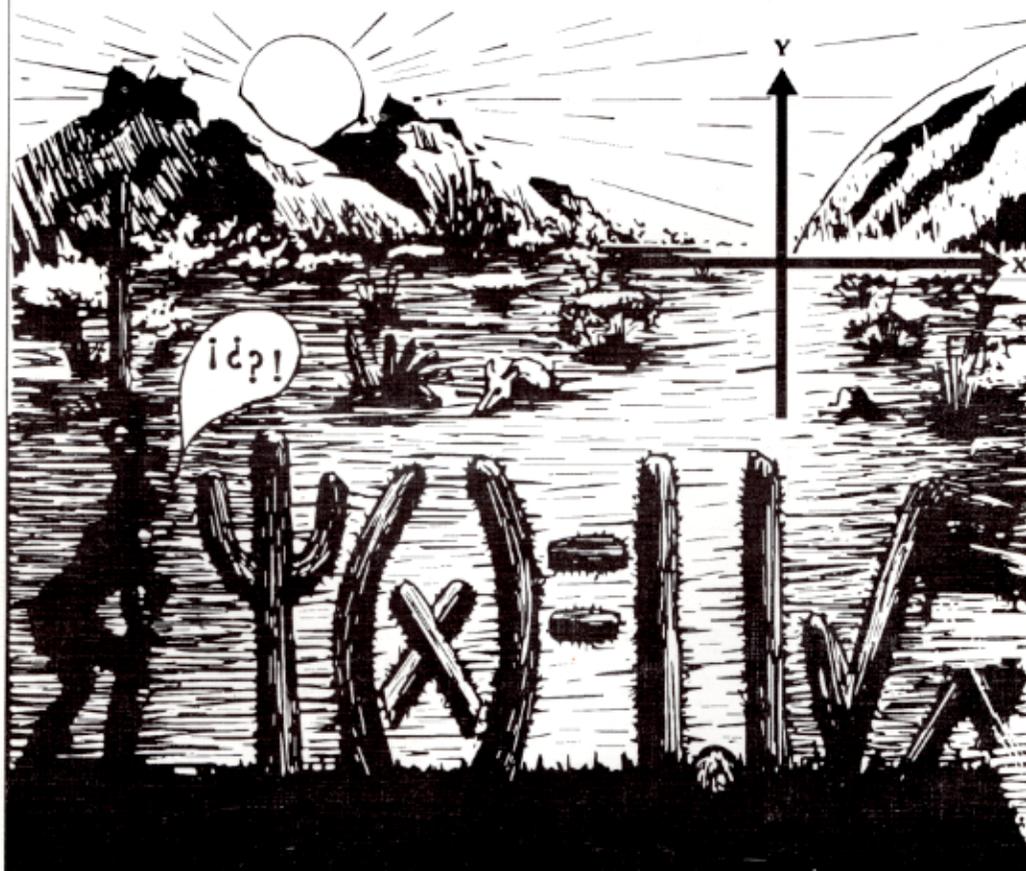


MEMORIAS
DE LA
III SEMANA REGIONAL DE INVESTIGACION Y
DOCENCIA EN MATEMATICAS



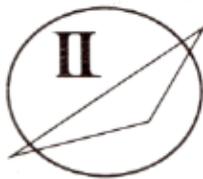
III SEMANA REGIONAL DE INVESTIGACION Y DOCENCIA EN MATEMATICAS



UNIVERSIDAD DE SONORA
DIVISION DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA
HERMOSILLO SONORA, MEXICO



25 AL 30 DE OCTUBRE DE 1992



DIRECTORIO

Institucional:

LIC. ALBERTO FLORES URBINA
Secretario de Educación y Cultura del Gobierno del Estado

MAT. MARCO ANTONIO VALENCIA ARVIZU
Rector de la Universidad de Sonora.

LIC. LUIS ALFREDO MONTAÑO LAGARDA
Director General del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

DR. FERNANDO AVILA MURILLO
Director de la División de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Sonora

M. en C. JOSE LUIS DIAZ GOMEZ
Jefe del Departamento de Matemáticas.
Universidad de Sonora

MEMORIAS
DE LA
III SEMANA REGIONAL DE INVESTIGACION Y
DOCENCIA EN MATEMATICAS

Departamento de Matemáticas
División de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Sonora
Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora
Secretaría de Educación y Cultura del Gobierno del Estado

COMITE ORGANIZADOR Y
EDITORIAL

M. en C. Eduardo Tellechea Armenta, Coordinador del evento.
M. en C. José Luis Díaz Gómez
L. M. Pedro Cota Saucedá
L. M. Eliú León Acosta, Colegio de Bachilleres de Sonora
M. en C. Jorge Ruperto Vargas Castro
M. en C. Guillermo Dávila Rascón
M. en C. José Ramón Jiménez Rodríguez
I. Q. Irma Nancy Larios Rodríguez

26 al 30 de octubre de 1992
Hermosillo, Sonora, México
50 Aniversario de la Universidad de Sonora

En el mes de julio de 1990, con motivo de la visita que realizaron a la Universidad de Sonora dos investigadores de la Unión Soviética - el *Dr. Vladimir Grigórievich Boltiánski* y su esposa la *Profesora Lilia Mijáilovna Pashkova* - se organizó la *I Semana Regional de la Investigación y Docencia en Matemática Educativa*. En esta semana los miembros del Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas de la región noroeste dictaron conjuntamente con los visitantes un total de 11 conferencias relacionadas con la enseñanza de las matemáticas.

De la experiencia de la primera reunión surge la necesidad de promover la comunicación entre los interesados por los problemas de la enseñanza de las matemáticas en la región noroeste del país. Bajo este marco se convoca a la *II Semana Regional de la Investigación y Docencia en Matemática Educativa* y se plantea en esta ocasión la posibilidad de intercambiar experiencias, ideas y trabajos en torno a la enseñanza de las matemáticas y la relación de ellas con otras ramas de la ciencia y la educación. Esta segunda reunión se llevó a cabo en el mes de julio de 1991 y se dictaron 22 conferencias y 2 talleres.

Las reuniones anteriores marcan un punto de partida para fortalecer los lazos de comunicación que se establecieron, así como la búsqueda de nuevos contactos con los profesores e investigadores de la región y la apertura de otros espacios en la que puedan expresar sus puntos de vista. Por tales motivos el Departamento de Matemáticas conjuntamente con la Secretaría de Educación y Cultura del Gobierno del Estado de Sonora y el Colegio de Bachilleres convocan a la *III Semana Regional de la Investigación y Docencia en Matemáticas* con el siguiente objetivo : " agrupar a los profesores e investigadores de Matemáticas para conocer los trabajos que se están realizando en matemática pura, aplicada y educativa en esta región del país, así como discutir sobre los problemas que plantea el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y la formación de profesores en esta ciencia".

El Comité Organizador se ha esforzado por que en esta III Reunión se logren los objetivos planteados y se avance en la dirección ya mencionada. Los artículos que

resultaron de las conferencias y cursos que se presentaron en la III Reunión han sido compilados en estas memorias y organizados de la siguiente manera.

1. Matemáticas Puras y Aplicadas.
2. Reportes de Tesis.
3. Enseñanza de las Matemáticas.
4. Cursos Cortos.

El Comité Organizador quiere, por este medio, expresar su agradecimiento al Colegio de Bachilleres de Sonora, por su apoyo para la publicación de estas memorias y a la Secretaría de Educación y Cultura del Gobierno del Estado de Sonora por su apoyo para la impresión de los diplomas.

Por este medio, también expresamos nuestro agradecimiento a todas aquellas instituciones y personas que brindaron su apoyo para la realización de este evento.

