los errores conceptuales que adquiere al estudiar este concepto. Así, como los distintos aspectos y componentes que se requieren para comprenderlo. El análisis de estas investigaciones nos permite obtener algunas ideas pedagógicas para la enseñanza del mismo concepto.

Introducción

El concepto de función es uno de los conceptos más importantes de la matemática, y también fuera de ella. En la matemática, ha sido un factor muy importante en la historia para el desarrollo de grandes campos de investigación, y juega un papel fundamental en el desarrollo de muchos conceptos matemáticos.

En el aspecto curricular el concepto de función es como una hebra que atraviesa desde los cursos de enseñanza secundaria hasta los universitarios, en donde con frecuencia se utiliza para modelar procesos físicos, químicos, sociales, y de ingeniería, etc. Por otra parte diversos investigadores reportan serias dificultades en los estudiantes para comprender este concepto, con la consecuente influencia en la mala interpretación de conceptos matemáticos que dependen en gran parte de la comprensión del concepto de función.

Sin embargo, siendo este concepto tan importante en la formación de un profesionista, las investigaciones nos han mostrado que los estudiantes de todos los niveles tienen dificultades con su comprensión. Las razones de estas dificultades parece que se centran en: su complejidad y generalidad; en una multiplicidad de representaciones; tiene una gran variedad de conceptos asociados que se manifiestan en diferentes niveles de abstracción y aparece con frecuencia en diversos contextos y situaciones en apariencia no relacionadas. Todo lo anterior nos sugiere que no debe de ser fácil para los estudiantes comprender este concepto.

El concepto de función ha generado un conjunto creciente de investigaciones alrededor de él, motivados por el interés en mejorar los problemas de enseñanza y aprendizaje de este concepto y que atacan el problema desde distintos puntos de vista. En este artículo hacemos un breve resumen de algunas investigaciones sobre el concepto de función que han permitido identificar las dificultades por las que pasa el estudiante y los errores conceptuales que adquiere al estudiar este concepto. Así, como los distintos aspectos y componentes que se requieren para

comprenderlo. El análisis de estas investigaciones nos permite obtener algunas ideas pedagógicas para la enseñanza del mismo concepto.

Investigaciones

El concepto de función ha generado un conjunto creciente de investigaciones alrededor de él, motivados por el interés en mejorar los problemas de enseñanza y aprendizaje de este concepto y que atacan el problema desde distintos puntos de vista. Sin pretender hacer una revisión exhaustiva de los trabajos de investigación relacionados con el concepto de función, pues son muchos, pero si de algunos trabajos que han sido relevantes y que con frecuencia aparecen en la literatura, mencionamos que algunos investigadores exploran la comprensión de los estudiantes del concepto de función (Orton, 1970, citado en Lovell, 1971; Sierpinska, 1988; Thomas, 1971, 1975).

Por ejemplo Thomas (1971) comenta, que después de seguir en la clase una cuidadosa instrucción con un grupo de estudiantes verdaderamente capaces, "los resultados del test nos aportan que 164 de ellos (82%) apenas si alcanzaron el más bajo nivel de comprensión". Por lo que concluye:

> *"Esto fue un verdadero "shock" para mi, en un grupo de estudiantes a los que habíamos introducido de forma verdaderamente cuidadosa el concepto de función, la mayoría no podían distinguir funciones de no funciones en situaciones simples y concretas" (pág. 169).*

Otros estudian la inconsistencia entre la imagen y la definición conceptual de las funciones entre los estudiantes (Dreyfus y Vinner, 1989; Ferrini-Mundy y Graham, 1991; Vinner, 1983) y entre profesores (Even, 1988, 1990; Even, Lappan y Fitzgerald, 1988).

Tall y Vinner, estudian también las definiciones que, de determinadas nociones matemáticas, manifiestan los estudiantes:

> *"Nos referimos a la "definición conceptual" como el conjunto de palabras que se usan para especificar lo que es un concepto" (Tall, y Vinner, 1981, pág. 152).*

A veces las definiciones que de algunos conceptos nos dan los estudiantes difieren mucho de la definición formal de dicho concepto, "son una descripción de la imagen conceptual que personalmente hayan construido". A este tipo de definición lo llaman "definición personal" y la consideran como una parte integrante de su propia "imagen conceptual" (Vinner, 1983, pág. 294).

Otros proponen marcos teóricos para investigar el conocimiento de los estudiantes acerca de las funciones (Vinner, 1983; Dreyfus y Eisenberg, 1982, 1983a; Sfard, 1987; Vinner y Dreyfus, 1989; Even, 1990; Breidenbach, et al., 1992.

Los estudios de Sfard (1987, 1989, 1991) ayudan a la distinción de las funciones como un proceso o como un objeto. La concepción de una función como un proceso es una concepción operacional, en tanto que la concepción de una función como un objeto es una concepción estructural. Sfard argumenta que primero es la concepción operacional y que fuera de ella evoluciona la concepción estructural. En su trabajo sugiere que esta transición está compuesta de tres etapas: la interiorization (interiorización), la condensation (condensación), y la reification (concretización). La interiorización es la etapa en la cual el estudiante se familiariza con el proceso que lo conduce a un nuevo concepto. La condensación es un período de "ajuste". En esta etapa, el estudiante es capaz de percibir un proceso como un todo, sin tener que recurrir a los detalles. La reification, por lo tanto, se define como un cambio ontológico — una súbita habilidad para ver algo familiar a una nueva luz. Así, mientras la interiorization y la

condensación son graduales, cambios más cuantitativos que cualitativos, la reification es un gran salto instantáneo: un proceso solidifica en un objeto, en una estructura estática.

Algunos estudian los errores conceptuales y dificultades del concepto (Markovits, Eylon y Bruckheimer, 1986, 1988; Hitt, 1987, 1989). Cuando investigaron las dificultades que los estudiantes de secundaria tienen con el concepto de función, analizaron los estadios a través de los que pasan los estudiantes (o a través de los que podrían pasar) cuando aprenden de forma explícita las funciones. "Primero aprenden que una función está compuesta de tres subconceptos: dominio, rango y criterio de correspondencia. Después aprenden que las funciones pueden representarse de varias formas, diagramas, representaciones verbales, gráficas y algebraicas".

Otros se centran en las diferentes componentes y representaciones de las funciones, así como de la interpretación de las gráficas de las funciones (Bell y Janvier, 1981; Clement, 1985; Ponte, 1985; R. Duval, 1988; Hitt, F., 1996.

Las investigaciones llevadas a cabo por Janvier relativas a la comprensión de las representaciones gráficas, estudiadas normalmente en alumnos de Secundaria, han tenido mucha repercusión en el campo de la Educación Matemática. Observó que generalmente, a los alumnos les pedimos después de construir una gráfica, cuestiones que se podrían haber contestado directamente desde la misma tabla numérica: "Esto nos hace pensar que las gráficas se usan más como tablas que para obtener de ellos informaciones más generales y significativas. Las gráficas se usan más como tablas que como instrumentos de información global." (Bell y Janvier, 1981, pág.35)

Algunos investigadores han desarrollado micromundos como el de Schoenfeld et al. (1990), o taxonomías del concepto de función como en Lovell (1971) y, Dreyfus y Einseberg (1983b); O estudios de múltiples representaciones como el de Kaput (1987).

Algunos de los resultados de estas investigaciones son los siguientes:

- Los trabajos que previamente construyeron modelos teóricos y obtuvieron sus resultados a través de cuestionarios adaptados a la enseñanza convencional sobre la noción de función (Vinner, Tall, Dreyfus, Sfard, Dubinsky, Bakar, Even.) conducen a determinar las "concepciones erróneas" que los estudiantes adquieren durante su aprendizaje y en algunos casos, a contrastarlos con los adquiridos a través de nuevas formas de enseñanza y en general concluyen que:

"*El concepto de función es inherentemente difícil para los alumnos cualquiera que sea el método de enseñanza*." (Ruiz, 1993)

- Las investigaciones que tienen como punto central las diversas componentes y representaciones de la noción de función (Marnyanski, Thomas, Bell, y Janvier, Markovits et. al, Eisenberg.) en general concluyen que:

"*Los estudiantes, hasta los de más alto nivel intelectual, se quedan en los niveles más bajos de comprensión de la noción de función*." (Ruiz, 1993)

- Los errores de los estudiantes indican la existencia de obstáculos cognitivos y epistemológicos. Según Sierpinska "*Los obstáculos epistemológicos son dificultades inherentes, relacionados con conceptos complejos como el de función*". Con frecuencia estas dificultades ocurren en la evolución histórica del concepto y también representan dificultades cognoscitivas para el estudiante.

Las percepciones erróneas que tienen los estudiantes se deben a la tendencia natural a sobregeneralizar su experiencia con los primeros ejemplos utilizados en la introducción del concepto de función. Aunque las sobregeneralizaciones ocurren de manera natural, se pueden

convertir en obstáculos en la construcción de una noción de función más global (Hercovics, 1989)

La variedad de concepciones erróneas y dificultades que se reportan en la literatura revelan las siguientes cuatro grandes áreas de problemas esenciales en el aprendizaje de las funciones:

- no considerar el dominio y el rango de las funciones,
- una tendencia por la regularidad,
- un enfoque puntual (en las gráficas); y
- una separación entre el contexto gráfico y el algebraico.

Los estudiantes tienen una fuerte tendencia hacia las ecuaciones. La imagen de la función como una ecuación, se caracteriza por que los estudiantes se centran en la formula sin considerar el dominio y el rango. Como consecuencia, muchos estudiantes los ignoran al construir graficas o en sus definiciones.

Los estudiantes han tenido siempre presente un deseo de regularidad para buscar modelos reconocibles en orden para determinar si un determinado gráfico era, o no, aceptable. Esto se manifestaba al no considerar como gráficas de funciones las gráficas irregulares, al manifestar sus preferencias por las correspondencias uno a uno, a su fuerte tendencia a la linealidad y a su inclinación a unir los puntos en las gráficas. Esta tendencia de los estudiantes a observar las gráficas como puntos individuales se manifiesta de varias formas: su discretización de datos continuos, su falta de utilización del modelo de una gráfica para determinar su ecuación y su desproporcionado énfasis en los puntos singulares tales como máximos y mínimos y no en los intervalos (Leinhard et. al, 1991, pág. 43)

3. Aspectos cruciales para la comprensión del concepto de función

Por otro lado, en la literatura revisada existe un consenso general en relación sobre qué aspectos son cruciales para una profunda comprensión del concepto de función. Las áreas identificadas incluyen:

- Interpretación de funciones representadas por gráficas
- Descripción de situaciones, fórmulas y tablas.
- Modelación de situaciones del mundo real.
- Transferencia entre las múltiples representaciones de las funciones.
- Análisis de los efectos de cambio en los parámetros de las gráficas de las funciones.
- Aplicación de la tecnología para representar las funciones.

De este análisis se desprenden, entre otras, las siguientes ideas para la enseñanza del concepto de función:

- La propuesta de Sierpinska de introducir la definición de función a través de una definición informal de Dirichlet, que coincide con la opinión de Sfard de no utilizar una descripción estructural para introducir una nueva noción matemática.
- Introducir los conceptos del tema Funciones a través de problemas prácticos de la vida real, para que el alumno los asocie con conceptos familiares como sugiere Marnyanski.
- Además de que una comprensión general del concepto debe de incluir el ser capaces de utilizarlo en campos no matemáticos como lo sugieren Markovits et al.
- Se debe de hacer un uso extensivo de las tablas numéricas, siguiendo la evolución histórica del concepto de función, ya que han representado un instrumento de cognición y organización de la información a lo largo de la historia, y como apunta Sierpinska

proporcionan contextos matemáticos dentro de los cuales se hacen relevantes niveles más profundos de la noción de función.

- Que el alumno enfrente, y realice tareas de transformación, y de conversión de representaciones entre al menos dos sistemas de representación, como sugieren Thomas; Even; Sierpinska; Janvier).

4. Conclusión

El análisis de la evolución histórica del concepto de función así como de las investigaciones relacionadas con él nos muestran que éste es un concepto muy complejo, que no es fácil de enseñar y aprender, y nos muestran también la existencia de concepciones erróneas, inconsistencias en el pensamiento funcional de los alumnos, así como las dificultades por las que atraviesan durante el aprendizaje de este concepto. Pero no todo es negativo, también nos muestran los estadios a través de los cuales pasan los alumnos en la comprensión del concepto, la determinación de las componentes básicas en su comprensión, así como los aspectos cruciales en la comprensión de este complicado concepto.

Bibliografía

Bell, A. & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphics representing situations. For the learning of Mathematics. 2, (1), 33-42

Breidenbach, D. Dubinsky, E. Hawks, H., Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. Educational Studies in Mathematics. 23, 243-239

Clement, J. (1985) Misconceptions in graphing. Proceedings of the 9 Int. Conf. PME Vol. 1, 369-375. L. Streefland, Eds.

Dreyfus, T., Eisenberg, T. (1981). *Functions Concepts: Intuitive Baseline*. Proceedings of the 5 Int. Conf. PME. 183-185.

Dreyfus, T., Eisenberg, T. (1983). *The function concept in college students linearity smoothenes and periodicity*. Focus on Learning Problems in Mathematics 5, 119-132.

Dreyfus, T., Vinner, S. (1989). *Images and definitions for the concept of function*. Journal for Research in Mathematics Education, 20. 356-366.

Dubinsky, E. y, Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. En G. Harel y E. Dubinsky (eds.). The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, Vol. 25, pp.. 85-106.

Duval, R. (1988). *Graficas y ecuaciones: La articulación entre dos registros*. Annals de Didactique et de Sciences Cognitives 235-253. (Versión español CINVESTAV-IPN)

Even, R. (1990). *Subject matter knowledge for teaching and the case functions*. Educational Studies in Mathematics, 21, 521-544.

Even, R. G. Lappan and W. Fitzgerald (1988). *Pre Service Teachers Conceptions of the Relationship Between Functions and Equations.* Proceedings of the Annual Meeting of PME-NA, pp. 283-289. DeKalb, II; Northen Ilinois University.

Ferrini-Mundy, Graham, K. (1991). *Research in calculus learning: understanding of limits derivatives and integrals*. Paper presented at the Joint Mathematics meeting, Special session on Research in Undergraduate Mathematics Education, 1991. S. Fco.

Hitt, F. (1987). Obstáculos en el aprendizaje de función. Memorias 1a. Reunión Cent. y del Caribe sobre formación de profs. E Invs. Mat. Educ. 245-248.

Hitt, F. (1989). *Construction of function contradiction and proof.* Proceedings PME, Paris.

Lovell, K. (1971) *Some aspects of the growt of the concept function.* In M. F. Rosskopf, L. P. Steffe and S. Taback (Eds.) Piagetian cognitive developmente research and mathematical education, pp. 12-33. Washington, DC. National Council of mathematics.

Marnyanskii, I. A. (1975) *Psychological characteristics of Pupils Assimilation of the Concept of Function.* In J. Kilpatrick Y, Wirsoup, E, Begle, and J. Wilson (Eds.) Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics, v. 13, pp. 163-172. Chicago. University of Chicago Press.

Markovits, Z., Eylon, B. S. & *Bruckheimer*, M. (1986*). Functions today and yesterday.* For the Learning of Mathematics. Vol. 6, No.2, pág. 18-24.

Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M.(1988). *Difficulties students have with the function concept.* In A. F. Coxford and A. P. Shulte (Eds.). The Ideas of Algebra. 1988 Yearbook, pp.. 43-60. Reston, VA: NCTM.

Orton, A. (1970). *A Cross sectional study of the development of the Mathematical Concept of Function in Secondary School of Average and Above Average Ability.* Master thesis Univ. Leeds

Ruiz, H. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Borrador de Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada, España.

Sfard, A. (1989*).* Transition *from operational to structural conception: the notion of function revisited*. Proceedings of the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3 (pp.. 151-158). Paris, France.

Sierpinska, Anna, (1992). *On understanding the notion of function.* The Concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Mathematical Association of America. Notes Series, Vol. 25, págs. 23-58.

Schoenfeld, A.; Smith, J.; Arcavi, A. (1990). *Learning- the microgenetic analysis of one student's understanding of a complex subject matter domain*; in R. Glaser (ed.) Advanced in Inst. Psychology. Erlbaum, Hillsdale.

Sierpinska, A. (1988). *Epistemological remarks on functions*. Proceedings of 12 Inter. Conf. of PME.

Thomas, H. L. (1971). *The concepto of function.* Paper presented at anual meeting of The american Educational association, february 4-7, New York. (Eric Document Reproduction Services No. ED. 049926).

Thomas, H. L. (1975). The concept of function. Children's Mathematical Concepts. Six Piagetian Studies in Mathematics education New York: Teachers College Press.

Vinner, S. (1983). *Concept definition, concept image and the notion of function.* The International Journal of Mathematical Education in science and technology, 14, 293-305.

Vinner, S. and T. Dreyfus (1989). *Image and Definitions for the Concept of Function*. Journal for Reaserch in mathematics Education., 20(4), 356-366.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México.
Mosaicos Matemáticos 27, Marzo, 2008, pp. 41-47.

Nivel: Medio Superior y Superior

SEGUIMIENTO DE ESTUDIANTES A TRAVÉS DE LOS ERRORES ALGEBRAICOS

José Luis Díaz Gómez, Lina Morales Peral
Departamento Matemáticas, Universidad de Sonora

email: jdiaz@gauss.mat.uson.mx; lina@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Al álgebra se le dedica un tiempo importante de instrucción en el nivel de secundaria y preparatoria, sin embargo los estudiantes que ingresan a la universidad tienen dificultades con la comprensión y manejo de conceptos fundamentales relacionados con ella. La presencia de errores algebraicos obstaculiza con frecuencia la articulación exitosa, y resulta por ello imprescindible un adecuado diagnóstico con el propósito de incidir sobre ellos. En este trabajo se presentan los resultados de la aplicación de un examen diagnostico de álgebra a un grupo de estudiantes que tiene los siguientes propósitos: (a) detectar los errores algebraicos mas frecuentes, (b) detectar los temas de álgebra en los cuales los alumnos tienen mas dificultades, (c) hacer un seguimiento del comportamiento de los alumnos a través de su paso por los cursos de Cálculo Diferencial, Cálculo Integral y Ecuaciones Diferenciales.

1. Introducción

En el ámbito de la educación matemática los errores aparecen permanentemente en las producciones de los alumnos: las dificultades de distinta naturaleza que se generan en el proceso de aprendizaje se conectan y refuerzan en redes complejas que obstaculizan el aprendizaje, y estos obstáculos se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas.

Matz (1980) distingue dos fases en la conducta de los alumnos ante un problema: en la primera, el conocimiento previo sobre el tema toma la forma de una regla o fórmula a aplicar, mientras que en la segunda se ponen en juego un conjunto de técnicas de extrapolación que actúan de nexo entre las reglas conocidas y los problemas que no son familiares. Los errores sistemáticos en los que incurren los alumnos en la resolución de problemas son, según este autor, el resultado de un fracasado intento por adaptar conocimientos, adquiridos previamente, a una nueva situación. Brousseau, Davis y Werner (1986), señalan, en el mismo sentido, que los errores son el resultado de un procedimiento sistemático imperfecto que el alumno utiliza de modo consistente y con confianza.

En la actualidad el error es considerado parte inseparable del proceso de aprendizaje. Los investigadores en educación matemática sugieren diagnosticar y tratar seriamente los errores de los alumnos, discutir con ellos sus concepciones erróneas, y presentarles luego situaciones matemáticas que les permitan reajustar sus ideas.

Al álgebra se le dedica un tiempo importante de instrucción en el nivel de secundaria y preparatoria, sin embargo los estudiantes que ingresan a la universidad tienen dificultades con la comprensión y manejo de conceptos fundamentales relacionados con ella.

En nuestro ámbito de trabajo el primer año de universidad de la carrera de Químico Biólogo (Q.B.), la presencia de errores algebraicos obstaculiza con frecuencia la articulación exitosa, y resulta por ello imprescindible un adecuado diagnóstico que sustente una postura

superadora. Con este objetivo iniciamos un proyecto cuyo primer objetivo es tratar de responder a las siguientes preguntas:
¿Qué parte del álgebra no conocen los estudiantes?, ¿qué tipo de errores algebraicos cometen con más frecuencia los alumnos que comienzan estudios universitarios?, ¿pueden los errores algebraicos detener el avance de los estudiantes hacia el siguiente curso?, ¿tienen razón los profesores cuando dicen que los alumnos no saben álgebra? y que ¿por eso no aprueban el curso de cálculo?

Para intentar dar una respuesta a estas preguntas aplicamos un examen de opción múltiple de álgebra a una muestra de estudiantes que cursan la materia de Cálculo Diferencial. El examen de álgebra tiene la característica de que cada pregunta contiene como opciones de respuesta errores algebraicos que con gran frecuencia cometen los alumnos. Aquí mostramos algunos resultados de este trabajo.

2. Fundamentos teóricos

El error es posible en todo proceso de adquisición y consolidación de conocimientos. El conocimiento humano es falible, esto es: unida a la capacidad que tiene el ser humano de conocer, se halla siempre presente la posibilidad de que conceptos y procedimientos deficientemente desarrollados, y aún completamente equivocados, sean considerados como verdaderos. Así ha ocurrido en numerosas oportunidades a lo largo de la historia, en que se han tenido por verdaderas concepciones que luego fueron rechazadas por no explicar adecuadamente la realidad.

Bachelard (1988) introdujo el concepto de obstáculo epistemológico para explicar la aparición de los errores en la conformación del conocimiento. Señala que los entorpecimientos y confusiones, que causan estancamientos y retrocesos en el proceso del conocimiento, provienen de una tendencia a la inercia, a la que da el nombre de *obstáculo*: se conoce *en contra* de un conocimiento anterior (insuficiente o adquirido deficientemente) que ofrece resistencia, la mayoría de las veces porque se ha fijado en razón de haber resultado eficaz hasta el momento; cuando se lo pretende utilizar en un contexto o una situación inadecuada, se produce el error.

Brousseau (1983) tomó las ideas de Bachelard y las desarrolló en el ámbito específico del aprendizaje de la matemática. En su trabajo distingue entre obstáculos de origen *psicogenético*, que están vinculados con el estadio de desarrollo del aprendiz, los de origen *didáctico*, vinculados con la metodología que caracterizó al aprendizaje, y los de origen *epistemológico*, relacionados con la dificultad intrínseca del concepto que se aprende y que pueden ser rastreados a lo largo de la historia de la matemática, en la génesis misma de los conceptos. En todos lo casos se destaca el carácter de resistentes que presentan estos obstáculos, y es necesaria su identificación, para luego alcanzar los nuevos conocimientos a partir de su superación.

El aprendizaje de las matemáticas genera muchas dificultades a los alumnos que son de diferente naturaleza. Algunas tienen su origen en el microsistema educativo, pero en general, su procedencia se concreta en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Las dificultades, por tanto, pueden abordarse desde varias perspectivas según pongamos énfasis en uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza.

Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores.

3. Errores en Matemáticas

Las teorías cognitivas sostienen que la mente del alumno no es una página en blanco: el alumno tiene un saber anterior, y estos conocimientos anteriores pueden ayudar al nuevo conocimiento, pero a veces son un obstáculo en la formación del mismo. El conocimiento nuevo no se agrega al antiguo, sino que lucha contra él y provoca una nueva estructuración del conocimiento total. Los errores cometidos por los alumnos en matemática son una manifestación de esas dificultades y obstáculos propios del aprendizaje, y se acepta unánimemente que es necesaria la detección y análisis de los mismos, y su utilización positiva en una suerte de realimentación del proceso educativo.

Mulhern (1989) señala las siguientes características de los errores:

- Surgen, por lo general, de manera espontánea y sorprenden al profesor.
- Son persistentes y difíciles de superar, ya que requieren una reorganización de los conocimientos en el alumno.
- Pueden ser sistemáticos o por azar: los sistemáticos son más frecuentes y revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada, y los cometidos por azar son ocasionales.
- Muchas veces los alumnos no toman conciencia del error ya que no comprenden acabadamente el significado de los símbolos y conceptos con que trabajan.

Hay patrones consistentes en los errores a dos niveles: a nivel individual, ya que las personas muestran gran regularidad en su modo de resolver ejercicios y problemas similares, y a nivel colectivo, ya que distintas personas cometen errores semejantes en determinadas etapas de su aprendizaje. En razón de esta regularidad con la que suelen presentarse, varios autores han elaborado clasificaciones de los errores en el aprendizaje de la matemática, ya sea por su naturaleza, su posible origen o su forma de manifestarse, puesto que nuestra intensión en este trabajo no es clasificar los errores algebraicos no las profundizaremos en ello.

4. Sobre el diagnóstico

Sin duda es innegable que una gran cantidad de alumnos llegan a la carrera de Q. B. con un bajo nivel de conocimientos antecedentes, motivados entre otros factores por programas de estudios de bachillerato que por lo regular no se cubren. Esto ocasiona que los estudiantes tengan un bajo aprovechamiento en el curso de cálculo.

Un tema importante y prerrequisito necesario para el cálculo es el álgebra, que según comentarios de los profesores que imparten el curso de cálculo, "*los alumnos no saben álgebra*", y es por eso que no tienen éxito en aprobar el curso. Esto sin tomar en cuenta otros temas también importantes como trigonometría, geometría y geometría analítica.

Al álgebra se le dedica un tiempo importante de instrucción en los niveles de secundaria y preparatoria, sin embargo, los estudiantes que ingresan a la carrera de Q. B. tienen dificultades con la comprensión y manejo de conceptos fundamentales relacionados con ella.

Estas consideraciones nos llevaron a realizar este trabajo con el objetivo de profundizar en la comprensión sobre cuáles son las dificultades que tienen los estudiantes que ingresan a las carreras de Q. B. al resolver ejercicios y problemas que involucran conocimientos algebraicos. El estudio lo realizamos analizando la información obtenida a partir de la aplicación de un examen de diagnóstico, sobre álgebra, a 201 alumnos del primer semestre del curso de Cálculo en su mayoría de nuevo ingreso.

La bondad del instrumento de medición y la importancia estadística de la muestra, nos permite afirmar que las conclusiones obtenidas pueden servir no sólo como una medida del nivel de logro, sino como un elemento de reflexión. Los temas analizados son: Operaciones con racionales, Desarrollo binomial, Leyes de cancelación, Términos Semejantes, Exponenciación, Ley Distributiva, Uso del Cero, Factorización y Despeje de Variables. Medidos a través de errores algebraicos que cometen los estudiantes cuando trabajan con estos temas.

Al momento de aplicar el examen, los estudiantes no habían recibido antes un curso propedéutico sobre álgebra así que podemos suponer entonces que los resultados reflejan los conocimientos recibidos en los niveles de secundaria y preparatoria. En este marco situamos las pruebas de diagnóstico, a las que podemos asignar los siguientes objetivos específicos:

- Retroalimentar al sistema escolar preuniversitario regional para que pueda optimizar sus esfuerzos en mejorar la enseñanza de la matemática.
- Informar a los docentes del curso de cálculo el nivel de conocimientos de los alumnos, con el fin de que puedan diagramar una enseñanza acorde a la situación real.
- Alertar a los propios estudiantes acerca del nivel de sus conocimientos matemáticos.

5. Sobre el examen diagnóstico de álgebra

El examen consta de 28 preguntas de opción múltiple y es el resultado de una investigación que se realizó sobre los errores de álgebra mas frecuentes entre los estudiantes de los niveles desde secundaria hasta la universidad (Díaz, 1995)

Cada pregunta consta de 4 opciones, las primeras tres (A, B, C) representan errores que con frecuencia cometen los estudiantes al realizar operaciones algebraicas. En la cuarta opción (D) se espera que los estudiantes escriban la respuesta correcta, ya que en las opciones de cada pregunta no se encuentra la respuesta correcta. El examen si bien no es exhaustivo sobre el algebra, si representa una muestra de temas que son básicos para el curso del cálculo. Un ejemplo de una pregunta es la siguiente:

19. ¿Al efectuar la operación $\left(a^2\right)^3$ se obtiene como resultado?

(A) a^5 (B) a^2a^3 (C) a^8 (D) Ninguno de los anteriores. Da tu propia respuesta.

6. Análisis de las respuestas

Al aplicar el examen se les hizo hincapié a los estudiantes que primero resolvieran cada problema de cada pregunta y después contestarán la pregunta. Se espera que los estudiantes contesten D y den la respuesta correcta. A aquellos que seleccionaron D y no dieron una respuesta se les tomo como respuesta incorrecta. Es claro que las opciones A, B, C, son respuestas incorrectas.

6.1. Resultados sobre los errores

La siguiente tabla nos muestra algunos de los errores que con más frecuencia seleccionaron los alumnos en el examen.

Error	%	Error	%	Error	%
$a^3 - b^3 = (a - b)^3$	41	a(b/c) = ab/ac	56	k/0 = 0	65
$(x - y)^2 = x^2 - y^2$	33	$c^2 = a^2 + b^2$, c = a + b	29	$a^{12} / 5\, a^4 = 4\, a^3$	48
$(a^2)^3 = a^5$	52	cb = a + b, c = a	33	$a/a(a + b) = a + b$	49
$x^3 - x^2 = -x^5$	31	$z^2 = x + y$, $z = \sqrt{x} + y$	42	$x^0 = 0$	36
$2x(x - 1) = 2x^2 - 2$	34	x + y = xy	55	$4x^2 - 9 = (2x - 3)^2$	33
$a^m + a^n = a^{m+n}$	39	2/3 x 5/4 = 8/15	38	a(x)(y) = (ax)(ay)	52

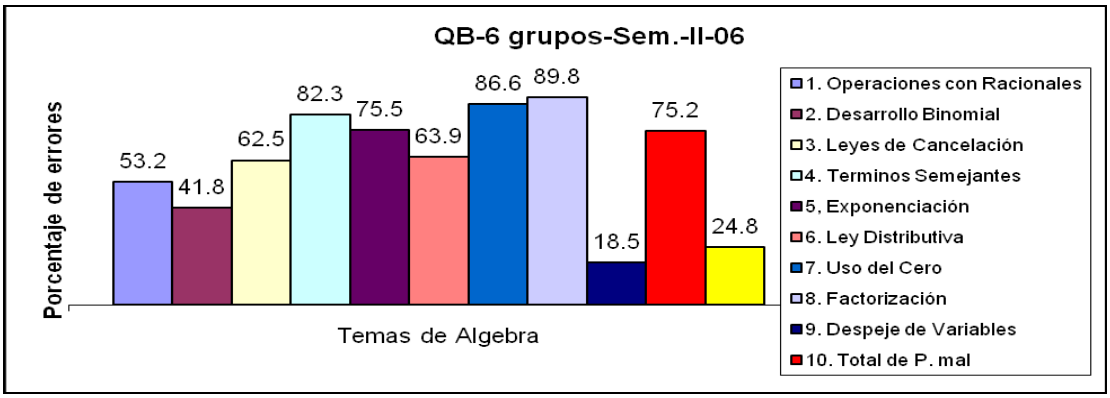
Se encontró un error no contemplado en el examen que 56 de los alumnos dieron como respuesta en la opción D y es el siguiente: $x^3 - x^2 = x$.

6.2. Resultados sobre los temas de álgebra

Los resultados que se muestran son un porcentaje de las *respuestas incorrectas* que obtuvieron los alumnos encuestados en cada uno de los temas de álgebra. En la gráfica aparecen de izquierda a derecha:
El 53.2% de los estudiantes tienen problemas con las Operaciones con racionales.
El 41.8% tiene problemas con el desarrollo binomial, etc.

6.3. Resultados globales del examen

75.2% es el total de respuestas incorrectas al examen diagnóstico.
El 24.8 % el total de respuestas correctas al examen.

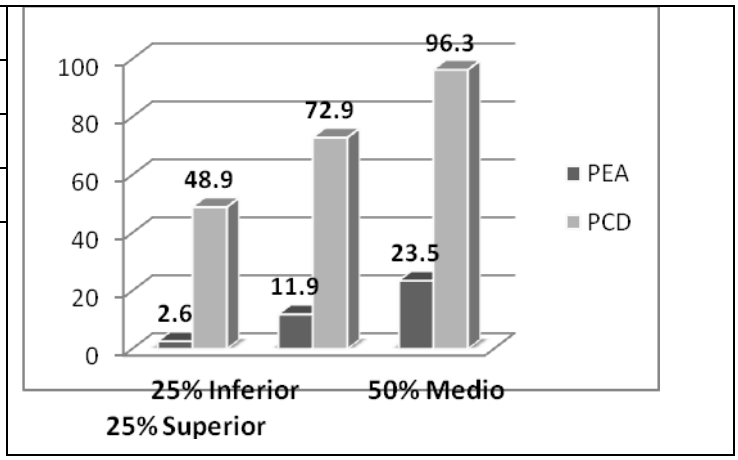


6.4. Resultados por estratos en álgebra y cálculo

Dividimos el número de preguntas del examen en tres estratos para analizar el comportamiento de la muestra, los resultados son los siguientes.
El 25% superior representa el número de alumnos que obtuvieron de 28 a 22 aciertos.
El 50% medio representa el número de alumnos que obtuvieron entre 7 y 21 aciertos
El 25% inferior representa el número de alumnos que obtuvieron de 0 y 6 aciertos.

Al final del curso de Cálculo Diferencial se recopilaron las calificaciones finales para analizar el comportamiento de la muestra en este curso los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Estrato	NE	PEA	PCD
25% Superior	4	23.5	96.3
50% Medio	86	11.9	72.9
25% Inferior	111	2.6	48.9



En la tabla se muestra el número de estudiantes (NE) en cada uno de los estratos y el promedio de aciertos en el examen diagnóstico de álgebra (PEA) y el promedio de las calificaciones que obtuvieron en el curso de Cálculo Diferencial (PCD).

6.5. Comportamiento de los alumnos en los cursos de matemáticas

Los estudiantes de Q. B. cursan durante su carrera tres cursos muy relacionados, Cálculo Diferencial (C. Dif.), Cálculo Integral (C. Int.) y Ecuaciones diferenciales (E. Dif.), se recolectaron las calificaciones finales de estos cursos para ver el comportamiento de los estudiantes, los resultados son los siguientes.

Semestre	Materia	Alumnos	Aprobados%	P.Cal.	P.A.D	Reprobados%	P.Cal	P.A.D.
2006-2	C. Dif	**201**	**60.7**	79.1	9	**39.3**	30.8	4
2007-1	C. Int	**111**	**69.4**	78	10	**30.6**	41.6	7
2007-2	E. Dif.	**51**	**78.4**	77.5	11	**21.6**	32.6	8

Nota: **P. Cal** significa promedio de calificaciones en el curso. **P.A.D.** significa, promedio de aciertos en el examen diagnostico de algebra.

El número de estudiantes que no aprobaron el curso de Cálculo Diferencial fue de 101, es decir el 50%, pero con el examen extraordinario el porcentaje de aprobados subió al 60.7%.

El número de estudiantes a los cuales se les aplicó el examen diagnóstico de álgebra en el curso de Cálculo Diferencial fue de 201, de este grupo de 201, 122 lo aprobaron y sólo 111 se inscribieron en el curso de Cálculo Integral, de este grupo de 111, 77 aprobaron el curso de Cálculo Integral, del grupo de 77 solo 51 se inscribieron en el curso de Ecuaciones Diferenciales, de los cuales sólo 41 aprobaron el curso, la pregunta aquí es donde quedaron los restantes 160, ¿están repitiendo los cursos anteriores?, o ¿desertaron?, o están descansando de las matemáticas. En el curso de Cálculo Diferencial del semestre 2008-1 de la muestra de 201 estudiantes encontramos a 9 cursando por tercera vez la materia y a 6 cursándola por cuarta vez para un examen especial, el promedio de respuestas correctas que tuvieron estos 15 estudiantes en el primer examen diagnóstico de álgebra fue de 2. Le aplicamos el mismo examen diagnóstico de álgebra a 7 de los 15 estudiantes y encontramos que su media de respuestas correctas fue de 7.

En el curso de Cálculo Integral encontramos 15 estudiantes, estos estudiantes han repetido el curos de Diferencial y de Integral o están por tercera ocasión en el de Integral, su media en el examen diagnóstico es de 3.5 aciertos.

7. Conclusiones

Se detectaron los temas de álgebra en los que la muestra de estudiantes tiene poco conocimiento y los errores algebraicos que con más frecuencia cometen. Por otro lado, el examen nos muestra que los alumnos ingresaron con un nivel muy bajo de conocimientos algebraicos y aunque no se puede afirmar categóricamente que aquellos alumnos que tienen un bajo rendimiento en álgebra no aprobarán el curso de cálculo, se tiene evidencia de que los alumnos que muestran un nivel muy bajo repetirán más de una vez el curso de Cálculo.

Bibliografía

Matz, M. (1980). *Towards a computational theory of algebraic competence*. Journal of Mathematical Behavior, 3(1), 93-166.

Bachelard, G. (1978). *La formación del espíritu científico.* México: Siglo XXI.

Brousseau, Guy (1986) *Fundements et méthodes de la didactique des mathématiques*, Recherches en didactique des mathématiques. Vol 7, Nº2.

Brousseau, G., Davis, R., Werner, T. (1986). *Observing Students at Work.* En Christiansen, B, Howson, G., Otte, M. (Eds.). Perspectives on Mathematics Education. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Díaz Gómez, J. L. (1995) *"Un estudio regional sobre errores algebraicos"*. Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. La Habana, Cuba. Agosto de 1995.

Mulhern, G. (1989). *Between the ears: Making inferences about internal process*. En Greer, B. & Mulhern, G. /Eds.) New Directions in Mathematics Education. Londres: Routledge.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México.
Mosaicos Matemáticos 27, Marzo, 2008, pp. 49-54.

HACIA LA CARACTERIZACIÓN DEL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA DE LA MEDIANA.

Lorena A. Durazo G., Enrique Hugues Galindo
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

email: lorenad@gauss.mat.uson.mx; ehugues@gauss.mat.uson.mx

Resumen

El presente trabajo forma parte de uno más general que consiste en diseñar, implementar y evaluar un proceso de instrucción alrededor de la mediana incorporando actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento estadístico en torno a dicho objeto en estudiantes del área químico biológicas, trabajo fundamentado en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Una de las fases de ese trabajo más general consiste en determinar el significado institucional de referencia de la mediana, para lo cual hemos llevado a cabo el análisis de la muestra de libros utilizados en los cursos introductorios de Bioestadística a nivel Superior, revisión de investigaciones relacionadas con nuestro trabajo y de aportaciones de profesores con experiencia en la impartición de cursos de la asignatura. Presentamos aquí los resultados de ese estudio y algunas reflexiones respecto a la planeación de un proceso de enseñanza tomando en cuenta el significado de referencia resultante.

1. Introducción

Este trabajo reporta parte de un proyecto en curso cuyo objetivo general consiste en diseñar, implementar y evaluar un proceso de instrucción alrededor del concepto estadístico de mediana que incorpore actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento estadístico. El proceso de instrucción se planea para un curso de Bioestadística y entre los fundamentos implicados se encuentra el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemática (EOS). Dada la naturaleza de nuestro proyecto, nos hemos hecho las preguntas elementales en didáctica de las matemáticas: ¿Qué es la mediana?, ¿Qué significa conocer a la mediana? y ¿Cómo promover el aprendizaje de la mediana? Para dar respuesta a estas preguntas hemos emprendido una serie de tareas, teniendo que ver lo que aquí se reporta con la primera de ellas, particularmente en el nivel educativo en el cual implementaremos el proceso de instrucción.

En el EOS, dar respuesta a dicha pregunta es caracterizar lo que se denomina significado institucional de referencia de la mediana, consistente en, determinar lo que es la mediana para las instituciones involucradas como la Estadística, la escuela y la didáctica, puesto que nuestro fin es el de proponer un proceso de estudio alrededor de este objeto. De hecho se trata de tener un acercamiento a cuáles son las prácticas operativas y discursivas inherentes al concepto estadístico de mediana. Para ello hubo que realizar una revisión documental considerando en primer término el programa de la asignatura y los libros de texto propuestos en él, así como reportes de investigación relativos al concepto mediana tanto como objeto matemático como en su carácter de objeto didáctico. Posteriormente se indagó entre los profesores con más experiencia acerca de cuáles otros libros utilizaban para planear sus clases, así como sobre las experiencias de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de la estadística, particularmente alrededor de la mediana.