*Por el Comité Organizador
M. C. José Luis Díaz Gómez
Jefe del Departamento de Matemáticas
División de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Sonora.
Hermosillo, Sonora, México, 1992*

INDICE

I. PROGRAMA DE ACTIVIDADES	7
II. MATEMATICAS PURAS Y APLICADAS	
Complejidad computacional de algoritmos M. I. O. Joaquín Humberto López Borbón Departamento de Matemáticas Universidad de Sonora	15
Modelación del acuífero mixto Lamberto Castro Arce, Luis Manuel Lozano Cruz, Oscar Rubén Gómez A., Alfredo Mendoza M., Rosa A. Vázquez C. Unidad Regional Sur (Navojoa) Universidad de Sonora	19
Determinación de la combinación óptima económica de los niveles de dos factores de la producción (N y P) utilizando superficies de respuesta Ing. Juan J. García O. Departamento de Matemáticas Instituto Tecnológico de Sonora L. M. Oscar R. Gómez A. Departamento de Matemáticas Unidad Regional Sur (Navojoa) Universidad de Sonora	24
Estimación y control de sistemas estocásticos Dr. Onésimo Hernández Lerma Departamento de Matemáticas CINVESTAV - IPN	29
La teoría especial de la relatividad y el álgebra lineal P. M. C. Oscar Mario Rodríguez Sánchez Departamento de Matemáticas Universidad de Sonora	33
III. REPORTE DE TESIS	
Optimización en redes de flujo con costos cóncavos M. I. O. Joaquín Humberto López Borbón Departamento de Matemáticas Universidad de Sonora	39

IV. ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

- Versión en Turbo BASIC del modelo matricial dinámico en variables de estado para un sistema ecológico de cría de peces 44
M. en C. José G. Mares Martínez
Departamento de Ciencias Químico-Biológicas
M. en C. Osvaldo Landavazo Gracia
Departamento de Ingeniería Química y Metalurgia
Universidad de Sonora
- Notas de Cálculo Diferencial e Integral I 48
L. M. Agustín Grijalva Monteverde
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
- Acerca de la formación metodológica de los profesores de Matemáticas 52
M. en C. José Ramón Jiménez Rodríguez
Departamento de Matemáticas
Programa de Maestría en Matemática Educativa
Universidad de Sonora
Valéri Aleksándrovich Gúsiev
Cátedra de Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas
Instituto Pedagógico Estatal de Moscú (Rusia)
- Uso de la calculadora para la resolución de ecuaciones diferenciales aplicando los métodos de Runge-Kutta 57
L. M. Agustín Grijalva Monteverde
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
- Trigonometría con regla y compás 62
P. L. M. Oscar San Martín Sicre
Unidad 261 (Hermosillo)
Unidad Pedagógica Nacional
- La habilidad computacional, ¿qué es? 68
M. en C. José Ramón Jiménez Rodríguez
Departamento de Matemáticas
Programa de Maestría en Matemática Educativa
Universidad de Sonora
- La computadora en la enseñanza de las Matemáticas: dos aplicaciones con LOGO 74
M. C. José Luis Díaz Gómez
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Transformaciones geométricas a través del doblado de papel P. M. C. Gerardo Calderón Ayala Centro de Estudios Superiores del Estado de Sonora	81
El Precálculo: su inserción en la currícula matemática del bachillerato y su posible reformulación M. C. José Luis Soto Munguía Departamento de Matemáticas Universidad de Sonora	88
Situación académica en Matemáticas de los estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad de Sonora M. C. Enrique Hugues Galindo Departamento de Matemáticas Universidad de Sonora	94
V. CURSOS CORTOS	
Introducción a la Topología M. en C. Carlos A. Robles Corbalá Departamento de Matemáticas Universidad de Sonora	100
Teorema de clasificación de superficies Gabriela Gpe. Hinojosa Palafox Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas Universidad de Sonora	103
Algoritmos de flujo en redes Myriam Cisneros Molina Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas Universidad de Sonora	106
Estructura de datos Edelmira Rodríguez Alcántar Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas Universidad de Sonora	112
Kruskal Edelmira Rodríguez Alcántar Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas Universidad de Sonora	118
Problemas de ruta mínima: Dijkstra Irene Rodríguez Castillo Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas Universidad de Sonora	121

Problemas de ruta mínima: Floyd Miguel Angel Norzagaray Cosío Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas Universidad de Sonora	124
Teoría de homología y ecuaciones de Yang-Mills Dr. Marcelo Aguilar Instituto de Matemáticas, UNAM	127
Enseñanza de la simetría y la congruencia. M. C. Jorge Ruperto Vargas Castro. Coordinador del Programa de Maestría en Matemática Educativa Departamento de Matemáticas Universidad de Sonora.	132

III SEMANA REGIONAL DE INVESTIGACION Y DOCENCIA EN MATEMATICAS
PROGRAMA

LUNES 26 DE OCTUBRE

10:00 - 10:50 Inauguración. Auditorio del Departamento de Matemáticas. Edificio 9L

11:00 - 11:50 Acerca de la formación metodológica de los profesores de Matemáticas

M. en C. José Ramón Jiménez Rodríguez

Departamento de Matemáticas

Programa de Maestría en Matemática Educativa

Dr. Valéri Aleksándrovich Gúsiev

Cátedra de Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas

Instituto Pedagógico Estatal de Moscú

Nivel General

Caracterización del sistema de habilidades metodológicas que debe dominar el profesor de Matemáticas, y análisis de las vías posibles para su formación

12:00 - 12:50 Modelos matemáticos de evolución molecular I

Dr. Pedro Miramontes

Facultad de Matemáticas. UNAM

Nivel Superior

(Conferencia por invitación)

16:00 - 16:50 Problemas de estimación y control I

Dr. Onésimo Hernández Lerma

Departamento de Matemáticas

CINVESTAV IPN

Nivel Superior

(Conferencia por invitación)

17:00 - 17:50 Perturbación vs. invariancia

M. En C. Horacio Leyva Castellanos

Coordinador del Programa de la Licenciatura en Matemáticas

Departamento de Matemáticas, UNISON

Nivel Superior

Se analiza la invariancia de una variedad $M \subset \mathbb{R}^n$ bajo un sistema dinámico $x' = F(x)$, los principales resultados sobre la persistencia de la invariancia de M bajo el sistema perturbado $x' = F(x) + g(x)$, y un método de diseño de sistemas robustos en la teoría de sistemas de estructura variable

18:00 - 18:50 Trigonometría con regla y compás

Mat. Oscar San Martín Sicre

Unidad 261 (Hermosillo), Universidad Pedagógica Nacional

Nivel Medio Básico y Medio Superior

Enfoque didáctico activo con regla y compás para el tratamiento de algunos contenidos de la Trigonometría elemental

19:00 - 19:50 Un modelo para la diagénesis del azufre
Dr. Fernando Avila Murillo
Director de la División de Ciencias Exactas y Naturales
Nivel Superior
UNISON

MARTES 27 DE OCTUBRE

9:00 - 9:50 La habilidad computacional, ¿qué es?
M. en C. José Ramón Jiménez Rodríguez
Departamento de Matemáticas
Programa de Maestría en Matemática Educativa. UNISON
Niveles Medio Superior y Superior
Caracterización de la habilidad computacional en ejemplos concretos

10:00 - 10:50 Análisis dimensional y aplicaciones
M. en C. Guillermo Dávila Rascón
Departamento de Matemáticas, UNISON
Nivel Superior
Se establecen los principios del Análisis Dimensional y se prueba el teorema Pi de Buckingham. Se muestra cómo las técnicas del análisis dimensional se aplican para resolver ecuaciones diferenciales parciales

11:00 - 11:50 Uso de la calculadora para la resolución de ecuaciones diferenciales aplicando los métodos de Runge-Kutta
L. M. Agustín Grijalva Monteverde
Departamento de Matemáticas, UNISON
Nivel Superior
Se presentan los algoritmos de Runge-Kutta y se resuelve un ejercicio usando la calculadora HP-42S por el método de Runge-Kutta de cuarto orden

12:00 - 12:50 Modelos matemáticos de evolución molecular II
Dr. Pedro Miramontes
Facultad de Matemáticas, UNAM
Nivel Superior
(Conferencia por invitación)

16:00 - 16:50 Problemas de estimación y control II
Dr. Onésimo Hernández Lerma
Departamento de Matemáticas
CINVESTAV, IPN
Nivel Superior
(Conferencia por invitación)

17:00 - 17:50 Versión en Turbo Basic del modelo matricial dinámico en variables de estado para un sistema ecológico de cría de peces

M. en C. José G. Marcos Martínez

Departamento de Ciencias Químico-Biológicas

M. en C. Osvaldo Landavazo Gracia

Departamento de Ingeniería Química

UNISON

Nivel Superior

(Conferencia por invitación)

Se presenta un versátil programa de computación, de fácil y ameno entendimiento (con gráficas, textos, color, sonido y movimiento), aplicado a las ecuaciones de un modelo matricial en variables de estado

18:00 - 18:50 La enseñanza del control estadístico del proceso, en el lugar de trabajo

L. F. Manuel Oscar Munguía Romo

ITESM Campus Sonora Norte

Nivel Superior

(Conferencia por invitación)

Experiencias profesionales y docentes en torno al control estadístico del proceso

19:00 - 19:50 Transformaciones geométricas a través del doblado de papel

P. M. en C. Gerardo Calderón Ayala

Centro de Estudios Superiores del Estado de Sonora

Nivel Medio Superior

MIÉRCOLES 28 DE OCTUBRE

9:00 - 9:50 Modelación del acuífero mixto

Lamberto Castro A., Ing. Luis M. Lozano C., Alfredo Mendoza M., M. en C. Oscar R. Gómez A., Rosa A. Vázquez C.

Unidad Regional Sur (Navjoa), UNISON

Nivel Superior

Reporte de Investigación

Desarrollo teórico de la geometría del acuífero heterogéneo para construir un modelo que permite el control de las aguas utilizadas en dicho acuífero, localizado en el Valle del Yaqui

10:00 - 10:50 Un modelo de programación lineal para la planeación del uso conjunto de aguas superficiales y subterráneas del Valle del Yaqui, Sonora

Ing. Luis Manuel Lozano Cota, M. en C. Oscar Rubén Gómez Aldama, Lamberto Castro Arce

Unidad Regional Sur (Navjoa), UNISON

Nivel Superior

Reporte de Investigación

Modelo determinístico de programación lineal para generar políticas de operación del uso conjunto de aguas superficiales y subterráneas en un intervalo de cinco años

11:00 - 11:50 Un modelo de programación por redes para planear la operación del uso conjunto de aguas superficiales y subterráneas en el Valle del Yaqui, Sonora

M. en C. Oscar Rubén Gómez Aldama, Juan José García Ochoa,

Ing. Luis Manuel Lozano Cota, Lamberto Castro Arce

Unidad Regional Sur (Navojoa), UNISON

Nivel Superior

Reporte de investigación

12:00 - 12:50 Notas de clase de Cálculo Diferencial e Integral I

L. M. Agustín Grijalva Monteverde

Departamento de Matemáticas, UNISON

Nivel Superior

Se analizan los motivos que hacen necesaria la elaboración de notas de clase y se describen las del título

16:00 - 16:50 Situación académica en Matemáticas de los estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad de Sonora

M. en C. Enrique Hugues Galindo

Departamento de Matemáticas, UNISON

Nivel Medio Superior y Superior

Reporte de investigación

Se describen los resultados de la aplicación de un diagnóstico a estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad de Sonora y algunas de las conclusiones que de él se derivan

17:00 - 17:50

18:00 - 18:50 Determinación de la combinación óptima económica de los niveles de dos factores de la producción (N y P) utilizando superficies de respuesta

Juan José García Ochoa, M. en C. Oscar Rubén Gómez Aldama

ITSON, UNISON

Nivel Superior

Reporte de investigación

19:00 - 19:50 Reflexiones en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística elemental

Dr. Juan Enrique Ramos Salas

ITESM Campus Sonora Norte

Nivel Superior

(Conferencia por invitación)

Estudio comparativo de la enseñanza de la Estadística elemental bajo diferentes metodologías, y reflexiones en torno a los resultados obtenidos

JUEVES 29 DE OCTUBRE

9:00 - 9:50 **Calidad: una cultura necesaria en las empresas y en la educación en México**
M. en C. Oscar Rubén Gómez Aldama
Unidad Regional Sur (Navojoa), UNISON
Nivel Superior

10:00 - 10:50 **Un método general para graduar el volumen de tanques cilíndricos con tapas circulares, cuyo eje centroidal longitudinal forma un ángulo θ con la horizontal**
Lamberto Castro Arce, Ing. Luis M. Lozano C., M. en C. Oscar Rubén Gómez A., Rosa A. Vázquez C., Alfredo Mendoza M.
Unidad Regional Sur (Navojoa), UNISON
Nivel Superior
Reporte de investigación
Uso de la Geometría Analítica, el Cálculo Diferencial e Integral, el Análisis Numérico y la Programación de Computadoras para plantear y resolver las ecuaciones que determinan la relación que existe entre el nivel del líquido y el volumen ocupado dentro del recipiente

11:00 - 11:50 **Los primeros pasos para vivir en el error**
P. M. en C. Francisco Cándido García Durán
Departamento de Matemáticas, UNISON
Niveles Medio Básico, Medio Superior y Superior
Las primeras definiciones y recomendaciones para el tratamiento del error en los cálculos numéricos en calculadoras y computadoras

12:00 - 12:50 **Desarrollo histórico de las ecuaciones de Yang-Mills y sus perspectivas en Matemáticas**
Dr. Marcelo Aguilar González
Instituto de Matemáticas, UNAM
(Conferencia por invitación)

16:00 - 16:50 **El Precálculo: su inserción en la currícula matemática del bachillerato y su posible reformulación**
M. en C. José Luis Soto Munguía
Departamento de Matemáticas, UNISON
Nivel Medio Superior y Superior
Reporte de Tesis

17:00 - 17:50 **Vectores, formas diferenciales y el Teorema Fundamental del Cálculo en varias variables**
M. en C. Jacobo Guadalupe Núñez Urías
Departamento de Matemáticas, UNISON
Nivel Superior
Se hace una analogía entre el Álgebra Vectorial con las formas diferenciales, para presentar el Teorema de Green, el Teorema de Stokes y el Teorema de Gauss como expresiones del Teorema Fundamental del Cálculo en varias variables en el lenguaje de las formas diferenciales

18:00 - 18:50 La teoría especial de la relatividad y el álgebra lineal

P. M. en C. Oscar Mario Rodríguez Sánchez

Departamento de Matemáticas, UNISON

Nivel Superior

Los resultados del experimento clásico de Michelson y Morley (1887) llevaron a la necesidad de analizar el comportamiento de sistemas en movimiento, lo que derivó en la teoría especial de la relatividad, cuya esencia se trata de analizar con los conceptos del Álgebra Lineal

19:00 - 19:50 Simetría

M. en C. Guillermo Dávila Rascón

Departamento de Matemáticas, UNISON

Nivel Superior

Se analiza el concepto de simetría de un sistema y su influencia en otras ciencias básicas como la Física, la Química y la Biología; su aplicación a la solución de ecuaciones diferenciales. Se hablará de quiralidad y rompimiento de simetría

VIERNES 30 DE OCTUBRE

9:00 - 9:50 La transformada de Laplace, ¿es algo útil?

P. M. en C. Arturo Fragozo Robles

Departamento de Matemáticas, UNISON

Nivel Superior

Se muestra la ventaja de usar la transformada de Laplace en la solución de ecuaciones diferenciales en comparación con otros métodos, y se presentan algunos problemas de aplicación

10:00 - 10:50 La computadora en la enseñanza de las matemáticas: dos aplicaciones con LOGO

M. en C. José Luis Díaz Gómez

Jefe del Departamento de Matemáticas, UNISON

Nivel Medio Superior y Superior

11:00 - 11:50 El movimiento, la Geometría descriptiva y la graficación

L. E. M. José David Fonseca Poblano

ITESM Campus Sonora Norte

Nivel Medio Superior

(Conferencia por invitación)

Experiencia didáctica en el estudio de funciones en R^3 , a partir del análisis del movimiento en tres dimensiones, utilizando la geometría descriptiva y la graficación de funciones como elementos de apoyo

12:00 - 12:50 Complejidad computacional de algoritmos

M. en C. Joaquín Humberto López Borbón

Departamento de Matemáticas, UNISON

Nivel Superior

Se analiza brevemente el esfuerzo computacional que requiere un algoritmo para encontrar la solución de un problema, centrandó la atención en la clasificación de los problemas en términos de los algoritmos que existen para resolverlos

16:00 - 16:50 Análisis exploratorio de datos
L. M. Gudelia Figueroa Preciado
Departamento de Matemáticas, UNISON
Nivel Superior

17:00 - 17:50 Optimización en redes de flujo con costos cóncavos
M. en C. Joaquín Humberto López Borbón
Departamento de Matemáticas, UNISON
Nivel Superior

Análisis de los fundamentos teóricos, descripción e implementación de un método de solución del problema de redes sin ganancia con costos cóncavos

18:00 - 18:50 La interacción o la formación matemática del profesor en educación
Dr. José Miguel Norzagaray Mendivil
Dirección General de Educación Superior

19:00 Clausura del evento

CURSOS

Desarrollo histórico de las ecuaciones de Yang-Mills y sus perspectivas en Matemáticas
Dr. Marcelo Aguilar González
Instituto de Matemáticas, UNAM

Teoría de Homología.
Dr. Marcelo Aguilar González.
Instituto de Matemáticas, UNAM.