2. Marco Teórico

El enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemática (EOS) es un modelo teórico que aborda la problemática de la fundamentación de la investigación en didáctica de la matemática y que han venido desarrollando Juan Díaz Godino y un grupo de diversos colaboradores. Su estado actual puede ser consultado en http://www.ugr.es/~jgodino/.

Considerando fundamental esclarecer el significado de los objetos matemáticos, el EOS asume como significado del objeto matemático a *"los sistemas de prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego por una persona (o compartidas en el seno de una institución) para resolver una cierta clase de situaciones – problemas"* Godino et al (2003). Estos significados pueden ser institucionales o personales. Nos referiremos en este trabajo a lo que concierne a los significados institucionales.

En este marco teórico se proponen cuatro tipos de significados institucionales:

- *Referencial:* Sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. Para caracterizar este significado de referencia se requiere realizar un estudio histórico-epistemológico-didáctico así como tener en cuenta los contextos de uso del objeto.
- *Pretendido:* Es el sistema de prácticas que se incluye en la planeación del proceso de estudio.
- *Implementado:* Es el sistema de prácticas que realmente se implementó en el salón de clases.
- *Evaluado:* Subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

En la etapa previa al diseño de un proceso de instrucción interesa caracterizar el significado institucional de referencia del objeto matemático en cuestión, el cual en una institución de enseñanza específica este significado es parte del significado holístico del objeto.

En la perspectiva del EOS, el significado del objeto se puede descomponer en los siguientes elementos primarios:

- *Situaciones-problema* (aplicaciones extra-matemáticas, intra-matemáticas, ejercicios, …)
- *Lenguaje* (términos, expresiones, gráficos, tablas, ecuaciones, …)
- *Conceptos* (introducidos mediante definiciones o descripciones: Media, mediana, moda, percentil,…)
- *Proposiciones* (propiedades,…)
- *Procedimientos* (operaciones, técnicas de cálculo, algoritmos,…)
- *Argumentos* (enunciados que se usan para explicar, justificar o validar las proposiciones o procedimientos, …)

3. De los textos analizados

Para caracterizar el significado de referencia de la mediana, en un primer momento nos avocamos a hacer el análisis de los elementos de significado en una muestra de 8 libros de texto relativos al nivel educativo en el cual estamos trabajando. Con la idea de enriquecer ese significado de referencia hallado en los libros, incorporamos el análisis de documentos relacionados tanto con el objeto como con la enseñanza y el aprendizaje de este objeto estadístico.

En la siguiente tabla mostramos la naturaleza del texto analizado, el autor, la fecha de publicación y lo que consideramos una justificación de su elección:

Tipo	Autor y fecha	Justificación
Libros de texto	Daniel (1989), Moore (1993), Steel (1997) y Zar (1984)	Propuestos en el programa de la asignatura
	Milton (1992), Pagano (1993) y Moore (1996)	Existencia en Bibliotecas de la Universidad y utilizados por los maestros para preparar sus clases y por los estudiantes como libros de consulta.
	Ríus (1995)	Este libro se encuentra disponible en internet y frecuentemente es utilizado tanto por maestros como por estudiantes de nuestra Universidad.
Otros documentos	Godino (2003)	Monografía del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática donde se ejemplifica en la mayoría de los casos con la mediana.
	Cobo (2003) y Cobo y Batanero (2000).	En ambos casos se hacen análisis de los elementos de significado de la mediana, se identifican conflictos semióticos potenciales al llevar a cabo actividades matemáticas relativas a este objeto.
	Bakker (2006)	Los autores hacen un análisis del origen y evolución de la media y la mediana con fines de instrucción y hacen una serie de propuestas didácticas para el tratamiento de ambos objetos estadísticos.

4. Significado institucional de referencia de la mediana

Presentamos una lista de los elementos de significado producto del análisis de textos que llevamos a cabo y no el análisis puntual de cada texto debido a que en este trabajo estamos interesados en reflexionar respecto a las implicaciones que el significado institucional de referencia tiene para la instrucción más que en el análisis mismo. En http://www.ugr.es/local/jgodino/ se pueden consultar ejemplos de análisis de texto en el marco del EOS.

Por razones de espacio no incluiremos aquí todos los elementos de significado de la mediana, ejemplificaremos con las situaciones-problema y las proposiciones, describiendo los elementos hallados y aquellos que consideramos que no están contemplados en algunos de los textos.

Concretamente encontramos ejemplos de los siguientes tipos de problemas:

- Encontrar un valor representativo de un conjunto de datos de una

variable estadística cuantitativa con valores atípicos (número par e impar de datos).

- Encontrar un valor representativo de un conjunto de datos de una variable estadística ordinal.
- Buscar un valor representativo de un conjunto de datos de una variable estadística cuantitativa en forma de lista o en una tabla de frecuencias.
- Encontrar la mediana de:
    - Variables continuas con los datos agrupados en intervalos de clase.
    - Variables representadas gráficamente (diagramas de puntos, histogramas, diagramas de cajas,...)
- Estimar un valor representativo de un conjunto de datos cuya distribución es desconocida, a partir de una muestra pequeña y no se conoce con certeza la distribución de la población
- Utilizar la mediana para comparar distribuciones.

En la mayoría de los libros de texto de Bioestadística analizados se plantean ejercicios, que si bien se ubican en un contexto del área de la salud, privilegian los cálculos de las medidas de tendencia central y dejan de lado las interpretaciones y el abordaje de cuestiones de mayor fondo. Para complementar este rubro indagamos tanto con profesores de mayor experiencia impartiendo la asignatura como con algunos profesores de áreas relacionadas con la salud acerca los contextos de uso donde se pone en juego la mediana.

En cuanto a las **propiedades de la mediana** encontramos las siguientes:

Numéricas

La mediana:

- Puede no coincidir con ninguno de los valores de los datos.
- No contempla todos los valores de los datos.
- Es invariante si se disminuye una observación inferior a ella o si se aumenta una superior.

Algebraicas

- No es una operación interna en el conjunto numérico empleado.
- Conserva los cambios de origen y de escala.
- No tiene elemento neutro ni elemento simétrico.
- No tiene la propiedad asociativa.

Estadísticas

- Es una medida de tendencia central, aunque puede no coincidir con el centro del recorrido.
- La mediana es un representante o valor típico de un colectivo.
- Es un estadístico resistente.
- En distribuciones unimodales :
    - Si la distribución es simétrica la mediana coincide con la media y la moda.
    - Si la distribución es asimétrica a la derecha el orden en que

aparecen es moda-mediana-media, y si es asimétrica a la izquierda el orden es media-mediana-moda

- Si la distribución es asimétrica es preferible la mediana a la media como medida de tendencia central.
- Existe mediana en distribuciones en las que los datos son ordinales.
- Es preferible la mediana en distribuciones con datos agrupados en intervalos en los que al menos uno es abierto.

Lo descrito en esta sección es parte de los elementos de significado de la mediana, en el proyecto más general abordamos los lenguajes, conceptos, procedimientos y argumentaciones.

5. Reflexiones finales

En este trabajo presentamos una panorámica del análisis que hemos llevado a cabo para caracterizar el significado institucional de referencia de la mediana. Este significado nos servirá de referencia para diferentes etapas de nuestro proyecto más general: Diseñar o reelaborar un examen diagnóstico, diseñar el proceso de estudio alrededor de la mediana, hacer una comparación entre ese significado y el pretendido y/o implementado y evaluar el grado de acoplamiento entre los significados institucionales y personales de los estudiantes al finalizar el proceso de instrucción. Consideramos que un estudio de esta naturaleza es útil también para que los profesores lleven a cabo diseños de procesos de enseñanza o investigación sobre el tema.

En algunos de los libros analizados se dice que la mediana es un estadístico que es fácil de enseñar y de aprender, llevando a cabo un trabajo de este tipo podemos observar que es un objeto bastante complejo, que tiene distintas definiciones, propiedades de diferente tipo: Numéricas, algebraicas, estadísticas y además de esto se relaciona con otros objetos estadísticos lo que hace que su estudio sea todavía más complejo.

Consideramos que un estudio de este tipo nos permite a los profesores estar conscientes de la complejidad de este objeto, conocer los elementos constitutivos del significado de la mediana y nos da la oportunidad de planificar procesos de enseñanza, hacer investigaciones sobre comprensiones y significados que los estudiantes tienen acerca de ella, entre otros.

Referencias

Bakker, A.; Gravemeijer, K. P. E. (2006). *A historical phenomenology of mean and median*. Educational Studies in Mathematics, 63(1).

Cobo, B.; Batanero, C. : 2000. *La mediana ¿Un concepto sencillo en la enseñanza secundaria?* UNO, 23, 85-96. http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/MEDIANA.pdf.

Cobo, B. : 2003. Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria. *Universidad de* Granada. http://www.ugr.es/local/seiem/publicaciones/tesis_bcobo.pdf

Daniel, W.: 1989. *Bioestadística: Base Para El Análisis De Las Ciencias De La Salud.* 3a. Ed. Editorial Limusa.

Godino, J. D.: 2002. Studying the median: a framework to analyse instructional processes in statistics education. ICOTS6. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/1/6b1_godi.pdf

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Monografía de Investigación para el Concurso a Cátedra de Universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
http://www.ugr.es/local/jgodino

Godino J., D.; Batanero C.; Font V.: 2006. *Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino J., D.; Font V.: 2007. *Algunos Desarrollos de la Teoría de los Significados Sistémicos*. http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino J., D.; Font V.; Wilhelmi M., R.: 2007. *Análisis Ontosemiótico de una Lección sobre la Suma y la Resta*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (Especial): 133-156.

Milton, J. S.: 1992. *Statistical methods in the biological and health sciences.* 2a. Ed. Editorial McGraw -

Moore, D. S.: 1993. *Introduction to the practice of statistics.* 2a ed. Editorial W. H. Freeman.

Moore D. S.: 1996. *The Basic practice of statistics*. Editorial W.H. Freeman.

Pagano, M.: 1993. *Principles of biostatistics*. Editorial Duxbury Press.

Ríus D. F.: 1995. *Bioestadística: Métodos y Aplicaciones*. Versión electrónica: http://www.bioestadistica.uma.es/libro/

Steel, R. G.:1997. *Bioestadística: Principios y procedimientos.* Editorial McGraw-Hill.

Zar, J. H.: 1984. *Biostatistical Analysis*. 2a ed. Editorial Prentice – Hall.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo, 2008, pp. 55–60.

ORBIDADES

Jesús F. Espinoza

Instituto de Matemáticas - UNAM,
Unidad Cuernavaca

e-mail: jesus@matcuer.unam.mx

Resumen

El concepto de orbidad fue introducido en la década de los 50, por I. Satake con el nombre de V-variedad, como una generalización de variedad diferenciable en el contexto de la topología y la geometría diferencial. Una orbidad consiste en un espacio topológico Hausdorff paracompacto, que localmente es modelado como el cociente de un abierto en $\mathbb{R}^n$ por un grupo finito. Este concepto fue de poco interés para los matemáticos durante bastante tiempo. Sin embargo, esta situación cambió totalmente con la aparición de la Teoría de Cuerdas en la física.

Mostraremos la definición original dada por Satake e introduciremos el lenguaje de grupoides para reformular la noción de V-variedad en el contexto de la Teoría de Categorías. Mostraremos algunas ventajas de usar este lenguaje introduciendo algunos invariantes topológicos de estos espacios que son comunmente estudiados para variedades diferenciables y concluiremos mostrando algunos problemas actualmente abiertos.

1 Introducción

Las *orbidades* se encuentran en una gran variedad de áreas tales como la geometría diferencial, geometría algebraica, topología y teoría de cuerdas, entre otras. Aunque éstas han sido estudiadas hace ya bastante tiempo como espacios singulares en geometría algebraica, fue en la década de los 50 cuando I. Satake [5] las introdujo con el nombre de *V-manifolds*, en el contexto de la topología y la geometría diferencial. Posteriormente, en la década de los 70, Thurston [6] las estudió más seriamente en su programa de geometrización de 3-variedades y usó por primera vez el nombre de *orbidad*[1].

A grandes rasgos, una orbidad es un espacio topológico Hausdorff paracompacto que localmente se ve como un cociente de un abierto de $\mathbb{R}^n$ por un grupo finito. Ejemplos de orbidades son las variedades mismas y cocientes de la forma M/G, con M una G-variedad diferenciable y G un grupo de Lie compacto que actúa de manera efectiva y casi libre sobre M.

Al igual que para variedades diferenciables, a las orbidades se le pueden asignar distintos invariantes topológicos que permiten clasificarlas, y que además nos ayudan a entender y estudiar ciertos aspectos globales acerca del espacio en cuestión. Uno de estos invariantes, conocido como Teoría K (cf. [2]), es de particular importancia por su relación con áreas tales como la Teoría de Cuerdas en física.

[1] El nombre original fue *orbifold*, en inglés.

2 Definición local

La definición que establecemos en esta sección es equivalente a la definición que dio I. Satake, y en el lenguaje actual corresponde a la definición de *orbidad reducida*. Esta definición es establecida en términos locales y es fácil notar por qué es una generalización del concepto de variedad diferenciable.

Definición. *Sea X un espacio topológico y $n > 0$ fijo.*

- *Una carta de orbidad de dimensión n para X es dada por un subconjunto abierto conexo $\widetilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, un grupo finito G de automorfismos de $\widetilde{U}$, y una aplicación $\phi : \widetilde{U} \to X$ que es G-invariante e induce un homeomorfismo de $\widetilde{U}/G$ sobre un subconjunto abierto $U \subseteq X$.*

- *Un encaje $\lambda : (\widetilde{U}, G, \phi) \to (\widetilde{V}, H, \psi)$ entre dos cartas de orbidad es un encaje suave $\lambda : \widetilde{U} \hookrightarrow \widetilde{V}$ tal que $\psi\lambda = \phi$.*

- *Un atlas de orbidad sobre X es una familia $\mathcal{U} = \{(\widetilde{U}, G, \phi)\}$ de cartas de orbidad la cual cubre X y son localmente compatibles, es decir, para cualesquiera dos cartas $(\widetilde{U}, G, \phi)$ con $U = \phi(\widetilde{U}) \subseteq X$ y $(\widetilde{V}, H, \psi)$ con $V \subseteq X$ y un punto $x \in U \cap V$ existe una vecindad abierta $W \subseteq U \cap V$ de x y una carta $(\widetilde{W}, K, \mu)$ para W tal que existen encajes $(\widetilde{W}, K, \mu) \hookrightarrow (\widetilde{U}, G, \phi)$ y $(\widetilde{W}, K, \mu) \hookrightarrow (\widetilde{V}, H, \psi)$.*

- *Un atlas $\mathcal{U}$ se dice que es un refinamiento del atlas $\mathcal{V}$ si para toda carta en $\mathcal{U}$ existe un encaje sobre alguna carta de $\mathcal{V}$. Dos atlas para orbidad se dicen ser equivalentes si tienen un refinamiento en común.*

Definición. *Una orbidad efectiva X de dimensión n es un espacio Hausdorff paracompacto X con una clase de equivalencia $[\mathcal{U}]$ de atlas de orbidad de dimensión n.*

Puede observarse fácilmente que si en la definición anterior tomamos a G como el grupo trivial, entonces lo que obtenemos es precisamente la definición de una variedad diferenciable.

3 Orbidades como grupoides

A continuación introduciremos la noción de orbidad haciendo uso del lenguaje de la Teoría de Categorías. Esta manera de estudiar la teoría de orbidades nos da un gran alcance y permite establecer distintos conceptos topológicos de una manera muy sencilla, como veremos en la siguiente sección. Para mas detalles sobre este enfoque consúltese [4].

Un *grupoide topológico* $\mathcal{G} = (G_0, G_1)$ es una categoría pequeña que consiste de un espacio topológico G_0 de objetos y un espacio topológico G_1 de morfismos o flechas, junto con cinco funciones estructurales:

- *Inicio* $s : G_1 \to G_0$; si $g : x \to y$, $s(g) = x$

- *Final* $t : G_1 \to G_0$; si $g : x \to y$, $t(g) = y$

- *Composición* $m : G_1 \ {}_s\!\times_t G_1 \to G_1$, definida por $m(h, g) = hg$

- *Unidad* $u : G_0 \to G_1$; $u(x) = 1_x : x \to x$
- *Inverso* $i : G_1 \to G_1$; si $g : x \to y$, entonces $i(g) = g^{-1} : y \to x$.

Un grupoide topológico $\mathcal{G}$ es un *grupoide de Lie* si G_0 y G_1 son variedades diferenciables, las funciones estructurales s, t, m, u e i son suaves y, $s, t : G_1 \to G_0$ son submersiones (de tal manera que $G_1 \ {}_s\!\times_t G_1 \to G_1$ es una variedad diferenciable)

Ejemplo. Un ejemplo particularmente importante es el *grupoide traslación*. Si G es un grupo de Lie que actúa suavemente (por la izquierda) sobre una variedad M, el *grupoide traslación* $G \ltimes M$ consiste del grupoide de Lie cuyos objetos son los puntos $x \in M$,

$$(G \ltimes M)_0 = M,$$

y las flechas $g : x \to y$ corresponden a aquellas $g \in G$ tales que $g \cdot x = y$, esto es,

$$(G \ltimes M)_1 = G \times M,$$

y las funciones inicio y final $s, t : G \times M \to M$ son la proyección y la acción en G, respectivamente.

Para un grupoide de Lie $\mathcal{G}$ y $x \in G_0$, el conjunto de flechas de x en si mismo es un grupo de Lie, denotado por G_x y llamado *grupo de isotropía en* x. El conjunto $ts^{-1}(x)$ de finales (extremos) de flechas que inician en x es llamado la *órbita* de x. El conjunto de todas las órbitas de G_0 es llamado el *espacio de órbitas* de $\mathcal{G}$ y se denota por $|\mathcal{G}|$

Decimos que un grupoide $\mathcal{G}$ es *propio* si $(s, t) : G_1 \to G_0 \times G_0$ es una propia y que es etale si s y t son difeomorfismos locales. Definimos un *grupoide orbidad* como un grupoide de Lie propio y etale.

Si $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son grupoides de Lie, un *homomorfismo* $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ consiste de dos funciones suaves,

$$\phi_0 : H_0 \to G_0 \quad \text{y} \quad \phi_1 : H_1 \to G_1\,,$$

que juntas conmutan con todas las funciones estructurales de los grupoides $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$.

Un homomorfismo $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ entre grupoides de Lie, es una *equivalencia* si la función $t\pi_1 : G_1 \ {}_s\!\times_\phi H_0 \to G_0$ es una submersión sobreyectiva, y el cuadrado

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "(s,t)"'] & G_1 \arrow[d, "(s,t)"] \\ H_0 \times H_0 \arrow[r, "\phi\times\phi"] & G_0 \times G_0 \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. Dos grupoides de Lie $\mathcal{G}$ y $\mathcal{G}'$ se dicen ser *Morita equivalentes*, si existe un tercer grupoide $\mathcal{H}$ y dos equivalencias

$$\mathcal{G} \xleftarrow{\phi} \mathcal{H} \xrightarrow{\phi'} \mathcal{G}'$$

La relación Morita equivalentes es una relación de equivalencia.

Definición. *Una estructura de orbidad sobre un espacio paracompacto Hausdorff X, consiste de un grupoide orbidad $\mathcal{G}$ y un homeomorfismo*

$$f : |\mathcal{G}| \to X.$$

Si $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ es una equivalencia, entonces $|\phi| : |\mathcal{H}| \to |\mathcal{G}|$ es un homeomorfismo y decimos que $f \circ |\phi| : |\mathcal{H}| \to X$ define una estructura orbidad equivalente sobre X. Una orbidad $\mathcal{X} = (X, \mathcal{G})$ es un espacio topológico Hausdorff X con una clase de equivalencia de estructuras de orbidad $\mathcal{G}$.

Aunque esta definición parece un poco alejada de la definición local que presentamos en la segunda sección, el siguiente teorema nos asegura que se trata de los mismos objetos.

Teorema (Moerdijk-Pronk). *La categoría de orbidades es equivalente a la categoría de grupoides propios etale módulo equivalencia Morita.*

4 Invariantes topológicos

En esta sección introduciremos los conceptos de grupo de homotopía, cohomología singular y teoría K, usando el lenguaje de grupoides. Para los conceptos de grupo de homotopía y cohomología singular es necesario introducir primero la noción de espacio clasificante de una categoría, lo cual hacemos a continuación.

Definición. *Sea $\mathcal{G}$ un grupoide de Lie y, para $n \geq 1$ sea G_n el producto fibrado iterado*

$$G_n = \{(g_1, \ldots, g_n) | g_i \in G_1, s(g_i) = t(g_{i+1}), i = 1, \ldots, n-1\}.$$

Todos estos G_n junto con G_0 tienen la estructura de variedad simplicial, llamada el nervio de $\mathcal{G}$. Definimos el espacio clasificante de $\mathcal{G}$ como la realización geométrica de su nervio y lo denotamos como $B\mathcal{G}$.

Un hecho importante es que dos grupoides Morita equivalentes tienen espacios clasificantes débilmente homotópicamente equivalentes.

4.1 Grupos de homotopía

Si $\mathcal{X}$ es una orbidad y $\mathcal{G}$ un grupoide representando su estructura orbidad mediante un homeomorfismo $f : |\mathcal{G}| \to X$, definimos el n-ésimo grupo de homotopía orbidad de $\mathcal{X}$ basado en $x \in X$ como

$$\pi_n^{orb}(\mathcal{X}, x) = \pi_n(B\mathcal{G}, \tilde{x}),$$

donde $\tilde{x} \in G_0$ se proyecta a x bajo la función $G_0 \to X$, dada por la composición de la proyección cociente canónica $G_0 \to |\mathcal{G}|$ con f.

4.2 Cohomología singular

Definición. *Se define la cohomología singular de una orbidad $\mathcal{X}$ como*

$$H^*_{orb}(\mathcal{X}; R) = H^*(B\mathcal{G}; R),$$

donde R es un anillo conmutativo de coeficientes y $\mathcal{G}$ es un grupoide representante de la estructura orbidad de $\mathcal{X}$.

Ejemplo (Cohomología de grupos). Si $\mathcal{X} = \bullet^G := G \ltimes \bullet$ es la orbidad traslación asociada a la G-variedad trivial $M = \bullet$, entonces $B\mathcal{G} = BG$, el espacio clasificante del grupo G, y

$$H^*_{orb}(\bullet^G; \mathbb{Z}) = H^*(G; \mathbb{Z}),$$

esto es, la cohomología entera de grupos del grupo G.

Ejemplo (Cohomología equivariante). Si $\mathcal{X} = G \ltimes Y$, entonces $B(G \ltimes Y) \simeq EG \times_G Y$, la construcción de Borel y

$$H^*_{orb}(\mathcal{G}; \mathbb{Z}) = H^*(EG \times_G Y; \mathbb{Z}),$$

la cual es precisamente la cohomología G-equivariante de Y con coeficients enteros.

Por otro lado, cabe mencionar que cuando el sistema de coeficientes considerado en la cohomología singular es el campo de los racionales, tenemos un isomorfismo de grupos de cohomología

$$H^*_{orb}(\mathcal{X}; \mathbb{Q}) := H^*(B\mathcal{G}; \mathbb{Q}) = H^*(X; \mathbb{Q}),$$

y en este caso la cohomología singular no detecta la estructura de orbidad asociada a X.

4.3 Teoría K

Dado un grupoide orbidad $\mathcal{G}$, definimos un $\mathcal{G}$-*espacio* (izquierdo), por una variedad E dotada de una acción por $\mathcal{G}$. Dicha acción es dada por dos funciones:

1. Un ancla $\pi : E \to G_0$ y
2. Una acción $\mu : G_1 \times_{G_0} E \to E$.

las cuales satisfacen las condiciones usuales de una acción. Un $\mathcal{G}$-*haz vectorial* sobre un grupoide orbidad $\mathcal{G}$ es un $\mathcal{G}$-espacio E para el cual $\pi : E \to G_0$ es un haz vectorial y tal que la acción de $\mathcal{G}$ sobre E es lineal fibra a fibra.

Definición. *Si $\mathcal{X} = (X, \mathcal{G})$ es una orbidad, definimos*

$$K_{orb}(\mathcal{X})$$

como el anillo de Grothendieck de clases de isomorfismo de $\mathcal{G}$-haces vectoriales sobre $\mathcal{G}$.

5 Algunos problemas abiertos

Actualmente existe una gran actividad de investigación sobre teoría de orbidades debido a su relación con la Teoría de Cuerdas. A continuación mostramos dos problemas que hasta el momento permanecen abiertos.

La primer conjetura trata sobre la presentación de una orbidad.

Conjetura. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide orbidad, entonces este es Morita equivalente a un grupoide traslación $G \ltimes M$ donde G es un grupo de Lie que actúa suavemente y casi libremente sobre M.

Si esta conjetura es cierta, prácticamente toda la teoría de orbidades puede ser estudiada con técnicas de topología equivariante, que han sido ampliamente estudiadas y existe bastante teoría en esta área. Algunos resultados parciales de esta conjetura pueden hallarse en [3].

La siguiente conjetura es un poco mas técnica y de hecho es una importante fuente de investigación actualmente. Para mas detallae puede consultarse [1].

Conjetura. (K-Orbifold String Theory Conjecture) Si $\mathcal{X}$ es una orbidad compleja y $Y \to \mathcal{X}$ es una resolución crepante, entonces existe un isomorfismo aditivo natural

$$K(Y) \otimes \mathbb{C} \cong K_{orb}(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{C}$$

entre la teoría K orbidad de $\mathcal{X}$ y la teoría K ordinaria de su resolución crepante Y.

De ser cierta esta conjetura resultaría que el lugar indicado para comparar invariantes de una orbidad con sus resoluciones es precisamente en el contexto de la teoría K.

Bibliografía

[1] A. Adem, J. Leida y Y. Ruan, *Orbifolds and Stringy Topology*. Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 171, Cambridge University Press, **2007**.

[2] A. Adem, Y. Ruan, *Twisted orbifold K-Theory*, Comm. Math. Phys. 237 (**2003**), no. 3, 533-556.

[3] A. Henriques y D. S. Metzler, *Presentations of noneffective orbifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 356 (**2004**), no. 6, 24812499 (electronic). MR MR2048526 (2005a:58027)

[4] I. Moerdijk, *Orbifolds as groupoids: an introduction*. Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, **2001**), Contemp. Math., vol. 310, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 205222. MR MR1950948 (2004c:22003)

[5] I. Satake, *On a generalization of the notion of manifold*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 42 (**1956**), 359363. MR MR0079769 (18,144a)

[6] W. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Lectures Notes, Princeton University, **1979**.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo 2008, pp. 61–66.

ENSEÑANZA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN CON MAPLE

Elizabeth Félix Mendívil, Horacio Leyva Castellanos

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

e-mail: efelix@gauss.mat.uson.mx; hleyva@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Mediante la utilización de un paquete de cálculo simbólico (Maple), y ejemplos apropiados, buscamos mejorar la enseñanza de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Los ejemplos y temas abordados son básicos de un primer curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias como "Existencia de Funciones Solución", "Representación de Funciones Solución" y "Métodos para obtener las Funciones Solución".

Introducción

La capacidad de un paquete computacional de representar a las soluciones de una ecuación diferencial de manera gráfica, algebraica y numéricamente (numérica-gráfica y numérica-tabular) es un motivo suficiente para considerar su uso. Actualmente, en el desarrollo temático de un primer curso de ecuaciones diferenciales, predominan los métodos algebraicos; además, comúnmente el profesor tiene poca capacidad instrumental para representar geométricamente las funciones solución. Debido a que Maple cuenta con comandos para desarrollar paso a paso las equivalencias algebraicas (así como confirmar la veracidad de estas), de alguna manera permite profundizar en otros aspectos matemáticos que son fundamentales; como los métodos numéricos y métodos cualitativos, así como la animación en una gráfica para representar un fenómeno dinámico.

En el tema de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden (EDO), mostraremos una manera de usar Maple como herramienta auxiliar en su enseñanza.

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Además de ilustrar con el maple las características de las funciones solución de una EDO explícita de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

podemos abordar también el estudio de ecuaciones no lineales, que regularmente no son estudiadas en un primer curso, como por ejemplo la ecuación de Ricatti, de Gompertz, etc.

Antes de estudiar los métodos matemáticos para determinar las soluciones de una ecuación diferencial de primer orden, es conveniente que los alumnos experimenten con comandos del maple para verificar si una función es solución de una ecuación dada, esto se logra mediante los siguientes comandos:

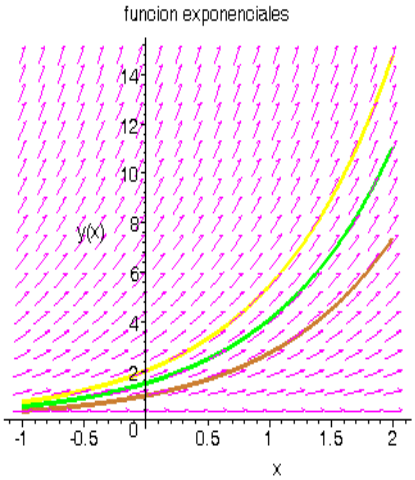
```
> ODE := diff(y(x),x,x)+b*diff(y(x),x)+c*y(x)=0:
> sol := dsolve(ODE):
> odetest(sol,ODE):
```

Maple puede determinar el tipo de ecuación diferencial de primer orden (Separable, Homogénea, Lineal, Exacta, etc.), mediante los siguientes comandos:

```
> with(DEtools):
> ODE1 := x*diff(y(x),x)-a*y(x)+b*x^2:
> odeadvisor(ODE1):
> ODE2:= diff(y(x),x)-a*x/(b*y(x)):
> odeadvisor(ODE2):
> ODE3:= diff(y(x),x)+y(x)/x-x^3/y(x)^3:
> odeadvisor(ODE3):
> ODE4:= 3*x*y(x)^2*diff(y(x),x)+x^3+y(x)^3:
> odeadvisor(ODE4):
```

Una vez clasificada la EDO es posible resolverla de acuerdo a la misma clasificación. Además se puede graficar una familia de soluciones, por ejemplo con el siguiente comando:

```
> with(DEtools):
> phaseportrait(D(y)(x)=y(x),y(x),x=-1..2,[[y(0)=2],[y(0)=1],[y(0)=1.5]],
title=`funcion exponenciales`,colour=magenta,linecolor=[gold,yellow,green]);
```



Otras opción similar para visualizar una familia de soluciones es como sigue:

```
> with(DEtools):
> plot({seq(j*exp(x),j=1..5)},x=-3..5,range=-2..2);
> DEplot(diff(y(t),t)-y(t)=0,y(t),t=-2..2,[[y(0)=1]],y=-2..2,stepsize=.001);
```

Al resolver una ecuación diferencial y que su resultado sea la integral de un cociente de polinomios, con Maple es posible encontrar la suma de fracciones parciales que equivalen al cociente, el ejemplo y los comandos son:

```
> r1 := (x^5+1)/(x^4-x^2);
> convert(r1,parfrac,x);
> r2:= x/(x-b)^2;
> convert(r2,parfrac,x);
```

Como no todas las soluciones son de forma explícita, consideremos también funciones implícitas. Empecemos por introducir el concepto de "número implícito". Por ejemplo, el problema de determinar si existe un número $x > 0$ tal que $e^x = 1 + \cos(x)$. Podemos mostrar la existencia de tal número mediante la intersección de las gráficas de las funciones de cada lado de la igualdad. Con el comando

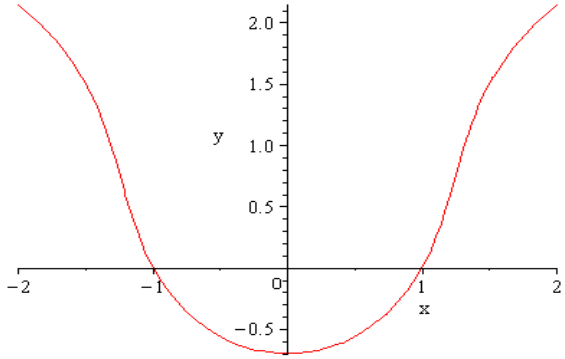
[> `fsolve(exp(x)=1+cos(x),x=0..2);` se obtiene el valor $x = 0.6013467677$.

Similarmente, hay funciones que solo se pueden presentar (algebraicamente) de manera implícita, por ejemplo la función $f(x)$ dada por la igualdad

$$x^2 + f(x)^2 = e^{f(x)}$$

no es posible despejarla. Podemos ver la gráfica con el comando:

[> `implicitplot(x^2+y^2=exp(y),x=-5..5,y=-4..4);`



Es posible generar una tabla de valores $(x, f(x))$ a partir de la ecuación algebraica para representar de otra manera a la función $f(x)$. Mediante la instrucción:

[> `seq(fsolve(i^2+y^2=exp(y),y),i=0..5);`

de forma que podemos obtener la siguiente tabla para este ejemplo:

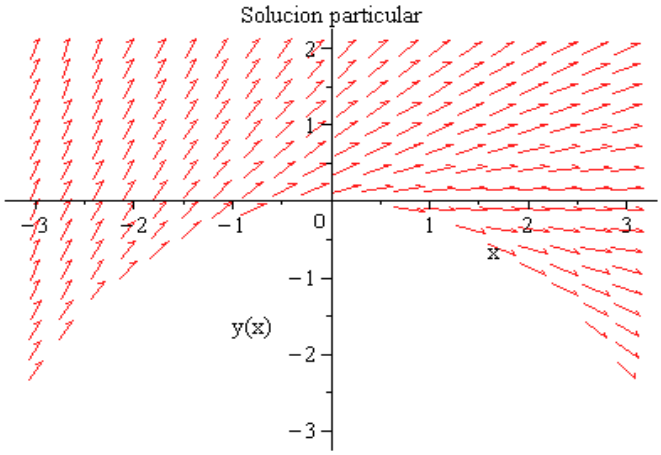
x	$f(x)$
0	$-.7034674225$
± 1	0
± 2	2.158726064
± 3	2.835600506
± 4	3.289073462
± 5	3.645104926

Otras propiedades de la función pueden obtenerse mediante la derivada implícita, por ejemplo:

```
[> limit(implicitdiff(F,y(x),x),x=infinity);
```

Con cálculo simbólico es posible abordar el estudio de las ecuaciones diferenciales implícitas de primer orden $F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right) = 0$. Un caso especial consiste en visualizar soluciones singulares. Por ejemplo, la ecuación diferencial no lineal $y = xy' + (y')^2$ tiene como solución parametrizada a la expresión $y = Cx + C^2$. En la parte inferior de la siguiente gráfica se perfila la parábola $y = -\frac{1}{4}x^2$ que también es solución de la ecuación diferencial y no se obtiene de la solución parametrizada asignandole valores a C. Mediante la instrucción en maple obtenemos "el bosquejo" de la solución $y = -\frac{1}{4}x^2$

```
> dfieldplot(x*diff(y(x),x)+(diff(y(x),x))^2=y(x),y(x), x=-3..3,y=-3..2,
title=`Solucion particular`);
```



Obtenemos dos funciones solución de la ecuación anterior: $y(x) = -1/4x^2$, $y(x) = 0$ con la condición inicial $y(0) = 0$, mediante el comando

```
> dsolve({x*diff(y(x),x)+(diff(y(x),x))^2=y(x),y(0)=0},y(x));
```

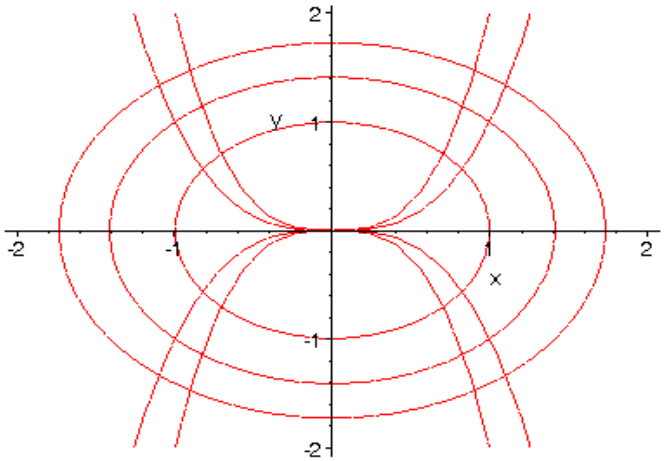
Aplicaciones

En el tema de trayectorias ortogonales, una dificultad en el aula de clase es el graficar una familia parametrizada de funciones. Otra dificultad consiste en determinar el punto de intersección de un par de curvas ortogonales, ya que esto significa resolver un sistema de ecuaciones no lineales. Mediante comandos básicos del maple podemos dar respuesta efectiva a este problema de gráficación, así como a diversos pasos algebraicos y de cálculo que usualmente se presentan en clase. También es posible hacer una composición de un conjunto de comandos básicos para resolver directamente los problemas; independientemente de la

programación que pueda realizarce. Con la siguiente sucesión de comandos se ilustran los pasos para generar una familia de curvas ortogonal:

```
> f := x^2+3*y^2=r^2:
> with(plots):
> implicitplot(seq(x^2+3*y^2=j^2,j=1..3),x=-2..2,y=-2..2):
> implicitdiff(f,y(x),x):
> ortf:=-1/(implicitdiff(f,y(x),x)):
> anselip := dsolve(diff(y(x),x)=3*y(x)/x):
> implicitplot(seq(y=j*x^3,j=-2..2),x=-2..2,y=-2..2):
> implicitplot(seq(y-i*x^3=0,i=-2..2),seq(x^2+3*y^2=j,j=1..3),x=-2..2,y=-2..2):
```

Este último comando concluye con la gráfica de las dos familias ortogonales en mismo plano de xy:



Podemos encontrar los puntos donde se intersectan dichas curvas, usando los comandos:

```
> with(plots):
> g := x^2+3*y^2=4:
> h := y-x^3=0:
> fsolve({g,h},{x,y},{x=0..2,y=0..2});
> implicitplot({g ,h},x=-4..4,y=-4..4);
```

Al finalizar de estudiar los métodos matemáticos para determinar las soluciones de una ecuación diferencial, es conveniente que los alumnos experimenten con comandos del maple para verificar si una función es solución de una ecuación dada, esto se logra mediante los siguientes comandos:

```
> ODE := diff(y(x),x,x)+b*diff(y(x),x)+c*y(x)=0:
> sol := dsolve(ODE):
> odetest(sol,ODE):
```

Ejemplo

Para la solución de un problema de mezclas (un sistema cerrado compuesto por dos tanques, ver problema 7 de la página 127 del primer libro citado en la bibliografía), con la característica de ser algebraicamente complicado pero muy ilustrativo, una vez modelado como un "Problema de Valor Inicial", obtenemos la solución al aplicar la siguiente secuencia de comandos:

```
> ode := diff(x(t),t)-((500+t)/((100+t)*(100-t)))*x(t)+300/(100+t)=0;
> ans1[1] := dsolve( {ode, x(0)=50}, x(t)):
> eval(ans1[1], t=50):
> evalf(13200-32400*ln(150)+64800*ln(2)+64800*ln(5));
```

$$62.9305$$

Conclusiones

En la enseñanza de tipo presencial, con una temática tradicional de un curso de ecuaciones diferenciales, es posible ilustrar mejor ciertos temas al usar un paquete cálculo simbólico. La capacidad de representar a las funciones solución de una EDO de varias maneras, sobre todo graficamente, es una ventaja evidente de un paquete de cálculo simbólico. Por lo general, en un primer curso de EDO, se hace énfasis en los métodos algebraicos para resolver ecuaciones diferenciales, lo que implica abordar cálculos complejos, estos cálculos no son un objetivo significativo y muchas veces no permiten abordar otras metodologías y temas importantes como la estabilidad de las soluciones, soluciones por series, soluciones numéricas etc. En general, un paquete de cálculo simbólico permite profundizar en temas específicos, así como explorar la frontera de cada tema.

Bibliografía

1. *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de Modelado*, Dennis G. Zill, Editorial Thomson-Learning, Séptima edición;

2. *Differential Equations with Maple*, Jon H. Davis, Birkhauser (2000);

3. *Differential Equations with Maple V*, Martha L. Abell, James P. Braselton, Academic Press (2000);

4. *Differential Equations: Theory and Applications with Maple*, David Betounes, Springer-Verlag (2001);

5. *Ordinary Differential Equations using Matlab*, John C. Polking, David Arnold, Second edition, Prentice Hall (1999).

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo, 2008, pp. 67–72.