Elementos de Topología Diferencial.
P.M.C. José Luis Cisneros Molina.
Becario del Instituto de Matemáticas, UNAM.

Algoritmos heurísticos en optimización
Dr. Pedro Miramontes
UNAM

Introducción al QuickBasic, con aplicaciones en la enseñanza de las matemáticas.
M. C. Armando Cuevas Vallejo
CINVESTAV, IPN, Sección de Matemática Educativa.

Introducción al estudio de valores extremos en estadística con aplicaciones
Dr. Víctor Pérez Abreu
CIMAT

Una introducción a la Topología
M. en C. Carlos Robles Corbalá
Departamento de Matemáticas, UNISON

Elementos de Topología Diferencial
El teorema de clasificación de superficies
Est. Gabriela Hinojoza Palafox
Departamento de Matemáticas, UNISON

Algoritmos de flujos en redes
Est. Irene Rodríguez Castillo, Edelmira Rodríguez Alcántar, Myriam Cisneros Molina,
Miguel Angel Norzagaray Cosío
Departamento de Matemáticas, UNISON

TALLERES

La enseñanza de la simetría y de la congruencia
M. en C. Jorge Ruperto Vargas Castro
Coordinador del Programa de la Maestría en Matemática Educativa
Departamento de Matemáticas, UNISON

Teoría de fractales y su posible correlación con el Análisis Infinitesimal
M. en C. Jorge Ruperto Vargas Castro
Coordinador del Programa de la Maestría en Matemática Educativa
Departamento de Matemáticas, UNISON

COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DE ALGORITMOS

M. I. O. JOAQUIN HUMBERTO LOPEZ BORBON. UNIVERSIDAD DE SONORA

RESUMEN.-En esta conferencia, se analizará brevemente el esfuerzo computacional que requiere un algoritmo para encontrar la solución de un problema, centrandose especial atención en la clasificación de dichos problemas en términos de los algoritmos que existen para su solución, además, se definirán algunos conceptos de importancia, tales como: Problema, algoritmo, eficiencia, tiempo de ejecución, orden de un algoritmo, la clase P y la clase NP-completa.

INTRODUCCION

El enfoque clásico para estudiar un problema de optimización es obtener aquellas propiedades, cualitativas o cuantitativas, que lleven a uno o varios procedimientos eficientes para implementarlos en una computadora y obtener su solución. En este enfoque es de suma importancia conocer el tiempo que tardará un procedimiento para encontrar la solución de un problema, ya que no es igual esperar unos cuantos segundos o menos, que tener que esperar horas, días o quizá más tiempo para saber la solución del problema. Otro aspecto importante es conocer el comportamiento del algoritmo cuando el tamaño del problema crece; se puede tener un procedimiento que resulte adecuado para resolver problemas pequeños o medianos, sin embargo, el procedimiento puede resultar impropio cuando el tamaño del problema es grande.

CONCEPTOS BASICOS

PROBLEMA.- Un problema es una pregunta general. Usualmente posee varios parámetros o variables libres, cuyos valores al ser especificados, constituyen una INSTANCIA del problema. Un problema se define dando:

- i) Una descripción general de sus parámetros.
- ii) Estableciendo las propiedades que se requieren en la solución.

ALGORITMO.- Un algoritmo es en general un procedimiento paso a paso, para resolver un problema. Se dice que un algoritmo resuelve un problema si para toda instancia produce solución.

EFICIENCIA.- La eficiencia de un algoritmo puede ser medida en términos del espacio de memoria utilizada durante su ejecución, ó bien en términos del tiempo de ejecución. Aquí se analizará la eficiencia en términos del tiempo de ejecución.

TIEMPO DE EJECUCION.- Este es directamente proporcional al número de operaciones básicas elementales que el ordenador debe realizar, que depende del tamaño de la instancia del problema. Es decir, el tiempo de ejecución es una función $f(n)$ donde n es el número de datos de entrada que describen la

instancia del problema. Por ejemplo, en problema de redes n es el número de nodos o de arcos.

Debido a que un algoritmo puede presentar serias dificultades cuando el tamaño de la entrada (la instancia del problema) aumenta considerablemente y debido a que en ocasiones el cálculo exacto del número de operaciones elementales es complicado basta con conocer el comportamiento asintótico de $f(n)$ cuando n es suficientemente grande.

ORDEN DE UNA FUNCION.- Una función $f(n)$ se dice de orden $g(n)$ denotada $O(g(n))$ si existe una constante c tal que $|f(n)| \leq c|g(n)| \forall n \geq 1$.

ORDEN DE UN ALGORITMO.- Se dice que un algoritmo es de orden polinomial si es $O(P(n))$ donde $P(n)$ es un polinomio en n , si no es de orden polinomial se dirá que es de orden exponencial.

La diferencia entre algoritmos de orden polinomial y exponencial se manifiesta al dar solución a problemas de gran instancia, como lo ilustra la siguiente tabla, en la cual se considera que una operación elemental es realizada en un microsegundo

orden	tamaño de la instancia					
	10	20	30	40	50	60
n	.00001 seg.	.00002 seg.	.00003 seg.	.00004 seg.	.00005 seg.	.00006 seg.
n^2	.0001 seg.	.0004 seg.	.0009 seg.	.0016 seg.	.0025 seg.	.0036 seg.
n^5	.1 seg.	3.2 seg.	24.3 seg.	1.7 min.	5.2 min.	13 min.
2^n	.001 seg.	1 seg.	17.9 min.	12.7 dias	37.5 años	366 cent.
3^n	.059 seg.	58 min.	6.5 años	3855 cent.	2×10^8 cent.	1.3×10^{13} cent.

Puede pensarse que en una computadora el tiempo de ejecución de un algoritmo sea exponencial, mientras que en otra con más velocidad sea polinomial, lo anterior no es posible ya que está demostrado lo siguiente: "Si un algoritmo necesita tiempo exponencial para su ejecución en una máquina de Turing (la computadora más primitiva) entonces también necesita de tiempo exponencial para su ejecución en cualquier otra computadora y viceversa". En otras palabras, el tiempo de ejecución polinomial o exponencial es independiente de la computadora seleccionada.

Lo más relevante aún, es examinar como el tamaño de la instancia más grande de un problema resuelto en una hora con la computadora actual más

veloz, puede cambiar si los avances tecnológicos permiten incrementar la velocidad de dicha máquina 100 o 1000 veces.

orden	comput. actual	comput. 100 veces + vel.	comput. 1000 veces + vel.
n	$N1$	$100 N1$	$1000 N1$
n^2	$N2$	$10 N2$	$31.6 N2$
n^5	$N3$	$2.5 N3$	$3.98 N3$
2^n	$N4$	$N4 + 6.64$	$N4 + 9.97$
3^n	$N5$	$N5 + 4.19$	$N5 + 6.29$

como puede observarse con el algoritmo de $O(2^n)$ un incremento de 1000 veces en la velocidad sólo añade 10 al tamaño de la instancia, mientras que con un algoritmo de orden n^5 este tamaño a lo más es cuatriplicado.

CLASIFICACION DE LOS PROBLEMAS

De acuerdo a lo anterior los problemas pueden clasificarse de la siguiente manera:

PROBLEMAS IRRESOLUBLES.- Un problema se dice irresoluble si no existe ni existirá un algoritmo que lo resuelva.