ESTABILIDAD DE SISTEMAS MUESTREADOS CON RETARDO

F. Ricardo García [a,b], **Baltazar Aguirre Hernández** [a], **Rodolfo Suárez** [a]

[a] Universidad Autónoma Metropolitana – Unidad Iztapalapa
[b] Instituto Politécnico Nacional – UPIICSA-SEPI

e-mail: frgarcia@ipn.mx

Resumen

En este trabajo se estudian sistemas lineales muestreados de tiempo invariante, de una dimensión y que tienen un retardo en el control de retroalimentacón. Proponemos un control lineal que depende del parámetro ϵ y obtenemos cotas para este parámetro a fin de hallar un intervalo donde el control estabilice al sistema.

1 INTRODUCCIÓN

Como se sabe un sistema continuo es modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales y el problema principal que se plantea es su estabilización. Este problema de estabilidad(hacer que el origen sea estable) regularmente se resuelve diseñando un control $u(Y)$ continuo que se basa únicamente en cantidades medibles como pueden ser las salidas del sistema Y. Sin embargo la aplicación del control continuo $u(Y)$ al sistema tiene problemas cuando:
a) Se conocen los valores de la salida $Y = x(t)$ solamente en un número discreto de valores del tiempo t como por ejemplo t_1, t_2, . . ., t_k.
b) Hay retardos en la retroalimentación del control.
A parir de esto surge la necesidad de estudiar los sistemas muestreados que son sistemas continuos con un control a lazo cerrado discreto. Es decir estos sistemas operan en tiempo continuo pero algunas señales continuas son muestreadas en ciertos instantes t_k usualmente a una distancia constante $h = t_{k+1} - t_k$ (período de muestreo) que produce señales discretas. Así, este sistema trabaja con señales continuas y discretas.
Estos sistemas se pueden originar de procedimientos de medición que se presentan por ejemplo en el control de procesos químicos, donde muchas variables (concentraciones químicas, etc.) no pueden ser medidas en línea, por lo que una muestra del producto es analizada fuera de línea por un espectógrafo de masa.

Para el caso de un sistema lineal unidimensional con retardo r arbitrario en el control de retroalimentación lineal $u_k = Kx_k$ el sistema muestreado se modela como

$$\dot{x} = ax(t) + bu_{k-r}(t) \tag{1}$$

donde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$ y $u_k \in \mathbb{R}$. En este trabajo se analiza la estabilización del sistema (1) con un retardo $r = Nh$, donde N es un número natural, es decir, el retardo r es un múltiplo del período h. Por lo tanto se considera la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax(t) + bKx([\frac{t}{h}]h - Nh) \\ h &= t_{k+1} - t_k \end{aligned} \tag{2}$$

donde $[\alpha]$ denota la parte entera de α, $N \in \mathbb{N}$, a y b son constantes dadas. El problema es hallar los valores del parámetro K (ganancia) y del período máximo h tal que el sistema (2) sea asintóticamente estable.

Para $t \in (kh, kh+h)$; la función $x([\frac{t}{h}]h - Nh)$ es constante y la solución de la ecuación diferencial (2) es:

$$x(t) = e^{a(t-kh)}x(kh) + \int_0^{t-kh} e^{a\tau} d\tau bKx(kh - Nh)$$

Por lo tanto por continuidad

$$x((k+1)h) = e^{ah}x(kh) + \int_0^{h} e^{a\tau} d\tau bKx(kh - Nh). \tag{3}$$

Para sinplificar la expresión anterior se define

$$A_D = e^{ah}, B_D = \int_0^{h} e^{a\tau} d\tau b \tag{4}$$

$$\varepsilon(k) = x(kh). \tag{5}$$

De las ecuaciones (3), (4), y (5) se obtine la ecuación en diferencias con retardo N.

$$\varepsilon(k+1) = A_D\varepsilon(k) + B_DK\varepsilon(k-N). \tag{6}$$

Para poder eliminar este retardo se hace el cambio de variable $J = k - N$, la ecuación en diferencias (6) se convierte entonces en la ecuación en diferencias de orden $(N+1)$ homogénea

$$\varepsilon(J+N+1) - A_D\varepsilon(J+N) - B_DK\varepsilon(J) = 0. \tag{7}$$

Esta ecuación en diferencias de orden $(N+1)$ homogénea se puede reescribir como un sistema de $(N+1)$ ecuaciones en diferencia de orden uno. En efecto sea

$$\begin{aligned}
\varepsilon(J) &= x_1(J) \\
\varepsilon(J+1) &= x_1(J+1) = x_2(J) \\
&\vdots \\
\varepsilon(J+N) &= x_N(J+1) = x_{N+1}(J) \\
\varepsilon(J+N+1) &= x_{N+1}(J+1)
\end{aligned}$$

De donde la ecuación (5) llega a ser:

$$\begin{aligned}
x_1(J+1) &= x_2(J) \\
x_2(J+1) &= x_3(J) \\
&\vdots \\
x_N(J+1) &= x_{N+1}(J) \\
x_{N+1}(J+1) &= A_Dx_{N+1}(J) + B_DKx_1(J)
\end{aligned}$$

Que en forma matricial se expresa como

$$X(J+1) = AX(J), \tag{8}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ B_D K & 0 & 0 & 0 & A_D \end{bmatrix}, X(J) = \begin{bmatrix} x_1(J) \\ x_2(J) \\ x_3(J) \\ . \\ . \\ . \\ x_N(J) \\ x_{N+1}(J) \end{bmatrix}$$

Para establecer las condiciones de estabilidad del sistema de ecuaciones en diferencia de orden uno primero se obtiene el polinomio característico de la matriz A

$$P(\lambda) = \lambda^{N+1} - A_D\lambda^N - B_D K \tag{9}$$

Así el problema de estabilizar el sistema (2) es equivalente a dar condiciones sobre los coeficientes del polinomio característico (9) de modo que este polinomio sea Schur estable (es decir sus raíces tienen módulo menor que uno).

El caso n-dimensional del sistema (1) fue estudiado y se obtuvieron condiciones necesarias y suficientes sobre la matriz del sistema y del parámetro b para la r-estabilización del sistema [5], pero estas condiciones no son fáciles de verificar. Para el caso unidimensional (2) su resultado es el siguiente: Supongase $-\frac{N+1}{N} < -A_D < -1$. Entonces el polinomio (9) es Schur estable si $-B_D K = -(-A_D) - 1 + \epsilon$ para algún ϵ suficintemente pequeño. Sin embargo en un problema de diseño se necesita decir como hallar tal ϵ.

Los problemas de estabilización de los sistemas (1) y (2) para sistemas en tiempo continuo fueron estudiadas por Yong [6] con una aproximación análoga.

La estabilidad del sistema (2) fue analizada y se probó que este sistema es asintóticamente estable si los coeficientes a y b del sistema estan acotadas tanto inferior como superiormente [2]. Sin embargo se observa que el retardo es fijo con valor de uno. Otros resultados acerca de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales con retardos constantes por tramos, fueron obtenidos por estos mismos autores en [4].

En este trabajo se halla un $\approx\!\!\approx\!\!\epsilon_0$ tal que el polinomio

$$P(\lambda) = \lambda^{N+1} - A_D\lambda^N - (-A_D) - 1 + \epsilon \tag{10}$$

es Schur estable si $0 < \epsilon < \approx\!\!\approx\!\!\epsilon_0$. Es decir, se obtiene una estimación del máximo $\epsilon_{\max}$ con la propiedad de que el polinomio (10) es Schur estable para $0 < \epsilon < \epsilon_{\max}$.. Esta estimación del $\epsilon_{\max}$ permitirá obtener un rango para el valor del período de muestreo que garantice la estabilidad del sistema (2).

El resto del trabajo esta organizado como sigue. En la sección 2 se establece el resultado principal tanto para dimensión dos como para tamaño arbitrario. En la sección 3 se proporcionan algunos ejemplos de aplicación del resultado principal y se establecen las condiciones que deben cumplir el período de muestreo y el parámetro ϵ.

2 RESULTADO PRINCIPAL

En esta sección se demuestra por inducción sobre el grado del polinomio (10) que el parámetro ϵ debe encontrarse en un intervalo para que el polinomio sea Schur. Y se dan algunos ejemplos para ilustrar la aplicación del resultado.

Considerese el polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_0$ tal que $-\frac{n}{n-1} < \frac{a_{n-1}}{a_n} < -1$. El objetivo en este trabajo es dar valores al coeficiente a_0, de modo que $P(z)$ sea Schur estable. El resultado de este trabajo es el siguiente:
Si se escoge $a_0 = -a_{n-1} + a_n(\epsilon - 1)$, $P(z)$ es Schur estable si ϵ satisface la desigualdad $0 < \epsilon < \frac{3n}{2n-1} + \frac{3(n-1)}{2n-1}\frac{a_{n-1}}{a_n}$. Ya que el resultado se cumple para todo número natural, entonces debe cumplirse para los primeros números naturales.

Se empieza estableciendo el resultado cuando el grado de $P(z)$ es dos (de hecho aquí se tienen condiciones necesarias y suficientes).

Teorema 2.1 Sea $P(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$ un polinomio tal que $-2 < \frac{a_1}{a_2} < -1$, $a_0 = -a_1 + a_2(\epsilon - 1)$, entonces $P(z)$ es Schur estable si y solo si ϵ satisface la desigualdad

$$\frac{a_1}{a_2} < \epsilon < 2 + \frac{a_1}{a_2}.$$

La demostración de este teorema se basa en el criterio de estabilidad de polinomios de bajo orden [3].■

Ejemplo 2.2 Considerese el polinomio característico asociado al sistema $P(\lambda) = \lambda^2 - A_D\lambda - B_D k$, donde $-B_D k = -(-A_D) + (\epsilon - 1)$. Desde la definición de A_D, se obtiene $-B_D k = e^{ah} + \epsilon - 1$. y para los valores específicos de $a = 1$, $b = 1$, se tiene $P(\lambda) = \lambda^2 - e^h\lambda + e^h + \epsilon - 1$. De acuerdo al resultado del teorema (2.1) la condición para ϵ es $0 < \epsilon < 2 - e^h$ y la condición para h es $h < ln2$. Si se asigna a $\epsilon = 1.9 - e^h$ para $h = 0.5$ se obtiene que $P(\lambda) = 0$ si y solo si $\lambda = 0.82436 \pm 0.04695i$ que son raíces que tienen módulo menor a uno.

Ejemplo 2.3 En este ejemplo se considera el caso cuando ϵ no cumple la condición del teorema 2.1. Considere el polinomio $P(\lambda) = \lambda^2 - e^h\lambda + e^h + \epsilon - 1$ y si se asigna a $\epsilon = 2.5 - e^h$ para $h = 0.5$ entonces $P(\lambda) = 0$ si y solo si $\lambda = 0.82436 \pm 0.90577i$ que son raíces que tienen módulo mayor a uno.

La demostración para el grado arbitrario depende de los siguientes dos lemas.

Lema 2.4 *[1]* Si $P(Z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + ... + b_0$ satisface $|b_n| > |b_0|$ entonces $P(Z)$ es un polinomio Schur estable si y solo si $R(Z)$ es un polinomio Schur estable. Donde

$$R(z) = \frac{1}{z}\left[P(z) - \frac{b_0}{b_n}Q(z)\right]$$

con $Q(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + ... + b_n$.

Observación: El lema 2.4 anterior es importante en la demostración por inducción del resultado principal (Teorema 2.7). Este permite reducir al menos un grado del polinomio que se esta analizando.

Ejemplo 2.5 Si $P(Z) = z^3 - 0.5z^2 - 0.5z + 0.25$, entonces
$Q(Z) = 0.25z^3 - 0.5z^2 - 0.5z + 1$ y $R(Z) = 0.9375z^2 - 0.375z - 0.37$.

El polinomio $P(z)$ satisface la condición ($|b_3| > |b_0|$).

$R(z)$ es Schur, ya que $R(z) = 0$ si y sol si $\lambda_1 = -0.4633$ y $\lambda_2 = 0.8633$.

Aplicando el lema 2.4, $P(Z) = z^3 - 0.5z^2 - 0.5z + 0.25$ es Schur.

Lema 2.6 Fijemos un entero arbitrario $n \geq 2$. Dado $P(z) = a_{n+1}z^{n+1} + a_n z^n + a_0$ tal que $-\frac{n+1}{n} < \frac{a_n}{a_{n+1}} < -1$ y un $a_0 = -a_n + a_{n+1}(\epsilon - 1)$, si se definen $Q(z) = a_0 z^{n+1} + a_n z + a_{n+1}$ y

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{1}{z}\left[P(z) - \frac{a_0}{a_{n+1}}Q(z)\right] \\ &= \frac{1}{a_{n+1}}\left[A_n z^n + A_{n-1}z^{n-1} + A_0\right], \end{aligned}$$

donde $A_n = a_{n+1}^2 - a_0^2$, $A_0 = -a_0 a_n$. Si ϵ satisface $0 < \epsilon < \frac{3(n+1)}{2n+1} + \frac{3n}{2n+1}\frac{a_n}{a_{n+1}}$, entonces ($|a_{n+1}| > |a_0|$ and $|A_n| > |A_0|$).

La demostración se hace a través de cálculos directos.■

Observación: El grado del polinomio $R(Z)$ es siempre menor o igual a $n - 1$.
Ahora se enuncia el resultado para grado arbitrario, el cual generaliza el teorema 2.1. Su demostración esta basada en los lemas 2.4 y 2.6.

Teorema 2.7 Fijamos un arbitrario entero $n \geq 2$. Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_0$ un polinomio tal que $-\frac{n}{n-1} < \frac{a_{n-1}}{a_n} < -1$, donde $a_0 = -a_{n-1} + a_n(\epsilon - 1)$. Si ϵ satisface la desigualdad $0 < \epsilon < \frac{3n}{2n-1} + \frac{3(n-1)}{2n-1}\frac{a_{n-1}}{a_n}$, entonces se tiene que $|a_n| > |a_0|$ y $P(z)$ es un polinomio Schur estable.

3 EJEMPLOS

En esta sección se presentan otros ejemplos para ilustrar el resultado principal (Teorema 2.7), el cual es válido para polinomios de grado arbitrario.

Ejemplo 3.1 Sea $P(\lambda) = \lambda^4 - e^h\lambda^3 + e^h + \epsilon - 1$. Por el teorema la condición para ϵ es $0 < \epsilon < \frac{12-9e^h}{7}$ y la condición para h es $h < ln\frac{12}{9}$. Si $\epsilon = \frac{11-9e^h}{7}$ para $h = 0.10$ entonces $P(\lambda) = \lambda^4 - 1.105\lambda^3 + 0.255$ y $P(\lambda) = 0$ si y solo si $\lambda = -0.324309 \pm 0.449373i$ y $\lambda = -0.876809 \pm 0.248036i$ que son raíces de módulo menor a uno.

Ejemplo 3.2 Considerese ahora el polinomio característico asociado al sistema de grado 5. Para los valores específicos de $a = 1$, $b = 1$, $N = 4$ se tiene $P(\lambda) = \lambda^5 - e^h\lambda^4 + e^h + \epsilon - 1$. Se analizara primero el caso cuando el valor de ϵ no cumple con la condición del teorema 2.7 (el valor de ϵ no es el indicado). Si se asigna $\epsilon = 0.03$ y $h = 0.22$, entonces $P(\lambda) = \lambda^5 - 1.246\lambda^4 + 0.276$ y se observa que se cumple la hipótesis del trabajo de Arapostathis $-\frac{n}{n-1} < \frac{a_{n-1}}{a_n} < -1$ si y solo si $-\frac{5}{4} < -\frac{e^h}{1} < -1$. Sin embargo $P(\lambda) = 0$ si y solo si $\lambda = 1.00843 \pm 0.10781i$, $\lambda = 0.0753615 \pm 0.65347i$ y $\lambda = -0.620142$. En estas raíces dos tienen módulo mayor a uno.
Para el segundo caso cuando el valor de ϵ cumple con la condición del teorema 2.7. De acuerdo al resultado principal de este trabajo la condición para ϵ es $0 < \epsilon < \frac{3(5)+3(4)(-e^h)}{9} = \frac{5-4e^h}{3}$. por lo tanto el valor máximo de ϵ es$\frac{5-4e^h}{3}$. Para $h = 0.22$ se obtiene $\epsilon = 0.0053$,$P(\lambda) = \lambda^5 - 1.246\lambda^4 + 0.2513$. Por lo tanto $P(\lambda) = 0$ si y solo si $\lambda = 0.99892 \pm 0.04598i$, $\lambda = -0.07249 \pm 0.6394i$ y $\lambda = -0.606$. Que son raíces con módulo menor a uno.

Bibliografía

[1] Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H., Keel, L. H. (1995), *Robust control. The parametric approach.* Prentice Hall.

[2] Cooke, K. L. and Wiener, J. (1984) Retarded differential equations with piecewise constant delays. *J.Math. Anal.Appl.* **99**, 265-297

[3] Jury, E. I.(1962), Asimplified Stability criterion for linear discrete sistems. *IRE Proc.* **50** (6), 1493-1500

[4] Wiener, J. and Cooke, K. L. (1989) Oscillations in systems of differential equations with piecewise constant argument. *J. Math. Anal. Appl.* **137**, 221-239.

[5] Yong,J. and Arapostathis, A. (1988a) Stabilization of discrete-time linear systems with a time delay in the feedback loop. *Internat.J. Control*, Vol. **48**, No. 4, 1475-1485

[6] Yong, J. (1988b) Stabilization of linear systems by time-delay feedback controls II. *Quart. Appl. Math.* **56**, 593-603.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo, 2008, pp. 73–79.

MÉTODOS PARA SISTEMAS LINEALES SEMI-INFINITOS

Enrique González Gutiérrez

Departamento de Estadística e Ivestigación Operativa, Universidad de Murcia

e-mail: e_g_gutierrez@yahoo.es

Resumen

Se aportan nuevos resultados acerca de los métodos para sistemas semi-infinitos lineales (SSIL's). Se extendien a SSIL's el método de eliminación de Fourier para sistemas lineales ordinarios y el método de representación de Motzkin. El método de Fourier proporciona la proyección sobre los hiperplanos coordenados del conjunto solución de un SSIL, se han considerado las condiciones bajo las que se obtiene otro SSIL que representa al correspondiente conjunto factible, las condiciones bajo las que se transmiten propiedades (numerable, polinómico, continuo, FM, LOP y LFM) de un SSIL a su sistema reducido y la posibilidad de reparar aquellas propiedades en el sistema reducido cuando no sean heredadas. Además, se extiende el método de relajación a sistemas lineales semi-infinitos.

1 Relevancia de los sistemas lineales semi-infinitos

Los sistemas semi-infinitos lineales (en adelante SSIL's), son los sistemas de la forma $\{a_t'x \geq b_t, t \in T\}$, donde T representa un conjunto de índices arbitrario fijo; a_t, b_t son las imágenes de t, $t \in T$, por medio de las funciones $a : T \to \mathbb{R}^n$ y $b : T \to \mathbb{R}$, respectivamente. Los sistemas de este tipo surgen en campos tales como aproximación funcional, programación semi-infinita lineal (PSIL) (son los sistemas de restricciones), cálculo subdiferencial, desigualdades variacionales, problemas de momentos y optimización vectorial semi-infinita, entre otros problemas matemáticos.

Ejemplo 1.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y un punto $\bar{t} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f\left(\bar{t}\right) \in \mathbb{R}$. El subgradiente de f en $\bar{t}$ son las soluciones del SSIL*

$$\sigma := \left\{ \left(t - \bar{t}\right)' x + f\left(\bar{t}\right) \leq f\left(t\right), t \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Entonces, f es subdiferenciable en $\bar{t}$ si, y sólo si, σ es consistente (es decir, existe una solución ordinaria de σ) y el subdiferencial de f en $\bar{t}$, digamos $\partial f\left(\bar{t}\right)$, es el conjunto solución de σ.

Ejemplo 1.2 *Sea $G : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ y $\emptyset \neq F \subset \mathbb{R}^n$, el correspondiente problema de desigualdades variacionales que consiste en hallar $x \in F$ tal que $G\left(x\right)'\left(t - x\right) \geq 0$ para todo $t \in F$. El problema de desigualdades variacionales se llama semi-infinito (lineal) cuando F es el conjunto solución de un cierto sistema semi-infinito (SSIL, respectivamente). En la literatura se pueden encontrar métodos numéricos eficientes para problemas de desigualdades lineales variacionales semi-infinitas (ver [8] y las referencias que ahí se encuentran), los cuales ponen particular atención al caso de aplicaciones constantes G (por lo que el problema de desigualdades variacionales llega a ser un SSIL con conjunto solución F.*

Hasta ahora no ha sido publicado ningún artículo sobre el tratamiento numérico de los SSIL's en $\mathbb{R}^n$ (salvo para sistemas con una estructura dada muy particular, véanse [7] y [8]), puesto que la equivalencia computacional del problema de optimización lineal y el problema lineal factible, válido en dimensiones finitas, no es válida para el concepto semi-infinita.

Es obvio que agregando una función objetivo arbitraria a un SSIL dado, digamos $x \mapsto c'x$, algún método de PLSI (que no requiera una solución inicial factible) aproxima una solución factible del SSIL, pero las iteraciones suelen ser infactibles (recalcamos que las soluciones óptimas de cualquier problema de PLSI no trivial factible pertenece a la frontera del conjunto factible F). Con el fin de evitar este inconveniente, es preferible buscar la máxima bola Euclídea contenida en $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t'x \geq b_t, t \in T\}$. Supongamos que $b_t \leq 0$ para todo $t \in T$ tal que $a_t = 0_n$ (de otro modo $F = \emptyset$). Sea $S = \{t \in T \mid a_t \neq 0_n\}$, $c_t = \frac{a_t}{\|a_t\|}$ y $d_t = \frac{b_t}{\|a_t\|}$ para todo $t \in S$, y considérese el problema de PLSI

$$\begin{array}{ll} \text{Sup} & x_{n+1} \\ \text{s.a} & c_t'x - x_{n+1} \geq d_t, t \in S, \end{array}$$

con variable de decisión $x \in \mathbb{R}^n$ y $x_{n+1} \in \mathbb{R}$, cuyo valor óptimo en no negativo (positivo, $+\infty$) si, y sólo si, $F \neq \emptyset$ ($\operatorname{int} F \neq \emptyset$, F es acotado, respectivamente). La ventaja de este modelo es que los métodos numéricos proveen un punto interior cuando el algoritmo se interrumpe en alguna iteración $\left(x^r, x_{n+1}^r\right)$ tal que $x_{n+1}^r > 0$.

1.1 El Lema de Farkas para SSIL's en $\mathbb{R}^n$

Asociamos con $\sigma = \{a_t'x \geq b_t, t \in T\}$ los siguientes conos convexos: $M := \operatorname{cone}\{a_t, t \in T\}$ es el *primer cono de momentos*, mientras que

$$N := \operatorname{cone}\left\{\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}, t \in T\right\} \text{ y } K := N + \mathbb{R}_+\{(0_n, -1)\}$$

se llaman el *segundo cono de momentos* y el *cono característico* de σ. El último cono es particularmente importante ya que captura casi toda la información relevante sobre σ (ver [2]).

El resultado básico sobre la consistencia de SSIL's es el Lema de Farkas (no homogéneo) extendido (ver por ejemplo [4]):

Teorema 1.3 *$a'x \geq b$ es una consecuencia de σ (es decir, $a'x \geq b$ para todo $x \in F$) si, y sólo si, $(a, b) \in \operatorname{cl} K$.*

1.2 Principales clases de SSIL's consistentes en $\mathbb{R}^n$

A continuación introducimos cinco familias de SSIL's consistentes.

Un sistema σ es *continuo* cuando T es un espacio Hausdorff compacto y todos los coeficientes $a_1(\cdot), \ldots, a_n(\cdot)$, $b(\cdot)$, son continuos en T. El sistema σ es *polinómico* cuando T es un intervalo compacto y todos los coeficientes $a_1(\cdot), \ldots, a_n(\cdot)$, $b(\cdot)$, son polinomios en T.

Obviamente

$$\sigma \text{ polinómico } \rightarrow \sigma \text{ continuo.}$$

Con el fin de definir las restantes tres clases de SSIL's asociamos con cada $x \in F$ dos conos convexos. El *cono de direcciones factibles* en x es

$$D(F, x) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \text{ existe un } \theta \geq 0, x + \theta d \in F\}$$

y el *cono activo* en x es

$$A(x) := \text{cono}\{a_t, t \in T(x)\},$$

donde $T(x) = \{t \in T \mid a_t' x = b_t\}$ es el *conjunto de índices activos* en x.

La definición de las tres clases restantes de SSIL's no involucran las propiedades de las funciones coeficientes. σ es *localmente Farkas-Minkowsky* (LFM) si cada consecuencia de σ que determina un hiperplano de apoyo para F, es también consecuencia de un subsistema finito de σ. En particular, si cada consecuencia de σ es consecuencia de algún subsistema finito de s, σ es *Farkas-Minkowsky* (FM).

Un sistema σ es *locamente poliédrico* (LOP) si $A(x)^\circ = D(F, x)$ para todo $x \in F$.

Estas cinco familias se relacionan como sigue

$$\sigma \text{ continuo y c.c. de Slater} \rightarrow \sigma \text{ FM } \rightarrow \sigma \text{ LFM } \leftarrow \sigma \text{ LOP}.$$

Estas definiciones se han generado a partir de las demostraciones de resultados importantes en SSIL's y PSIL: los sistemas continuos, por las demostraciones del primer teorema de dualidad en PSIL ([9] y [10]), los sistemas FM, por las versiones generalizadas de dicho teorema ([13]), los sistemas LOP, por la demostración de la extensión del Teorema de Weyl que caracteriza los puntos extremos del conjunto solución de un SSIL ([11], [1] y [5]), y los sistemas LFM, por la extensión del Teorema de Karush-Kuhn-Tucker a PSIL y las extensiones a SSIL's de las propiedades bien conocidas de sistemas lineales ordinarios ([6]).

El concepto restante de sistemas polinómicos se introdujo en un trabajo sobre puntos extremos de conjuntos solución de SSIL's analíticos y algoritmos de purificación para problemas de PSIL ([12]).

De hecho, el carácter polinómico es una propiedad deseable del sistema de restricciones con el fin de resolver: min $c'x$, s.a $a_t' x \geq b_t$ para todo $t \in T$, por medio de aquéllos métodos numéricos que se basan en la identificación de todas las restricciones activas de la iteración actual.

Nuestro interés se ha centrado en buscar métodos aplicables a SSIL's, desde el punto de vista analítico (es decir exacto) y computacional.

Dentro de los métodos exactos hemos fijado nuestro interés por los métodos existentes para sistemas ordinarios como lo son el método de Fourier y el método de Motzkin.

2 Métodos de Fourier y Motzkin extendidos

2.1 Método de Fourier

El método de Fourier tradicional (véase [3]) permite la eliminación de una variable x_i de un sistema lineal ordinario o, en términos geométricos, proporciona una representación externa de la proyección de su poliedro factible F sobre el hiperplano coordenado $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0\}$.

Versión semi-infinita del método de Fourier

Escríbase cada inecuación $\sum_{i=1}^{n} a_i(t)x_i \geq b(t)$, con $t \in T$, en la forma

$$a_n(t)x_n \geq -\sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)x_i + b(t). \tag{1}$$

Los conjuntos $T_+ := \{t \in T \mid a_n(t) > 0\}$, $T_- := \{t \in T \mid a_n(t) < 0\}$ y $T_0 := \{t \in T \mid a_n(t) = 0\}$ constituyen una partición de T.

Si $a_n(t) \neq 0$, divídase en (1) ambos miembros por $a_n(t)$, para lo que definimos $c_i(t) := \frac{a_i(t)}{a_n(t)}$ para $i = 1, \ldots, n-1$ y $d(t) := \frac{b(t)}{a_n(t)}$.

Escríbase (1) como sigue:

Para los índices $t \in T_+$

$$x_n \geq \sum_{i=1}^{n-1} c_i(t)x_i + d(t), \tag{2}$$

y para los índices $t \in T_-$

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i(t)x_i + d(t) \geq x_n. \tag{3}$$

Finalmente, para los índices $t \in T_0$, las inecuaciones no contienen la última variable x_n,

$$0 \geq -\sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)x_i + b(t). \tag{4}$$

El sistema reducido (con variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$) es:

Caso 1: Para $T_+ \neq \emptyset \neq T_-$,

$$\hat{\sigma} = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n-1} c_i(t)x_i + d(t) \geq \sum_{i=1}^{n-1} c_i(s)x_i + d(s), & (t,s) \in T_- \times T_+ \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)x_i \geq b(t), & t \in T_0 \end{array} \right\}. \tag{5}$$

Caso 2: Para $T_+ \neq \emptyset = T_-$,

$$\hat{\sigma} = \left\{ \begin{array}{ll} \sup_{t \in T_+} \sum_{i=1}^{n-1} c_i(t)x_i + d(t) < +\infty & \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)x_i \geq b(t), & t \in T_0 \end{array} \right\}. \tag{6}$$

Caso 3: Para $T_+ = \emptyset \neq T_-$,

$$\hat{\sigma} = \left\{ \begin{array}{ll} \inf_{t \in T_-} \sum_{i=1}^{n-1} c_i(t)x_i + d(t) > -\infty & \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)x_i \geq b(t), & t \in T_0 \end{array} \right\}. \tag{7}$$

Caso 4: Para $T_+ = \emptyset = T_-$,

$$\hat{\sigma} = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)x_i \geq b(t), \qquad t \in T_0 \right\}. \tag{8}$$

Denotemos por $\hat{F}$ el conjunto solución del sistema $\hat{\sigma}$ definido de (5) a (8).

El método de Fourier proporciona la proyección sobre los hiperplanos coordenados del conjunto solución de un SSIL (obsérvese que la proyección de un conjunto cerrado convexo es un convexo, pero no es necesariamente cerrado).

Proposición 2.1 *$\hat{x} \in \hat{F}$ si, y sólo si, existe un $x_n \in \mathbb{R}$ tal que $\binom{\hat{x}}{x_n} \in F$ (es decir, $\hat{F}$ es la proyección ortogonal de F sobre el hiperplano $x_n = 0$).*

Por otro lado y en relación con el método de Fourier, se han considerado las condiciones bajo las que se obtiene otro SSIL que representa al correspondiente conjunto factible, las condiciones bajo las que se transmiten propiedades (numerable, polinómico, continuo, FM, LOP y LFM) de un SSIL a su sistema reducido y la posibilidad de reparar aquellas propiedades en el sistema reducido cuando no sean heredadas

Proposición 2.2

- *En el caso 1, si σ es numerable, entonces $\hat{\sigma}$ es numerable. Además, si σ es continuo y $T \subset \mathbb{R}^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, se obtiene una representación continua de $\hat{F}$ al multiplicar cada inecuación de índices $(t, s) \in T_- \times T_+$ en $\hat{\sigma}$ por $|a_n(t)a_n(s)|$ y sustituir el conjunto de índices por su clausura. En los casos 2 y 3, si $|T \setminus T_0| < \infty$, entonces $\hat{\sigma}$ es un SSIL. Si σ es numerable (continuo), entonces $\hat{\sigma}$ es numerable (continuo), respectivamente. En el caso 4, $\hat{\sigma}$ pertenece a las mismas clases de SSIL's que σ.*

- *El sistema $\hat{\sigma}$ está en el caso 1 si, y sólo si, $\pm e_n \notin 0^+F$, lo que equivale a la condición (Proposición 2.1). El sistema $\hat{\sigma}$ está en el caso 2 si, y sólo si, $e_n \in 0^+F$ y $-e_n \notin 0^+F$ (es decir, $e_n \in 0^+F \setminus \operatorname{lin} F$). El sistema $\hat{\sigma}$ está en el caso 3 si, y sólo si, $e_n \notin 0^+F$ y $-e_n \in 0^+F$ (es decir, $-e_n \in 0^+F \setminus \operatorname{lin} F$), lo que equivale a la condición (Teorema 2.1). El sistema $\hat{\sigma}$ está en el caso 4 si, y sólo si, $e_n \in \operatorname{lin} F$.*

- *Si x_n es acotada en F, entonces necesariamente $T_+ \neq \emptyset \neq T_-$.*

2.2 Método de Motzkin

El método de Motzkin tradicional, permite descomponer F como suma de un polítopo y de un cono finitamente generado (véase por ejemplo [3]).

Versión semi-infinita del método de Motzkin

Esta versión extendida a SSIL's propone una forma de encontrar una representación (interna) para F, específicamente como la suma de un conjunto convexo compacto y de un cono cerrado convexo.

Proposición 2.3 *Sean F un conjunto cerrado y convexo y K el correspondiente cono característico de un sistema σ que representa a F. Sea $\operatorname{cl} K = \left\{ \binom{x}{x_{n-1}} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \binom{c_s}{d_s}' \binom{x}{x_{n-1}} \geq 0, s \in S \right\}$ una representación lineal externa de $\operatorname{cl} K$, tal que $\{c_s, s \in S\}$ es un conjunto acotado. Una representación (interna) de F es entonces:*

$$F = \operatorname{cl}\operatorname{conv}\left\{ \frac{c_s}{d_s} \mid d_s < 0, s \in S \right\} + \operatorname{cl}\operatorname{cone}\{c_s \mid d_s = 0, s \in S\},$$

de modo que una representación (interna) de F viene dada como la suma de un conjunto convexo compacto y un cono cerrado convexo.

3 Método de relajación extendido

Sea $\{a_t'x \geq b_t, t \in T\}$ un sistema continuo, en el que supondremos $a_t \neq 0_n$ para todo $t \in T$, de modo que cada inecuación representa un semiespacio. Sea F su conjunto solución. La idea geométrica del método es muy simple: supongamos que el punto actual, $\bar{x}$, no es solución del sistema (es decir, $\bar{x} \notin F$); de entre los hiperplanos asociados con inecuaciones violadas por $\bar{x}$ se toma uno de los más alejados de $\bar{x}$, llamémosle H; el punto siguiente se obtiene desplazando $\bar{x}$ perpendicularmente hacia H una distancia igual a $\lambda d(\bar{x}, H)$, donde $\lambda > 0$ es un parámetro prefijado.

Como la distancia Euclídea desde $\bar{x}$ al hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a'x = b\}$ tal que $a'\bar{x} < b$ viene dada por el escalar $\mu := d(\bar{x}, H) = \frac{b - a'\bar{x}}{\|a\|} > 0$, el punto siguiente será $\bar{x} + \mu\lambda\frac{a}{\|a\|}$.

En particular, si se toma $\lambda = 2$ ($\lambda = 1$), el punto siguiente a $\bar{x}$ es el simétrico a $\bar{x}$ respecto de H (la proyección ortogonal de $\bar{x}$ sobre H, respectivamente).

Algoritmo de relajación

1. Fíjese el parámetro $\lambda > 0$. Tómese el índice de iteración $r = 0$ y $x^0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario.

2. Calcúlese $u_r = \inf_{t \in T} g(t, x^r) = \inf_{t \in T} (a_t'^r - b_t)$.

   Si $u_r \geq 0$, fin (x^r es la solución buscada). Si $u_r < 0$, constrúyase el conjunto de índices $T_r = \{t_r \in T \mid g(t_r, x^r) < 0\}$ (índices de las restricciones violadas).

   Sea
$$\mu_r := \frac{b_{t_r} - a_{t_r}'^r}{\|a_{t_r}\|} = \max\left\{\frac{b_{t_r} - a_{t_r}'^r}{\|a_{t_r}\|}, t \in \operatorname{cl} T_r\right\},$$

3. tómese $x^{r+1} = x^r + \lambda\mu_r\frac{a_{t_r}}{\|a_{t_r}\|}$. Sustituya r por $r + 1$ y vuelva a 2.

Nótese que μ_r no puede ser cero puesto que se tendría $T_r = \emptyset$.

Teorema 3.1 *Si* $\operatorname{int} F \neq \emptyset$*, el método de relajación de parámetro* $\lambda = 2$ *y cualquiera que sea* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *concluye de manera finita, o bien, existe un* $\bar{x} \in F$ *tal que* $\lim_r x^r = \bar{x}$.

Algoritmo de relajación con solución aproximada

1. Fíjese el parámetro $\lambda > 0$. Tómese el índice de iteración $r = 0$ y $x^0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Supóngase una sucesión $\{\varepsilon_r\}$ de números no negativos tales que $\lim_r \varepsilon_r = 0$.

2. Calcúlese $u_r = \inf_{t \in T} g(t, x^r) = \inf_{t \in T} (a_t'^r - b_t)$.

   Si $u_r \geq 0$, fin (x^r es la solución buscada). Si $u_r < 0$, constrúyase el conjunto de índices $T_r = \{t_r \in T \mid g(t_r, x^r) < 0\}$ (índices de las restricciones violadas).

   Sea
$$\mu_r := \frac{b_{t_r} - a_{t_r}'^r}{\|a_{t_r}\|} = \max\left\{\frac{b_{t_r} - a_{t_r}'^r}{\|a_{t_r}\|}, t \in \operatorname{cl} T_r\right\} + \varepsilon_r,$$

3. tómese $x^{r+1} = x^r + \lambda\mu_r \frac{a_{t_r}}{\|a_{t_r}\|}$. Sustituya r por $r+1$ y vuelva a 2.

Teorema 3.2 *Si* $\operatorname{int} F \neq \emptyset$, *el método de relajación de parámetro* $\lambda = 2$ *y cualquiera que sea* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *concluye de manera finita, o bien, existe un* $\bar{x} \in F$ *tal que* $\lim_r x^r = \bar{x}$.

Bibliografía

[1] E. J. Anderson, M. A. Goberna, and M. A. López: 1998. Locally polyhedral linear inequality systems. *Linear Algebra Appl. 270. 231–253.*

[2] M. A. Goberna: 2005. Linear semi-infinite optimization: a guide tour. *IMCA Monoghaphs. 40. 1–63.*

[3] M. A. Goberna, V. Jornet, and R. Puente: 2004. *Optimización Lineal, Teoría Métodos y Modelos.* McGraw Hill.

[4] M. A. Goberna and M. A. López: 1998. *Linear Semi-infinite Optimization.* John Wiley Chichester.

[5] E. Marchi, R. Puente, and V. N. Vera de Serio: 1997. Quasi-polyhedral sets in semi-infinite linear inequality systems. *Linear Algebra Appl. 255. 157–169.*

[6] R. Puente and V. Vera de Serio: 1999. Locally Farkas-Minkowski linear semi-infinite systems. *Top. 7. 103–121.*

[7] M. K. Richter and K. C. Wong: 2005. Infinite inequality systems and cardinal revelations. *Econom. Theory. 26. 947–971.*

[8] B. Özçam and H. Cheng: 2005. A discretization based smoothing method for solving semi-infinite variational inequalities. *J. Ind. Manag. Optim. 1. 219–233.*

[9] A. Charnes, W. W. Cooper, and K. O. Kortanek: 1962. Duality Haar programs and finite sequence spaces. *Proc. Natl.Acad. sci. 48. 783–786.*

[10] A. Charnes, W. W. Cooper, and K. O. Kortanek: 1963. Duality in semi-infinite programs and some works of Haar and Carathéodory. *Management Sci. 9. 209–228.*

[11] E. J. Anderson and A. S. Lewis: 1989. An extension of the simplex algorithm for semi-infinite linear programming. *Math. Programming. 44A. 247–269* .

[12] M. A. Goberna, V. Jornet, R. Puente, and M.I. Todorov: 1999. Analytical linear inequality systems and optimization: 1999. *Optim. theory Appl. 103. 95–119.*

[13] A. Charnes, W. W. Cooper, and K. O. Kortanek: 1965. On representations of semi-infinte programs which have no duality gaps. *Management Sci., 12. 113–121.*

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo, 2008, pp. 81–84.

ACCIONES DE GRUPOS

Rosalía Gpe. Hernández Amador

Instituto de Matemáticas - UNAM, Unidad Cuernavaca

e-mail: rosalia@matcuer.unam.mx

Resumen

En esta plática se pretende estudiar acciones de grupos sobre espacios topológicos. Presentaremos el significado de una acción de un grupo, así como algunos resultados que han ido surgiendo en las últimas décadas al querer tratar de resolver el problema de describir todos los grupos finitos que actúan libremente sobre variedades (y particularmente sobre esferas). El objetivo de esta plática es mostrar que la teoría de grupos y en particular el estudio de acciones de grupos es un área activa en matemáticas en la que se pueden encontrar resultados actuales muy interesantes.