PROBLEMAS POLINOMIALES.- Un problema pertenece a la clase P si existe un algoritmo polinomial, conocido o no, que lo resuelva.

PROBLEMAS INTRATABLES.- Un problema es intratable si no existe ni existirá un algoritmo polinomial que lo resuelva, es el complemento de la clase P.

PROBLEMAS NO DETERMINISTA POLINOMIAL (NP).- Son problemas de decisión (su solución es si ó no) que pueden ser resueltos en tiempo polinomial por algoritmos no deterministas, los cuales constan de dos estados separados: el estado de predecir y el estado de concordar. Estos algoritmos tienen la capacidad de adivinar la ruta correcta en un árbol de decisión. Por definición P \subset NP.

LA CLASE NP-COMPLETA

RELACION DE REDUCCION.- Se dice que un problema L_1 se reduce al problema L_2 , denotado $L_1 \propto L_2$, si existe una transformación que toma un tiempo polinomial en convertir L_1 en L_2 . La relación reducción es:

- i) Reflexiva $L_1 \propto L_1$
- ii) Transitiva. Si $L_1 \propto L_2$ y $L_2 \propto L_3 \Rightarrow L_1 \propto L_3$.
- iii) No necesariamente simétrica. Si $L_1 \propto L_2$ no siempre $L_2 \propto L_1$

Si la reducción resulta simétrica entonces es una clase de equivalencia y se dice que L_1 y L_2 son polinomialmente equivalentes.

Los problemas polinomiales son polinomialmente equivalentes y

constituyen la clase P que son los problemas "fáciles" en la clase NP. La clase NP-completo en NP esta constituida por los problemas "dificiles" que son polinomialmente equivalentes pero no se han encontrado algoritmos polinomiales que los resuelvan.

Una pregunta aún abierta es si $P=NP$, si un solo problema en la clase NP-completo puede ser resuelto en tiempo polinomial, entonces, $P=NP$ y si cualquier problema en la clase NP-completo es intratable entonces $P \neq NP$. Además, se ha demostrado que suponiendo $P \neq NP$ existen problemas en NP que no estan ni en P ni en NP-completo.

CONCLUSIONES

En conclusión, los problemas pequeños de la clase NP-completo pueden ser resueltos con algoritmos exponenciales, pero éstos resultan imprácticos para instancias grandes ya que el tiempo de solución crece de manera alarmante, en estos casos hay que conformarse con dar una buena solución aunque no sea la óptima.

Como el tiempo de ejecución de un algoritmo es independiente de la computadora y además los posibles aumentos en la velocidad, repercuten en poco al aumento del tamaño de la instancia en los problemas de la clase NP-completa entonces la eficiencia computacional depende sólo del algoritmo y no del tipo de computadora, por lo cual, un campo de investigación sumamente importante es crear algoritmos con orden cada vez menores para los problemas de la clase NP-completa.

BIBLIOGRAFIA

- Garey and Johnson
Computers and Intractability
W. Freeman, San Francisco, 1979.
- Johnson, Lenstra, Rinnooy.
The Complexity of the Network Desing Problem
Network, Vol.8, pg.279-285, 1978.
- Karp R.M.
"The Computational Complexity of Network Problems"
Edited by Stefan A. Burr, pg. 45-62, 1981.
- Parker R.G. and Radin R.L.
Discrete Optimization
Academic Press, Inc., 1988
- López Borbón Joaquín Humberto
Optimización en redes de flujo con costos cóncavos
Tesis de maestría, DEPMI-UNAM, 1992.

MODELACION DEL ACUIFERO MIXTO

LAMBERTO CASTRO A., LUIS M. LOZANO C., OSCAR R. GOMEZ A., ALFREDO MENDOZA M., ROSA A. VAZQUEZ C. Universidad de Sonora, Unidad Sur, Navojoa, Son.

IMPORTANCIA DE ESTE TRABAJO

Para presentar la primera sección de nuestro desarrollo es posible mencionar la gran importancia que tiene, no solo para los agricultores sino también para el público en general y generación de energía eléctrica el poder contar con agua suficiente. Es por eso que con el fin de poder modelar el sistema dinámico de aguas subterráneas localizadas en la geografía del Valle del Yaqui, como parte del proyecto "PLANEACION Y USO CONJUNTO DE AGUAS SUPERFICIALES Y SUBTERRANEAS EN EL VALLE DEL YAQUI".

En el presente trabajo se ha tomado en cuenta variables que involucra el sistema y que han pasado a formar parte del modelo que como objetivo se ha planteado.

DEFINICION DE ACUIFERO

Un Acuífero es una formación geológica que permite la circulación y el almacenamiento de agua, siendo factible su aprovechamiento en forma continua y económica. puede decirse que es una formación conjunta de formaciones o parte de ellas que contienen suficiente material permeable saturado para proporcionar cantidades significativas de agua a pozos y manantiales.

TIPOS DE ACUIFEROS EN EL VALLE DEL YAQUI

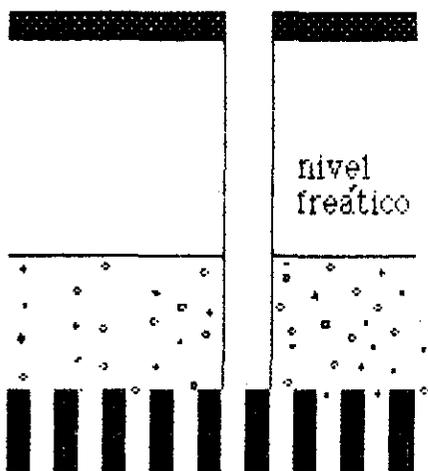
Los acuíferos se clasifican en: Libre, confinado y semiconfinado (figura 1).

ACUIFERO LIBRE: Es aquél en el que el agua subterránea tiene una superficie que se denomina nivel freático, lo que se caracteriza por estar sometida a la presión atmosférica.

ACUIFERO CONFINADO: es aquel donde el agua esta confinada a presión por formaciones confinantes o semiconfinantes suprayacentes. Los niveles piezométricos se encuentran sobre el límites superior del acuífero.

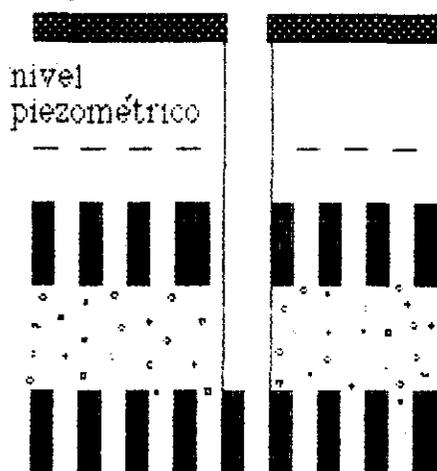
ACUIFERO SEMICONFINADO: Es aquél que esta limitado por

Superficie del terreno



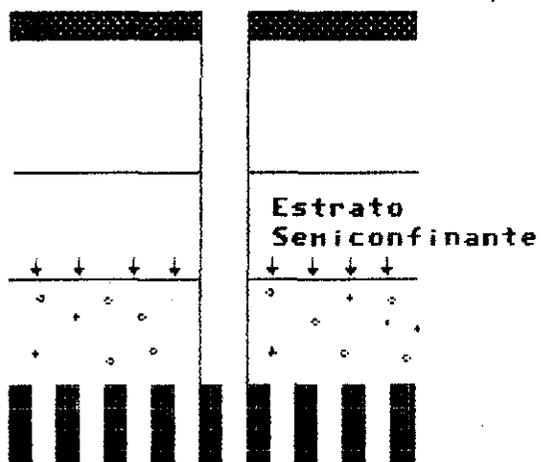
Acuífero Libre

Superficie del terreno



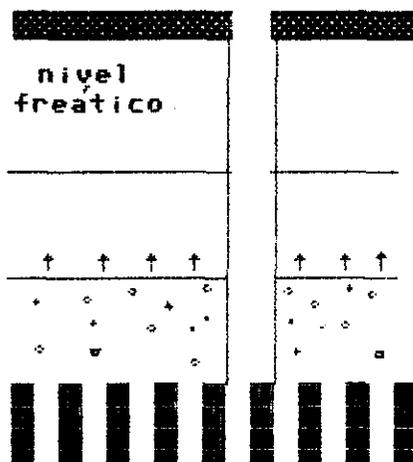
Acuífero Confinado

superficie del terreno



Impermeable

Acuífero



Impermeable

Acuífero Semiconfinado

formaciones menos permeables que el mismo, pero a través de los cuales se puede recibir o ceder volúmenes significativos de agua.