1 Acciones de grupos

Sea X un espacio topológico compacto. Una forma de analizar el espacio X es estudiando su grupo de simetrías.

Definición. Un grupo G es un grupo de simetrías para el espacio topológico X si existe un homomorfismo de grupos

$$\psi : G \hookrightarrow \mathrm{Homeo}(X).$$

Identificamos a cada $g \in G$ con un homeomorfismo $g : X \to X$ y decimos que G define una *acción sobre el espacio* X.

Dado $x \in X$ y G actuando en X, definimos el *subgrupo de isotropía* en el punto x como

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$$

y el conjunto de *puntos singulares* como

$$S(X) := \{x \in X \mid G_x \neq \{1\}\}$$

.

Por otro lado, dado $H \subset G$ podemos definir

$$X^H := \{x \in X \mid hx = x \ \forall h \in H\}$$

el conjunto de *puntos fijos* para la H- acción sobre X. Notemos que si $H \subset K$, entonces

$$X^K \subset X^H.$$

2 Acciones libres

Definición. Una G-acción sobre X se dice ser *libre* si $G_x = \{1\}$ para todo $x \in X$ o equivalentemente si $X^H = \emptyset$ para todo $H \neq \{1\}$.

Las acciones libres son particularmente interesantes pues una G acción sobre una variedad diferenciable produce nuevamente una variedad diferenciable.

Consideremos un grupo finito G que actúa libremente sobre una variedad compacta M. Todo punto $x \in M$ tiene una vecindad U que es permutada por la acción de G, es decir,

$$gU \cap hU = \emptyset \quad \text{si} \quad g \neq h.$$

Se define el *espacio cociente* de M por G, denotado como M/G, como el cociente de M mediante la siguiente relación de equivalencia: para $x, x' \in M$ decimos que $x \sim x'$ si existe $g \in G$ tal que $gx = x'$. Las clases de equivalencia mediante esta relación se llaman órbitas, de modo que $x \sim x'$ si están sobre la misma órbita. En este caso M/G resulta ser una variedad diferenciable.

Para una variedad fija M, podemos tratar de *describir todos los grupos finitos que actúan libremente sobre M.*

Ejemplos:

- *Acciones libres sobre el disco unitario.*

  Sea $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ el disco n-dimensional, con frontera $\mathbb{S}^{n-1}$, la esfera $(n-1)$-dimensional. Por el Teorema de punto fijo de Brower, en este caso para cualquier homeomorfismo del disco n-dimensional en sí mismo siempre existen puntos fijos de modo que ningún $G \neq \{1\}$ puede actuar libremente sobre M.

- (*Acciones libres sobre esferas de dimensión par*)

  Sea $M = \mathbb{S}^{2n}$ una esfera de dimensión par. Como corolario del Teorema de punto fijo de Lefschetz se tiene que si $f, g : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$ no tiene puntos fijos, entonces $f \circ g$ tiene puntos fijos.

  Entonces, si G actúa libremente sobre $M = \mathbb{S}^{2n}$, de lo anterior se tiene que $f \circ g = 1$, $\forall f, g \in G$ de modo que

  $$G = \begin{cases} \{1\} & \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n} \\ \mathbb{Z}_2 & Ax = -x \end{cases}$$

  de modo que $\mathbb{Z}_2$ es el único grupo no trivial que actúa libremente sobre $\mathbb{S}^{2n}$ (la acción dada por la aplicación antípoda).

Nota (*Acciones no libres).* Las acciones no libres sobre variedades puede resultar ser muy difíciles de estudiar. Si G es un grupo que actúa sobre una variedad cerrada M, y si la acción no es libre, $M \to M/G$ produce una "orbidad". Éstos son espacios que ya no se miran localmente como un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, sino como vecindades $\mathbb{R}^n/G, G \subset O(n)$ y pueden tener conjuntos singulares muy complicados.

3 Acciones libres sobre esferas

En el ejemplo anterior se caracterizan los grupos finitos que actúan sobre esferas de dimensión par, pero entonces ¿qué sucede en el caso de *esferas de dimensión impar*?

Como un primer resultado que podemos encontrar al tratar de describir los grupos finitos que actúan sobre una esfera y que influenció a manera de guía a resultados obtenidos posteriormente, tenemos el siguiente de P. Smith de 1940.

Teorema (Smith, 1940). Si un grupo finito G actúa libremente sobre una esfera, entonces todos sus subgrupos abelianos son cíclicos.

Lo que significa que G no contiene ningún subgrupo de la forma $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, con p primo (ésta es llamada la p^2 condición).

Más adelante Milnor mostró lo siguiente.

Teorema (Milnor, 1957). Un grupo finito G que actúa libremente sobre $\mathbb{S}^n$ debe contener a toda involución en su centro.

Esto es, que todo elemento de orden dos en G debe ser central.

Los siguientes resultados generalizan a los anteriores, y en particular el primero de éstos nos ayuda al analizar los grupos finitos que actúan sobre espacios mas generales llamados "esferas homológicas", los cuales son espacios que poseen el mismo tipo de homotopía de $\mathbb{S}^n$ (el cual generaliza el teorema anterior de P. Smith).

Teorema (Swan, 1960). Un grupo G actúa libremente sobre un complejo finito $X \simeq \mathbb{S}^n$ para algún $n \geq 0$ si y sólo si, todo subgrupo abeliano de G es cíclico.

Teorema (Marsden-Thomas-Wall, 1976). Un grupo finito G actúa libremente sobre una esfera $\mathbb{S}^n$ si y sólo si G tiene sus subgrupos abelianos cíclicos y toda involución en G es central.

4 Algunas generalizaciones

Algunos trabajos recientes en esta dirección se han enfocado ahora en el problema de *caracterizar aquellos grupos finitos que actúan libremente sobre el producto de dos esferas* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$. Se ha usado teoría de representaciones y teoría de haces para analizar este problema y se tienen algunas respuestas parciales debido a Adem-Davis-Ünlü:

- Si $G \subset SU(3)$ entonces actúa libre y suavemente sobre $\mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^7$.
- Si $p \geq 3$ es primo, entonces un p-grupo finito P actúa libre y suavemente sobre algún $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ si y sólo si P no contiene a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ como un subgrupo.
- (Teorema de propagación) Sea $G \subset U(n)$ tal que G actúa libremente sobre $U(n)/U(k)$ para $k > 1$. Entonces, si $(|G|, (n-1)!) = 1$, G actuará libre y suavemente sobre $M = \mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{S}^{2n-3} \times \cdots \times \mathbb{S}^{2k+1}$.

Otra generalización del estudio de acciones sobre esferas es en el sentido de considerar ahora el caso de una acción por un grupo discreto. Todo lo que hemos analizado hasta aquí es válido para grupos finitos, pero también se tienen resultados en el caso discreto, principalmente debidos a Adem-Smith, los cuales usan el siguiente concepto.

Definición. Un espacio X se dice que tiene *cohomología periódica* si existe una clase de cohomología $\alpha \in H^*(X, \mathbb{Z}), |\alpha| > 0$, y un entero $d \geq 0$ tal que para todo sistema de coeficientes M

$$\smile \alpha : H^n(X, M) \to H^{n+|\alpha|}(X, M)$$

es un isomorfismo para $n \geq d$.

Por ejemplo un grupo finito G tiene cohomología periódica si y sólo si, todo subgrupo abeliano en G es cíclico.

Teorema (Adem -Smith). Un grupo discreto Γ actúa libre y propiamente sobre algún $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^N$ si y sólo si Γ es un grupo numerable con cohomología periódica.

Bibliografía

[1] A. Adem, J. Davis, O. Ünlü, *Fixity and Free Group Actions on Products of Spheres.* Commentarii Mathematici Helvetici 79, pp. 758–778 (2004).

[2] A. Adem, J. Smith, *Periodic Complexes and Group Actions.* Annals of Mathematics 154, pp. 407-435 (2001).

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo, 2008, pp. 85–94.

ESTABILIDAD DE MODOS DESLIZANTES CON CONTROLES CONTINUOS

Horacio Leyva Castellanos

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

e-mail: hleyva@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Bajo la condición de encuentro con el control de relevo ideal, definimos un control continuo en una vecindad de la superficie de cambio con el objetivo de eliminar el efecto indeseable llamado chattering (una inestabilidad que consiste en una oscilación de alta frecuencia de la variable de salida); y al mismo tiempo mantener características deseables como el alcance de la superficie de cambio en tiempo finito, control acotado, preservación de la invariancia de la superficie de cambio y el modo deslizante correspondiente; así como lograr un nivel aceptable de robustez al mostrar la persistencia de la superficie de cambio bajo perturbaciones del sistema de control realimentado. Presento un ejemplo de esta robustez.

Palabras clave: *Control continuo, superficie de cambio, chattering, invariancia, robustez.*

1 Introducción

En el marco de la teoría de *control de estructura variable*, presento una familia de controles continuos con el objetivo de eliminar el efecto chattering, un fenómeno que se presenta al poner en práctica esta teoría. Es conocido que este tipo de inestabilidad es causada por la discontinuidad del control en la superficie de cambio. Es conocida la robustez de la invariancia de la superficie deslizante bajo un sistema de estructura variable. La estabilización a un punto de equilibrio en tiempo finito bajo estos sistemas también es robusto, ver el trabajo [9].

Considerando los trabajos [5, 6], donde se presentan resultados sobre la persistencia de invariancia de variedades bajo perturbaciones del campo, conjuntamente con los resultados mostrados en [1], mostramos algunos elementos de diseño de controles estabilizantes, como es la "negociación" entre obtener la robustez del sistema realimentado y la suavidad del control. Lo que se muestra en los contoles continuos que reducen el efecto chattering y que retienen las características deseables del control de relevo ideal.

2 Antecedentes

Consideremos el sistema no-lineal con entrada escalar

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, las funciones f, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son continuas, el control $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, está definido por

$$u = -k \operatorname{sign}(s), \tag{2}$$

donde k es una constante positiva y la función $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^1, de forma que el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s(x) = 0\}$ es una superficie de codimensión 1 en el espacio de

estado, la cual es llamada *superficie de cambio*. Esta superficie es atractora bajo el sistema (1)-(2) si suponemos la *condición de encuentro* expresada en el par de desigualdades:

$$\lim_{s\to 0^+}(\nabla s\cdot f - k\nabla s\cdot g) < 0, \qquad \lim_{s\to 0^-}(\nabla s\cdot f + k\nabla s\cdot g) > 0, \tag{3}$$

donde ∇s representa el gradiente de la función s y $\nabla s\cdot f$ es el producto escalar entre los vectores ∇s y f. En el espacio de estado, el chattering consiste en una oscilación de las trayectorias $x(t)$ sobre la superficie de cambio $s(x) = 0$.

Las desigualdades (3), introducidas por Utkin, implican que las trayectorias alcanzan a la superficie de cambio con rapidez no nula. En este trabajo consideramos el sistema (1)-(2) y la condición (3) en un conjunto abierto Ω de el espacio de estado, de manera que en el subconjunto $\Omega\cap S$ estableceremos el modo deslizante.

Las condiciones (3) implican la existencia de un *control equivalente* definido por

$$u_{eq} = -\frac{\nabla s\cdot f}{\nabla s\cdot g}, \tag{4}$$

de manera que la ecuación $\dfrac{ds\,(x(t))}{dt} = 0$ representa el llamado *modo deslizante ideal*.

Para tener (4), debemos suponer la condición de transversalidad: $\nabla s\cdot g \neq 0$ para $x\in S$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $\nabla s\cdot g > 0$. Esta hipótesis nos permite sustituir el control (2) por el siguiente control discontinuo:

$$u = \begin{cases} -k, & \text{si} \quad s > 0 \\ u_{eq}, & \text{si} \quad s = 0 \\ k, & \text{si} \quad s < 0 \end{cases} \tag{5}$$

La principal propiedad del sistema realimentado (1)-(5) es el alcance en tiempo finito y la robustez.

Una hipótesis esencial de la teoría de control de estructura variable, presente en el sistema (1)-(5), consiste en que el control puede cambiar de un valor a otro infinitamente rápido. Físicamente esto es imposible, ya que todo mecanismo presenta un retardo al llevar a cabo un cambio de valor en el control. Por consiguiente es necesario considerar el efecto chattering en (1)-(5). Este fenómeno es un serio obstáculo en la aplicación de los controles de tipo (5). De acuerdo a esta característica, un buen control para el sistema (1) es uno que ayude a eliminar el efecto *chattering* y a la vez mantenga la convergencia en tiempo finito. Además de ser acotado, el control debe preservar la dinámica deslizante sobre S, así como la persistencia de ésta dinámica en presencia de perturbaciones.

3 Control de interpolación continuo

Una opción aceptada para anular el efecto chattering consiste en considerar una vecindad $O_\varepsilon = \{x\in\mathbb{R}^n \mid |s(x)| < \varepsilon\}$ de la superficie de cambio S, (ver [7]). En esta vecindad es posible reemplazar el control discontinuo (5) por uno continuo o de clase C^1. Sin embargo,

esta sustitución puede destruir la invariancia de S y de la dinámica deslizante sobre S. Bajo la consideración de la vecindad O_ε de S, propongo el siguiente control continuo:

$$u(s) = \begin{cases} u_c, & \text{si} \quad \left|\frac{s}{\varepsilon}\right| < 1 \\ \\ -k \text{ sign}(s), & \text{si} \quad \left|\frac{s}{\varepsilon}\right| \geq 1 \end{cases}, \tag{6}$$

con $u_c := u_{eq} - \left|\frac{s}{\varepsilon}\right|^p (k \text{ sign}(s) + u_{eq})$, donde $p > 0$.

De acuerdo con (6), el control de relevo $u_r(s) = -k \text{ sign}(s)$ actúa fuera de la vecindad O_ε, mientras que en el interior funciona una interpolación continua entre u_{eq} y los valores extremos $\pm k$. El control (6) es continuo y acotado. En [2] se probó que $-k \leq u_{eq} \leq k$. Para el control (6) es fácil probar el siguiente par de desigualdades:

$$\begin{aligned} u_{eq} &\leq u(s) \leq k \quad \text{para} \quad s \leq 0 \\ -k &\leq u(s) \leq u_{eq} \quad \text{para} \quad s \geq 0 \end{aligned}$$

Prueba para el caso $0 < s < \varepsilon$.

De este caso deducimos que $0 < \left|\frac{s}{\varepsilon}\right|^p < 1$

$$\Rightarrow \qquad 0 < \left|\frac{s}{\varepsilon}\right|^p (k + u_{eq}) < k + u_{eq}$$

$$\Rightarrow \qquad 0 > -\left|\frac{s}{\varepsilon}\right|^p (k + u_{eq}) > -k - u_{eq}$$

$$\Rightarrow \qquad u_{eq} > u_{eq} - \left|\frac{s}{\varepsilon}\right|^p (k + u_{eq}) > -k,$$

es decir $u_{eq} > u(s) > -k$.

De (1) y (6) obtenemos que

$$\dot{s} = -\left|\frac{s}{\varepsilon}\right|^p \left(\text{ sign}(s) k \nabla s \cdot g - \nabla s \cdot f \right) \quad \text{si} \quad |s| < \varepsilon. \tag{7}$$

Por medio de la desigualdad $-k \leq u_{eq} \leq k$, podemos mostrar que $s\dot{s} < 0$ si $s \neq 0$. Esto implica que el control preserva la invariancia de S y el modo deslizante. La siguiente definición y el Hecho 3.2 fueron presentados en [1].

Definición 3.1 *Llamaremos ecuación diferencial de tiempo finito a la ecuación diferencial con la característica de que el origen es asintóticamente estable, y cualquier solución que converge al origen lo hace en tiempo finito.*

Hecho 3.2 *La ecuación uno-dimensional $\dot{z} = r(z)$ con $r(0) = 0$, es de tiempo finito si y sólo si se cumple que:*

(i) $zr(z) \leq 0$, y es igual a cero sólo si $z = 0$, para z en una vecindad de 0;

(ii) $\int_q^0 \frac{dz}{r(z)} < \infty$ *para toda* $q \in \mathbb{R}$.

Un ejemplo conocido de ecuación diferencial de tiempo finito es

$$\dot{z} = -\eta\,|z|^{\alpha}\, sign\,(z)\,, \text{ con } 0 \leq \alpha < 1 \text{ y } \eta > 0$$

De acuerdo con el Hecho 3.2, deducimos la Proposición 3.3, donde suponemos que las funciones $H(z)$ y $F(z)$ son continuas, tales que $H(0) = F(0) = 0$.

Proposición 3.3 *Si la ecuación escalar* $\dot{z} = H(z)$ *es de tiempo finito para* $z = 0$ *y para alguna* F *dada sucede que*

$$sign(z)F(z) \leq \; sign(z)H(z)$$

en alguna vecindad de $z = 0$*, entonces la ecuación* $\dot{z} = F(z)$ *es de tiempo finito.*

Ver la demostración en [1]. La idea de la Proposición 3.3 es sencilla: en una vecindad de $z = 0$, F representa una mayor rapidez de convergencia que H . De acuerdo con la Proposición 3.3, si tomamos

$$H(s) = -\eta\,|s|^{\alpha}\;\text{sign}(s) \;\text{ y }\; \dot{s} = F(s),$$

entonces la desigualdad

$$\text{sign}(s)\dot{s} \leq -\eta\,|s|^{\alpha}\;\text{sign}(s)\;\text{sign}(s),$$

o equivalentemente,

$$\text{sign}(s)\dot{s} \leq -\eta\,|s|^{\alpha}\,, \tag{8}$$

es una condición suficiente para estabilizar $s(t)$ en el valor fijo $s = 0$ en tiempo finito. En efecto, cualquier función $H(s)$ que represente el lado derecho de una ecuación de tiempo finito sirve como condición suficiente del tipo (8).

En la siguiente proposición, probada mediante la condición (8), mostramos que la ecuación diferencial (7) es de tiempo finito. Para esto consideremos una partición de la vecindad O_ε de S en la forma

$$O_\varepsilon = O_\varepsilon^+ \cup O_\varepsilon^-,$$

donde

$$O_\varepsilon^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq s\,(x) \leq \varepsilon\} \quad \text{ y } \quad O_\varepsilon^- = \{x \in \mathbb{R}^n : -\varepsilon \leq s\,(x) \leq 0\}$$

Proposición 3.4 *Bajo la condición de encuentro (3), si las funciones* f *y* g *del sistema (1)-(6) son continuas,* $s(x) \in C^1$ *y consideramos* u *definido en (6) con* $0 \leq p \leq 1$*, entonces las soluciones* $x(t)$ *de* $(1) - (6)$ *iniciadas en* $O_\varepsilon \setminus S$*, alcanzan a* S *en tiempo finito.*

Demostración. Considerando los siguientes valores extremos de $\dot{s}$ en O_ε

$$a = \max_{O_\varepsilon^+}\{\nabla s \cdot f - k\nabla s \cdot g\} \quad \text{ y } \quad b = \min_{O_\varepsilon^-}\{\nabla s \cdot f + k\nabla s \cdot g\},$$

se tiene, por consiguiente, que

$$\nabla s \cdot f - k\nabla s \cdot g \leq a < 0 \quad \text{para} \quad x \in O_\varepsilon^+, \quad \text{ y } \quad \nabla s \cdot f + k\nabla s \cdot g \geq b > 0 \quad \text{para} \quad x \in O_\varepsilon^-.$$

Estas desigualdades implican que

$$\begin{aligned} s &> 0 \quad \Rightarrow \dot{s} = \frac{1}{\varepsilon^p} |s|^p (\nabla s f - k \nabla s g) \leq \frac{a}{\varepsilon^p} |s|^p \\ s &< 0 \quad \Rightarrow \dot{s} = \frac{1}{\varepsilon^p} |s|^p (\nabla s f - k \nabla s g) \geq \frac{b}{\varepsilon^p} |s|^p , \end{aligned}$$

lo cual implica que si $s > 0$, entonces $\dot{s} \leq \frac{a}{\varepsilon^p} |s|^p$; en cambio, si $s < 0$, entonces $-\dot{s} \leq -\frac{b}{\varepsilon^p} |s|^p$. Podemos reducir este par de desigualdades a una, mediante la constante positiva $c = \min\{-a, b\}$, y se tiene entonces $\operatorname{sign}(s)\dot{s} \leq -\frac{c}{\varepsilon^p} |s|^p$.

Como consecuencia de (8), con $\eta = \dfrac{c}{\varepsilon^p} > 0$ y $0 < p < 1$, entonces la solución iniciada en $x_0 \in O_\varepsilon \setminus S$ alcanza a S en tiempo finito. ■

4 Persistencia de la Invariancia

Para abordar el problema de persistencia de la invariancia de la superficie de cambio, consideremos una función de perturbación desconocida $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, influenciando en la parte derecha de la ecuación (1).

Respecto a la persistencia del modo deslizante de (1)-(5), en [2], se presenta un resultado de persistencia bajo la hipótesis de la *condición de encuentro*, la cual es muy restrictiva.

Si consideramos una perturbación $\rho(x)$ suficientemente pequeña en el lado derecho del sistema (1), con una realimentación dada por (6), podemos perder la invariancia de la superficie de cambio S. En este caso, podemos mostrar que existe una superficie invariante S' bajo el sistema perturbado, donde S' está cerca de S. Mostraremos que si el control u y la perturbación $\rho(x)$ son de clase C^1, con $\|\rho(x)\|_1$ pequeña, entonces S' es C^1-cercana a S. Podemos ver que el control $u = u(s)$, dado por (6) es de clase C^1si $p > 1$. Si $p \in (0, 1)$, entonces u sólo es continuo.

Consideramos las funciones f, g de clase C^1, con $p > 1$, de forma que en el interior de O_ε podemos aplicar el siguiente cambio de variable $x_2 = s(x)$. Considerando (1), obtenemos que

$$\dot{x}_2 = \nabla s \dot{x} = \nabla s \cdot f + \nabla s \cdot g u,$$

donde hemos considerado que $x = (x_1, x_2)$, con $x_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $x_2 \in \mathbb{R}$, tal que $(x_1, 0)$ representa a la superficie S.

En el siguiente planteamiento definimos de manera implícita a las funciones f_m, $g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$. Ya que S es una superficie regular de clase C^1, existe un cambio de coordenadas de clase C^1 (ver [3]), de manera que podemos reescribir (1) en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_m(x) + g_m(x) u(x) \\ \dot{x}_2 &= \nabla s \cdot f + \nabla s \cdot g u(x), \end{aligned} \tag{9}$$

de manera que considerando el control (6), la ecuación de (7) nos permita establecer que

$$\dot{x}_2 = -\left|\frac{x_2}{\varepsilon}\right|^p (k \operatorname{sign}(x_2) \nabla s \cdot g - \nabla s \cdot f).$$

Podemos incorporar una perturbación $\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1(x) \\ \rho_2(x) \end{pmatrix}$, determinada en O_ε con $\rho_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\rho_2 \in \mathbb{R}$. Tenemos que una perturbación de la forma $\rho(x) = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ no altera la invariancia de S pero altera la dinámica del modo deslizante. En cambio, una perturbación de la forma $\rho = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_2 \end{pmatrix}$ altera la segunda ecuación de (9), de manera que para tener la la invariancia de S bajo el sistema (1)-(6), la función ρ_2 es restringida a la desigualdad

$$x_2\dot{x}_2 = x_2\left[-\left|\frac{x_2}{\varepsilon}\right|^p (k\ \mathrm{sign}(x_2)\nabla s \cdot g - \nabla s \cdot f + \rho_2)\right] < 0.$$

Es decir, sólo si la perturbación ρ_2 es restringida a las desigualdades

$$\begin{array}{rrcl} & \rho_2 & < & \left|\frac{x_2}{\varepsilon}\right|^p (k\nabla s \cdot g - \nabla s \cdot f) < 0 \quad \text{si } \ x_2 > 0 \\ \text{y} & \rho_2 & > & \left|\frac{x_2}{\varepsilon}\right|^p (-k\nabla s \cdot g - \nabla s \cdot f) > 0 \quad \text{si } \ x_2 < 0, \end{array}$$

tendremos la invariancia de S.

Para considerar una perturbación ρ más general que la expresada por las desigualdades anteriores, daremos la siguiente definición de estabilidad.

En la siguiente definición, sea $H(x)$ el lado derecho del sistema (9) en las coordenadas $x = (x_1, x_2)$.

Definición 4.1 (C^1 estabilidad) *Una superficie invariante (de acuerdo con (9)) S es estable respecto a C^1 perturbaciones (es C^1 estable) si para $\varepsilon_1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, cuando $\|H - H_0\|_1 < \delta$, el sistema perturbado $\dot{x} = H_0(x)$ tiene una superficie invariante C^1-suave S_0, tal que $\|S - S_0\|_1 < \varepsilon_1$. En general, δ depende de ε_1, H y S.*

Reescribimos (9) en una forma especial a través de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} F_0(x_1) &:= f_m(x_1, 0) + g_m(x_1, 0)u_{eq}; \\ F_1(x) &:= f_m(x) - F_0(x_1); \\ \Phi_1(x) &:= x_2 - \left|\frac{x_2}{\varepsilon}\right|^p (k\ \mathrm{sign}(x_2)\nabla s \cdot g - \nabla s \cdot f), \end{aligned}$$

de forma que podemos reescribir (9) como

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & F_0(x_1) + F_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 & = & -x_2 + \Phi_1(x_1, x_2), \end{array} \tag{10}$$

donde $F_1(x_1, 0) = 0$ y $\Phi_1(x_1, 0) = 0$. Tenemos que la superficie S también es invariante bajo el sistema

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & F_0(x_1), \\ \dot{x}_2 & = & -x_2, \end{array} \tag{11}$$

donde observamos que las funciones $F_1(x_1, x_2)$ y $\Phi_1(x_1, x_2)$ son pequeñas si la variable x_2 es pequeña. Mas todavía, el sistema (10) puede ser considerado como una perturbación del sistema (11). Bajo esta consideración, es útil aplicar el siguiente resultado de naturaleza local.

Proposición 4.2 *Si el sistema (11) es pseudo-hiper-bólico de orden 1, entonces para cada $\varepsilon_1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que el sistema (10) tiene una superficie invariante C^1-suave S' con la representación*

$$S' = \{(x_1, v(x_1)) : (x_1, 0) \in S,\ v(x_1) \in E(x_1)\}$$

con $\|v\|_1 < \varepsilon_1$, en las coordenadas (x_1, x_2).

En este resultado, δ es la cota para la perturbación $\rho = \begin{pmatrix} F_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix}$ y $\|\cdot\|_1$ representa la C^1-norma.

En general, δ depende de ρ, ε_1 y S. Evidentemente consideramos que $\varepsilon_1 < \varepsilon$ ya que aplicamos el teorema en el interior de la vecindad O_ε de S. $E(x)$ denota el espacio ortogonal a S en x_1, de forma que $E = \{\cup E(x_1) : x_1 \in S\}$ es un fibrado C^1-suave sobre S.

Esta proposición fué probada en [4], bajo la hipótesis de C^1-suavidad del sistema (1)-(6), inclusive la perturbación ρ que altera el lado derecho del sistema. La Proposición 4.2 es útil porque considera que F_1 y Φ_1 representan cualquier perturbación C^1-pequeña. De tal manera que si alteramos el lado derecho de (10), obtenemos la misma conclusión: existe una superficie C^1-cercana a S' bajo el sistema perturbado.

Ejemplo. El sistema de control de dos dimensiones

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1\ , \end{pmatrix} u \tag{12}$$

Con el control $u = -76\ \mathrm{sign}(s)$ y la función de cambio $s(x, y) = y - 2x$, le corresponde el punto de equilibrio $\bar{p} = \left(-\frac{u}{19}, -\frac{3u}{19}\right)^T$, tal que si $s > 0 \Rightarrow u = -76 \Rightarrow \bar{p} = (4, 12)^T$; en cambio, si $s < 0 \Rightarrow u = 76 \Rightarrow \bar{p} = (-4, -12)^T$.

Observación: Para cualquier valor de u, los puntos de equilibrio del sistema están sobre la línea recta con pendiente 3 que pasa por el origen.

Los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = 1 + 2\sqrt{5}$ y $\lambda_2 = 1 - 2\sqrt{5}$ con los correspondientes vectores propios

$$v_1 = \left(1, 4 + 2\sqrt{5}\right)^T \quad \text{y} \quad v_2 = \left(1, 4 - 2\sqrt{5}\right)^T,$$

de manera que es sencillo describir el retrato fase.

De acuerdo a las desigualdades (3), para obtener el dominio del modo deslizante calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{s \to 0^+} \dot{s} &= \lim_{s \to 0^+} (10x + 3y - 76) = 16x - 76 < 0 \\ \Rightarrow \qquad & x < \frac{76}{16} = 4.75. \end{aligned}$$

Similarmente para $s < 0$:

$$\lim_{s\to 0^-} \dot{s} = \lim_{s\to 0^-} (10x + 3y + 76) = 16x + 76 > 0$$
$$\Rightarrow \qquad x > -\frac{76}{16} = -4.75.$$

Estas desigualdades implican que existe un modo deslizante si $x \in (-4.75, 4.75)$. Este es un segmento de la línea recta de cambio

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid s(x, y) = 0\right\}.$$

El modo deslizante es representado por la ecuación $\dot{x} = -x$. En este ejemplo, de acuerdo con (6), podemos aplicar el control continuo

$$u = \begin{cases} -10x - 3y - \left|\frac{s}{\varepsilon}\right|^p k(x) & \text{si} \quad \left|\frac{s}{\varepsilon}\right| < 1 \\ \\ -76 \text{ sign}(s) & \text{si} \quad \left|\frac{s}{\varepsilon}\right| \geq 1 \end{cases},$$

donde $k(x) := 76 \text{ sign}(s) - 10x - 3y$ y $p > 1$. Con este control, aplicado al sistema (12), obtenemos el siguiente sistema con lado derecho continuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + y, \\ \dot{y} &= -6x + 2y - \left|\frac{y - 2x}{\varepsilon}\right|^p k(x), \end{aligned}$$

donde la línea recta $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x = 0\}$ es invariante. Además sobre esta recta hay una dinámica deslizante si $-4.75 < x < 4.75$.

Consideremos ahora el sistema perturbado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + y + \rho(x), \\ \dot{y} &= -6x + 2y - \left|\frac{y - 2x}{\varepsilon}\right|^p k(x) + \rho(x), \end{aligned}$$

donde $\rho(x)$ es una función de perturbación de clase C^1. Asumiremos que existe un conjunto invariante S' que está definido por

$$S' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma(x, y) := y - 2x - l(x) = 0\right\},$$

con $l(x)$ una función suave. La invariancia de S' implica que

$$\dot{\sigma} = 0 \;\Leftrightarrow\; \dot{y} = 2\dot{x} + \frac{dl(x)}{dx}\dot{x},$$

de manera que $l(x)$ satisface la ecuación diferencial con condición inicial

$$\begin{gathered} \frac{dl}{dx}(l - x + \rho) = -\left|\frac{l}{\varepsilon}\right|^p K(x) - \rho \\ l(0) = 0 \end{gathered}, \tag{13}$$

donde $K(x) := k \text{ sign}(l(x)) - 16x - 3l(x)$.

Observación. Si $\rho(x) = 0$, entonces la función $l(x) = 0$ es solución. Más todavía, $l(x) = 0 \Leftrightarrow \rho(x) = 0$.

Podemos deducir de (13) que $|l(x)| + \left|\frac{dl(x)}{dx}\right|$ es pequeño si tomamos $\rho(x)$ suficientemente pequeño. Esto significa que S y S' son C^1-cercanos. Justo como es mencionado en la Proposición 4.2.

5 Conclusiones

Bajo las hipótesis clásicas de la teoría de control de estructura variable, propongo la familia de controles continuos (6) con los siguientes objetivos:

(a) Anular el efecto chattering.

(b) Mantener la convergencia en tiempo finito.

(c) Preservar la invariancia de la superficie de cambio bajo perturbaciones del campo controlado.

Estos objetivos pueden alcanzarse (no todos a la vez) mediante el control parametrizado y acotado (6). Si escogemos $p > 1$, obtenemos C^1-suavidad del campo controlado (1)-(6) de forma que alcanzamos el objetivo (a) y probamos la existencia de una superficie invariante (C^1- cercana a la superficie de cambio) bajo el sistema perturbado. En cambio, con $0 < p < 1$, alcanzamos el objetivo (b) y decrece el efecto chattering al tener la continuidad de $u = u(s)$.

Bibliografía

[1] Haimo V.T. *Finite Time Controllers*. Siam J. Control and Optimization, vol. 24, No. 4, July 1986.

[2] Hebert Sira-Ramirez, *Differential Geometric Methods in Variable-Structure Control*. Int. J. Control, 1988, Vol. 48, No. 4, 1359-1390.

[3] Lages E. *Introducción a las Variedades Diferenciaveis*. Lima. Emma, Impa. 1960.

[4] Leyva H. C. *Persistencia de Invariancia de Variedades en Control de Estructura Variable*. Tesis de Maestría UAM-I, México, D.F. Febrero de 1991.

[5] Osipenko G.S. *Perturbation of Invariant Manifolds I*. Differential'nye Uravneniya, Vol. 21, No. 24, pp. 615-6213. 1985.

[6] Osipenko G.S. *Perturbation of Invariant Manifolds III*. Differential'nye Uravneniya, Vol. 23, No. 5, 1987.

[7] Slotine J.J., Sastry S.S. *Tracking Control of Non-linear Systems using Sliding Surfaces, with Application to Robot Manipulators*. Int J. Control, 1993, Vol. 38.

[8] Utkin V.I. *Sliding Models in Control Optimization*. Springer-Verlang, 1992.

[9] Y. Orlov. *Finite Time Stability and Robust Control Synthesis of Uncertain Switched Systems*. SIAM, J. Control Optim. Vol. 43, No. 4, pp. 1253-1271, (2005).

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo, 2008, pp. 95–100.

CONDICIONES NECESARIAS PARA QUE UN POLINOMIO SEA SEMI-HURWITZ

Carlos Loredo, Baltazar Aguirre

Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa

e-mail: r2ro.loredo@gmail.com

Resumen

La estabilidad de un sistema lineal $\dot{x} = Ax$ se determina estudiando las raíces de su polinomio característico $p_A(t)$. Si el polinomio es semi-Hurwitz se puede asegurar la estabilidad del sistema y si es Hurwitz se puede asegurar la estabilidad asintótica del sistema. Los polinomios Hurwitz han sido extensamente estudiados[1] *sin embargo los polinomios semi-Hurwitz no han sido objeto de mucho estudio a pesar de su importancia en la teoría de bifurcaciones. En este trabajo presentamos algunas condiciones necesarias*[2] *para verificar si un polinomio real es semi-Hurwitz.*

1 Criterio de Routh-Hurwitz para polinomios semi-Hurwitz

Definición 1.1 Decimos que un polinomio con coeficientes reales es Hurwitz si todas sus raíces tienen parte real negativa, *i.e.*, están en $\mathbb{C}^- = \{\, a + ib : \, a < 0 \,\}$.

Definición 1.2 Decimos que un polinomio con coeficientes reales es semi-Hurwitz si sus raíces están en $\mathbb{C}^- \cup i\mathbb{R}$.

Observación 1.3 A veces en la literatura suele llamárseles *polinomios estables* a los polinomios Hurwitz y *polinomios semiestables* a los polinomios semi-Hurwitz.

Observación 1.4 El conjunto de polinomios Hurwitz está contenido en el conjunto de polinomios semi-Hurwitz.

Definición 1.5 Decimos que un polinomio es estrictamente semi-Hurwitz si es semi-Hurwitz y al menos una de sus raíces está en $i\mathbb{R}$.

Observación 1.6 El conjunto de polinomios estrictamente semi-Hurwitz está contenido en la frontera del conjunto de polinomios Hurwitz.

Definición 1.7 (Matriz de Hurwitz) Dado el polinomio con coeficientes reales

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

[1] véase [1], [2], [5], [6].

[2] En lógica matemática las condiciones necesarias nos permiten identificar cuándo no se dan lo hechos.

, denotamos por $H(p)$ a la matriz de Hurwitz de p, la cual queda definida como

$$H(p) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n. \end{pmatrix}$$

Proposición 1.8 *Considérese el polinomio real*

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

con $a_0 > 0$. Si $p(x)$ es semi-Hurwitz entonces $\Delta_1 \geq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, $\ldots, \Delta_n \geq 0$, donde Δ_i $(i = 1, \ldots, n)$ son los menores principales diagonales de $H(p)$.

Proposición 1.9 *Considérese el polinomio real*

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

con $a_0 > 0$. Si $p(x)$ es estrictamente semi-Hurwitz entonces $\Delta_1 \geq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, $\ldots, \Delta_n \geq 0$ y al menos un Δ_i es igual a cero, donde Δ_i $(i = 1, \ldots, n)$ son los menores principales diagonales de $H(p)$.

Corolario 1.10 *Si $H(p)$ es la matriz de Hurwitz asociada al polinomio $p(x)$ y si existe al menos un menor principal $\Delta_i < 0$, para algún $i = 1, \ldots, n$, entonces $p(x)$ no es semi-Hurwitz.*

Ejemplo 1.11 Considérese el polinomio real $p(t) = t^3 + 2t + 3t + 7$. La matriz de Hurwitz asociada es:

$$H(p) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_5 \\ a_0 & a_1 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que Δ_2 es menor que cero por lo tanto podemos concluir que $p(t)$ no es semi-Hurwitz.

2 Criterio de Hermite-Biehler para polinomios semi-Hurwitz

Definición 2.1 Considerar el polinomio real $\mathcal{P}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n$. Podemos escribir a $\mathcal{P}(t)$ de la siguiente forma

$$\mathcal{P}(t) = (a_0 + a_2t^2 + a_4t^4 + \ldots) + t(a_1 + a_3t^2 + a_5t^4 + \ldots)$$

$$\Rightarrow p(i\omega) = (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \ldots) + i\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \ldots)$$

Definimos

$$p^e(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \ldots \qquad p^o(\omega) = a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \ldots$$

$$p^{par}(t) = a_0 + a_2t^2 + a_4t^4 + \ldots \qquad p^{imp}(t) = a_1t + a_3t^3 + a_5t^5 + \ldots$$

Proposición 2.2 *Si un polinomio real $\mathcal{P}(t)$ es semi-Hurwitz entonces*

a) los coeficientes principales de $p^{par}(t)$ y $p^{imp}(t)$ tienen el mismo signo;

b) todas las raíces de $p^e(\omega)$ y $p^o(\omega)$ son reales y las raíces positivas de $p^e(\omega)$ y $p^o(\omega)$ cumplen que

$$0 \leq \omega_{e,1} \leq \omega_{o,1} \leq \omega_{e,2} \leq \omega_{o,2} < \dots$$

Corolario 2.3 *Dado un polinomio real $\mathcal{P}(t)$, si los coeficientes de $p^{par}(t)$ y $p^{imp}(t)$ no tienen el mismo signo o si ocurriera que para algún $i = 1, \dots, n$ las raíces positivas de $p^e(\omega)$ y $p^o(\omega)$ no se alternaran entonces $\mathcal{P}(t)$ no es semi-Hurwitz.*

Ejemplo 2.4 Considérese el polinomio real $p(t) = t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 7t + 2$.
Tenemos que

$$p^{par}(t) = 2 + 3t^2 + t^4, \quad p^{imp}(t) = 7t + 2t^3$$

Por otra parte

$$p(i\omega) = 2 - 3\omega^2 + \omega^4 + i\omega(7 - 2\omega^2)$$

$$p^e(\omega) = 2 - 3\omega^2 + \omega^4, \quad .p^o(\omega) = 7 - 2\omega^2$$

Luego

$$p^e(\omega) = 0 \;\Leftrightarrow\; \omega = \pm 1 \text{ ó } \omega = \pm\sqrt{2}$$

$$p^o(\omega) = 0 \;\Leftrightarrow\; \omega = \pm\sqrt{7/2}$$

Hacemos $\omega_{e,1} = 1$, $\omega_{e,2} = \sqrt{2}$, $\omega_{o,1} = \sqrt{7/2}$. Ahora $\omega_{e,1} < \omega_{o,1}$, pero $\omega_{o,1} > \omega_{e,2}$. Por lo tanto no se cumple el inciso b) de la propiedad de la alternancia. Luego $p(t)$ no es semi-Hurwitz.

3 Criterio de Routh para polinomios semi-Hurwitz

En 1875 Edward J. Routh, usando el *Teorema de Sturm* y la teoría de *índices de Cauchy*, elabora un algoritmo para determinar el número k de raíces con parte real positiva de un polinomio real. En el caso particular cuando $k = 0$ este algoritmo provee un criterio de estabilidad. Una demostración de este criterio es desarrollada en [2]. Consideremos el polinomio real

$$f(z) = a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \dots \qquad (a_0 \neq 0)$$

$$\Rightarrow f(i\omega) = a_0 (i\omega)^n + b_0 (i\omega)^{n-1} + a_1 (i\omega)^{n-2} + b_1 (i\omega)^{n-3} + \dots$$

Tomemos

$$f_1(\omega) = a_0 \omega^n - a_1 \omega^{n-2} + \dots, \qquad f_2(\omega) = b_0 \omega^{n-1} - b_1 \omega^{n-3} + \dots$$

y construimos una sucesión generalizada de Sturm $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, $f_3(\omega)$, $\dots$, $f_m(\omega)$ por medio del algoritmo de Euclides ($m = n + 1$).

$$\Rightarrow f_3(\omega) = \frac{a_0}{b_0} \omega f_2(\omega) - f_1(\omega) = c_0 \omega^{n-2} - c_1 \omega^{n-4} + c_2 \omega^{n-6} - \dots$$

donde

$$
\begin{aligned}
c_0 &= a_1 - \frac{a_0}{b_0} b_1 = \frac{b_0 a_1 - a_0 b_1}{b_0}, \\
c_1 &= a_2 - \frac{a_0}{b_0} b_2 = \frac{b_0 a_2 - a_0 b_2}{b_0}, \\
c_2 &= a_3 - \frac{a_0}{b_0} b_3 = \frac{b_0 a_3 - a_0 b_3}{b_0}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\Rightarrow f_4(\omega) = \frac{b_0}{c_0} \omega f_3(\omega) - f_2(\omega) = d_0 \omega^{n-3} - d_1 \omega^{n-5} + d_2 \omega^{n-7} - \dots
$$

$$
\begin{aligned}
d_0 &= b_1 - \frac{b_0}{c_0} c_1 = \frac{c_0 b_1 - b_0 c_1}{c_0}, \\
d_1 &= b_2 - \frac{b_0}{c_0} c_2 = \frac{c_0 b_2 - b_0 c_2}{c_0}, \\
d_2 &= b_3 - \frac{b_0}{c_0} c_3 = \frac{c_0 b_3 - b_0 c_3}{c_0}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2}
$$

Los coeficientes de los polinomios restantes $f_5(\omega), \dots, f_{n+1}(\omega)$ son similarmente determinados. Con dichos coeficientes formamos el *esquema de Routh*:

$$
\left.
\begin{array}{cccc}
a_0, & a_1, & a_3, & \dots \\
b_0, & b_1, & b_3, & \dots \\
c_0, & c_1, & c_3, & \dots \\
d_0, & d_1, & d_3, & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
\right\} \tag{3}
$$

Las fórmulas (1) y (2) muestran cómo obtener cada fila de este esquema.

Teorema 3.1 (Routh) *El número de raíces de un polinomio real $f(z)$ en el semiplano derecho ($\operatorname{Re} z > 0$) es igual al número de variaciones de signo de la primera columna del esquema de Routh.*

Corolario 3.2 (Criterio de Routh) *Todas las raíces del polinomio real $f(z)$ tienen parte real negativa si y sólo si al realizar el algoritmo de Routh todos los elementos de la primera columna del esquema de Routh son diferentes de cero y del mismo signo.*

Cuando $f(z)$ tiene raíces sobre el eje imaginario escribimos

$$
f(z) = F_1(z) + F_2(z)
$$

donde

$$F_1(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-2} + \cdots$$

$$F_2(z) = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-3} + \cdots$$

Buscamos el máximo común divisor de $F_1(z)$ y $F_2(z)$, *i.e.* $d(z) = \operatorname{mcd}(F_1(z), F_2(z))$ y escribimos:

$$f(z) = d(z) f^*(z)$$

Ahora, $d(z)$ tiene s raíces sobre el eje imaginario y $f^*(z)$ no tiene raíces imaginarias. En este caso el número k de raíces positivas es $k = k_1 + K_2$ donde k_1 y k_2 son respectivamente el número de raíces positivas de $f^*(z)$ y $d(z)$. Luego, k_1 puede determinarse mediante el algoritmo de Routh y

$$k_2 = \frac{q - s}{2}$$

donde $q = \operatorname{grado}[d(z)]$ y s es el número de raíces reales de $d(i\omega)$.

Proposición 3.3 *Si $p(x)$ es semi-Hurwitz entonces se satisface sólo una de las siguientes propiedades*

1. *Los elementos de primera columna del esquema de Routh son diferentes de cero y del mismo signo.*

2. *Si $d(x) = mcd(F_1(x), F_2(x)) \neq 1$ entonces $q = s$, donde $q = grado[d(z)]$ y s es el número de raíces reales de $d(i\omega)$.*

Ejemplo 3.4 Verifiquemos si el polinomio $q(t) = t^5 + 2t^4 - 2t^3 - 8t^2 - 9t - 2$ es Hurwitz.
Solución. Evaluamos q en $i\omega$:

$$\begin{aligned} q(i\omega) &= 2\omega^4 + 8\omega^2 - 2 + i(\omega^5 + 2\omega^3 - 9\omega) \\ &= 2\omega^4 - (-8)\omega^2 + (-2) + i(\omega^5 - (-2)\omega^3 + (-9)\omega) \end{aligned}$$

Hacemos:

$$a_0 = 2,\ a_1 = -8,\ a_2 = -2$$

$$b_0 = 1,\ b_1 = -2,\ b_2 = -9$$

luego

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{b_0 a_1 - a_0 b_1}{b_0} = \frac{1(-8) - 2(-2)}{1} = -4 \\ c_1 &= \frac{b_0 a_2 - a_0 b_2}{b_0} = \frac{1(-2) - 2(-9)}{1} = 16 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \frac{c_0 b_1 - b_0 c_1}{c_0} = \frac{-4(-2) - 1(16)}{-4} = 2 \\
d_1 &= \frac{c_0 b_2 - b_0 c_2}{c_0} = \frac{-4(-9) - 1(0)}{-4} = -9 \\
e_0 &= \frac{d_0 c_1 - c_0 d_1}{d_0} = \frac{(2)(16) - (-4)(-9)}{2} = -2 \\
f_0 &= \frac{e_0 d_1 - d_0 e_1}{e_0} = \frac{-2(-9) - 2(0)}{-2} = -9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc|cc}
a_0 & a_1 & a_3 & 2 & -8 & 0 \\
b_0 & b_1 & b_3 & 1 & -2 & 0 \\
c_0 & c_1 & & -4 & 16 & \\
d_0 & d_1 & & 2 & -9 & \\
e_0 & & & -2 & & \\
f_0 & & & -9 & &
\end{array}
$$

Obsérvese que los elementos de la primera columna del esquema de Routh no son del mismo signo. Por lo tanto $q(t)$ no es Hurwitz.
Ahora verifiquemos si es semi-Hurwitz. Construimos

$$
F_1(t) = t^5 - 2t^3 - 9t \qquad F_2(t) = 2t^4 - 8t^2 - 2
$$

Luego, puede verificarse que $d(t) = \operatorname{mcd}(F_1, F_2) = 1$ por lo que $q(t)$ tampoco es semi-Hurwitz.

Bibliografía

[1] Bhattacharyya, S.P., H. Chapellat, L.H. Keel. (1995) *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice-Hall.

[2] Gantmacher, F.R. (1959) *Matrix Theory (vol. I y II)*, AMS Chelsea Publishing.

[3] Hinrichsen, D. & Pritchard, A. J. (2005) *Mathematical Systems Theory I. Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness. Springer. Texts in Applied Mathematics, vol.* **48**.

[4] Hurwitz, A. (1895) *Über die Bedingungen,unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt*, Math. Ann., vol. **46** pp. 273-84.

[5] Lancaster, P. and Miron Tismenetsky. (1985) *The Theory of Matrices with applications*, Academic Press.

[6] Loredo, Carlos. (2004) *Criterios para determinar si un polinomio es polinomio Hurwitz. Reporte de los seminarios de investigación I y II*, UAM-Iztapalapa, México, D.F.

[7] Uspensky, J.V. (1990) *Teoría de Ecuaciones*, Limusa.

Memorias de la XVII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México.
Mosaicos Matemáticos No. 27, Marzo 2008, pp. 101-107.

MODELAMIENTO MARKOVIANO DEL SISTEMA DE COMUNICACIÓN MÓVIL CELULAR GSM900

Alex A. Monclou, Javier Mantilla, Andrés Navarro, Rafael Camerano

Facultad de Ingeniería Electrónica
Universidad Pontificia Bolivariana, Bucaramanga, Colombia

e-mail: amonclou@upbbga.edu.co

Resumen

El presente trabajo muestra que los procesos estocásticos implícitos en el Sistema Global de Comunicaciones Móviles, pueden ser modelados como una cadena de Markov de tiempo discreto. La teoría de cadenas de Markov, es usada para encontrar el comportamiento en estado estable del modelo de seis estados (modo Inactivo y modo Dedicado) utilizando un lenguaje de alto nivel (MatLab) que implementa el algoritmo formulado en el desarrollo. La simulación del modelo de Markov describe el comportamiento probabilístico del proceso de selección de célula en la capa física de una estación móvil GSM900.

1. Introducción

La ETSI (*European Telecommunications Standards Institute)* ha desarrollado una profunda normatización que actualmente se encuentra bajo la dirección del 3GPP (*Third Generation Partnership Project*) [2]. Dentro de estas normas, las funciones relativas de una estación móvil en la capa física de la red se definen mediante los procesos de selección de PLMN (*Public Land Mobile Network*), selección de célula y registro de locación [4].

Los modos de operación Inactivo (*Idle mode*), encendido pero sin ningún canal físico asignado, y Dedicado (*Dedicated mode*) que se caracteriza por pertenecer a un grupo de transmisión pero sin una conexión dedicada, forman parte intrínseca de los tres procesos mencionados, proporcionando una apreciación integral de las tareas emprendidas por una estación móvil GSM cuando intenta acceder a los servicios de la red.

Este artículo caracteriza los modos de operación Inactivo y Dedicado de una MS (*Mobile Station*) en un grupo de seis estados con características estocásticas que definen el proceso como una cadena markoviana de tiempo discreto.

2. Matemáticas de Transición

La aplicación de modelos probabilísticos a cada transición del sistema de seis estados proporciona una predicción cuantitativa del comportamiento de los modos de operación, los cuales se describen a continuación.

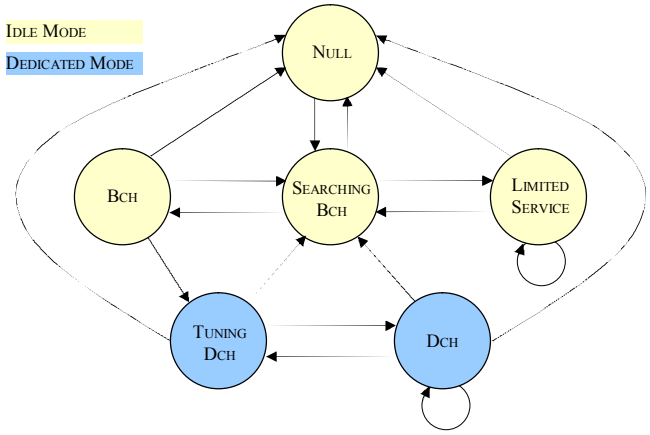


Fig. 1 Estados de la Capa Física en una Estación Móvil.

2.1 Estado Nulo

En este estado la MS se encuentra apagada. Por tanto se asume $P_{NS} = 1$ la probabilidad de encendido del móvil. Asimismo, se supone que el usuario mantendrá su móvil encendido en espera de una llamada entrante o en capacidad de generar una; por estas razones las probabilidades de apagado de la MS son nulas $(P_{SN}, P_{LN}, P_{BN}, P_{TN}, P_{DN} = 0)$, (figura 2).

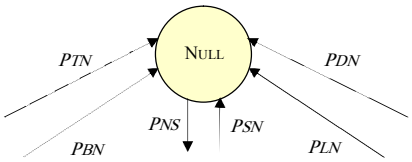


Fig. 2 Probabilidades de Transición del Estado Nulo

2.2 Estado Búsqueda de BCH

En general todo el proceso está sujeto a las características cambiantes del canal de radio. Es en este estado en donde se determina la calidad y niveles de potencia de las radiofrecuencias del espectro radioeléctrico asignado. De acuerdo a esto, se elige la mejor célula de la red sobre la cual el móvil puede acampar.

2.2.1 Criterio de Pérdidas por Trayecto C1: Este criterio [6], es usado para la selección y tenido en cuenta en la reselección de célula; se define como:

$$C1(n) = \left(RxLev(n) - RxLev_Access_Min - \max\left(0, \left(MS_TxPwr_Max_CCH - P\right)\right)\right)$$

El criterio de pérdidas se satisface cuando C1>0, el cual determina el comportamiento probabilístico de las transiciones salientes del estado de *Búsqueda de BCH* (figura 4).

Si denotamos *PC1Best* como la probabilidad de transición hacia el estado *BCH* en el mejor de los casos; es decir cuando las pérdidas por el camino son mínimas en función de los parámetros de C1; y definimos *PCn* como la probabilidad de transición calculada a partir de los datos generados por la simulación tenemos que:

$$P_{SB} = \frac{P_{Cn}}{P_{C1\,Best}} \quad \text{y} \quad P_{SL} = 1 - \frac{P_{Cn}}{P_{C1\,Best}}$$

Fig. 4 Probabilidades de Transición del Estado Búsqueda de BCH.

2.3 Estado de Servicio Limitado

En este estado, el proceso de selección de célula termina y el móvil puede realizar llamadas de emergencia si las requiere [4]. Debido a que la calidad de la señal y las condiciones de la red no son óptimas, la probabilidad de que el sistema permanezca indefinidamente en éste estado es nula (*PLL=0*). La probabilidad de que el móvil salga de éste estado para iniciar un nuevo proceso de selección de célula es *PLS=1* (figura 5).

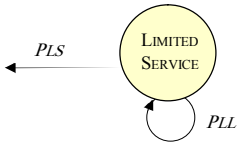


Fig. 5 Probabilidades de Transición del Estado de Servicio Limitado

2.4 Estado BCH

La estación móvil realiza un procedimiento de acceso aleatorio utilizando el principio de Aloha Ranurado [5], en donde los intentos de transmisión se realizan en intervalos de tiempo discreto [1]. Se asume que cada terminal realiza un intento sin importar si tiene o no un paquete, lo que permite definir un proceso de Bernoulli de intentos virtuales asociado a cada terminal y lleva a definir la probabilidad de transición hacia *Tuning DCH* como el éxito de un proceso aleatorio con distribución de Poisson.

$$P_O = e^{-G}$$

La expresión (1), determina la probabilidad de transición del estado BCH en el modo Inactivo al estado *Tuning* DCH en modo Dedicado, para una carga del canal *G* variable con distribución de Poisson. Esto es:

$$P_{BT} = e^{-G} \quad \text{y} \quad P_{BS} = 1 - e^{-G} \qquad (1)$$

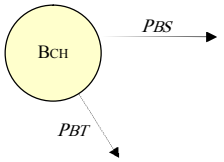


Fig. 6 Probabilidades de Transición del Estado BCH.

2.5 Estado Sintonización DCH

El comportamiento probabilístico de las transiciones salientes de *Tuning* DCH (figura 7), está sujeto y especificado en la probabilidad de bloqueo Erlang B, en función del número de canales lógicos y el tráfico celular. La relación utilizada, conocida como teorema de Folk permite calcular la probabilidad de bloqueo en función del número medio de llamadas por unidad de tiempo λ, la tasa media de servicio μ, y el número de canales *n,* definiendo las probabilidades de transición como:

$$P_{TS} = \frac{\frac{\rho \times P_{TS}}{k}}{1 + \frac{\rho \times P_{TS}}{k}} \quad \text{y} \quad P_{TD} = 1 - P_{TS}$$

En donde: $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$; $k = 1 : n$; $P_{TS\,Inicial} = 1$

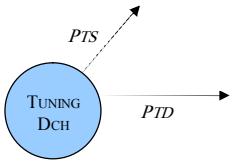


Fig. 7 Probabilidades de Transición del Estado *Tuning* DCH.

2.6 Estado DCH

Cuando la estación móvil ha tomado un canal dedicado y puede generar o recibir llamadas, el tráfico de la red no se vuelve determinante en el comportamiento probabilístico del estado (figura 8). Las condiciones del canal de radio y el criterio de reselección de célula (C2) definido por la ETSI, determinan las condiciones de transición en función de parámetros definidos.

$$C2 = (C1_{actual} + Cell_\text{Re}\,select_Offset)$$

El criterio de reselección de célula se satisface cuando el *C1* más alto de las células adyacentes es mayor que *C2.*

Si definimos P_{C2Best} como la probabilidad de transición hacia el estado *Tuning* DCH en el

mejor de los casos; y P_{C2} como la probabilidad de transición calculada a partir de los datos generados por la simulación, tenemos que:

$$P_{DT} = \frac{P_{C2}}{P_{C2\,Best}} \quad \text{y} \quad P_{DS} = 1 - \frac{P_{C2}}{P_{C2\,Best}}.$$

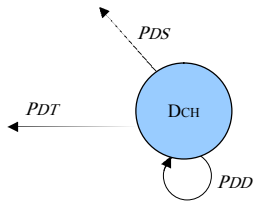


Fig. 8 Probabilidades de Transición del Estado DCH.

3. Modelo Markoviano

El modelo estocástico que describe el proceso de selección de célula en una estación móvil GSM900 se define como una cadena Markoviana de tiempo discreto, irreducible, aperiódica, no estacionaria y sin ningún estado absorbente [3].

Del diagrama de seis estados y del comportamiento probabilístico que definen cada una sus transiciones, la matriz de transición de estados se expresa como:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & P_{NS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{SL} & P_{SB} & 0 & 0 \\ 0 & P_{LS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{BS} & 0 & 0 & P_{BT} & 0 \\ 0 & P_{TS} & 0 & 0 & 0 & P_{TD} \\ 0 & P_{DS} & 0 & 0 & P_{DT} & 0 \end{pmatrix}$$

Ya que la cadena Markoviana que describe el sistema es ergódica (irreducible y aperiódica), se calculan las probabilidades estacionarias en función de la matriz de transición (Λ) y las ecuaciones: $\sum_j P_j = 1$ y $P_j = \sum_i P_i \Lambda$

como:

$$\begin{aligned} P_N &= 0 \\ P_S &= (P_{NS}P_N) + (P_{LS}P_L) + (P_{BS}P_B) + (P_{TS}P_T) + (P_{DS}P_D) \\ P_L &= (P_{SL}P_S) \\ P_B &= (P_{SB}P_S) \\ P_T &= (P_{BT}P_B) + (P_{DT}P_D) \\ P_D &= (P_{TD}P_T) \end{aligned}$$

En forma matricial se expresa como:

$$inv(\Lambda^T) \times \begin{pmatrix} P_N \\ P_S \\ P_L \\ P_B \\ P_T \\ P_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Debido a que este sistema exhibe una dependencia lineal entre sus ecuaciones; es necesario reemplazar una de éstas por la ecuación normalizada:

$$P_N + P_L + P_S + P_B + P_T + P_D = 1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene la solución en equilibrio del proceso de selección de célula bajo condiciones controladas de tráfico en la red, disponibilidad de canales, fenómenos físicos del canal de radio y parámetros operativos de la red celular GSM900.

Conclusiones

Un Sistema GSM tiene dos componentes principales: la infraestructura fija instalada (la red propiamente dicha) y los usuarios móviles, quienes utilizan los servicios de la red comunicándose a través de la interfaz de radio. Por lo anterior, es necesario tener en cuenta que el proceso analizado en el presente trabajo es el comportamiento de la estación móvil (MS) y no el del sistema GSM900 en forma total.

Las variables de decisión (incógnitas del modelo) se definen como las probabilidades de los seis estados del sistema en función de los parámetros (variables controladas del modelo) definidos como las probabilidades de transición entre ellos. Por lo tanto, el proceso estocástico que describe el proceso de selección de célula en una estación móvil GSM900 fue definido en función de su naturaleza matemática como una cadena de Markov de tiempo discreto, irreducible, aperiódica y sin ningún estado absorbente. Su estructura matemática cumple la condición de que el comportamiento probabilístico futuro del sistema sólo depende de su estado actual y no de cómo el sistema llegó a él, se afirma así, que el proceso de selección de célula posee la propiedad Markoviana de un proceso sin memoria.

La interpretación y el ajuste de las normas de la ETSI para generar el modelo matemático que integra en la teoría Markoviana el comportamiento descrito, permite proporcionar una explicación matemática a los instantes previos al establecimiento de una comunicación celular en el estándar GSM900.

Referencias

[1] Anantharam. Venkat, *The Stability Region of the Finite-User Slotted ALOHA Protocol*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 37, No. 3, pp. 535–540, May 1991.

[2] EBERSPÄCHER. Jörg, VÖGEL. Hans Jörg, BETTESTETTER, Christian, *GSM Switching, Services and Protocols*, 2nd ed., New York, Ed. John Wiley & Sons Ltd., 2001, 332 p.

[3] HOCK. Chee, *Queueing Modelling Fundamentals*, New York, Ed. John Wiley & Sons Ltd., 2002, 222 p.

[4] GSM 03.22, *Digital cellular telecommunications system (Phase 2+); Functions related to Mobile Station (MS) in idle mode and group receive mode,* ETSI Technical Specification 100 930, V8.3.0, 2000.

[5] GSM *05.01, Digital cellular telecommunications system (Phase 2+); Physical layer on the radio path; General description,* ETSI Technical Specification V5.4.0, 1998.

[6] GSM *05.05, Digital cellular telecommunications system (Phase 2+); Radio transmission and reception,* ETSI Technical Specification V5.2.0, 1996.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo, 2008, pp. 109–114.

LA INTEGRAL DE HENSTOCK-KURZWEIL

Adriana Ocejo Monge

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

e-mail: adriana.ocejo@gmail.com

Resumen

Se exponen los principales resultados de la teoría de integración de Henstock y Kurzweil sobre intervalos cerrados, la cual modifica la definición de Riemann permitiendo que la $\delta > 0$ que acota la longitud de las particiones no sea una constante, sino una función del intervalo de integración. Esta integral posee todas las propiedades deseables y más aún, contiene a la clase de las Lebesgue integrables. Abordamos este trabajo usando relaciones de cobertura, de las cuales obtenemos la herramienta central de esta teoría de integración, el Lema de Cousin. Lo que caracteriza a la HK-integral es que retoma la idea original de Newton, esto es, que toda derivada f' es integrable sobre un intervalo $[a, b]$ y su integral está dada por $f(b) - f(a)$.

1 Introducción

La teoría de integración es rica en historia, originada por los grandes matemáticos Newton y Leibniz hace más de tres siglos, formalizada por Riemann a mediados del siglo XIX, extendida eficientemente en 1902 a partir de la tesis de Lebesgue y pulida por muchos otros matemáticos en los últimos años, tales como Henstock y Kurweil, quienes desarrollaron una teoría de integración que generaliza el Teorema Fundamental del Cálculo.

Una nueva teoría de integración pretende disminuir o remediar las limitaciones en ciertos aspectos de las ya existentes. La motivación principal en el trabajo de Hentock y Kurzweil es debilitar las hipótesis en el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Uno de los grandes problemas de la teoría de Riemann, es que es muy difícil recuperar una función a partir de su derivada (es decir, que al integrar F' sobre $[a, b]$ obtengamos $F(b) - F(a)$), ya que se requiere que la derivada sea Riemann integrable. Lebesgue debilitó esta hipótesis pidiendo que la función F fuera absolutamente continua. En este caso, la derivada existe y se puede probar que es Lebesgue integrable y que además al integrar F' obtenemos $F(b) - F(a)$ de regreso. Más aún, el TFC para la integral de Henkstock y Kurzweil asegura que toda derivada F' es integrable y que su integral es $F(b) - F(a)$, sin pedir condición alguna sobre F'.

La HK-integral posee una característica deseable en cualquier teoría de integración: es una integral potente como la de Lebesgue (los teoremas de convergencia también son válidos en este contexto) que preserva la sencillez de la definición de Riemann.

2 La HK-integral y el Lema de Cousin

Definición 2.1 *Una relación de cobertura es una familia β de pares $([c, d], x)$, donde $[c, d]$ es un intervalo compacto y $x \in [c, d]$. Una relación de cobertura β es una cubierta de Cousin de un intervalo $[a, b]$ si para cada $x \in [a, b]$, existe $\delta > 0$ tal que β contiene todos los pares $([c, d], x)$, para los cuales $x \in [c, d] \subset [a, b]$ y $(d - c) < \delta$.*

Lema 2.2 *(Lema de Cousin) Si β es una cubierta de Cousin de un intervalo compacto $[a,b]$, entonces β contiene una partición de cada subintervalo compacto.*

Demostración. Supongamos que β no contiene una partición de $[a,b]$. Escojamos un subintervalo $[a_1,b_1]$ de longitud menor que o igual a $(b-a)/2$, tal que β no contiene una partición de $[a_1,b_1]$. Continuemos inductivamente, seleccionando una sucesión de intervalos cerrados anidados $[a_n,b_n]$ cuya longitud es $\leqslant (b-a)/2^n$ y tales que β no contiene una partición de cada uno de ellos.

Por la propiedad de los intervalos compactos anidados, hay un punto z que pertenece a la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. Dado que β es una cubierta de Cousin, existe un $\delta>0$ tal que β contiene a todo par (I,z) donde I es compacto de $[a,b]$ de longitud menor que δ. En particular β contiene a todos los pares $([a_n,b_n],z)$ para n suficientemente grande tal que $(b_n-a_n)<\delta$. El conjunto $\pi=\{([a_n,b_n],z)\}$ que consiste de un solo elemento es en sí mismo una partición de $[a_n,b_n]$, y está contenido en β. Esto contradice nuestra suposición sobre $[a_n,b_n]$. Consecuentemente β debe contener una partición de $[a,b]$.

Como β es cubierta de Cousin para cada subintervalo compacto $[c,d]\subset[a,b]$, entonces contiene una partición de $[c,d]$. ■

2.1 Recuperación de una función a partir de su derivada

Partimos del supuesto que $F'(x)=f(x)$ para toda $x\in[a,b]$. Para cada $\epsilon>0$ y $t\in[a,b]$, existe $\delta_t>0$ tal que

$$|F(d)-F(c)-f(t)(d-c)|<\epsilon(d-c),$$

para cada $c\leqslant t\leqslant d$ con $d-c<\delta_t$. Sea β el conjunto de pares $([c,d],t)$ relacionados arriba. Note que β es una relación de cobertura ya que por definición de diferenciabilidad, para cada punto $t\in[a,b]$, existe un $\delta_t>0$ tal que β contiene a todos los pares $([c,d],t)$ con $d-c<\delta_t$. Por el Lema de Cousin, podemos encontrar una partición $\pi=\{([x_{i-1},x_i],t_i)\}_{i=1}^n\subset\beta$. Luego, obtenemos

$$\begin{aligned}\left|[F(b)-F(a)]-\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i-x_{i-1})\right| &= \left|\sum_{i=1}^n[F(x_i)-F(x_{i-1})-f(t_i)(x_i-x_{i-1})]\right|\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n|F(x_i)-F(x_{i-1})-f(t_i)(x_i-x_{i-1})|\\ &\leqslant \sum_{i=1}^n\epsilon(x_i-x_{i-1})=\epsilon(b-a).\end{aligned}$$

En otras palabras, concluimos que

$$\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\epsilon(b-a).$$

El procedimiento anterior sugiere que la integral puede ser aproximada por sumas de Riemann. Hemos usado una partición cuyos elementos provienen de una relación de cobertura que describe de manera natural la geometría del problema, es decir, partiendo de la diferenciabilidad de la integral indefinida F.

2.2 Definición de HK-integrabilidad

Definición 2.3 *Una partición del intervalo $[a,b]$ es una colección finita de subintervalos cerrados no traslapados $\{I_j : j = 1, 2, \ldots, n\}$ cuya unión es $[a,b]$. Una partición etiquetada de $[a,b]$ es una colección de pares $\{(I_j, t_j) : j = 1, 2, \ldots, n\}$ tal que los intervalos forman una partición y $t_j \in I_j$ para toda j.*

Definición 2.4 *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es HK-integrable sobre un intervalo $[a,b]$, más brevemente $f \in \mathcal{HK}([a,b])$, si existe un número A tal que para cada $\epsilon > 0$, podemos encontrar una cubierta de Cousin β de $[a,b]$, con la propiedad de que*

$$\left| \sum_{(I,x)\in\pi} f(x)\ell(I) - A \right| < \epsilon$$

para cada partición π contenida en β.

Se puede probar la unicidad del valor A usando la definición. Diremos que A es la *HK-integral de f sobre* $[a,b]$ y escribiremos $\int_a^b f = A$.

Por brevedad escribiremos en adelante $S_\pi(f)$ por $\sum_{(I,x)\in\pi} f(x)\ell(I)$.

Veremos a continuación que toda función Riemann integrable es HK-integrable y luego daremos un ejemplo para mostrar que la contención es propia.

Teorema 2.5 *(Extensión) Sea $f \in \mathcal{R}([a,b])$ y su integral igual a A, entonces $f \in \mathcal{HK}([a,b])$ y su HK-integral también es A.*

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\dot{\mathcal{P}}$ es una partición etiquetada con $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta$, entonces $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - A| < \epsilon$.

Definamos la relación de cobertura β como sigue:

$$\beta = \{(I,x) \mid x \in I \subset [a,b] \text{ y } \ell(I) < \delta/2\}.$$

Claramente β es una cubierta de Cousin ya que cada x cae en algún subintervalo de $\dot{\mathcal{P}}$ cuya longitud es $< \delta$. Por el Lema de Cousin contiene una partición $\pi = \{(I_i, x_i) \mid i \leqslant n\}$, tal que $\ell(I_i) < \delta/2$ para cada i. Luego π es una partición con norma menor que δ y por consecuencia $|S(f,\pi) - A| < \epsilon$. Equivalentemente $|S_\pi(f) - A| < \epsilon$. Como π es una partición arbitraria, concluimos que f es HK-integrable y su integral es también A. ■

Ejemplo 2.6 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función constante c, excepto en un subconjunto numerable $C = \{c_i \in [a, b] \mid i \in \mathbb{N}\}$. Entonces $f \in \mathcal{HK}([a, b])$ y $\int_a^b f = c(b - a)$.*
Demostración. Dado $\epsilon > 0$, definimos la función positiva $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ por

$$\delta(x) = \begin{cases} \epsilon/(f(c_i) - c)2^i & \text{si } x = r_i \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Sea β la cubierta de Cousin que se obtiene mediante δ de la siguiente forma

$$\beta = \{(I, x) : x \in I \subset [a, b], \ell(x) < \delta(x)\}.$$

Sea $\pi = \{(I_i, x_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ una partición de β. Luego obtenemos

$$\left| \sum_{(I,x)\in\pi} f(x)\ell(I) - c(b - a) \right| = \left| \sum_{(I,x)\in\pi} [f(x) - c]\ell(I) \right| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon,$$

como queríamos demostrar. ■

El ejemplo anterior es una generalización de la función de Dirichlet, donde el conjunto C es los racionales y la constante es $c = 0$. Por lo tanto, la función de Dirichlet es HK-integrable con integral igual a cero, pero es conocido que no es Riemann integrable.

Se puede probar que toda función Riemann impropiamente integrable también es HK-integrable (ver [1] p. 195).

3 El Teorema Fundamental del Cálculo

Definición 3.1 *Decimos que F es una primitiva (o una antiderivada) de f sobre I si $F'(x)$ existe y $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in I$. Decimos que F es una n-primitiva de f si F es continua sobre I, y existe un conjunto numerable de puntos $x \in I$ donde $F'(x)$ no existe o no es igual a $f(x)$.*

Ahora estableceremos la versión más general de la primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo que garantiza que la *derivada* de una función sobre un intervalo $[a, b]$ siempre es HK-integrable, sin imponer mayores hipótesis sobre esta derivada.

Lema 3.2 *(Definición alternativa de derivada) Sea $F : I \to \mathbb{R}$ diferenciable en un punto $t \in I$. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $u \neq v$ satisfacen*

$$t - \delta < u \leqslant t \leqslant v < t + \delta$$

entonces

$$|F(v) - F(u) - F'(t)(v - u)| \leqslant \epsilon(v - u).$$

Demostración. Por definición de la derivada $F'(t)$ en t, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_t > 0$ tal que si $|x - t| < \delta$ entonces

$$|F(x) - F(t) - F'(t)(x - t)| < \epsilon|x - t|.$$

Si $u \leqslant t$ y $v \geqslant t$ están en este δ_t-intervalo alrededor de t entonces

$$\begin{aligned}|F(v) - F(u) - F'(t)(v - u)| &= |\,[F(v) - F(t) - F'(t)(v - t)] - [F(u) - F(t) - F'(t)(u - t)]\,| \\ &\leqslant \epsilon(v - t) + \epsilon(t - u) = \epsilon(v - u).\end{aligned}$$

■

Teorema 3.3 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene una $n-$primitiva F sobre $[a, b]$ entonces f es HK-integrable y se cumple que*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ el conjunto donde F' es distinta de f o donde F' no existe. Por el Ejemplo 2.6, podemos suponer $f(c) = 0$ para toda $c \in \mathcal{C}$.

Sea $\epsilon > 0$. Ahora definimos las cubiertas β_1 y β_2 como sigue:

- Por la continuidad de F en los puntos de $\mathcal{C}$ formamos

$$\beta_1 = \{([u, v], c_k) \mid c_k \in \mathcal{C},\ |F(v) - F(u)| \leqslant \epsilon/2^k\}.$$

- Para cada $t \in [a, b]\backslash\mathcal{C}$ usamos la δ_t del lema. Entonces sea

$$\beta_2 = \{([u, v], t) \mid t \in [a, b]\backslash\mathcal{C},\ v - u < \delta_t\}.$$

Tenemos que $\beta_1 \cup \beta_2$ es una cubierta de Cousin de $[a, b]$ de la cual podemos extraer una partición $\pi = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^{n}$. Si $t_i = c_k \in \mathcal{C}$ es una etiqueta de algún subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces

$$|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(c_k)(x_i - x_{i-1})| = |F(x_i) - F_(x_{i-1})| < \frac{\epsilon}{2^k}$$

y por tanto

$$\sum_{t_i \in \mathcal{C}} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

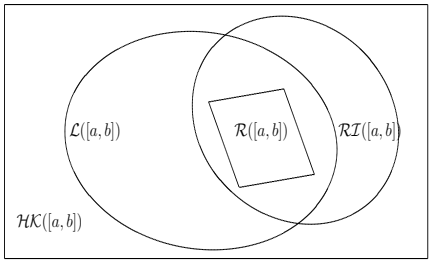
Por otro lado, el Lema 3.2 implica que la suma de los términos con etiqueta $t \notin \mathcal{C}$ es menor o igual que $b - a$. Por consecuencia,

$$|F(b) - F(a) - S_\pi(f)| \leqslant \epsilon(1 + b - a)$$

para cualquier π contenida en $\beta_1 \cup \beta_2$. Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces f es HK-integrable con integral $F(b) - F(a)$. ■

4 Comentarios finales

El siguiente diagrama de Venn nos muestra la relación de la clase $\mathcal{HK}([a,b])$ con otras.



La función de Dirichlet es un ejemplo para probar que la contención de la clase $\mathcal{RI}([a,b])$ en $\mathcal{HK}([a,b])$ es propia. Por otro lado, se puede probar que la función $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, no es Lebesgue integrable pero sí es HK-integrable en $[0,1]$.

Para mostrar que la clase de las funciones Lebesgue integrables en el intervalo $[a,b]$ está contenida en la clase $\mathcal{HK}([a,b])$, se necesitan ciertas herramientas del análisis que no se abordaron aquí. También, se pueden probar teoremas de convergencia para la HK-integral tan eficientes como aquellos para la integral de Lebesgue. Para una exposición detallada, ver el trabajo de tesis [2].

Esta teoría se puede extender a funciones con valores en los complejos y también a funciones cuyo intervalo de integración no es acotado. La Parte 2 del libro de Bartle discute detalladamente esto último.

Bibliografía

[1] Bartle, Robert, *A modern theory of integration. Primera Edición*, Editorial American Mathematical Society, 2001.

[2] Ocejo, Adriana, *La integral de Henstock-Kurzweil y el Teorema Fundamental del Cálculo*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Universidad de Sonora, 2008.

[3] Schechter, Eric, disponible en http://www.math.vanderbilt.edu/ schectex/ccc/gauge/

[4] Smithee, disponible en http://classicalrealanalysis.com/smitheems.aspx

[5] Thomson, Brian, *Rethinking the Elementary Real Analysis Course*, Monthly 114 Junio-Julio, 2007.

[6] Yee-Výborný, *The integral: an easy approach after Kurzweil and Henstock*, Primera Edición, Editorial Cambridge, 2000.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo, 2008, pp. 115–120.

INTEGRAL EQUATIONS FOR THE AGGREGATE CLAIM AMOUNT: A NUMERICAL APPLICATION

Carlos G. Pacheco González

Departamento de Matemáticas, CINVESTAV-IPN

e-mail: cpacheco@math.cinvestav.mx

Resumen

The distribution of the aggregate claim amount obeys a Volterra integral equation in two dimensions. We study a collocation method based on step functions to solve the integral equation numerically. Additionally, we also treat the case of discounted claims.

1 Introduction

The classical model for the aggregate claim amount in an insurance company is given by the following random sum

$$Z = \left\{ Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i,\ t \geq 0 \right\}, \tag{1}$$

where $X_1, X_2, ...$ is a sequence of positive random variables (r.v.s), which represent the amount of the claim, and $N = \{N_t,\ t \geq 0\}$ is a renewal process, i.e.

$$N_t = \max \left\{ k : \sum_{i=1}^{k} \tau_i \leq t \right\}, \tag{2}$$

with $\tau_1, \tau_2, ...$ a sequence of positive real-valued r.v.s, usually called "interarrival times" (they represent the time between claims). We have the convenction that $Z_s = 0$ for $s < \tau_1$, i.e. before the first jump the process is 0. In this paper we also assume that $\{\tau_i, i \geq 1\}$ and $\{X_i, i \geq 1\}$ are two independent sequence of i.i.d. r.v.s.

Model (1) is well known, and it comes across in a great variety of applications; some references for this model are [1, 6]. This random sum belongs to a general class of random summations known as *continuous-time random walks*, CTRWs for short (see for instance [7, 8]). Notice that process Z is also called *renewal-reward process* (see [8]). There is a vast literature for this kind of processes, and when the interarrival times are exponentially distributed, process Z is simply a *compound Poisson process*.

Using probabilistic arguments, it is possible to derive an integral equation for the density of CTRWs, which is termed *the master equation*, see Scalas [7] and references therein. Then, since the density of Z_t, for fixed t, satisfies an Volterra integral equation, it becomes possible to solve it numerically by standard procedures. There are available in the literature methods for solving Volterra integral equations in two dimensions (see for example [3]). The method we exploit is a collocation method. The basic idea of the numerical recepie is to define a grid, and run an algorithm recursively to determine a sequence of step functions that approximate the solution of the integral equation.

2 Integral Equations for Random Sums

In this section we find Volterra integral equations for the distribution functions of our interest. Refer to [4] for basics on the theory of integral equations.

Given the quantity $\tau_1 + ... + \tau_n = T$ for any fixed $n \geq 1$, then $N_{T+t} \overset{d}{-} n{=}N_t,\ t \geq 0$. This means that the process is renewed at the very moment of a jump. In general, the process Z is not a Markov process and it does not have independent increments. Now, if $\sum_{i=1}^{n} X_i = z$ is given, it holds that

$$Z_{T+t} - z \overset{d}{=} Z_t,\ t \geq 0. \tag{3}$$

Using this property we can find integral equations that help to determine the structure of quantities such as

$$P(Z_t \leq z) \text{ and } P(R_z \leq t) \tag{4}$$

where $R = \{R_z, z \geq 0\} = \inf\{s > 0 :\ Z_s > z\}$, $z \geq 0$. Process R is the so-called *first passage time* of Z.