En el Valle del Yaqui el tipo de acuífero que existe es heterogéneo es decir es una combinación de los acuíferos antes mencionados.

ANÁLISIS DEL ACUÍFERO

En primer término fundamentando en el balance total de materia del sistema, se presenta que la expresión que nos muestra de manera significativa los cambios de contenido (en unidades de volumen) del acuífero esta determinada por la diferencia de entradas y salidas del fluido, dada por:

$$\frac{dV}{dt} = Q_e(t) - Q_s(t) \quad 1)$$

en donde los términos involucrados pueden ser presentados tomando en cuenta expresiones de cualquier tipo, ya sea valores constantes o incluso aquellas que tengan dependencia del tiempo, casos que resultarían mucho más complicados. Sin embargo es posible considerar nuestro problema utilizando las variables que involucra el término $Q_e(t)$, en el cual se identifican las características de los estratos del suelo y los cuales son decisivos para la alimentación y saturación del manto freático de fluido en este tipo de sistemas. la ecuación (1) es posible presentarla integrando sobre todo el espacio comprendido para sus cambios, teniendo:

$$\int_{V_0}^V dV = \int_{t_0}^t [Q_e(t) - Q_s(t)] dt \quad (2)$$

de donde podemos obtener se satisface la expresión:

$$V(t) - V_0(t) = \int_{t_0}^t [Q_e(t) - Q_s(t)] dt \quad (3)$$

Analizando por partes las expresiones que involucra la expresión (2) es posible presentar que gasto de entrada al el acuífero y en tal caso tomando en consideración la ley de DARCY, la cual nos presenta una expresión para la velocidad de flujo que ingresa en el acuífero por medio de la relación:

$$v = K_p S \quad (4)$$

donde S es el gradiente hidráulico y k_p reúne las características del medio y esta determinado por la relación:

$$K_p = \frac{c d^2 w}{\mu} \quad (5)$$

de donde c es un factor que describe la forma de empaquetamiento y otras características del medio, d es el tamaño promedio de los poros, w es el peso específico del fluido y μ es la viscosidad del fluido que ingresa en el acuífero.

De todo lo anterior y retomando la ecuación de continuidad es posible tener una expresión para el gasto de entrada mediante la fórmula:

$$Q_e(t) = A v = A \left[\frac{cd^2 w}{\mu} \right] S \quad (6)$$

considerando las variables restantes no muy problemáticas entonces podemos tomarlas como aquellas que no cambian con respecto al tiempo. en primer término la salida de agua del acuífero esta considerada como un valor dado por un determinado

período. en este sentido se da un valor para el gasto que alimentará la superficie y el cual es extraído del interior en este sentido es fácil encontrar que el volumen de fluido extraído en el acuífero para un tiempo t estará dado por:

$$V(t) - V_0(t) = \left[\frac{C d^2 w}{\mu} A S - Q_s(t) \right] t \quad (7)$$

donde $V(t)-V_0(t)$ es $-\Delta V$ el cual nos representa la cantidad en metros cúbicos de agua utilizada.

BIBLIOGRAFIA

- 1). Linsley, Ray K. y Franzini, Joseph B., Ingeniería de los Recursos Hidráulicos, Ed. C.E.C.S.A., México, 1982.
- 2). Linsley, Kohler y Paulus; Hidrología para Ingenieros, Ed. MacGraw Hill, Pag. 311-330, México, 1984.
- 3).- Mendoza M. Alfredo, Estrada H. Jaime; Conservación y rehabilitación de canales en el Distrito de riego del Rio Mayo; Tesis Nivel Licenciatura, 1990.
- 4). González V. Fernando; A Structural System Analysis Approach to Determine Optimum Operating Policies for Irrigation and Hidropower Generation for Water Resources System; Tesis para obtener el grado de Dr. en Ing.; University of California, Berkeley, 1970.

DETERMINACION DE LA COMBINACION OPTIMA ECONOMICA DE LOS NIVELES DE DOS FACTORES DE LA PRODUCCION (N y P) UTILIZANDO SUPERFICIES DE RESPUESTA.

Ing. Juan J. Garcia O¹.
L.M. Oscar R. Gómez A².

INTRODUCCION. El Valle del Yaqui, en el Estado de Sonora, es uno de los principales productores de soya, maíz, ajonjolí, algodón y trigo, este último cultivo que es el más importante ocupa del 50-55% de la superficie cultivable del Valle con un rendimiento medio de 4.5 ton/ha (4). En el Valle del Yaqui se dispone de varias alternativas en cada ciclo de siembra y si se elige al trigo como cultivo de invierno surge la necesidad de determinar la combinación óptima de N-P para este cultivo en cada una de las rotaciones usuales, con este fin se plantearon las siguientes hipótesis: (a) Los rendimientos del cultivo del trigo son diferentes en las distintas rotaciones, (b) La dosis óptima económica (DOE) de N-P varía en los diversos sistemas de cultivo.

MATERIALES Y METODOS. La información analizada en este trabajo corresponde a un periodo de seis años de una serie de experimentos conducidos en el CIANO, las rotaciones estudiadas fueron:

1

¹Maestro Auxiliar del Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico de Sonora Cd. Obregón Son. C.P. 85 000 México.

²MTC del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora Unidad Regional Sur, Navojoa Sonora.

1.- Trigo-Trigo, 2.- Trigo-Ajojolí, 3.- Trigo-Soya, 4.- Trigo-Soya-Algodón y 5.- Trigo-Maíz-Algodón; en cada año para cada rotación se estableció un diseño en bloques al azar con ocho tratamientos de fertilización.

Para comparar el efecto de los tratamientos de fertilización y de las rotaciones en cada año así como el efecto de los años para cada rotación, se analizaron con un modelo semejante al de un diseño en parcelas divididas (1,2). Posteriormente, para la obtención de la superficie de respuesta N-P se utilizó el modelo cuadrático con interacciones de dos factores, modelo que fué simplificado con el método STEPWISE (regresión progresiva, 3), finalmente, con el modelo reducido se calculó la DOE (4).

RESULTADOS Y DISCUSION. El ANOVA indica que la mayor variabilidad la causa el factor años, que existen diferencias entre rotaciones y que debido a la interacción rotaciones por tratamientos de fertilización es necesaria la determinación de DOE para cada una de las rotaciones estudiadas.

Las DOF (dosis óptima fisiológica) y DOE (en Kg/ha) obtenidas con los modelos reducidos se presentan en el siguiente cuadro 1 y las superficies de respuesta y de contornos para la rotación #3 son presentadas en las figuras 1 y 2 respectivamente.

No fué posible determinar la DOE para todas las rotaciones estudiadas debido a que los mayores rendimientos generalmente se obtuvieron con

Cuadro 1. DOF y DOE obtenidas con los modelos reducidos.

ROTN	DOF(N)	DOF(P)	DOE(N)	DOE(P)
1	184	----	166	----
2	114	67	108	108
3	289	188	262	156
4	152	----	143	----
5	164	----	155	----

las dosis más altas de fertilización (los coeficientes de los factores cuadráticos en los modelos reducidos resultaron positivos).