Before we proceed, we have the following notation $F(t,z) := P(Z_t \leq z)$ and $G(z,t) := P(R_z \leq t)$. Denote also by $f_X(x)$ and $f_\tau(t)$ the density functions of X_1 and τ_1, respectively. We also denote by $f_W(w \mid A)$ the density of the r.v. W conditioned to the event A.

As mentioned in the Introduction, Z_t is conceived as the total amount of money claimed to an insurance company up to time t. The jumps $X_1, X_2, ...$ are the amount of money for each individual claim, and N is the number of claims up to time t. In the insurance jargon, process Z is called aggregate claim amount ([6]). Now we have the following result,

Proposition 2.1 *When the jumps $X_1, X_2, ...$ are positive r.v.s, the function F satisfies the following Volterra linear integral equation in two dimensions:*

$$F(t,z) = P(\tau_1 > t) + \int_0^t \int_0^z F(u,w) f_X(z-w) f_\tau(t-u) dw du, \tag{5}$$

for $t \geq 0$ and $z \geq 0$.

Proof The proof relies in the idea of splitting into independent events. In this case it is convenient to think of two cases: when the first jump occurs after time t, and when it occurs before. Thus, we have that

$$F(t,z) = P(Z_t \leq z \mid \tau_1 > t) P(\tau_1 > t) + P(Z_t \leq z \mid \tau_1 \leq t) P(\tau_1 \leq t). \tag{6}$$

Notice that $P(Z_t \leq z \mid \tau_1 > t) = 1$, and we apply the law of total probability to $P(Z_t \leq z \mid \tau_1 \leq t)$. Equation (6) becomes

$$P(\tau_1 > t) + P(\tau_1 \leq t) \int_0^t \int_0^\infty P(Z_t \leq z \mid \tau_1 = u, X_1 = w) f_X(w) f_\tau(u \mid \tau_1 \leq t) dw du.$$

Now, we split the last double integral as follows,

$$\int_0^t \int_0^\infty P(Z_t \leq z \mid \tau_1 = u, X_1 = w) f_X(w) f_\tau(u \mid \tau_1 \leq t) dw du = \tag{7}$$

$$\int_0^t \int_0^z P(Z_t \leq z \mid \tau_1 = u, X_1 = w) f_X(w) f_\tau(u \mid \tau_1 \leq t) dw du + \tag{8}$$

$$\int_0^t \int_z^\infty P(Z_t \leq z \mid \tau_1 = u, X_1 = w) f_X(w) f_\tau(u \mid \tau_1 \leq t) dw du \tag{9}$$

Clearly, if $X_1 > z$ then $P(Z_t \leq z) = 0$, so the second part is zero. Now we use the renewal property on the first part to obtain

$$\int_0^t \int_0^z P(Z_{t-u} \leq z - w \mid \tau_1 = u, X_1 = w) f_X(w) f_\tau(u \mid \tau_1 \leq t) dw du =$$

$$\int_0^t \int_0^z F(t-u, z-w) f_X(w) \frac{f_\tau(u)}{P(\tau_1 \leq t)} dw du,$$

substituting this into (6) yields (5) after a change of variables. ■

Remark 1. When the jumps $X_i, i = 1, 2, ...$ are positive, process Z is increasing, therefore the following relation holds

$$\{\omega : R_z(\omega) \leq t\} = \{\omega : Z_t(\omega) > z\}. \tag{10}$$

From here it follows that $1 - F(t, z) = P(R_z \leq t) = G(z, t)$, then using (5) it is possible to derive an integral equation for $G(z, t)$.

Proposition 2.2 *When the jumps $X_1, X_2, ...$ are positive r.v.s, the function G satisfies the following Volterra linear integral equation in two dimensions:*

$$G(z, t) = P(\tau_1 \leq t) P(X_1 > z) + \int_0^t \int_0^z G(w, u) f_X(w) f_\tau(u) dw du, \tag{11}$$

for $z \geq 0$ and $t \geq 0$.

3 Discounted Random Sums

Frequently, it is of interest to analyze the sum of discounted claims; in economic terms this is the present value of a cash flow (for instance see [5]).

For model (1) we know the arrival times of the claims, and therefore we can calculate the present value of the claims. In this section we consider the so-called *aggregate discounted claims*; it is defined by

$$Z^{(\delta)} = \left\{ Z_t^{(\delta)} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i e^{-\delta T_i},\ t \geq 0 \right\}, \tag{12}$$

where N_t is defined as in (2), $T_i = \sum_{j=1}^{i} \tau_j$ (arrival times), $X_1, X_2, ...$ are i.i.d. positive r.v.s., and δ is the continuous time interest rate. When $\delta = 0$ it resumes to model (1). Again, we are interested in calculating the probability distributions of $Z^{(\delta)}$.

For model (12), we set $F_\delta(t,z) := P(Z_t^{(\delta)} \leq z)$, and it satisfies

Proposition 3.1 *The following integral equation holds for $F_\delta(t,z)$:*

$$F_\delta(t,z) = P(\tau_1 > t) + \int_0^t \int_0^{ze^{\delta(t-u)}} F_\delta(u,w) f_{X_1}(ze^{\delta(t-u)} - w) f_{\tau_1}(t-u) dw du \tag{13}$$

Proof Analogously to Proposition (2.1) we have

$$F_\delta(t,z) = P(Z_t^{(\delta)} \leq z \mid \tau_1 > t) P(\tau_1 > t) + P(Z_t^{(\delta)} \leq z \mid \tau_1 \leq t) P(\tau_1 \leq t).$$

Notice that $P(Z_t^{(\delta)} \leq z \mid \tau_1 > t) = 1$. Now, we treat $P(Z_t^{(\delta)} \leq z \mid \tau_1 \leq t)$ separately,

$$P(Z_t^{(\delta)} \leq z \mid \tau_1 \leq t) = \int_0^t P(Z_t^{(\delta)} \leq z \mid \tau_1 = u) f_{(\tau_1 | \tau_1 \leq t)}(u) du = \tag{14}$$

$$\int_0^t \int_0^\infty P(X_1 e^{-\delta \tau_1} + e^{-\delta \tau_1} \sum_{i=2}^{N_t} X_i e^{-\delta T_i^+} \leq z \mid \tau_1 = u, X_1 = w) f_{X_1}(w) f_{\tau_1}(u \mid \tau_1 \leq t) dw du,$$

where $T_i^+ = \sum_{j=2}^{i} \tau_j$. Notice that if $w > ze^{\delta u}$, the probability inside the double integral is naught. This is because once the first claim surpasses the future value of z, the total discounted amount will be above z thereafter. Therefore, applying the renewal property, equation (14) resumes to

$$\int_0^t \int_0^{ze^{\delta u}} P(we^{-\delta u} + e^{-\delta u} \sum_{i=2}^{N_t} X_i e^{-\delta T_i^+} \leq z) f_{X_1}(w) f_{\tau_1}(u \mid \tau_1 \leq t) dw du =$$

$$\int_0^t \int_0^{ze^{\delta u}} P(\sum_{i=1}^{N_{t-u}} X_i e^{-\delta T_i} \leq ze^{\delta u} - w) f_{X_1}(w) \frac{f_{\tau_1}(u)}{P(\tau_1 \leq t))} dw du =$$

$$\int_0^t \int_0^{ze^{\delta u}} F_\delta(t-u, ze^{\delta u} - w) f_{X_1}(w) \frac{f_{\tau_1}(u)}{P(\tau_1 \leq t)} dw du,$$

which can be written as in (13) after a change of variable. ■

4 Numerical solutions via collocation method

In this section we describe a collocation method in order to solve numerically linear integral equations of Volterra type. Our aim is to apply the method to quantities such as $P(Z_t \leq z)$ or $P(R_z \leq t)$ defined in (4). Also, for the discounted case $P(Z_t^{(\delta)} \leq z)$.

The general form of equations we are dealing with is the following *Volterra linear integral equation of the second kind* in two dimensions

$$H(x,y) = \phi(x,y) + \int_0^x \int_0^y K(x,y,u,v) H(u,v) du dv. \tag{15}$$

Here, functions $K(x, y, u, v)$ (called the *kernel*) and $\phi(x, y)$ are known, and the aim is to find $H(x, y)$ that satisfies (15). It is assumened that equation (15) satisfies usual conditions such that it admits a unique solution; for more details see for instance [4].

Now it is described the method. Suppose that we want to find H from relation (15) on a domain $D = [0, x^*] \times [0, y^*]$. Firstly, we need to give a mesh for D. To do so, we take the partitions $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x^*$ and $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = y^*$, which define a grid on D. The grid is given by the collection of squares $\{D_{ij}; i = 1, \ldots n; j = 1, \ldots m\}$, where $D_{ij} = (x_{i-1}, x_i] \times (y_{j-1}, x_j]$.

Outline. The method can be summarized as follows. We assume that the solution H of the integral equation is a step-function on the mesh constructed above. Basically, we are saying that $H(x, y)$ is constant on each region D_{ij}. Following this rough assumption, we can calculate the values $c_{ij}; i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m$ which specify the values of H on each region Dij, i.e. $H(x, y) = c_{ij}$ if $(x, y) \in D_{ij}$, for $i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m$. When integrating a step-valued function, the integral becomes a simple sum, and the constants c_{ij} come outside the integral, thus solving the equation is achieved by solving a linear system. This linear system is determined by a lower triangular matrix, and the solution is obtained iteratively.

Therefore, using the grid we can sweep over D to obtain the vales $c_{ij},\ i = 1, \ldots n,\ j = 1, \ldots m$. Notice that the calculation of c_{ij} needs previous values below i and j.

The prodecure is summarized with the following recursive expression for c_{ij}:

$$c_{ij} = \frac{\phi(x_i, y_j) + \sum_{0<k<i, 0<r<j} c_{kr} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \int_{y_{r-1}}^{y_r} K(x_i, y_j, u, v) du dv}{1 - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} K(x_i, y_j, u, v) du dv}. \tag{16}$$

The idea is that when the grid is very fine, the step funtion approximates the solution of the integral equation.

Numerical examples

Assuming that $X_1 \sim exp(\mu)$ and $\tau_1 \sim exp(\lambda)$, i.e. N is a Poisson process. Then Z is a Compound Poisson process with exponential jumps and equations (5) becomes

$$F(t, z) = e^{-\lambda t} + \int_0^t \int_0^z \lambda e^{-\lambda(t-u)} \mu e^{-\mu(z-w)} F(u, w) dw du, \tag{17}$$

Using SCILAB 4.0 we have performed the following calculations. We have taken $\lambda = 1$ and $\mu = 1$ in equation (17). We made a grid of the region $D = [0, 1] \times [0, 1]$ by taking a partition of 60 equidistanced subinterval on both axis. Tables 1 shows the approximated values of $F(t, z)$ at specific nodes.

Table 1: $F(t, z)$

$t \backslash z$	0.1	0.5	0.7	1
0.1	0.913373	0.940521	0.950717	0.962831
0.5	0.635487	0.731907	0.770276	0.817963
0.7	0.529976	0.643721	0.690256	0.749334
1	0.403539	0.52919	0.582708	0.652746

Additionally, we develop estimates for $F(t,z)$ on the nodes of Table 1 by means of simulation. That is, we run $100,000$ paths for the process Z_t for $0 \leq t \leq 1$, then we calculate the proportions $F(t,z)$ for $t = \{.1, .5, .7, 1\}$ and $z = \{.1, .5, .7, 1\}$. The results are in the following Table 2 and can be compare with those ones of Table 1.

Table 2: $F_\delta(t,z)$

$t \backslash z$	0.1	0.5	0.7	1
0.1	0.91326	0.94076	0.95076	0.96332
0.5	0.6341	0.73235	0.77147	0.82081
0.7	0.53114	0.64576	0.69151	0.75113
1	0.40435	0.52928	0.58306	0.65277

5 Conclusion

Finding probabilities for the random sums consider here is not a trivial task, however, we have shown that using a numerical procedure, it is possible to infer values for the probabilities. In this paper we have exploited the structure of the integral equations that govern the distribution functions to carry out numerical approximations. We believe the method is quite straight forward to conceive in a standard programming code, but in our experience, the computer times can be slow. On the other hand, it becomes possible to estimate probabilities of rare events, for instance when horizon t and level z are small.

Bibliography

[1] S. Asmussen, *Applied Probability and Queues*. Springer, 2003.

[2] K. E. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. Cambridge University Press, 1997.

[3] H. Brunner and J.P. Kauthen, The numerical solution of two-dimensional Volterra integral equations by collocation and iterated collocation, *IMA Journal of Numerical Analysis* **9**, 47–59, 1989.

[4] R. Kress, *Linear Integral Equations*. Springer, 1989.

[5] C. M. Ramsay, On an integral equation for discounted compound - annuity distributions *ASTIN Bulletin* **19**, 191–198, 1994.

[6] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, and J. Teugels, *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley, & Sons, 1999.

[7] E. Scalas, Five Years of Continuous-time Random Walks in Econophysics. Economic Working Paper Archive EconWPA, 2005.

[8] W. Whitt, *Stochastic-Processes Limits*. Springer, 2002.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo, 2008, pp. 121–127.

EQUILIBRIOS DE NASH Y UNA PRUEBA DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE KAKUTANI

J. Miguel Pérez Urquidi, Fernando Luque Vásquez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

e-mail: miguelcholo@hotmail.com; fluque@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En este trabajo se presentan algunos de los resultados en [8]. En particular, siguiendo las ideas en [4] y [5], se desarrolla una demostración del teorema de punto fijo de Kakutani la cual, difiere de las demostraciones que comunmente se encuentran en la literatura relacionada, donde se aplica directamente el teorema de punto fijo de Brouwer. Aqui se obtiene la demostración aplicando un resultado de John Nash sobre la existencia de equilibrios para juegos no cooperativos.

1 Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar algunos de los resultados en [8]. En particular, se expone una demostración relativamente sencilla del teorema de punto fijo de Kakutani, el cual, establece condiciones para la existencia de puntos fijos para correspondencias (multifunciones) en $\mathbb{R}^n$. Esta demostración, que originalmente se presenta en [4] y [5], se basa en un teorema de John Nash de 1951 (ver [6]) sobre la existencia de equilibrios para un juego no cooperativo de N personas. Para la prueba de su teorema, Nash aplicó el teorema de punto fijo de Brouwer, resultado en el que se establecen condiciones suficientes para la existencia de puntos fijos de una función y juega un papel central en el Análisis Matemático y sus aplicaciones (ver por ejemplo [3]). El teorema de Brouwer ha sido extendido en diversas direcciones, en particular, el teorema de Kakutani es una generalización en el contexto de correspondencias (una función es un caso particular de una correspondencia), y la demostración que se presenta aqui, difiere de las que se encuentran en la literatura relacionada, (ver [1], [2], [7]), donde se obtiene la demostración aplicando directamente el teorema de Brouwer.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 se define el concepto de juego finito no cooperativo y los conceptos relacionados de estrategia, equilibrio y función de ganancia. Se demuestra el teorema de Nash y se establecen algunos resultados relativos a los llamados juegos de imitación. En la Sección 3, después de definir los conceptos de correspondencia y semicontinuidad de una correspondencia, se demuestra el teorema de Kakutani y en la Sección 4 se presentan algunas conclusiones.

2 Juegos no cooperativos

En esta sección se introduce la clase de juegos que nos interesan, algunos conceptos relacionados y los resultados que se usarán en la demostración del teorema de Kakutani. Las demostraciones que no se incluyen pueden consultarse en [8].

Definición 2.1 *Un juego no cooperativo de N personas es un sistema*

$$G := \{A_i, r_i, i \in I\},$$

donde $I := \{1, ..., N\}$ es el conjunto de jugadores, A_i es el conjunto de acciones del jugador i, y $r_i : A_1 \times \cdots \times A_N \to \mathbb{R}$ es la función de pago para el jugador i.

Un juego de esta clase se interpreta de la siguiente manera: Los participantes eligen cada uno, simultanea e independientemente, una acción de su conjunto de acciones posibles. Si el jugador i escoge una acción (o estrategia pura) a_i del conjunto A_i $(i = 1, 2, ..., N)$, entonces el jugador j recibe

$$r_j(a_1, ..., a_N) \quad (j = 1, 2, ..., N).$$

Se le llama *estrategia* a la forma en que un jugador elige sus acciones. Una clase importante de estrategias de un jugador, es aquella en la que la elección de la acción se realiza mediante un procedimiento aleatorio, en este caso tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2 *En un juego finito no cooperativo de N personas, una estrategia mixta γ^i para el jugador i es un medida de probabilidad en A_i. El conjunto de estrategias mixtas para el jugador i se denota por S_i y $S := S_1 \times \cdots \times S_N$.*

Si $A_i = \{1, 2, ..., m_i\}$, entonces γ^i se puede representar por el vector $(\gamma^i_1, ..., \gamma^i_{m_i})$, donde $\gamma^i_j = \gamma^i(j)$, es decir, cuando el jugador i utiliza la estrategia γ^i, la componente γ^i_i representa la probabilidad de que el jugador elija la acción j. El *soporte* de una estrategia $\gamma^i = (\gamma^i_1, ..., \gamma^i_{m_i})$, denotado por $sop(\gamma^i)$, es el conjunto de índices j tales que $\gamma^i_j > 0$. Nótese que el conjunto S_i puede representarse como un subconjunto de $\mathbb{R}^{m_i}$;

$$S_i = \{(s_1, ..., s_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} : s_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{m_i} s_i = 1\}.$$

Asimismo, el conjunto S se representa como un subconjunto de $\mathbb{R}^m$ con $m = m_1 + \cdots + m_N$ y se tiene el siguiente resultado.

Lema 2.3 *En un juego finito no cooperativo de N personas S es un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^m$.*

Definición 2.4 *Para $\gamma = (\gamma^1, ..., \gamma^N) \in S$ se define la función de ganancia para el jugador i por*

$$R_i(\gamma) := \sum_{j_N=1}^{m_N} \cdots \sum_{j_1=1}^{m_1} \gamma^1_{j_1} \cdots \gamma^N_{j_N} r_i(j_1, ..., j_N).$$

Similarmente, definimos las funciones $R_{ij} : S \to \mathbb{R}$ para cada acción j del jugador i como

$$R_{ij}(\gamma) := R_i(\gamma^1, ..., \delta^i_j, ..., \gamma^N),$$

donde δ^i_j es la estrategia (*pura*) del jugador i, en la cual la probabilidad de elegir la acción j es 1. Es decir, $R_{ij}(\gamma)$ es la ganancia del jugador i si éste utiliza la estrategia pura δ^i_j, mientras que el resto de los jugadores conservan sus estrategias correspondientes.

Definición 2.5 *En un juego finito no cooperativo de N personas, un elemento $\rho = (\rho^1, ..., \rho^N) \in S$ es un equilibrio de Nash para el juego G si para cada $i \in I$,*

$$R_i(\rho) \geq R_i(\rho^1, ..., \beta^i, ..., \rho^N) \quad \forall \beta^i \in S_i$$

o equivalentemente

$$R_i(\rho) = \max_{\beta^i \in S_i} R_i(\rho^1, ..., \beta^i, ..., \rho^N).$$

El resultado mas importante en esta sección es el Teorema 2.8 cuya demostración se basa en un corolario del teorema de punto fijo de Brouwer. Presentamos a continuación estos resultados.

Teorema 2.6 *(Teorema de punto fijo de Brouwer). Sea B^n la bola unitaria cerrada de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : B^n \to B^n$ una función continua. Entonces existe un punto fijo de f en B^n.*

Corolario 2.7 *Si A es un subconjunto compacto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \to A$ es continua, entonces existe un punto fijo de f en A.*

Teorema 2.8 *Todo juego finito no cooperativo de N personas tiene un equilibrio de Nash en S.*

Demostración. Sea γ=$(\gamma^1, ..., \gamma^N) \in S$. Para cada jugador $i = 1, 2, ..., N$ y $j = 1, 2, ..., m_i$, definimos la función $\varphi_{ij} : S \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi_{ij}(\gamma) := \max(0, R_{ij}(\gamma) - R_i(\gamma)). \tag{1}$$

Notamos que φ_{ij} es continua en S. Si $\gamma^i = (\gamma^i_1, ..., \gamma^i_{m_i})$, definimos

$$\gamma'^i_j := \frac{\gamma^i_j + \varphi_{ij}(\gamma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\gamma)}$$

y observamos que $\gamma'^i := (\gamma'^i_1, ..., \gamma'^i_{m_i})$ pertenece a S_i para cada $i = 1, 2, ..., N$. Sea $T : S \to S$ la función definida por

$$T(\gamma) = \gamma',$$

donde $\gamma' = (\gamma'^1, ..., \gamma'^N)$. Entonces T es una función continua de S en si mismo. Además, como S es un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ se sigue del Corolario 2.7 que T tiene (al menos) un punto fijo en S. Sea $\rho = (\rho^1, ..., \rho^N) \in S$ un punto fijo de T. Demostraremos que ρ es un equilibrio de Nash para el juego. Sea $j \in A_i$ tal que

$$R_i(\rho^1, ..., \delta^i_j, ..., \rho^N) = \min\{R_i(\rho^1, ..., \delta^i_k, ..., \rho^N) : k = 1, 2, ..., m_i\}.$$

Entonces, $R_{ij}(\rho) \leq R_i(\rho)$ y de (1), se sigue que $\varphi_{ij}(\rho) = 0$. Por ser ρ un punto fijo de T tenemos que $\varphi_{ik}(\rho) = 0$ para todo $k \in A_i$ lo que implica que

$$R_i(\rho) \geq R_{ik}(\rho) \quad \forall i = 1, 2, ..., N, \ k \in A_i,$$

y entonces

$$R_i(\rho) \geq R_i(\rho^1, ..., \beta^i, ..., \rho^N) \quad \forall \beta^i \in S_i,$$

es decir, ρ es un equilibrio de Nash para el juego. ■

Definición 2.9 *Un juego no cooperativo G de dos personas se dice ser un juego de imitación si $A_1 = A_2 = \{1, ..., m\}$ y la función de pago r_2 para el segundo jugador es*

$$r_2(i, j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, ..., m, \tag{2}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. En este caso llamamos líder al primer jugador e imitador al segundo.

En un juego de imitación, el imitador "gana" si elige la acción elegida por el líder. De la definición y del Teorema 2.8, se sigue que todo juego de imitación, tiene al menos un equilibrio de Nash en el conjunto de las estrategias mixtas.

Definición 2.10 *Sea G un juego de imitación y β una estrategia mixta del imitador. Se dice que δ_l^1 es una respuesta óptima del líder a β si*

$$R_1(\delta_l^1, \beta) \geq R_1(\delta_i^1, \beta) \quad \forall i \in \{1, 2, ..., m\}.$$

Lema 2.11 *En un juego de imitación G, si (α, β) es un equilibrio de Nash entonces $sop(\beta) \subset sop(\alpha)$.*

Teorema 2.12 *Sea G un juego de imitación. Si (α, β) es un equilibrio de Nash para G entonces el soporte de α está contenido en el conjunto de índices i tales que δ_i^1 es una respuesta óptima del líder a β.*

Observación. Podemos extender el concepto de juego de imitación al caso en que los conjuntos de acciones no son iguales, pero tienen la misma cantidad de elementos. Si $A_1 = \{a_1, ..., a_m\}$ y $A_2 = \{b_1, ..., b_m\}$, la condición en (2) se sustituye por

$$r_2(a_i, b_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, ..., m.$$

El concepto de respuesta óptima, el Lema 2.11 y el Teorema 2.12 se extienden de manera natural a este contexto.

3 Correspondencias y el Teorema de Kakutani

Para un conjunto A, denotamos por $\mathcal{P}(A)$ al conjunto potencia de A, es decir, la familia de todos los subconjuntos de A.

Definición 3.1 *Sean X, Y dos conjuntos no vacíos. Una correspondencia φ de X en Y es una función con dominio X y contradominio $\mathcal{P}(Y)$, es decir, una correspondencia φ asocia a cada elemento x en X un subconjunto $\varphi(x)$ de Y.*

Si f es una función de X en Y podemos identificar f con la correspondencia que a cada $x \in X$ le asocia el conjunto $\{f(x)\}$ y entonces una función puede considerarse como un caso particular de una correspondencia. En la siguiente definición generalizamos el concepto de continuidad de una función. Recuérdese que en un espacio topológico, una vecindad V de un conjunto A es cualquier conjunto tal que existe un conjunto abierto B que satisface $A \subset B \subset V$.

Definición 3.2 *Sean X, Y espacios métricos. Una correspondencia φ de X en Y se dice ser semicontinua superiormente en $x \in X$ si para cada vecindad V de $\varphi(x)$ existe una vecindad U de x tal que $\varphi(z) \subset V$ par todo $z \in U$. Se dice que φ es semicontinua superiormente en X si es semicontinua en todo punto $x \in X$.*

Definición 3.3 *Para una correspondencia φ de X en Y, un punto x en X se dice ser un punto fijo de φ si $x \in \varphi(x)$.*

A continuación enunciamos y demostramos el teorema de punto fijo de Kakutani.

Teorema 3.4 *Sea C un subconjunto no vacío compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$. Si $\varphi : C \to \mathcal{P}(C)$ es una correspondencia semicontinua superiormente en C tal que para todo $x \in X$, $\varphi(x)$ es cerrado y convexo, entonces φ tiene al menos un punto fijo en C.*

Demostración. Iniciamos escogiendo un punto arbitrario $x_1 \in C$ y un punto $y_1 \in \varphi(x_1)$. Supóngase que los puntos $x_1, ..., x_n \in C$ y $y_1, ..., y_n$ con $y_i \in \varphi(x_i)$ han sido escogidos. Consideremos el juego de imitación donde el conjunto de acciones del lider es $\{x_1, ..., x_n\}$, el conjunto de acciones del imitador es $\{y_1, ..., y_n\}$ y la función de pago del líder está dada por

$$r_1^n(x_i, y_j) = -\left\|x_i - y_j\right\|^2 \qquad i, j = 1, 2, ..., n. \tag{3}$$

Sea (α^n, β^n) un equilibrio de Nash para este juego. Escogemos x_{n+1} y y_{n+1} de la siguiente manera:

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^n y_j \quad \text{y} \quad y_{n+1} \in \varphi(x_{n+1}). \tag{4}$$

De (3) y (4) se obtiene

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j^n r_1^n(x_i, y_j) = -\left\|x_i - x_{n+1}\right\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j^n \left\|x_{n+1} - y_j\right\| \tag{5}$$

para cada $i = 1, ..., n$. Si el líder utiliza la estrategia pura $\delta_{x_i}^1$, entonces su ganancia es precisamente $\sum_{j=1}^{n} \beta_j^n r_1^n(x_i, y_j)$. Se sigue entonces que una respuesta óptima pura del líder a la estrategia β^n minimiza $\left\|x_i - x_{n+1}\right\|$, puesto que el otro sumando de la ganancia en (5), no depende de i. Por el Lema 2.11 tenemos que $sop(\beta^n) \subset sop(\alpha^n)$ y por el Teorema 2.12, $sop(\alpha^n)$ está contenido en el conjunto M de índices i para los cuales $\left\|x_i - x_{n+1}\right\|$ es mínimo. Obtenemos entonces que $sop(\beta^n) \subset M$.

Sea $x^* \in \mathbb{R}^n$ un punto de acumulación de la sucesión (x_n) y V una vecindad cerrada y convexa de $\varphi(x^*)$. Como φ es semicontinua superiormente, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left\|x - x^*\right\| < \varepsilon \ \text{ implica } \ \varphi(x) \subset V. \tag{6}$$

Entonces, existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n), tal que x_{n_k+1} converge a x^* y por lo tanto existe N_1 tal que

$$\left\|x_{n_k+1} - x^*\right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n_k \geq N_1. \tag{7}$$

Por otra parte, de la compacidad de C se sigue que

$$\lim_{m\to\infty} \min_{i\leq m} \|x_i - x_{m+1}\| = 0,$$

por lo que existe N_2 tal que

$$\min_{j\leq n_k} \|x_j - x_{n_k+1}\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n_k \geq N_2.$$

Si además $\beta_i^{n_k} > 0$, entonces

$$\|x_i - x_{n_k+1}\| \leq \min_{j\leq n_k} \|x_j - x_{n_k+1}\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n_k \geq N_2, \tag{8}$$

ya que el soporte de β^{n_k} está contenido en M. Si $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces de (7) y (8) se sigue que para cada $n_k \geq N$ y para todo $i \leq n_k$ tal que $\beta_i^{n_k} > 0$,

$$\|x_i - x^*\| \leq \|x_i - x_{n_k+1}\| + \|x_{n_k+1} - x^*\| < \varepsilon.$$

La desigualdad anterior junto con (6) implica que $\varphi(x_i) \subset V$ y por lo tanto, $y_i \in V$ cuando $\beta_i^{n_k} > 0$, $n_k \geq N$. Como V es convexo,

$$x_{n_k+1} = \sum_{i=1}^{n_k} \beta_i^{n_k} y_i \in V \quad \forall n_k \geq N.$$

Como además, V es cerrado, $x^* \in V$. Por otra parte, puesto que $\varphi(x^*)$ es cerrado y convexo se tiene que

$$\varphi(x^*) = \cap_{V\in\mathcal{W}} V,$$

donde $\mathcal{W}$ es la familia de vecindades cerradas y convexas de $\varphi(x^*)$. Se concluye entonces que $x^* \in \varphi(x^*)$, lo que completa la demostración del teorema. ■

4 Conclusiones

La demostración del Teorema de Nash en la Sección 2 es la demostración original que se presenta en [6]. Otra forma de probar ese resultado es utilizando el teorema de Kakutani, como se hace en [3]. Por supuesto, en ese caso, debe demostrarse este último resultado siguiendo un camino distinto al que hemos presentado aqui. Por ejemplo, en [1], [2] y [7], las demostraciones se basan en el teorema de punto fijo de Brouwer el cual, como notamos en el párrafo después de la Definición 3.1, puede considerarse un corolario del teorema de Kakutani. Concluimos entonces que el teorema de Nash y los teoremas de punto fijo de Brouwer y Kakutani son equivalentes.

Bibliografía

[1] C.D. Aliprantis, K.C. Border (2006). *Infinite Dimensional Analysis*. Springer Verlag

[2] K.C. Border (1999). *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. Cambridge University Press

[3] J. Franklin (1980). *Methods of Mathematical Economics*. Springer-Verlag

[4] A. Mclennan. *Kakutani Fixed Point Theorem: A new proof*. http://www.econ.umn.edu/˜mclennan/Classes/Ec8103/Lectures/ec8103_lectures.html

[5] A. Mclennan, R. Tourky. *From imitation games to Kakutani*. http://www.econ.umn.edu/˜mclennan/Papers/papers.html

[6] J. Nash (1951). *Non-cooperative games*. Annals of Mathematics 54, 286-295

[7] A.C. Thompson (1984). *Theory of Correspondences*. Wiley

[8] J.M. Pérez-Urquidi (2008). *Teoremas de punto fijo y la existencia de equilibrios de Nash para juegos no cooperativos*. Tesis de Licenciatura, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo, 2008, pp. 129–133.

TEORÍA K ALGEBRAICA Y HACES VECTORIALES

Daniel Juan Pineda

IM-UNAM, Morelia

e-mail: daniel@matmor.unam.mx

Resumen

La presente exposición es para mostrar un ejemplo de la interacción entre geometría y lo que hoy se conoce como la teoría K. Puesto que en la actualidad la teoría K tiene muchos matices, comenzaré mencionando las clases de teorías K que nos conciernen.

1 Teoría K algebraica

Consideremos un anillo R con unidad. Por ejemplo R puede ser el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$, o el anillo de los enteros módulo m, $\mathbb{Z}_m$, donde m es un entero fijo. Observe que estos son ejemplos de anillos conmutativos. Nuestra segunda clase de ejemplos consiste en el anillo de matrices cuadradas con coeficientes en un anillo. Prosiguiendo con nuestros ejemplos, consideremos R un anillo y G un grupo. Denotamos por $R[G]$ al siguiente anillo: sus elementos son sumas finitas formales:

$$r_1g_1 + r_2g_2 + \cdots + r_sg_s, \text{con } s \in \mathbb{N}, \quad r_i \in R, \quad g_i \in G,$$

es decir, los elementos de $R[G]$ son *combinaciones lineales* formales con elementos del grupo G y coeficientes en el anillo R. La suma se define como en álgebra lineal (coordenada a coordenada) y el producto usando los productos tanto en G como en R y la ley distributiva. Como ejemplo, consideremos el anillo $\mathbb{Z}$ y el grupo $G = C_n$ el grupo cíclico de orden n, es decir $G = \{1, \sigma, \sigma^2, \ldots \sigma^{n-1}\}$, así $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[\sigma]/\sigma^n - 1$. Otra clase importante de anillos son los siguientes: sea X un espacio topológico, sea $C_k(X) = \{f : X \to k | f \text{ continua}\}$ con $k = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, la suma y multiplicación están definidas por

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), (f_1f_2)(x) = f_1(x)f_2(x).$$

Una vez que tenemos anillos, nos gustaría estudiar *módulos* sobre éstos. Un grupo abeliano M es un R-módulo, si se tiene definida una multiplicación por escalares de R, que satisface las propiedades de compatibilidad usuales. Puesto que es importante distinguir el orden en la multiplicación ya que nuestros anillos pueden ser no conmutativos, diremos que nuestro módulo es izquierdo o derecho si la multiplicación es izquierda o derecha, respectivamente. Como ejemplo tenemos que cualquier espacio vectorial sobre un campo es un módulo. Asimismo, cualquier grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$ módulo con la multiplicación:

$$mu = u + u + \cdots + u, \quad m - \text{veces}.$$

Dado un anillo R, podemos considerar el producto cartesiano R^n de la manera usual, éste resulta ser un R-módulo con la multiplicación por escalares coordenada a coordenada,

será izquierdo o derecho dependiendo el lado que elijamos para multiplicar. A un módulo construido de esta forma se le conoce como un módulo libre de rango n.

Como es usual, podemos construir nuevos módulos a partir de módulos conocidos, por ejemplo si M y N son R-módulos, formamos el módulo *suma directa*: $M \oplus N$ con suma y multiplicación coordenada a coordenada. Dejamos al lector elaborar los conceptos de *submódulo, módulo cociente* y *R-homomorfismo.*

Otra clase importante de módulos es la de los módulos *proyectivos*: un R-módulo M es proyectivo si existe un R-módulo Q tal que $M \oplus Q \cong R^n$ para algún n. Por ejemplo, de la definición es inmediato que los módulos libres son proyectivos (tome Q como el módulo trivial 0).

Diremos que un R-módulo M es *finitamente generado* si existe un R-homomorfismo suprayectivo $\phi : R^n \to M$ para algún n. Por ejemplo, un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo k es un k-módulo proyectivo y finitamente generado. En general, de la definición anterior puede resultar difícil decidir si un módulo es proyectivo o no.

Un elemento e de un anillo R es *idempotente* si $e^2 = e$, por ejemplo el 1 es idempotente. Consideremos el R-módulo libre R como módulo derecho. Dado cualquier elemento r de R podemos formar el R-submódulo rR. En el caso especial de tomar un idempotente e, el R-módulo eR es proyectivo, esto es inmediato de la descomposición $R = eR \oplus (1-e)R$ (que podrá verificar el lector). Así, cada idempotente de R me produce un módulo proyectivo. Más generalmente, si consideramos el R-módulo libre (izquierdo) R^n, y éste lo vemos como un A-módulo izquierdo, donde A es el anillo de matrices cuadradas de $n \times n$ con coeficientes en R, obtenemos que cualquier matriz idempotente e me produce el A-módulo eR^n y éste será proyectivo. Veamos algunos ejemplos.

Sea G el grupo simétrico de tres letras, este grupo queda completamente descrito a continuación:

$$G = \{a, c | a^2 = 1, c^3 = 1, aca^{-1} = c^2\}.$$

Observe que G no es conmutativo y tiene 6 elementos, más aún, el subgrupo H generado por a es cíclico de orden 2 y el subgrupo K, generado por c es cíclico de orden 3. Consideremos el elemento $e = \frac{1}{2}(1 + a)$ en el anillo $\mathbb{Q}[G]$. Observe que e es idempotente en $\mathbb{Q}[G]$ y por lo tanto $e\mathbb{Q}[G]$ es un $\mathbb{Q}[G]$-módulo proyectivo. Similarmente, el elemento $f = \frac{1}{3}(2 - c - c^2)$ es idempotente y define otro $\mathbb{Q}[G]$-módulo proyectivo. Observe que estos mismos elementos definen módulos $\mathbb{Q}[H]$ y $\mathbb{Q}[K]$ proyectivos. Más aún, si ω es una raíz cúbica del 1 en los complejos, el elemento $\mathbf{f} = \frac{1}{3}(2 + \omega c + \omega^2 c^2)$ también es idempotente en $\mathbb{C}[G]$ y define un $\mathbb{C}[G]$-módulo proyectivo.

Consideremos la categoría de las clases de isomorfismo de R-módulos proyectivos finitamente generados, en esta categoría tenemos un objeto *cero* (el módulo cero) y el lector puede verificar que si tomamos la suma directa de dos módulos proyectivos y finitamente generados resulta ser un módulo proyectivo y finitamente generado, así, nuestra categoría se parece mucho a un grupo abeliano, sólo nos faltan los inversos. Existen muchos ejemplos de situaciones como ésta, donde hay una suma con un neutro, pero la suma no tiene inversos (como en los numeros naturales). En los 60, A. Grothendieck encuentra una manera de completar nuestra categoría a un grupo de manera óptima, es decir: existe un grupo abeliano en el cual se encaja nuestra categoría, este grupo preserva la operación y es el grupo más

pequeño con esta propiedad, a este grupo se le denomina el grupo de Grothendieck de la categoría y en nuestro caso se denota por $K(R)$ y se le conoce como la *Teoría* K algebraica del anillo R.

Algunos cálculos que se conocen son

- $K(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$
- $K(\mathbb{Z}[G]) = \mathbb{Z}$ si G es un grupo cíclico de orden < 23
- $K(\mathbb{Z}[C_{23}]) = \mathbb{Z} \oplus C_3$, con C_3 el grupo cíclico de tres elementos.
- $K(R) = \mathbb{Z}$ si R es un dominio de ideales principales.
- $K(R) \cong K(M_n(R))$.
- $K(\mathbb{C}[G]) = \mathbb{Z}^c$ donde c es el número de clases de conjugación de elementos de G (finito).
- $K(C_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1)) = \mathbb{Z}$
- $K(C_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^1)) = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}$
- $K(C_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^2)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
- $K(C_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^2)) = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}$

2 Teoría K topológica

Consideremos ahora X un espacio topológico, Hausdorff y compacto. El ejemplo más sencillo es cuando X es un punto, otros ejemplos son cuando X es una variedad topológica o diferenciable como las esferas $\mathbb{S}^n$. Un haz vectorial sobre X es una terna $\xi = (E, p, X)$ donde E es un espacio topológico, $p : E \to X$ es una función continua que satisface la siguiente condición local: para cada $x \in X$ existe un abierto U que contiene a x y un homeomorfismo $\varphi_U : p^{-1}(U) \to U \times V$ donde V es un espacio vectorial (real o complejo) de dimensión finita tal que $p|_{p^{-1}(U)} = \pi\varphi_U$ donde $\pi : U \times V \to U$ es la proyección en la primera coordenada, esto nos dice que "p es localmente un producto". Un ejemplo inmediato es el *haz trivial*: $(X \times V, p, X)$ donde V es un espacio vectorial fijo y $p : X \times V \to X$ es la proyección en la primera coordenada. Por supuesto no todos los haces son triviales, un ejemplo es el siguiente: consideremos $V = \mathbb{R}$, la recta real usual como $\mathbb{R}$ espacio vectorial y tomemos $X = \mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} | \quad ||x|| = 1\}$. Definimos el espacio E como el espacio que se obtiene al identificar en el espacio $[0, 1] \times \mathbb{R}$ los puntos de la forma $(0, r)$ con los de la forma $(1, -r)$ y definimos nuestra proyección $p : E \to \mathbb{S}^1$ como $p(t, r) = (e^{2\pi it})$. Un ejercicio agradable para el lector es verificar que esto forma un haz vectorial sobre $\mathbb{S}^1$ con fibra $\mathbb{R}$ y que no es un haz trivial, de hecho es una banda de Möbius infinita.

Como en el caso de módulos, dos haces vectoriales ξ_1 y ξ_2 sobre X se pueden sumar (tomando la suma de espacios vectoriales fibra a fibra) y se construye un nuevo haz $\xi_1 + \xi_2$ con fibra la suma directa de las fibras correspondientes. También tenemos el haz especial $0 = (X \times 0, p, X)$ donde 0 denota al espacio vectorial que consta únicamente del vector cero.

Este haz tiene la propiedad que $\xi + 0 = 0 + \xi$ para todo haz vectorial ξ. Por tanto tenemos una suma y un neutro en la categoría de haces vectoriales sobre X, nuevamente como en la categoría de módulos proyectivos, podemos completar esta categoría a un grupo abeliano. Este grupo abeliano se conoce como la teoría K topológica del espacio X y se denota por $K(X)$. Como ejemplo tenemos que si X es un punto $K(X)$ es el grupo aditivo de los enteros.

3 Un teorema de Swan

Tomemos X un espacio topológico compacto y Hausdorff; $\xi = (E, p, X)$ un haz vectorial sobre X y $R = C_{\mathbb{R}}(X)$. Recordemos que una función continua $s : X \to E$ se llama una sección de ξ si $ps = Id$, ahora consideremos $\Gamma(\xi)$ el conjunto de todas las secciones de ξ. Observemos que localmente los valores de una sección s consisten de dos coordenadas $s(x) = (x, v_x)$ donde v_x es un vector en la fibra sobre x, así aprovechando ésto, tenemos que podemos sumar dos secciones sumando los valores con la suma vectorial de la fibra, es decir dadas dos secciones $s_1(x) = (x, v_x)$ y $s_2(x) = (x, w_x)$ definimos $(s_1 + s_2)(x) = (x, v_x + w_x)$ y con esto tenemos que $\Gamma(\xi)$ es un grupo abeliano. Mejor aún, para cada elemento $f \in R$ y $s \in \Gamma(\xi)$ definimos la multiplicación $(fs)(x) = (x, f(x)v_x)$ usando la multiplicación escalar de la fibra, es inmediato verificar que esto convierte a $\Gamma(\xi)$ en un R-módulo.

Continuando con nuestro análisis, consideremos el caso especial en que el haz vectorial consiste del haz trivial ϵ_n con fibra $\mathbb{R}^n$. Una sección s para ϵ_n consiste en escoger una función continua $s : X \to X \times \mathbb{R}^n$ de la forma $s(x) = (x, v_1(x), \ldots, v_n(x))$ donde $v_i : X \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Por lo tanto $\Gamma(\epsilon_n)$ es precisamente R^n, es decir el R-módulo es libre e isomorfo a R^n, así $\Gamma(\epsilon_n)$ es proyectivo y finitamente generado.

Ahora consideremos un haz vectorial general ξ. De la teoría general de haces se tiene que existe un haz vectorial ω sobre X tal que $\xi + \omega = \epsilon_n$ para alguna n. De la discusión del párrafo anterior obtenemos que ¡cualquier haz ξ es proyectivo y finitamente generado como R-módulo!, resumiendo tendremos

Teorema de R. Swan. *Sea X un espacio topológico Hausdorff y compacto y R el anillo de funciones continuas de X a $\mathbb{R}$ ó a $\mathbb{C}$. Entonces se tiene un isomorfismo*

$$K(X) \cong K(R).$$

Como aplicación tenemos lo siguiente. Tomemos $X = \mathbb{S}^1$, $R = C_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^1)$ y $H = C_2$, el grupo cíclico con dos elementos y generado por a. Sea $\phi : H \to M$, donde M es el anillo de matrices de 2×2 con coeficientes en R, definido por

$$\phi(a)(t) = \begin{pmatrix} cos(2\pi t) & sen(2\pi t) \\ sen(2\pi t) & -cos(2\pi t) \end{pmatrix}.$$

Podemos pensar a $\phi(a)$ como una transformacción del haz trivial ϵ_2 sobre $\mathbb{S}^1$ en sí mismo, es inmediato verificar que el elemento $e = \frac{1}{2}(1 + \phi(a))$ es una matriz idempotente en M y por lo tanto $im(e)$ define un haz vectorial m sobre $\mathbb{S}^1$, de hecho este haz es la banda de Möbius definida anteriormente sobre el círculo y por lo tanto define un elemento notrivial de $K(\mathbb{S}^1)$. Por otro lado ϕ define un homomorfismo de anillos $\mathbb{R}[H] \to M$ y la imagen del

elemento $\frac{1}{2}(1+a)$ es nuestro elemento $im(e)$ que no es trivial y por tanto también nos define un elemento no trivial en $K(\mathbb{R}[H])$.

Para concluir incluimos bibliografía: el teorema mencionado de R. Swan aparece en [3]. Una buena introdución a la teoría de haces se puede consultar en [2]. Para un estudio más algebraico se puede consultar el libro [4] y una excelente referencia sobre teoría K topológica es [1].

Bibliografía

[1] M. Karoubi, *K-Theory*, Springer-Verlag 1978.

[2] J. Milnor y D. Stasheff, *Characterisctic classes*, Ann. Math. Studies 76, Princeton University Press 1974.

[3] R. Swan, *Vector Bundles and proyective modules*, Trans. AMS 105 (1962) 254-277.

[4] C. Weibel, www.math.rutgers.edu/weibel/Kbook.html

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México.
Mosaicos Matemáticos No. 27, Marzo, 2008, pp. 135- 140.

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA SOBRE EL CONCEPTO DE PENDIENTE PARA EL SUBSISTEMA DE PREPARATORIA ABIERTA

Reyna del Carmen Romero Córdova, Jorge Ruperto Vargas

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

e-mail: carom777@hotmail.com; rvargas@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Laborando con alumnos del Subsistema de Preparatoria Abierta, nos dimos cuenta que uno de los principales problemas con los que se enfrenta el estudiante de este Subsistema es no poder asistir a las asesorías presenciales de preparación para acreditar las materias. Existen diversos factores que ocasionan esta inasistencia, uno de ellos es que gran parte de los alumnos son jóvenes con poca madurez y disciplina para cumplir con un horario establecido de clases. Esta situación nos preocupó, por lo que se decidió realizar el presente trabajo para dar una respuesta a esta falta de asistencia. Se acordó abordar algún contenido establecido en el currículo de esta institución, seleccionándose el tema de la pendiente, por su trascendencia a través de sus cursos de matemáticas y la importancia que tiene para la parte del Cálculo, sin embargo, solamente analizaremos a la pendiente como razón de avance. Se trabajará con alumnos de este Subsistema a través de una secuencia didáctica en línea, diseñada bajo el Modelo de Van Hiele, enriquecido con principios constructivistas, de forma que nuestro problema a investigar será la evolución del razonamiento geométrico de estos estudiantes.

1. MARCO REFERENCIAL

Un alumno del Subsistema de Preparatoria Abierta debe cursar 33 asignaturas para obtener su certificado de terminación, materias que están distribuidas en un plan de estudios que maneja un tronco común hasta el tercer semestre y posteriormente, del cuarto al sexto semestre, tres áreas: Humanidades, Administrativas y Sociales y Físico-Matemáticas, y no importando el área, se imparten matemáticas I hasta matemáticas IV como materias obligatorias. Los cursos de matemáticas en el Subsistema de Preparatoria Abierta presentan el desarrollo de conocimientos en una serie de unidades y éstas, a su vez, divididas cada una en cuatro módulos.

Por la naturaleza de la modalidad educativa de carácter abierto, la adquisición de conocimiento, habilidades y actitudes que tienen como pilar principal el desarrollo de estrategias para la solución de problemas, la evolución del razonamiento geométrico, etc. no se alcanzan por medios académicos tradicionales, en donde hay una fuerte dependencia de la enseñanza ejercida por el profesor. A cambio de esto, el estudiante de matemáticas en la modalidad abierta, dirige su quehacer hacia el aprender a aprender, con el único apoyo de los materiales didácticos y la eventual ayuda de un asesor. En este sentido es fundamental el diseño de las situaciones didácticas para desarrollar el contenido de los cursos.

Un aspecto importante de marcar en el Subsistema de Preparatoria Abierta es cómo se imparten las asesorías para cubrir el material señalado en su programación curricular. El alumno es guiado por un calendario, el cual, marca las fechas de solicitudes y presentaciones de exámenes. Una vez que se solicita el examen, el estudiante cuenta con un mes para prepararse. Dicha preparación la puede hacer de forma individual (un autoaprendizaje), o bien puede acudir a las instalaciones de la Preparatoria Abierta e inscribirse en las asesorías presenciales, en sesiones

de tres días a la semana (5 horas semanales), en ese tiempo el alumno deberá de cubrir todo el material que presenta el libro de esa materia.

Por los diferentes tipos de personas que se inscriben en la modalidad abierta, se tienen muchos aspectos observables para poder analizar y tratar de responder, por ejemplo ¿por qué es tan baja la cantidad de alumnos que asisten a las asesorías presenciales? Por la experiencia que se tiene de trabajar en este subsistema algunas de las respuestas a esta pregunta son las siguientes:

- La mayoría de la población estudiantil se encuentra entre los 15 y 60 años, siendo el rango principal, jóvenes de 15 a 20 años de edad, donde los muchachos poseen una inmadurez con respecto a una disciplina de puntualidad para cumplir su asistencia a las asesorías.
- Otro porcentaje de los alumnos inscritos en esta institución, son personas que ya se encuentran laborando, y que para mejorar su situación laboral necesitan cursar la preparatoria, pero por el horario que manejan en sus trabajos no pueden acudir a las asesorías presenciales.

Analizando la situación se decidió trabajar con un tema que estuviera dentro de las matemáticas obligatorias, para diseñar una secuencia didáctica en línea, seleccionándose el tema de pendiente, el cual está contemplado en el curso de Matemática III y es fundamental para el desarrollo de los contenidos de los cursos posteriores, como el Cálculo en Matemáticas VI.

Como el grupo más numeroso del Subsistema de Preparatoria Abierta es de jóvenes entre 15 a 20 años, quienes en su mayoría tienen la posibilidad de contar con una computadora y acceso a Internet, aunado a que el trabajar con esos equipos es para ellos muy familiar y apasionante, este trabajo se desarrollará en línea con alumnos que cursen la matemáticas III.

2. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

El diseño de la secuencia didáctica sobre la pendiente que se abordará, pretende el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, con una evolución en los distintos niveles de razonamiento marcados en el Modelo de Van Hiele, por tanto la pregunta de investigación de este trabajo se centra en:

* ¿Cómo evoluciona el razonamiento de los estudiantes del Subsistema de Preparatoria Abierta, al trabajar con una secuencia didáctica en línea, diseñada bajo el Modelo del Desarrollo del Pensamiento Geométrico de Van Hiele, enriquecido con principios constructivistas?

Para dar respuesta a esta pregunta pretendemos lograr los siguientes objetivos:

3. OBJETIVOS

- Ubicar a los estudiantes del Subsistema de Preparatoria Abierta en el nivel de razonamiento geométrico de Van Hiele en que se encuentran actualmente, a través de los resultados obtenidos de un examen diagnóstico.
- Diseñar e implementar una secuencia didáctica ya teniendo la ubicación de los estudiantes en cierto nivel de Van Hiele.
- Analizar los resultados obtenidos de la secuencia didáctica para poder concluir si los alumnos lograron la evolución por los niveles de razonamiento de Van Hiele.

4. MARCO TEÓRICO

El marco teórico a utilizar es el Modelo del Desarrollo del Pensamiento Geométrico de Van Hiele, complementado con principios Constructivistas de Jean Piaget.

El modelo de Van Hiele está diseñado con un enfoque tradicional, donde el maestro ocupa el lugar central como expositor, por lo que se diseñará este trabajo con un enfoque constructivista,

donde el estudiante ocupe el sitio principal. Esta remodelación estará centrada en la parte que el modelo llama las fases de aprendizaje, a ellas les daremos una interpretación constructivista.
Parte de este modelo son los siguientes Niveles de Razonamiento:

- Nivel 1(reconocimiento): El estudiante percibe los objetos en su totalidad y como unidades, los describe por su aspecto físico, los clasifica con base a semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos, pero no reconoce explícitamente sus componentes o propiedades.
- Nivel 2 (análisis): El estudiante percibe los objetos como formados por partes y dotados de propiedades aunque no identifica las relaciones entre ellas, los describe informalmente, y deduce nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación.
- Nivel 3 (clasificación): El estudiante realiza clasificaciones lógicas de los objetos y descubre nuevas propiedades con base en propiedades ya conocidas, pero no es capaz de realizar razonamientos lógicos formales.
- Nivel 4 (deducción): El estudiante es capaz de realizar razonamientos lógicos formales. Comprende la estructura axiomática de las matemáticas.

Otra parte integrante del modelo son las fases de aprendizaje:

Fase 1. Información: El profesor informa a los estudiantes sobre lo que van a trabajar y averigua los conocimientos previos de sus alumnos sobre ese tema.

Fase 2. Orientación dirigida: Los estudiantes exploran el campo de investigación por medio del material que les ha suministrado el profesor.

Fase 3. Explicitación: Fase de diálogo entre los estudiantes.

Fase 4. Orientación libre: Los estudiantes tendrán que aplicar sus nuevos conocimientos a investigaciones posteriores sobre el tema de estudio.

Fase 5. Integración: El profesor resume en un todo el campo que han explorado los estudiantes y lograr que integren lo que acaban de aprender.

5. ASPECTOS METODOLÓGICOS

- Realizar un análisis detallado de los libros del Subsistema de Preparatoria Abierta.
- Elegir un contenido de los tratados en el currículo del Subsistema de Preparatoria Abierta.
- Revisar la bibliografía referente a el Marco Teórico "El Modelo de Desarrollo del Pensamiento Geométrico de Van Hiele" y nociones contructivistas de Jean Piaget.
- Elaborar un examen diagnóstico para determinar el nivel de pensamiento geométrico que tienen alumnos del Subsistema de Preparatoria Abierta.
- Analizar los resultados obtenidos del examen y ubicar a los estudiantes en el respectivo nivel de Van Hiele que alcanzaron.
- Diseñar una secuencia didáctica, apoyándonos en nuestro marco teórico, para el tema seleccionado.
- Determinar si el alumno logró avanzar en su desarrollo del pensamiento geométrico, al ir progresando en los niveles.
- Concluir.

6. AVANCES DEL PROYECTO

Se realizó un análisis detallado sobre los textos del Subsistema de Preparatoria Abierta, el cual nos hizo ver, que estos libros están elaborados con demasiado formalismo del siglo pasado, siendo esto muy pesado para los estudiantes de esta institución. Después del análisis de textos, se decidió trabajar con un contenido de los tratados en el libro de matemáticas III, optándose por el tema de pendiente, por su notable desarrollo en todos los cursos de matemáticas de este Subsistema y su importancia con el Cálculo.

De manera frecuente se estuvo revisando la bibliografía para retroalimentar el marco teórico, y apoyado en esto se elaboraron los cuadros de niveles que serán la guía a seguir para la construcción de un examen diagnóstico, el cual nos permitirá ubicar a los estudiantes en cierto nivel de razonamiento de Van Hiele, y a partir de esta ubicación iniciar con el diseño de una secuencia didáctica. En la secuencia se trabajará con alumnos del Subsistema de Preparatoria Abierta, que no tendrán un asesor presencial; por lo que se apoyarán en la asesoría en línea y de la comunicación que ésta le permita. Después de la secuencia analizaremos los resultados para establecer conclusiones.

ELABORACIÓN DE LOS CUADROS DE NIVELES:

Desarrollo del primer nivel para el tema de Pendiente:
Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele y los principios del constructivismo.

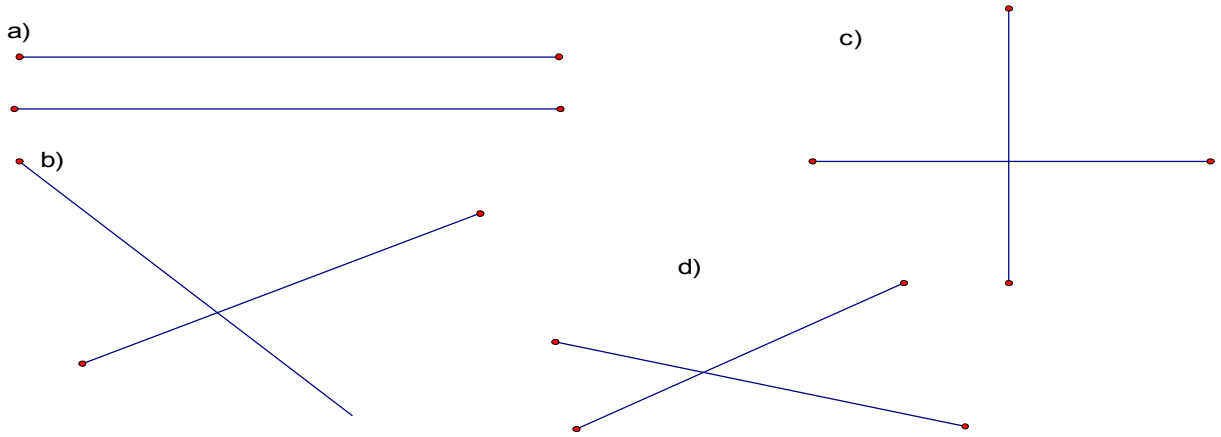
NIVEL	FASE	ACTIVIDAD
Nivel 1	Fase 1	El estudiante observa y analiza que hay personas, sitios o lugares que son más altos que otros.
	Fase 2	El estudiante da más ejemplos donde se establezcan desniveles.
	Fase 3	Los estudiantes discuten entre sí sus observaciones y cada uno escribe sus conclusiones.
	Fase 4	Los estudiantes analizan más situaciones que les propicie observar las características de un segmento de recta que une a objetos de diferentes alturas.
	Fase 5	El alumno resume lo que se ha observado hasta este momento: - Los desniveles en las alturas de diversos objetos y que estos objetos pueden ser unidos a través de un segmento de recta. - El análisis realizado acerca de las características de los segmentos de rectas que unen a estos objetos de diferentes alturas.

Desarrollo del segundo nivel para el tema de Pendiente:
Estudiadas por medio del Modelo de Van Hiele y los principios del constructivismo.

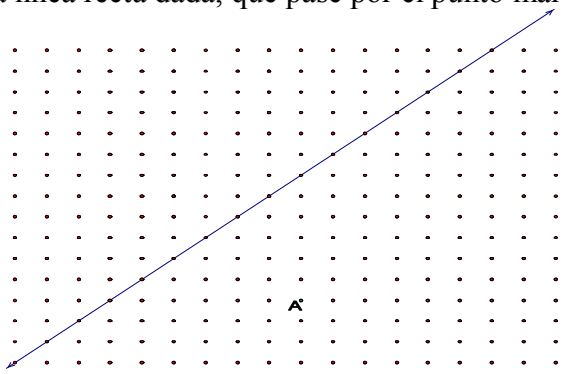
NIVEL	FASE	ACTIVIDAD
Nivel 2	Fase 1	Identificar, a partir de un conjunto de figuras dadas, pares de rectas paralelas, oblicuas o perpendiculares.
	Fase 2	Los alumnos trazan rectas paralelas, oblicuas y perpendiculares respecto a una recta dada con instrumentos euclideanos.
	Fase 3	Los estudiantes discuten entre sí sus ideas y cada uno las describe.
	Fase 4	• Con la ayuda de un dispositivo didáctico, "el geoplano" (físico o simulado) al estudiante se le pide, a partir de rectas de distintas inclinaciones, construir rectas paralelas y perpendiculares a ellas. • Con ayuda del geoplano el estudiante, a partir de rectas de diversas inclinaciones, construye rectas paralelas y perpendiculares a las rectas dadas y que pasen por un punto dado.
	Fase 5	El estudiante resume lo que se ha estudiado hasta el momento: - Los métodos utilizados para trazar rectas paralelas, oblicuas y perpendiculares, utilizando instrumentos euclideanos. - Los métodos geométricos utilizados en el dispositivo didáctico elegido para realizar el trazo de las rectas paralelas y perpendiculares con respecto a una recta dada.

Se está trabajando en la elaboración de los reactivos que formarán el examen diagnóstico, apoyándose en lo establecido por los niveles del Modelo de Van Hiele, utilizando los cuadros anteriores, ejemplo de reactivos diseñados son los siguientes:

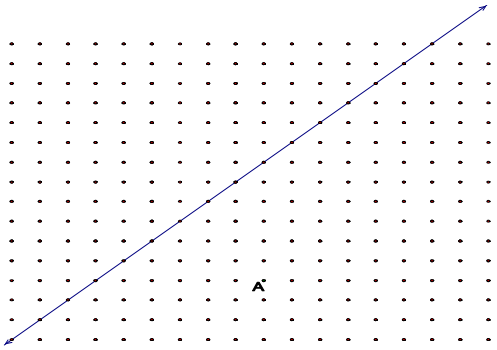
1. Jorge dice que desde donde el vive, la torre de Catedral se ve a la misma altura que la de su casa, ¿podrías argumentar el significado de lo que él dice?
2. En cada caso, diga si las rectas de cada inciso son oblicuas, paralelas o perpendiculares entre si:



3. En el siguiente geoplano simulado, construye, usando sólo lápiz y regla, una recta paralela a esta línea recta dada, que pase por el punto marcado. Explica tú procedimiento.



4. Ahora, en ese mismo dibujo construye otra recta paralela a esta línea que pase por el punto marcado. Explica tu procedimiento.
5. En el siguiente geoplano simulado, construye, usando sólo lápiz y regla, una recta perpendicular a la línea recta dada, que pase por el punto marcado. Explica tú procedimiento.



6. En ese mismo dibujo, construye, usando sólo lápiz y regla, otra recta perpendicular a esta línea que pase por el punto marcado. Explica tú procedimiento.

ANÁLISIS DE LOS REACTIVOS:

PREG.	OBJETIVO DESEADO:	NIVEL:	FASE:
1	Identificar si el alumno es capaz de darse cuenta que la casa se ubica sobre una loma; que sea capaz de describirlo, ya sea escrito o con la ayuda de algún esquema.	1. Reconocimiento.	1. Información y 2. Orientación Dirigida.
2	Identificar si el alumno posee alguna noción sobre rectas oblicuas, paralelas y perpendiculares.	2. Análisis.	2. Orientación Dirigida.
3	Poner atención en que el estudiante comprenda que la pendiente de la recta se vea como una razón de avance. Y que con la ayuda de un Geoplano analice que cuando se avanza X unidades en forma horizontal avanza a su vez Y unidades en forma vertical.	2. Análisis.	2. Orientación Dirigida.
4	Identificar que el alumno sea capaz de analizar la palabra "otra" línea paralela, para que conteste que hay una infinidad de líneas paralelas, pero solo una es la que pasa por el punto dado.	2. Análisis.	2. Orientación Dirigida.
5	Poner atención en que el estudiante comprenda que la pendiente de la recta se vea como una razón de avance. Y que con la ayuda de un Geoplano analice que cuando se avanza X unidades en forma horizontal avanza a su vez Y unidades en forma vertical.	2. Análisis.	2. Orientación Dirigida.
6	Identificar que el alumno analice la palabra "otra" recta perpendicular, para que conteste que hay una infinidad de líneas perpendiculares, pero solo una es la que pasa por el punto dado.	2. Análisis.	2. Orientación Dirigida.

BIBLIOGRAFÍA

Gutiérrez A; Jaime A.:1991. *Modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros*. Educación Matemática (2). Vol. 3, Pp. 49-65.

Chacara M.:2004. *Tesis de maestría en Matemática Educativa: Las nociones de Isometría y Simetría en el plano estudiadas a través del modelo de Van Hiele, enriquecidas con nociones constructivistas*.

Fuys D; Geddes D; Tischler R.:1988. Journal for Research in Mathematics Education. Monografía num. 3. Ed. Asociación Drive, Reston.

Tecnológico de Monterrey. 1983. Matemáticas I. Primer Semestre, Preparatoria Abierta SEP.

Tecnológico de Monterrey. 1983. Matemáticas II. Segundo Semestre, Preparatoria Abierta SEP.

Tecnológico de Monterrey. 1983. Matemáticas III. Tercer Semestre, Preparatoria Abierta SEP.

Tecnológico de Monterrey. 1983. Matemáticas IV. Cuarto Semestre, Preparatoria Abierta SEP.

Tecnológico de Monterrey. 1983. Matemáticas V. Quinto Semestre, Preparatoria Abierta SEP.

Tecnológico de Monterrey. 1983. Matemáticas VI. Sexto Semestre, Preparatoria Abierta SEP.

De la Torre A. *El método socrático y el modelo de Van Hiele*. Lecturas Matemáticas. Vol. 24, Pp. 99-121.

Gutiérrez A; Jaime A.:1996. *Uso de Definiciones e Imágenes de Conceptos Geométricos por los Estudiantes de Magisterio*.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo, 2008, pp. 141–145.

PROCESOS DE CONTROL SEMI-MARKOVIANOS CON DISTRIBUCIÓN DEL TIEMPO DE PERMANENCIA DESCONOCIDA

Luz del Carmen Rosas Rosas, Jesús Adolfo Minjárez Sosa

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora[1]

e-mail: lcrosas@gauss.mat.uson.mx; aminjare@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En este trabajo se estudian modelos de control semi-Markovianos con espacios de estado y control de Borel, con costos posiblemente no acotados y distribución de los tiempos de permanencia desconocida H. Suponiendo que H no depende de las parejas estado-acción, combinamos métodos de estimación estadística adecuados de H con procedimientos de control, a fin de construir una política asintóticamente óptima descontada $\hat{\pi} = \{f_n\}$, y una política estacionaria óptima $\{f_\infty\}$, donde f_n converge a f_∞ en el sentido de Schäl (1975), ver [4].

1 Introducción

El estudio de los procesos de control estocástico se clasifica como procesos en tiempo, ya sea discreto o continuo. Una clase importante de procesos de control en tiempo continuo la constituyen los Procesos de Control Semi-Markovianos (PCSMs), cuya evolución en el tiempo la podemos describir de la siguiente manera. Si en el tiempo de la n-ésima época de decisión el sistema se encuentra en el estado $x_n = x$, entonces el controlador elige una acción o control $a_n = a$ y sucede lo siguiente: 1) el sistema permanece en el estado x durante un tiempo aleatorio no negativo δ_{n+1} con distribución H; 2) se genera un costo c que depende del estado, el control y el tiempo de permanencia, 3) el sistema se mueve a un nuevo estado $x_{n+1} = y$ de acuerdo a una ley de transición. Una vez ocurrido lo anterior, el proceso se repite. Los costos de operación se acumulan durante la evolución del sistema, y el objetivo es encontrar una política de control que minimice un índice de funcionamiento, el cual supondremos que es el costo total descontado. En el presente trabajo estudiamos los PCSMs cuando la distribución H es desconocida por el controlador. Bajo este contexto, en cada época de decisión antes de elegir la acción, el controlador debe implementar un esquema de estimación estadística para obtener un estimador H_n de H, y combinarlo con el proceso de optimización para obtener una acción de la forma $a = a_n(H_n)$. Por lo tanto, el objetivo es demostrar que las políticas construidas con este procedimiento son asintóticamente óptimas.

[1]Trabajo financiado por CONACyT (clave 46633-F), y dirigido por Dr. J. Adolfo Minjárez S.

2 Descripción del modelo

Considérese un modelo de control semi-Markoviano

$$SM := (\mathbb{X}, \mathbb{A}, \{A(x) : x \in \mathbb{X}\}, Q, H, D, d)$$

que satisface las siguientes condiciones. El espacio de estado $\mathbb{X}$ y el espacio de acción $\mathbb{A}$ son ambos de Borel; a cada $x \in \mathbb{X}$ se le asocia un subconjunto medible no vacío $A(x)$ de $\mathbb{A}$, cuyos elementos son las acciones admisibles cuando el sistema está en el estado x. El conjunto $\mathbb{K} := \{(x, a) : x \in \mathbb{X},\ a \in A(x)\}$ de parejas estado-acción admisibles es un subconjunto de Borel del espacio $\mathbb{X} \times \mathbb{A}$. La ley de transición $Q(.|.)$ es un kernel estocástico sobre $\mathbb{X}$ dado $\mathbb{K}$ y $H(.|x, a)$ es la función de distribución del tiempo de permanencia en el estado x cuando se elige la acción $a \in A(x)$, la cual es desconocida por el controlador. Finalmente, las funciones de costo D y d son reales medibles no negativas sobre $\mathbb{K}$ posiblemente no acotadas.

Un modelo de control semi-markoviano standard tiene la siguiente interpretación. Al tiempo de la n-ésima época de decisión T_n, el sistema se encuentra en el estado $x_n = x$ y el controlador elige una acción $a_n = a \in A(x)$, generándose así lo que se describe a continuación: 1) se incurre en un costo inmediato $D(x, a)$, 2) el sistema permanece en dicho estado $x_n = x$ durante un tiempo aleatorio no negativo δ_{n+1} con distribución $H(.|x, a)$, 3) al tiempo $T_{n+1} := T_n + \delta_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$, $T_0 := 0$) el sistema transita a un nuevo estado $x_{n+1} = y$ de acuerdo a la distribución $Q(.|x, a)$, 4) se produce un costo debido al tiempo de permanencia en el estado x, cuya razón de costo es $d(x, a)$, 5) una vez en el estado y el proceso se repite.

En nuestro caso, ya que la distribución H es desconocida, antes de elegir el control a el controlador obtiene un estimador H_n de H y lo combina con el proceso de optimización para obtener un control de la forma $a = a_n(H_n)$.

Los controles son elegidos por reglas conocidas como políticas de control. Sea Π el conjunto de todas las políticas de control, y sea $\mathbb{F} \subset \Pi$ el de todas las políticas estacionarias.

Condiciones sobre el modelo. Impondremos las siguientes hipótesis sobre el modelo de control.

Hipótesis 2.1 *Existe una función de distribución G (desconocida) con densidad g tal que $H(t|x, a) = G(t) = \int_0^t g(s)ds$, $\forall (x, a) \in \mathbb{K}$, $t \geq 0$.*

Hipótesis 2.2 *Existe $\epsilon > 0$ y $\theta > 0$ tal que $\int_0^\theta g(s)ds \leq 1 - \epsilon$.*

Hipótesis 2.3 *Existe $q \in (1, 2)$ y una función medible $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $g \in L_q([0, \infty))$, $g(s) \leq \overline{g}(s)$ casi dondequiera con respecto a la medida de Lebesgue y $\int_0^\infty (\overline{g}(s))^{2-q} ds < \infty$.*

Sea $W : \mathbb{X} \to [1, \infty)$ una función medible, y sea $\mathbb{B}_W(\mathbb{X})$ el espacio lineal normado consistente de todas las funciones medibles $u : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, tales que satisfacen la condición $||u||_W := sup_{x \in \mathbb{X}} \frac{|u(x)|}{W(x)} < \infty$.

Hipótesis 2.4 **(a)** *Para cada $x \in \mathbb{X}$, las funciones de costo $D(x,a)$ y $d(x,a)$ son semicontinuas inferiormente sobre $A(x)$. Además, existe una función medible $W : \mathbb{X} \to [0,\infty)$, constantes positivas $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2$, $p > 1$, b_0 y $\beta_0 \in (0,1)$, tales que:*

$$\sup_{A(x)} |D(x,a)| \leq \overline{c}_1 W(x), \qquad \sup_{A(x)} |d(x,a)| \leq \overline{c}_2 W(x),$$

$$\int_{\mathbb{X}} W^p(y) Q(dy|x,a) \leq \beta_0 W^p(x) + b_0, \qquad x \in \mathbb{X},\ a \in A(x).$$

(b) *Para cada $x \in \mathbb{X}$, $A(x)$ es un conjunto compacto.*

(c) *La función $(x,a) \mapsto \int_{\mathbb{X}} v(y) Q(dy|x,a)$ es continua y acotada sobre $\mathbb{K}$ para cada función acotada y continua v sobre $\mathbb{X}$.*

(d) *Para cada $x \in \mathbb{X}$, $a \mapsto \int_{\mathbb{X}} W(y) Q(dy|x,a)$ es una función continua sobre $A(x)$.*

3 Criterio de optimalidad

Cuando se usa la política $\pi \in \Pi$, dado el estado inicial $x_0 = x$, se define el costo total esperado α-descontado ($\alpha > 0$ un factor de descuento fijo) como

$$V(\pi, x) := E_x^{\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha T_n) c(x_n, a_n) \right],$$

donde E_x^{π} denota el operador esperanza con respecto a la medida de probabilidad P_x^{π} inducida por la política π, dado el estado inicial $x_0 = x$ (ver [1]), mientras que $c(x,a) := D(x,a) + \tau_\alpha d(x,a)$, $(x,a) \in \mathbb{K}$, y además,

$$\tau_\alpha := \frac{1 - \Delta_\alpha}{\alpha} \quad y \quad \Delta_\alpha := \int_0^{\infty} e^{-\alpha s} g(s) ds.$$

Por lo tanto, el problema de control óptimo asociado al modelo estocástico SM consiste en encontrar una política óptima $\pi^* \in \Pi$ tal que $V(\pi^*, x) = V^*(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$, donde $V^*(x) := \inf_{\pi \in \Pi} V(\pi, x)$ es la función de valor óptimo.

4 Construcción de políticas

Teorema 4.1 *Supóngase que se cumplen las hipótesis 2.1-2.4. Entonces:*

(a) *$V^* \in \mathbb{B}_W(\mathbb{X})$ y satisface la ecuación de optimalidad α-descontada*

$$\min_{a \in A(x)} \Phi(x,a) = 0$$

donde

$$\Phi(x,a) = c(x,a) + \Delta_a \int_{\mathbb{X}} V^*(y) Q(dy|x,a) - V^*(x), \quad x \in \mathbb{X}, \tag{1}$$

es la función de discrepancia.

(b) *Existe $f \in \mathbb{F}$ tal que $f(x) \in A(x)$ alcanza el mínimo en (1), y la política estacionaria $\{f\}$ es óptima.*

Demostración. Puede ser consultada en [3], p.18-21. ■

Sea $g_n \in L_q([0,\infty))$ un estimador de la densidad g tal que

- $\int_0^\infty e^{-\alpha s} g_n(s)ds \leq \lambda$, $(\Delta_\alpha \leq \lambda < 1)$,
- $\int_0^\theta g_n(s)ds < 1-\epsilon$, y
- $g_n(s) \leq \overline{g}(s)$ c.d.

En [2] se demuestra la existencia de un estimador con tales características. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\Delta_n := \int_0^\infty e^{-\alpha s} g_n(s)ds$ y $\tau_n := \frac{1-\Delta_n}{\alpha}$. De hecho, en [2] se demuestra que $E|\Delta_\alpha - \Delta_n| \to 0$ y $E|\tau_\alpha - \tau_n| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Construcción de políticas. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea la función de costo aproximado en una etapa

$$c_n(x,a) = D(x,a) + \tau_n d(x,a), \quad (x,a) \in \mathbb{K}.$$

Nótese que de la Hipótesis 2.4(a), $\sup_{A(x)} |c_n(x,a)| \leq \overline{c}W(x)$, para $x \in \mathbb{X}$ y $n \in \mathbb{N}$. Además, definimos $\{V_n\} \subset \mathbb{B}_W(\mathbb{X})$ como $V_0 := 0$, mientras que para $n \geq 1$, $x \in \mathbb{X}$

$$V_n(x) := \min_{a \in A(x)} \left\{ c_n(x,a) + \Delta_n \int_{\mathbb{X}} V_{n-1}(y) Q(dy|x,a) \right\}.$$

Por argumentos usuales sobre existencia de minimizadores (ver [2]), bajo las Hipótesis 2.1 y 2.4, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n = f_n^{g_n} \in \mathbb{F}$ tal que

$$V_n(x) = c_n(x, f_n) + \Delta_n \int_{\mathbb{X}} V_{n-1}(y) Q(dy|x, f_n), \quad x \in \mathbb{X}.$$

Además, por un resultado de Schäl (ver [4]), existe una política estacionaria $\{f_\infty\}$ tal que para cada $x \in \mathbb{X}$, $f_\infty(x) \in A(x)$ es un punto de acumulación de $\{f_n(x)\}$.

Teorema 4.2 (a) *Sea $\hat{\pi} = \{\hat{\pi}_n\}$ la política definida por $\hat{\pi}_n(h_n) = \hat{\pi}_n(h_n; g_n) := f_n(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ y $\hat{\pi}_0$ una acción fija. Entonces, bajo las Hipótesis 2.1-2.4, $\hat{\pi}$ es asintóticamente descontada óptima, es decir,*

$$E_x^{\hat{\pi}} \Phi(x_n, a_n) \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

(b) *Además, la política estacionaria $\{f_\infty\}$ es óptima para el modelo SM.*

Demostración. Puede ser consultada en [2], p.467-468. ■

Bibliografía

[1] Dynkin E.B., Yushkevich A.A. (1979) *Controlled Markov Processes*. Springer-Verlag, New York.

[2] Luque-Vásquez F., Minjárez-Sosa J.A. (2005) *Semi-Markov control processes with unknown holding times distribution under a discounted criterion*. Math. Meth. Oper. Res. 61: 455-468.

[3] Rosas Rosas L.C. (2006) *Procesos de Control Semi-Markovianos con Distribución del Tiempo de Permanencia Desconocida*. Tesis de Maestría. Universidad de Sonora.

[4] Schäl M. (1975) *Conditions for optimality and for the limit of n-stage optimal policies to be optimal*. Z. Wahrs. Verw. Gerb. 32: 179-196.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México.
Mosaicos Matemáticos 27, Marzo, 2008, pp. 147-154.

UN ESTUDIO SOBRE LA PARÁBOLA: EL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL QUE SE PROMUEVE EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Patricia Sáenz A., Manuel A. Urrea B.

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

email: psarmenfariz@hotmail.com; maurr@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En el presente trabajo se pretende analizar el significado institucional de referencia que se promueve en el nivel medio superior en el estudio de la parábola, dentro de la asignatura de Geometría Analítica, a partir de la revisión sistemática de los programas de estudio, los textos, las actividades con las que trabaja el profesor en el salón de clase, el tipo de problemas propuestos para los estudiantes y los recursos didácticos que pone a disposición del profesor y del estudiante cada institución; además, identificar los elementos que orientan a la Geometría Analítica hacia el Cálculo. En este trabajo se toma como marco de referencia el enfoque Ontosemiótico de Juan Díaz Godino.

1 Introducción

Dentro de las matemáticas existen ramas con un propósito específico propio de la disciplina y que a su vez sustentan a otras ramas e incluso a otras disciplinas, tal es el caso de la Geometría Analítica. Poseer una buena fundamentación de conocimientos en esta asignatura es de gran valor en los estudios posteriores de matemáticas, así como también en la relación con las demás áreas y/o asignaturas de las ciencias exactas. Es por ello que, de acuerdo a estudios realizados por grupos interesados en la enseñanza y/o aprendizaje de las Matemáticas, se ha considerado que la Geometría Analítica debe ser incluida en la enseñanza media superior, ya que una base de conocimientos sustentados tanto en ésta como en el álgebra, permite una mejor comprensión del Cálculo Diferencial e Integral.

Los programas de estudio de la Geometría Analítica en los diferentes subsistemas del nivel medio superior comprenden el estudio de la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola, además de otros temas estrechamente relacionados como son la ecuación general de segundo grado y la transformación de coordenadas. En este trabajo de investigación nos enfocaremos a la parábola debido, entre otras cosas, a su aplicabilidad en una gran variedad de situaciones cercanas a los jóvenes y con las cuales pueden estar familiarizados por sus estudios previos de física, geometría y álgebra, tal es el caso de movimiento parabólico, cálculo de áreas y ecuaciones de segundo grado, por mencionar algunos ejemplos.

2 Justificación

Estamos inmersos en un mundo global, donde existen factores importantes que están incidiendo en el sistema educativo actual, tales como el uso de tecnología en el aula, las teorías psicológicas del aprendizaje, las nuevas visiones pedagógicas en general y de la Didáctica de las Matemáticas en particular, que hace que el discurso y quehacer docente se vean obligados a transformarse. Por lo anterior, discurro que la actividad educativa no debe limitarse a una visión local enfocada a

impartir un curso aislado del resto del currículo o donde la meta del alumno se convierta solamente en aprobar un curso carente de significado o en alguna ocasiones considerado intrascendente, por el contrario, las funciones del docente y del estudiante deben virar hacia una visión más globalizada acorde a los tiempos actuales.

Esto propicia la necesidad de hacer investigaciones encaminadas a analizar qué es lo que se pretende enseñar a los estudiantes y de qué manera esto encaja en la continuidad del currículo del Matemáticas del nivel medio superior.