FIG.1 SUPERFICIE DE RESPUESTA

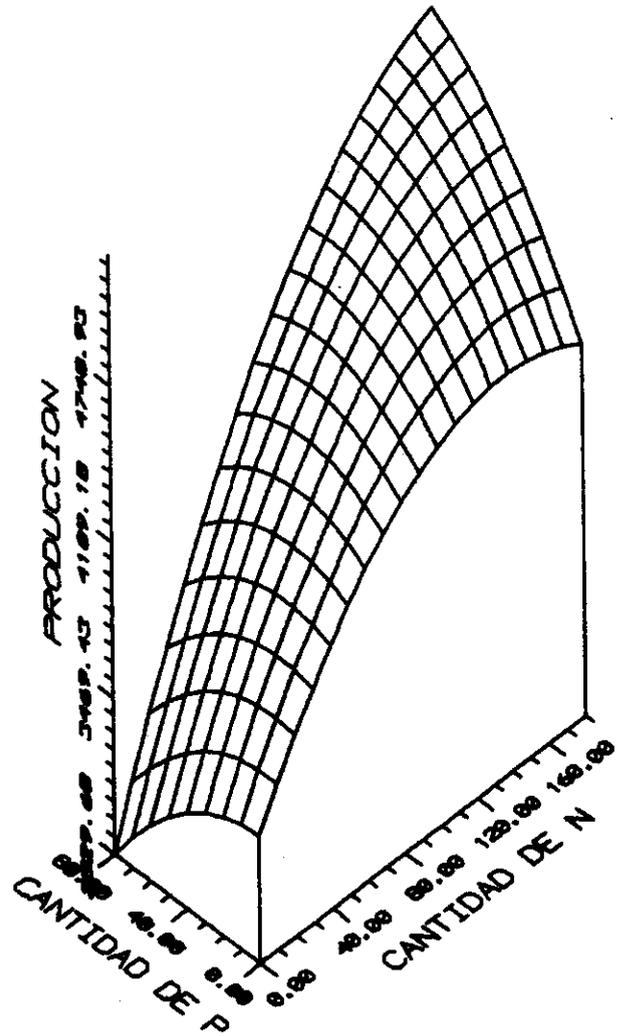
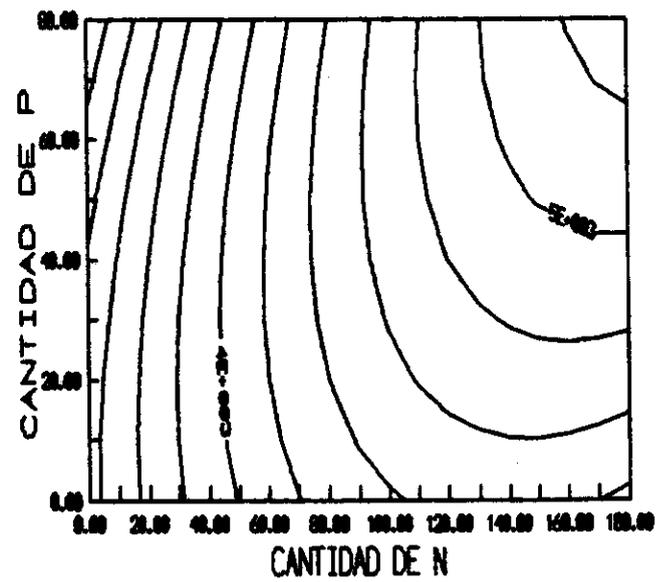


FIG.2 SUPERFICIE DE CONTORNOS



CONCLUSIONES. En el análisis de varianza (ANOVA) el factor años es el más importante, esto es, la mayor variabilidad en el rendimiento del trigo se presenta entre ciclos agrícolas.

-Las sumas de cuadrados explicadas por los tratamientos de fertilización fueron mayores a las explicadas por las rotaciones esto indica, que las dosis de N-P influye más en el rendimiento que la rotación utilizada.

-La interacción tratamientos por rotación resultó ser altamente significativa, esto indica que la fertilización del trigo dependerá de la rotación en la que toma parte.

-La DOE de N y P para las rotaciones Trigo-Ajonjolí y Trigo-Soya fueron de 108-108 y 262-156 respectivamente.

BIBLIOGRAFIA:

1. Cochran, W. G. y G. M. Cox. 1978. Diseños experimentales, Ed. trillas.
2. Douglas C. Montgomery. 1991. Diseños y análisis de experimentos, Ed. Iberoamérica.
3. Draper, N.R. and H. Smith. 1982. Applied regression analysis Ed. John Wiley and Sons, Inc. N.Y.
4. Félix Verdugo, J.O. 1984. Efecto de algunos factores de clima y manejo sobre el rendimiento y respuesta del trigo, maíz y algodón a la fertilización en el Valle del Yaqui, Son. Tesis M.C.Chapingo, Méx.

ONÉSIMO HERNÁNDEZ LERMA

Departamento de Matemáticas.

CINVESTAV IPN

El objetivo de estas conferencias es hacer una presentación introductoria a ciertos problemas de interés en la teoría sobre estimación y control de sistemas estocásticos.

En un problema de control óptimo se desea optimizar —de acuerdo a algún criterio dado— el comportamiento de algún sistema dinámico. En particular, para sistemas estocásticos en tiempo discreto la evolución del sistema se describe mediante una ecuación de la forma

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

con alguna condición inicial dada x_0 . En (1), x_t representa el estado del sistema en el tiempo t , a_t representa la acción de control y ξ_t es una variable aleatoria que denota las perturbaciones que afectan al sistema. Una sucesión dada de acciones de control, digamos $\pi = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, se llama estrategia (o ley o política) de control. El comportamiento del sistema cuando se utiliza una estrategia π se “mide” mediante un índice de funcionamiento $J(\pi, x)$, el cual depende también del estado inicial $x_0 = x$. Entonces el problema de control consiste en encontrar una estrategia π^* que optimice $J(\pi, x)$; por ejemplo, si $J(\pi, x)$ representa un “costo de operación”, entonces el problema es encontrar π^* tal que

$$J(\pi^*, x) = \inf_{\pi} J(\pi, x) \quad \forall x. \quad (2)$$

La función en el lado derecho de (2), es decir,

$$J^*(x) = \inf_{\pi} J(\pi, x) \quad (3)$$

se llama función de costo óptimo (o función de valor) del problema de control.

Una forma usual de representar el sistema de control (1) es como en la fig. A, que se conoce como esquema de “realimentación” o de lazo cerrado. En este caso, se dice que el sistema es completamente observable porque se supone que el estado x_t del sistema es conocido en cada tiempo t . Sin embargo,

hay situaciones en las que esta última suposición no es realista, es decir, el estado no se puede observar directamente; en su lugar tenemos un proceso de observaciones (o mediciones)

$$y_t = G(x_t, \eta_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

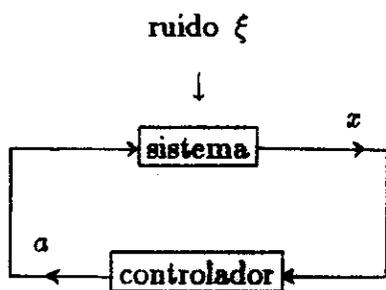


Fig. A

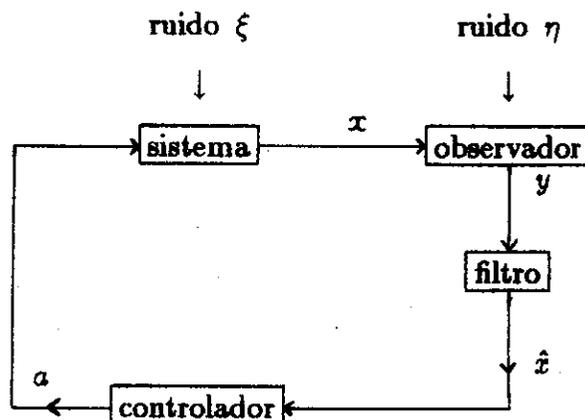


Fig. B

El sistema se dice ahora que es parcialmente observable y nos lleva a un primer problema de estimación: determinar un estimador \hat{x}_t del estado del sistema usando las observaciones en (4). Entonces, como se ilustra en la fig. B, las decisiones del controlador dependerán del estimador \hat{x}_t que resulta de “filtrar” las observaciones $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$.

En estas conferencias se describe brevemente el filtro de Kalman para el caso de sistemas lineales con ruidos blancos gaussianos $\{\xi_t\}$ y $\{\eta_t\}$, no correlacionados, y también, usando el algoritmo de programación dinámica, se describen las soluciones en los casos completamente observable y parcialmente observable. Para sistemas lineales, estos resultados aparecen en muchos textos, por ejemplo [1]; para sistemas no lineales (1)–(4) véase e. g. [2, 3].