Particularmente como Investigadores en Matemática Educativa, nos interesa analizar cómo se está haciendo el tratamiento de las matemáticas en este mismo contexto, además de indagar si las visiones didácticas de vanguardia mencionadas anteriormente, están siendo incorporadas y de qué forma se ha logrado su incorporación a los contextos social, cultural y formativo en los que incide la asignatura.

Concretamente y atendiendo a la integración, en este trabajo se pretende analizar la manera en que se propicia la vinculación de dos importantes ramas de las matemáticas, como son la Geometría Analítica y el Cálculo. Sabemos que el estudio de la Geometría Analítica permite iniciar a los alumnos en el uso del método analítico en la solución de problemas geométricos, esto es importante en Cálculo, ya que lo que ahí se estudia es la variación y los problemas de variación pueden ser modelados a través de representaciones gráficas o analíticas, de ahí la importancia de la Geometría Analítica.

Por lo anterior, el hecho de que los alumnos lleguen al curso de Cálculo Diferencial e Integral con la experiencia de haber trabajado con situaciones en las que tiene la necesidad de representar analíticamente las gráficas o a asociar las expresiones analíticas con una representación geométrica, que es uno de los objetivos del curso de Geometría Analítica, podría ser especialmente benéfico para que logre el enriquecimiento de los conceptos e ideas que se pretenden desarrollar en dicho curso.

Un aspecto importante que queda por responder es si se logra que los estudiantes del nivel medio superior alcancen el nivel de desarrollo esperado en el curso de Geometría Analítica y cómo se logra, sobre todo si tomamos en cuenta que en Sonora cada subsistema de nivel medio superior cuenta con su propio programa de estudio y que cada profesor hace los ajustes que considera pertinentes, de acuerdo a su propia experiencia y conocimientos.

Para la Matemática Educativa tanto los elementos de aprendizaje como los de enseñanza son de suma importancia, ambos aspectos por sí mismos representan un amplio campo de estudio e investigación, es por ello que en este trabajo se hace énfasis en el rubro de enseñanza, es decir, cómo y qué enseñamos los profesores de nivel bachillerato en la asignatura de Geometría Analítica, en particular en lo que se refiere al concepto de parábola.

3 Problema de investigación

Como lo hemos comentado en la sección de justificación, cada subsistemas del nivel medio superior del estado de Sonora tiene sus propios planes de estudio y programas en cada asignatura, se basan en diferentes libros textos, tienen sus propios objetivos a alcanzar y en este contexto los profesores hacen los ajustes que consideran pertinentes para hacer su planeación y programación particular, que además no siempre concuerda con lo que se logra impartir en el aula de clases, por todo ello nos surge la necesidad de investigar sobre:

¿Cuál es el significado institucional de referencia establecido para el estudio de la parábola en el nivel medio superior?

El significado institucional, como lo describiremos detalladamente en el marco teórico, abarca muchos elementos, por lo que es necesario desglosar la pregunta principal en varias

preguntas específicas, las cuales, al irles dando respuesta, nos ayudarán a su vez a dar respuesta a la pregunta principal, estas son:

Preguntas específicas

- ¿Cuál es el significado de la parábola declarado en los programas de estudio?
- ¿Qué tipo de problemas o incluso que tipo de recursos didácticos utiliza el profesor en el tratamiento de la parábola?
- ¿Cuál es el tratamiento que se le da en los textos al estudio de la parábola?
- ¿Qué recursos didácticos y tecnológicos pone a disposición del profesor la dependencia en la que desarrolla su actividad docente?

3 Objetivos

Los objetivos que se pretenden lograr al finalizar este trabajo de investigación son los siguientes:

- Determinar el papel que juegan los programas, los textos, las actividades con las que trabaja el profesor en el salón de clase, el tipo de problemas propuestos para los estudiantes y los recursos didácticos que pone a disposición del profesor y del estudiante cada institución para el estudio de la parábola.
- Determinar los elementos que orientan el estudio de la parábola hacia el Cálculo.

4 Marco teórico

En la investigación en Matemática Educativa existen muchas y variadas teorías acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Juan Díaz Godino hace un compendio sistematizado de la mayoría de ellas y las incorpora en su Enfoque Ontosemiótico. Dentro de este enfoque se abarcan muchos constructos, conceptos, elementos, nociones y estructuras de las cuales sólo tomamos algunos de ellos, que nos sirven de apoyo como marco teórico en la realización de esta investigación.

Los elementos del enfoque ontosemiotico que se toman en cuenta para este trabajo son:

-Objetos matemáticos, los cuales desde este enfoque se identifican como aquellos que surgen a partir de las actividades que se realizan en un cierto grupo de problemas.

- Prácticas operativas y discursivas, en este enfoque se señala ”Llamamos práctica a toda acción o manifestación (lingüística o no) realizada para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y/o problemas” [4]; es decir las prácticas son el conjunto de acciones que permiten a los alumnos enriquecer sus significados sobre el objeto de estudio y que a su vez le permite utilizar como herramienta dicho objeto. Desde esta perspectiva, a medida que se enriquece el sistema de prácticas se espera que se enriquezca el significado que el individuo ha construido, de tal suerte que el objeto que se está estudiando emerja de dichas prácticas y permita al individuo apropiarse de un significado más rico del objeto.

- Significado personal, que entenderemos como el conjunto de prácticas que una persona puede poner en juego al utilizar un objeto matemático al tratar de resolver una situación determinada, ya sea desde el punto de vista de la verbalización o desde el punto de vista operativo.

- Significado institucional, que entendemos como el conjunto de prácticas a promover para la presentación de un objeto matemático resultado del acuerdo entre un grupo de individuos (especialistas) que pertenecen a una institución y/o que trabajan para un mismo fin.

Desde la perspectiva de este trabajo, los objetos personales y sus significados se identifican en los alumnos y los institucionales en los profesores, sin embargo hacer una distinción clara entre los significados personales e institucionales del profesorado no es fácil, ya que sus objetos personales se convertirán en institucionales al estar trabajando con sus alumnos en el aula.

Profundizando un poco más en este concepto, dentro del enfoque Ontosemiótico, podemos darnos cuenta que existen cuatro tipos de significados institucionales que permiten dar cabida a los objetos personales del profesorado, estos son: el significado institucional de referencia, el significado institucional pretendido, el significado implementado y el significado institucional evaluado, [3].

En el significado de referencia se incluye los planes y programas, los textos correspondientes, los significados personales del profesorado, el material técnico y didáctico con los que cuenta la institución y el profesor, datos epistemológicos de la matemática, etc., es decir, todo aquello en lo que se basa el titular de la asignatura para planificar y preparar su clase, por lo que Font lo describe en su artículo [2] "como un constructo difícil de delimitar ya que en cierta manera está implícito en todo el proceso".

Por significado pretendido entendemos aquello que, tanto la institución como el profesor planifican como proceso de instrucción para un objeto matemático y que puede o no, estar documentado.

Lo que realmente se lleva a cabo en el aula de clases es lo que entendemos como significado implementado, que en algunas ocasiones no concuerda al cien por ciento con el significado pretendido, lo anterior influenciado por muchos factores como: las características particulares del grupo, la dinámica suscitada, la improvisación o la falta de planificación, entre otras circunstancias que pudieran presentarse.

Por último, por significado institucional evaluado concebimos aquello que es considerado para una forma de medir el avance, que incluye tanto observaciones del desempeño en clase, tareas, etc., hasta la evaluación por escrito.

Fundamentalmente en esta investigación nuestro enfoque estará dirigido hacia el significado institucional de referencia.

5 Metodología

Como parte de la metodología implementada para la elaboración de este trabajo iniciamos haciendo la revisión de material bibliográfico sobre aspectos específicos del objeto matemático a tratar, es decir, dedicamos algún tiempo a conocer más profundamente la parábola, tanto en el campo de la Geometría Analítica como en otras áreas de la matemática.

Un elemento muy importante para la elaboración de este trabajo es la revisión y análisis de los planes y programas de estudio de los diferentes subsistemas, ya que esto nos brinda una pauta del significado institucional de referencia en el nivel medio superior, los resultados de esta revisión los presentamos en el apartado de Avances del Proyecto.

Por otro lado revisamos y analizamos los reactivos correspondientes a la parábola, que fueron evaluados por el Instituto de Evaluación Educativa del Estado de Sonora al final del ciclo escolar 2006 – 2007, mismos que nos permiten explorar los significados del profesorado, ya que fueron elaborados por un grupo de docentes de los diferentes subsistemas del nivel medio superior, observando así otra perspectiva del significado institucional que se tiene del objeto en estudio.

Una parte fundamental de este trabajo es el análisis de textos y entrevistas a los profesores que imparten el curso de Geometría Analítica en distintos subsistemas, que aunado a lo señalado en los párrafos anteriores nos permitirán diseñar una secuencia didáctica, que a nuestro juicio

cumpla con los elementos indispensables para lograr una adecuada estrategia de enseñanza del concepto de parábola en este nivel de estudio.

Se pretende también hacer un análisis exploratorio de la aplicación de dicha secuencia, los resultados arrojados por ésta serán analizados para obtener las conclusiones pertinentes.

6 Avances de la investigación

6.1 Análisis de los programas de estudio

Se revisaron y analizaron los programas curriculares de los siguientes subsistemas:

Dirección General de Bachillerato
Colegio de Bachilleres
Bachilleratos Tecnológicos
Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica
Universidad de Sonora (Escuelas Incorporadas)

Haciendo un comparativo entre los planes y programas de estudio de la asignatura de Geometría Analítica de los diferentes subsistemas de nivel bachillerato podemos concluir que hay tanto coincidencias como diferencias muy marcadas entre unos y otros. A continuación mencionaremos alguna de éstas.

6.2 Coincidencias

- Casi todos los subsistemas (excepto Incorporadas a la Unison) cuentan con un programa de estudios que incluye:
  - Introducción, justificación o fundamentación, ubicación de la asignatura, índice de contenidos del programa, objetivo de la asignatura y contenido específico por unidad (Nombre de la unidad, tiempo asignado, objetivo de la unidad, objetivos específicos, sugerencias didácticas, evaluación sugerida, bibliografía recomendada)
- Unidades Temáticas coincidentes: Sistema de ejes de coordenadas, Línea Recta, Circunferencia, Parábola
- Coincidencias en el <u>objetivo general</u> de la asignatura de Geometría Analítica, ya que todos mencionan la necesidad de aplicación del conocimiento.
- Contenido dentro de la unidad de la parábola que coincide en todos los subsistemas
  - Definición de elementos.
  - Ecuaciones ordinarias .
  - Representación gráfica.
  - Ecuación general.
- En cuanto a las actividades propuestas
  - Los programas que mencionan aplicaciones lo contemplan al final de la unidad.
  - Las actividades propuestas ponen énfasis en el uso de las ecuaciones.
  - Se da prioridad al estudio de la Parábola como objeto y se minimiza como herramienta.
- La bibliografía propuesta en cada uno de los programas de estudio es muy variada, pero todos coinciden en el uso del libro de Lehmann H. Charles, Geometría Analítica, Editorial Limusa, México.

6.3 Diferencias

- La fecha de la última revisión de los programas de estudio de los diferentes subsistemas es como sigue:

	DGB	COBACH	CONALEP	B. TEC.	UNISON
Última Revisión	2005	2006	2003	2004	1976

- Además de las unidades temáticas mencionadas en las coincidencias de los programas de estudio algunos subsistemas contemplan otras como son:

	DGB	COBACH	CONALEP	B. TEC.	UNISON (Preparatorias Incorporadas)
Unidades Temáticas Diferenciadas			Elipse Hipérbola	Hipérbola Elipse Intersección entre rectas y cónicas	La elipse La hipérbola Transformación de coordenadas Secciones cónicas Ecuación general de 2°

6.4 Análisis de reactivos

Con la finalidad de explorar parte del significado institucional de referencia de la parábola solicitamos al Instituto Estatal de Evaluación Educativa del Estado de Sonora (IEEES) nos facilitara información sobre los reactivos aplicados en el ciclo escolar 2007-1 a algunos de los subsistemas del nivel medio superior.

Estos reactivos son el reflejo del trabajo de profesores que pertenecen a los diferentes subsistemas del nivel medio superior del estado de Sonora y nos brinda una muestra de sus significados, mismos que se reflejan en los reactivos.

En dicha evaluación se elaboraron dos tipos de exámenes con un total de 30 reactivos cada uno, correspondientes a Matemáticas, de los cuales 3 y 4 reactivos respectivamente fueron concernientes a la parábola, mismos que fueron analizados en su totalidad.

Para efectos de análisis los clasificamos en dos bloques que son:

- A partir de la características determinar la ecuación
- A partir de la ecuación determinar ciertas características

<u>A partir de los elementos determinar la ecuación de la curva</u>

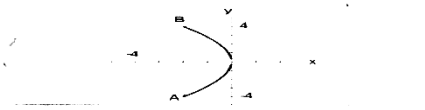
55. Determina la ecuación de la parábola con vértice en el origen y pasa por un punto A (-10, -5) que es uno de los extremos del lado recto.

A) $x^2 = 20y$ C) $y^2 = 20x$
B) $x^2 = -20y$ D) $y^2 = -20x$

55. Encuentre la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuya directriz es $x = -\frac{1}{3}$

A) $y^2 = \frac{1}{3}x$ C) $y^2 = \frac{4}{3}x$
B) $y^2 = -\frac{1}{3}x$ D) $y^2 = -\frac{4}{3}x$

56. ¿Cual de las siguientes ecuaciones describe la trayectoria parabólica de un avión del punto A al B, como se muestra en la siguiente figura?



A) $y^2 - 8x = 0$ C) $x^2 - 8y = 0$
B) $y^2 + 8x = 0$ D) $x^2 + 8y = 0$

En los dos primeros reactivos (55) se esperaría que el alumno identifique y aplique correctamente la ecuación en términos de las caracteristicas dadas.

El reactivo 56 es otro del mismo tipo que los dos anteriores, sólo que aquí brinda los elementos a través del registro gráfico y se pretende que el alumno identifique la curva con la expresión algebraica. Esto se puede lograr a través de varios caminos, por ejemplo:

- El alumno puede sustituir los puntos y sería suficiente para saber cual es la ecuación.
- El alumno identifique hacia donde abren las ramas de la parábola de acuerdo al signo de la ecuación.

En este último rectivo se muestra cómo los profesores tratan de poner “en contexto” el objeto matematico, pero resulta un contexto no apropiado, ya que la relación de los registros es completamente forzada. También podemos observar que las opciones no discriminan realmente el conocimiento, a menos que la pretención del profesor sea únicamente medir si el alumno

puede distinguir si la parábola se abre a la derecha o a la izquierda. Esto es, se pueden hacer prácticas con situaciones y problemas donde se promueva la variación a través de contextos mas reales, tales como tiro parábolico o velocidad, por mencionar algunos, o prácticas dónde saber hacia donde abre las parábolas adquiera significado, sin embargo este tipo de prácticas no se ven reflejadas en los reactivos revisados.

A partir de la ecuación de la curva determinar los elementos

54. Determina el lado recto de la parábola que tiene por ecuación $y^2 + 3x = 0$

A) 3 C) 4

B) $\frac{3}{4}$ D) 12

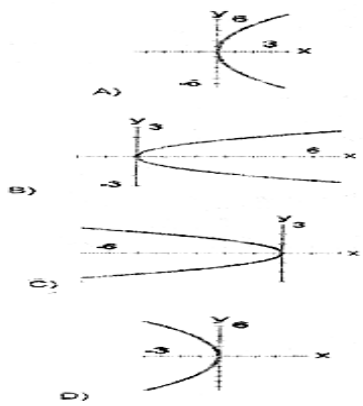
56. Dada la siguiente ecuación de parábola $x^2 - 16y = 0$ encuentra las coordenadas del foco

A) (0, 4) C) (4, 0)

B) (0, -4) D) (-4, 0)

Este otro tipo de reactivos donde el dato que se proporciona es la ecuación de la curva y se solicita encontrar los elementos que hacen que dicha expresión se cumpla, de nuevo se esperaría que el alumno recuerde la ecuación o algún otro procedimiento que le permita resolver correctamente el problema planteado.

57.- ¿Cuál es la gráfica que corresponde a la ecuación $y^2 = -12x$?



Desde nuestro punto de vista, consideramos que este tipo de reactivos es adecuado, debido a que brinda los elementos a través del registro gráfico y en muy pocas ocasiones se observan prácticas como ésta, lo anterior se puede ver reflejado en que este reactivo es el que menos aciertos tuvo (18 % contestó correctamente) por lo que fue catalogada como el primer lugar en grado de dificultad, esto nos hace sospechar que este tipo de prácticas se trabaja poco en el aula.

Por otro lado podemos observar que en este reactivo no hay valores numéricos tabulares, existe simplemente en la gráfica un indicador del foco, pero no lo aclara, esto exige mas agudeza visual y analítica por parte del estudiante.

Del análisis de reactivos de este instrumento de evalución concluimos que, hasta donde vamos, podemos identificar que el tipo de significados que se manifiestan se centran en ejercicios en los cuales dadas unas caracteristicas se identifique la ecuación y apartir de la ecuación identificar algunos de los elementos de la curva, estos dos tipos de situaciones se presentan en un alto porcentaje y en un porcentaje mucho mas pequeño se presentan situaciones en las que apartir de información dada en una gráfica se debe identificar la ecuacion correspondiente.

Por otro lado observamos que no se refleja, en este instrumento, que se estén poniendo en juego ideas en donde la parábola aparecezca como una herramienta, sino mas bien parece que se esta centrando en su comportamiento como objeto de estudio.

En cuanto a que esto sirva como una preparación al cálculo, en ninguno de los reactivos nosotros pudimos identificar aspectos en los cuales el análisis del comportamiento gráfico ponga de manifiesto la importacia que tiene el vértice (por ejemplo) para identificarlo como el valor máximo o mínimo de un problema dado, tampoco se observa una distinción entre ir viendo la parábola como una función, en el sentido de ir resaltando aspectos como que unos valores dependen de otros, etc., ejercicios de este tipo no se manifiestan al menos en el instrumento analizado y esto nos podría hacer pensar que no se trabaja como tal.

Bibliografía

[1] Acuerdo 71 por el que se determinan objetivos y contenidos del ciclo de bachillerato http://www.sep.gob.mx/work/appsite/asuntosjuridicos/6204.pdf

[2] Font, V. *La dimensión dual «personal / institucional» y el problema del encaje de los objetos personales del profesorado en la teoría de la Funciones Semióticas*. Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas. España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

[3] Godino, J.: 2003. *Teoría de las funciones semióticas: un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*, Didáctica de la Matemática Universidad de Granada, España.

[4] Godino, Juan; Batanero, Carmen.: 1994. *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14, nº 3, pp. 325-355

[5] Planes y programas de estudio de Dirección General de Bachilleratos – SEP http://www.cobach.edu.mx/programasPDF/3erSemestre/Matematicas3.pdf

[6] Programa de estudio de las Carreras de Profesional Técnico Bachiller. Matemáticas III: Geometría Analítica. Reforma 2003.

Memorias de la XVIII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 27, Marzo, 2008, pp. 155–161.

INTRODUCCIÓN A LA SOLUCIÓN SIMBÓLICA DE ECUACIONES INTEGRALES

Inna Shingareva, Carlos Lizárraga Celaya

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

e-mail: inna@fisica.uson.mx; carlos@fisica.uson.mx

Resumen

El presente trabajo es una introducción a la construcción de soluciones analíticas de ecuaciones integrales mediante los sistemas de álgebra computacional. Se aplican los métodos analíticos para obtener soluciones simbólicas (soluciones exactas y analíticas aproximadas) de varias clases de ecuaciones integrales. Se obtienen soluciones simbólicas de ecuaciones integrales que surgen en varias áreas de la ciencia, entre ellas, la física matemática, ecología y demografía matemática. Se consideran las transformadas integrales que son los primeros problemas asociados a las ecuaciones integrales y los problemas de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y no lineales. Se resuelve la ecuación integral de Lotka–Volterra, que describe la dinámica de una población. Se utilizan los sistemas de álgebra computacional Maple y Mathematica.

1 Introducción. Conceptos básicos

Las ecuaciones integrales, donde una función desconocida se encuentra dentro del signo de integral, surgen en los problemas de varios áreas de la ciencia y numerosas aplicaciones, por ejemplo, en los problemas de física matemática, mecánica de fluidos, teoría de elasticidad, biomecánica, ecología matemática, demografía matemática, economía, medicina, teoría de control, entre otros.

Siguiendo el enfoque analítico, [2], [3], [4], [5], en este trabajo mostramos cómo obtener soluciones simbólicas (soluciones exactas y analíticas aproximadas) de ecuaciones integrales que surgen en varias áreas de la ciencia y que pertenecen a varias clases de ecuaciones integrales. Utilizaremos los sistemas de álgebra simbólica, *Maple* y *Mathematica*. Estos sistemas son dos de las herramientas que más se utilizan en investigación y educación en el mundo por estudiantes, matemáticos, científicos, e ingenieros. En *Maple* y *Mathematica*, no existen funciones predefinidas para encontrar soluciones exactas, analíticas aproximadas o numéricas de ecuaciones integrales. Puesto que *Maple* y *Mathematica* son herramientas centrales para la investigación analítica en diversas áreas de las matemáticas y ciencias, se plantea la necesidad de desarrollar nuevos algoritmos matemáticos en esta rama de las Matemáticas apoyados en los sistemas de álgebra simbólica. Nuestro trabajo es una aportación a la solución simbólica de ecuaciones integrales.

Las ecuaciones integrales se pueden dividir en dos clases principales: ecuaciones integrales lineales y no lineales. En general, las ecuaciones integrales lineales se pueden escribir como sigue:

$$\beta f(x) + \int_D K(x,t) f(t)\, dt = g(x), \quad x \in D, \tag{1}$$

donde $f(x)$ es una función desconocida; β (el coeficiente), $K(x,t)$ (el núcleo), $g(x)$ (el término libre o el lado derecho de la ecuación integral) son funciones dadas de la ecuación integral; D es un dominio acotado o no acotado en un espacio euclidiano de dimensión finita, x y t son puntos de este espacio, y dt es el elemento del volumen. Se requiere determinar $f(x)$ tal que la Ec.(1) es válida para todo (o casi todo, si la integral se calcula en el sentido de Lebesgue) $x \in D$. Si $g(x) \equiv 0$, entonces la ecuación integral se llama homogénea, de no ser así, se llama no homogénea.

Existen tres tipos distintos de ecuaciones integrales lineales, dependiendo del coeficiente β:

(i) $\beta = 0$ para todo $x \in D$, Ec. (1) se llama una ecuación de primer tipo;

(ii) $\beta \neq 0$ para todo $x \in D$, una ecuación de segundo tipo;

(iii) $\beta = 0$ en algún subconjunto no vacío S de D ($S \subset D$), una ecuación de tercer tipo.

Consideramos las ecuaciones integrales lineales más importantes de primer y segundo tipo en el caso unidimensional con límites de integración variables y constantes, respectivamente:

$$\beta f(x) - \lambda \int_a^x K(x,t) f(t)\, dt = g(x), \;\; K(x,t) \equiv 0, \;\; t > x, \tag{2}$$

$$\beta f(x) - \lambda \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt = g(x), \tag{3}$$

donde $x \in [a,b]$, λ es el parámetro de ecuaciones integrales.

Si los núcleos y los lados derechos de las ecuaciones integrales satisfacen condiciones especiales, entonces las ecuaciones integrales (2) y (3) se llaman, respectivamente, ecuaciones integrales de Volterra y de Fredholm del primer/segundo tipo. Generalmente, estas condiciones especiales son: el núcleo $K(x,t)$ es continuo o cuadrado-integrable en $\Omega = \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$, y $g(x)$ es una función continua o cuadrado-integrable en $[a,b]$. Las ecuaciones integrales de Volterra se pueden considerar como un caso especial de las ecuaciones integrales de Fredholm, con el núcleo $K(x,t)$ definido en Ω y que se anula en el triángulo $\{a \leq x < t \leq b\}$. Si una ecuación integral lineal no es de la forma (3), se dice que es una ecuación singular. En estas ecuaciones uno o ambos límites de integración es infinito o la integral debe ser entendida en el sentido del valor principal de Cauchy. Las ecuaciones de segundo tipo surgen más frecuentemente en problemas de física matemática.

Las ecuaciones integrales no lineales más importantes se pueden escribir de forma general como sigue:

$$\beta f(x) - \lambda \int_a^x K\big(x,t,f(t)\big)\, dt = g(x), \;\; K\big(x,t,f(t)\big) \equiv 0, \;\; t > x, \tag{4}$$

$$\beta f(x) - \lambda \int_a^b K\big(x,t,f(t)\big)\, dt = g(x), \tag{5}$$

donde $x \in [a,b]$.

Existen numerosos métodos analíticos para encontrar soluciones de ecuaciones integrales. En este trabajo no consideraremos todos los métodos, pero mostramos cómo obtener soluciones simbólicas de ecuaciones integrales que surgen en varias áreas de la ciencia que ya hemos mencionado y pertenecen a varias clases de ecuaciones integrales. Utilizaremos los sistemas de álgebra computacional de propósito general, *Maple* y *Mathematica*.

2 Transformadas Integrales

Es bien conocido que el primer problema que se puede asociar a las ecuaciones integrales es el problema de transformadas integrales.

Problema 2.1 Sea la integral dada

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t)\, dt, \tag{6}$$

donde $g(x)$ es una función conocida. Determinar la función $f(t)$. La solución de este problema es bien conocida y fué obtenida por Fourier (en 1811) en la forma: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} g(x)\, dx$. En otras palabras, la última fórmula es la solución de la ecuación integral Ec.(6) y estas fórmulas se llaman transformadas integrales de Fourier.

En *Maple*, las transformadas integrales (de Fourier, Hilbert, Laplace, Mellin) se pueden estudiar con el paquete `inttrans`, y las *transformadas integrales de Fourier* se definen con las funciones `fourier`, `invfourier`, `fouriercos`, `fouriersin`. En *Mathematica*, las *transformadas integrales de Fourier* se definen con una familia de funciones `FourierTransform`, `InverseFourierTransform`, entre otras.

Problema 2.2 Sea la ecuación integral

$$\sqrt{2\pi} e^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt, \tag{7}$$

donde $f(t)$ es la función desconocida. El lado derecho de la ecuación se puede considerar como la transformada integral de Fourier de la función $f(t)$. De acuerdo de la transformada inversa de Fourier tenemos $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, e^{ixt}\, dx = \sqrt{\pi}\, e^{-t^2/4}$.

Soluciones con *Maple* y *Mathematica*:

```
with(inttrans); f:=x->exp(-x^2); f(x); F:=t->fourier(f(x),x,t);
F(t); plot({f(X),F(X)}, X=-Pi..Pi, color=[blue, green]);
  f[x_]:=Exp[-x^2]; g[t_]:=FourierTransform[f[x],x,t]
  g1[t_]:=FourierTransform[f[x],x,t,FourierParameters->{1,-1}]
  {f[x], g[t], g1[t]}
  Plot[Evaluate[{f[X],g1[X]}],{X,-10,10},PlotRange->
   {{-10,10},{0,2}},PlotStyle->{Hue[0.5],Hue[0.7]},AspectRatio->1];
```

Para más detalles acerca de trasformadas integrales con *Maple* y *Mathematica*, ver [6].

3 Problemas de Cauchy para EDOs

El problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de la forma

$$\frac{dx}{dt} = K\big(t, x(t)\big), \quad x(a) = x_0, \tag{8}$$

se puede reducir a ecuaciones integrales no lineales de Volterra de la forma

$$x(t) = x_0 + \int_a^t K\big(s, x(s)\big)\, ds, \quad K\big(s, x(s)\big) \equiv 0,\ t > s. \tag{9}$$

Ahora podemos formular el siguiente teorema:

Teorema 3.1 *La solución de la ecuación integral Ec.(9) es equivalente a la solución del problema de Cauchy Ec.(8).*

Demostración.

1) Sea $x = x(t)$ la solución de Ec.(8) que satisface al valor inicial $x(a) = x_0$. Si sustituimos esta solución a Ec.(8) obtenemos la identidad, luego si la integramos con respecto a t de a a t, tendremos la ecuación integral Ec.(9), es decir $x(t)$ satisface la ecuación integral Ec.(9).

2) Sea $x(t)$ la solución de la ecuación integral Ec.(9), es decir tal función que si la sustituimos en Ec.(9), obtenemos la identidad con respecto a t. Luego si diferenciamos esta identidad, obtenemos Ec.(8). Esto significa que $x(t)$ es la solución de la ecuación diferencial Ec.(8) y es obvio ver en Ec.(9) que $x(a) = x_0$. ■

Si resolvemos problemas de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales llegamos a las ecuaciones integrales de Volterra lineales de segundo tipo. Ahora construimos la ecuación integral de Volterra que corresponde a la ODE lineal.

Problema 3.1 Construir la ecuación integral de Volterra de segundo tipo que corresponde a la ecuación diferencial ordinaria lineal con coeficientes continuos $y''_{xx} + A_1(x)y'_x + A_2(x)y = F(x)$ con condiciones iniciales $y(0) = C_0$, $y'_x(0) = C_1$.

Soluciones con *Maple* y *Mathematica*:

```
a:=0; EcDif:=diff(y(x),x$2)+A1(x)*diff(y(x),x)+A2(x)*y=F(x);
CI:=[C0,C1]; Ec1:=diff(y(x),x$2)=f(x);
Ec11:=subs(_C1=CI[2],diff(y(x),x)=int(f(t),t=a..x)+_C1);
Ec2:=dsolve(Ec1, y(x)); EcSub:=Int(Int(f(x),x),x)=
     subs(n=2, 1/(n-1)!*int((x-t)^(n-1)*f(t),t=a..x));
Ec3:=subs(op(1,rhs(Ec2))=rhs(EcSub), Ec2);
Ec4:=y=rhs(subs(_C1=CI[2],_C2=CI[1],Ec3));Ec5:=subs({Ec1,Ec11,Ec4},EcDif);
EcInt:=factor(combine(isolate(Ec5,f(x)))); factor(combine(EcInt));
 {a=0, EcDif=y''[x]+A1[x]*y'[x]+A2[x]*y[x]==F[x], CI={C0,C1},fun[x_]:= f[x];}
 {Ec1=y''[x]->fun[x],Ec11=y'[x]->Integrate[fun[t],{t,a,x}]+C[2]/.{C[2]->CI[[2]]},
  Ec2=DSolve[{y''[x]==fun[x]},y[x],x],
  Ec21=Ec2/.{Ec2[[1,1,2,3]]->1/(n-1)!*Integrate[(x-t)^(n-1)*fun[t],
   {t,a,x}]/.{n->2}}, Ec3=Ec21[[1,1]]/.{C[1]->CI[[1]],C[2]->CI[[2]]},
  Ec4=EcDif/.{Ec1,Ec11,Ec3}, EcInt=Solve[Ec4,f[x]],
  EcInt[[1,1,1]]==EcInt[[1,1,2]]}
```

Para el problema de Cauchy lineal de grado dos con coeficientes continuos, y de forma general si consideramos la ecuación $y''_{xx} = f(x)$ y la integramos sucesivamente con condiciones iniciales, construimos la ecuación integral correspondiente. Finalmente obtenemos la siguiente ecuación integral de Volterra de segundo tipo:

$$f(x) = \int_0^x [-f(t)(A_1(x) + A_2(x)(x-t)]\, dt + F(x) - xA_2(x)C_1 - A_1(x)C_1 - A_2(x)C_0.$$

Para más detalles acerca de ecuaciones integrales con *Maple* y *Mathematica*, ver [6].

4 Ecuación Integral de Lotka–Volterra

El modelo de Lotka–Volterra [1] es un modelo en tiempo continuo que describe una razón de natalidad de una población. Este modelo pertenece a una clase de modelos que incluyen la estructura de edad de una población. En este trabajo consideraremos una población femenina. La ecuación integral de Lotka–Volterra que describe el modelo básico de razón de natalidad se puede definir en la forma

$$B(t) = \int_0^t B(t-x)l(x)m(x)\, dx + G(t),\ G(t) = \int_0^{\omega-t} n(x,0)\frac{l(x+t)}{l(x)}m(x+t)\, dx, t \geq 0, \quad (10)$$

donde $B(t)\, dt$ es el número de nacimientos de genero femenino en el intervalo $[t, t+dt]$; $n(x,t)\, dx$ es el número de hembras de edad $[x, x+dx]$ en el tiempo t; $l(x)$ es la probabilidad que una hembra recién nacida sobrevivirá a la edad x; $m(x)\, dx$ es el número esperado de descendientes femeninos de una hembra durante la edad $[x, x+dx]$; $g(x) = l(x)m(x)$ es la función de maternidad neta; ω es la supervivencia específica.

De acuerdo al modelo, la primera integral, $B(t)$, en Ec.(10) describe una porción de la razón de natalidad total asociada a las hembras no mayores que t (es decir, nacidas desde $t = 0$); la segunda integral, $G(t)$, es la contribución de todas las hembras ya presentes en $t = 0$. La ecuación (10) es una ecuación integral de Volterra no homogénea de segundo tipo:

$$B(t) = \int_0^t B(t-x)g(x)\, dx + G(t), \quad t \geq 0, \quad (11)$$

donde $B(t)$ es la función desconocida, y $g(x)$, $G(t)$ son las funciones conocidas.

Resolvemos la ecuación de Lotka–Volterra mediante transformada de Laplace. Si aplicamos la transformada de Laplace a Ec.(11), obtenemos la ecuación algebraica

$$\mathcal{L}[B(p)] = \mathcal{L}[B(p)]\mathcal{L}[g(p)] + \mathcal{L}[G(p)], \quad p = q + ik \in \mathbb{C},$$

y si resolvemos esta ecuación para $\mathcal{L}[B(p)]$, tenemos $\mathcal{L}[B(p)] = \mathcal{L}[G(p)]/(1-\mathcal{L}[g(p)])$. Luego podemos encontrar la forma general analítica de la solución

$$B(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\mathcal{L}[G(p)]}{1-\mathcal{L}[g(p)])} e^{pt}\, dp.$$

Ahora encontramos una expresión más simple para $B(t)$. Notemos que las raíces del denominador $1-\mathcal{L}[g(p)]$ o de la ecuación $\int_\alpha^\beta e^{-pt}g(t)\,dt = 1$ coinciden con las raíces de la ecuación de Euler–Lotka $\int_0^\infty e^{-pt}g(t)\,dt = 1$. Notemos que las constantes α y β son, respectivamente, la edad mínima y máxima en reproducción de la función de maternidad $m(x)$.

Es bien conocido que la ecuación de Euler–Lotka tiene una raíz real r_0 y el resto de las otras raíces ocurren como pares de complejos conjugados $r_j = a_j \pm ib_j$ $(j = 1, \ldots \infty)$; la raíz real domina todas raíces complejas $(r_0 > \Re(r_j))$. Se supone que todas estas raíces son simples. Por lo tanto podemos descomponer $\mathcal{L}[B(p)]$ en una suma de fracciones parciales en términos de las raíces de la ecuación de Euler–Lotka:

$$\mathcal{L}[B(p)] = \frac{\mathcal{L}[G(p)]}{1-\mathcal{L}[g(p)]} = \frac{A_0}{p-r_0} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j}{p-r_j}.$$

Ahora podemos determinar la solución final del problema

$$B(t) = A_0 e^{r_0 t} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j e^{r_j t}, \quad t \geq 0,$$

donde los coeficientes desconocidos A_0 y A_j se pueden determinar como sigue:

$$A_0 = \lim_{p\to r_0} \frac{(p-r_0)\mathcal{L}[G(p)]}{1-\mathcal{L}[g(p)]} = \left.\frac{\mathcal{L}[G(p)]}{-d\mathcal{L}[g(p)]/dp}\right|_{p=r_0} = \frac{\int_0^\beta e^{-r_0 t}G(t)\,dt}{\int_\alpha^\beta a e^{-r_0 x} g(x)\,dx}, \tag{12}$$

$$A_j = \lim_{p\to r_j} \frac{(p-r_j)\mathcal{L}[G(p)]}{1-\mathcal{L}[g(p)]} = \left.\frac{\mathcal{L}[G(p)]}{-d\mathcal{L}[g(p)]/dp}\right|_{p=r_j} = \frac{\int_0^\beta e^{-r_j t}G(t)\,dt}{\int_\alpha^\beta a e^{-r_j x} g(x)\,dx}. \tag{13}$$

Problema 4.1 Para la ecuación de Lotka–Volterra $B(t) = \displaystyle\int_0^t B(x)(x-t)\,dx + e^t$ $(t \geq 0)$ encontrar la solución exacta.

Soluciones con *Maple* y *Mathematica*:

```
with(inttrans): lambda:=1; a:=0; G:=t->exp(t); K:=(x,t)->x-t;
laplace(G(t),t,p); laplace(K(x,t),t,p); laplace(B(t),t,p);
Ec1:=B(t)-lambda*int(K(x,t)*B(x),x=a..t)=G(t);Ec1_L:=laplace(Ec1,t,p);
Sol:=factor(solve(subs(laplace(B(t),t,p)=F(p),Ec1_L), F(p)));
B:=t->invlaplace(Sol,p,t);B(t);B1:=convert(Ec1,exp);plot(B(t),t=0..10);
  G[t_]:=Exp[t]; K[x_,t_]:=x-t; {lambda=1,a=0}
  Ec1=B[t]-lambda*Integrate[K[x,t]*B[x],{x,a,t}]==G[t];
  {LaplaceTransform[G[t],t,p],LaplaceTransform[K[x,t],t,p],
   LaplaceTransform[B[t],t,p]}
  Ec1Lap=LaplaceTransform[Ec1,t,p]/.{LaplaceTransform[B[t],t,p]->F[p]}
  Sol=Solve[Expand[Ec1Lap],F[p]]
  InvLap=Map[InverseLaplaceTransform[#,p,T]&,Sol,{3}]
  B1[x1_]:=InvLap[[1,1,2]]/.{T->x1}; B1[t]
  B1[t]-lambda*Integrate[K[x,t]*B1[x],{x,a,t}]==G[t]//FullSimplify
  Plot[B1[t],{t,0,10},PlotStyle->{Blue,Thickness[0.015]},Frame->True];
```

Finalmente obtenemos la solución exacta $B(t) = (e^t + \cos t + \operatorname{sen} t)/2$ que describe el crecimiento de una población.

5 Conclusiones

Es conocido que los sistemas de álgebra simbólica *Maple* y *Mathematica* ofrecen una primera referencia de resultados elementales (y no elementales) para las nuevas generaciones de estudiantes. Ciertamente *Maple* y *Mathematica* se han convertido en las herramientas centrales de la investigación analítica para los profesionales en diversas áreas de las matemáticas y ciencias. En el presente trabajo consideramos varios métodos analíticos para la construcción de soluciones de ecuaciones integrales lineales unidimensionales mediante *Maple* y *Mathematica*. Desarrollamos nuevos algoritmos matemáticos para obtener soluciones analíticas de un conjunto de clases de ecuaciones integrales de Volterra y Fredholm en la forma general que surgen en varias áreas de la ciencia. En particular, consideramos las transformadas integrales que son los primeros problemas asociados a las ecuaciones integrales y los problemas de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y no lineales. Resolvemos analíticamente la ecuación integral de Lotka–Volterra, que describe la dinámica de una población. Debido a su generalidad matemática, los resultados obtenidos se puede aplicar a numerosos problemas particulares en varias áreas de las matemáticas y ciencias.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias a financiamiento de CONACYT, proyecto No. 55463.

Bibliografía

[1] M. Kot, 2001 *Elements of Mathematical Ecology*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.

[2] M. Krasnov, A. Kiselev, and G. Makarenko, *Problems and Exercises in Integral Equations*, Mir Publishers, Moscow, 1971.

[3] A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov, *Handbook of Integral Equations. 2nd Edition*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton-London, 2008.

[4] A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov, *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton-London, 2006.

[5] A. D. Polyanin, *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton-London, 2002.

[6] I. Shingareva and C. Lizárraga-Celaya, *Maple and Mathematica. A Problem Solving Approach for Mathematics*, Springer, Wien-New York, 2007.

[7] I. Shingareva, C. Lizárraga-Celaya, and A. Ochoa-Ruiz, *Maple y Ondas Estacionarias. Problemas y Soluciones*, Editorial Unison, Hermosillo, México, 2006.