Volviendo al caso completamente observable, otro problema de estimación se presenta cuando la función F en (1) y/o la distribución de probabilidad de las perturbaciones $\{\xi_t\}$ no se conocen completamente; si lo que se desconoce es un vector θ de dimensión finita, se dice que el problema de estimación es un problema paramétrico; en caso contrario es un problema no paramétrico. En todo caso, el problema combinado de estimación y control, que se ilustra en la fig. C, es un problema de control adaptable. El problema paramétrico se discute ampliamente en [3] y el no paramétrico en e. g. [5, 7]. El problema de estimación no paramétrica en procesos de Markov no controlados se estudia

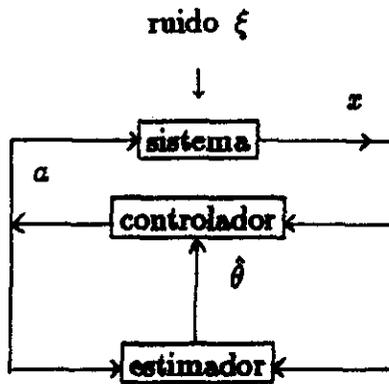


Fig. C

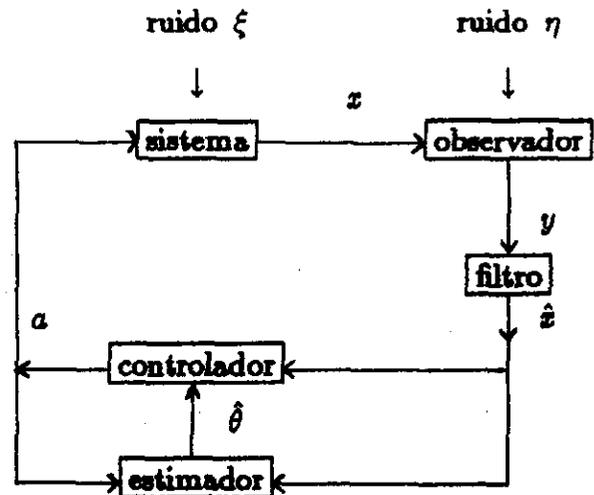


Fig. D

Por último, los sistemas parcialmente observables, combinados con problemas de estimación paramétrica y no paramétrica, se discuten en [3, 8, 9].

Además de las referencias mencionadas antes, cabe también señalar el artículo [10], el cual presenta una variedad de problemas relacionados y una extensa bibliografía sobre teoría y aplicaciones.

Bibliografía y Referencias

1. Bertsekas, D. P. : Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1987.
2. Bertsekas, D. P. and Shreve, S. E.: Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case. Academic Press, New York, 1978.
3. Hernández-Lerma O.: Adaptive Markov Control Processes. Springer-Verlag, New York, 1989.
4. Hernández-Lerma O.: "On integrated square errors of recursive nonparametric estimates of nonstationary Markov processes". Prob. Math. Stat. 12 (1991), 25-33.
5. Hernández-Lerma O., and Cavazos Cadena R.: "Nonparametric density estimation and adaptive control of Markov processes: average and discounted criteria". Acta Appl. Math. 18 (1990), 191-212.

6. Hernández-Lerma O., Esparza, S. O. and Durán, B. S.: "Recursive nonparametric estimation of nonstationary Markov processes". Bol. Soc. Mat. Mexicana. 33 (1988), 57-69.
7. Hernández-Lerma, O. and Marcus, S. I.: "Adaptive policies for discrete-time stochastic control systems with unknown disturbance distribution". Syst. Control Lett. 9 (1987), 307-315.
8. Hernández-Lerma, O. and Marcus, S. I.: "Adaptive control of Markov processes with incomplete state information and unknown parameters". J. Optim. Theory Appl. 52 (1987), 227-241.
9. Hernández-Lerma, O. and Marcus, S. I.: "Nonparametric adaptive control of discrete-time partially observable stochastic systems". J. Math. Anal. Appl. 137 (1989), 312-334.
10. Vega Amaya, O.: "Problemas en control estocástico". Matemáticas, No. 21 (1990), 36-54.

INTRODUCCION

La mayoría de las aplicaciones en Matemáticas, son en relación con el concepto de medición. Así las estructuras que contienen una noción de distancia tienen gran importancia. Tal es el caso de los espacios vectoriales sobre el campo de los números reales y los complejos.

Entre los experimentos físicos del Siglo XIX, destaca el de Michelson-Morley en 1887 cuyos resultados tuvieron dos consecuencias. Resultó insostenible la idea del éter que venía desde 1690 y además se vislumbró un nuevo principio físico: la velocidad de la luz en el espacio libre es la misma en todas partes, independientemente de cualquier movimiento de la fuente o del observador.

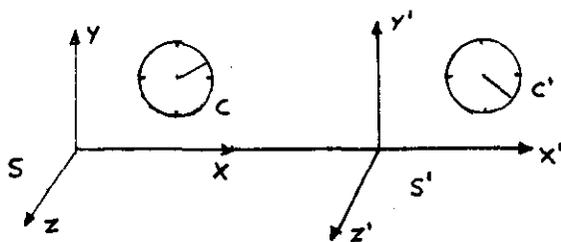
El resultado de analizar las consecuencias físicas de la falta de un marco universal de referencia es la Teoría de la Relatividad.

PROBLEMA BASICO

La teoría se basa en dos postulados:

- a) Las leyes físicas pueden ser expresadas mediante ecuaciones de la misma forma en todos los marcos de referencia que se mueven a velocidad constante los unos con respecto a los otros.
- b) La velocidad de la luz en el espacio libre tiene el mismo valor para todos los observadores, independientemente de su estado de movimiento.

Para analizar la esencia de la teoría consideraremos dos sistemas inerciales, es decir sin aceleración, s y s' , como se ilustra en la figura y tres suposiciones



- 1. Los ejes son paralelos y el origen de s' se desplaza a una velocidad constante $v > 0$ relativa a s .
- 2. c y c' son relojes estacionarios en su sistema respectivo y calibrados con cero en el instante en que los orígenes coincidan.
- 3. La unidad de longitud es el segundo luz.

La transformación de Galileo $x'=x-vt$, $y'=y$, $z'=z$, $t'=t$ y la transformación de velocidades deducida de ella violan los dos postulados.

Admitiendo una relación entre x y x' de la forma $x'=k(x-vt)$, de acuerdo al primer postulado tenemos $x=k(x'+vt')$. Sustituyendo la primera de estas ecuaciones en la

segunda y despejando obtenemos

$$t' = kt + \left(\frac{1-k^2}{kv} \right) x$$

Del segundo postulado puede calcularse k

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

donde c es la velocidad de la luz. Esto lleva a la transformación de Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ; y' = y ; z' = z ; t' = \frac{t - \frac{vx}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Estas ecuaciones permiten que las fórmulas fundamentales sean las mismas en todos los marcos de referencia con movimiento relativo uniforme y se reduce a las ecuaciones de Galileo para v mucho menor que c.

Tanto Lorentz como otros físicos las consideraron como juego matemático. Fue Einstein quien se dió cuenta que corresponden a la realidad física y llevan a un cambio radical de las ideas relativas al espacio, tiempo y movimiento.

CARACTERIZACION DE LA TRANSFORMACION DE LORENTZ.

Para un evento p que ocurre en (x, y, z) relativo a s en el tiempo t, leído en c y (x', y', z') relativo a s' en t', leído en c', definimos un mapeo $T_v: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, que depende de la velocidad v, el cual es uno a uno y sobre,

$$T_v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

Las suposiciones de Einstein sobre T_v se pueden formular en forma equivalente

- i) La velocidad de la luz en cualquiera de los sistemas es 1
- ii) $T_v: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es lineal
- iii) para (x, y, z, t) en \mathbb{R}^4

$$\text{si } T_v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \quad \text{entonces } y' = y, \quad z' = z$$

$$\text{iv) para } T_V \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \quad x', t' \text{ son independientes}$$

de y y z ; esto es si

$$T_V \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ z_1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T_V \begin{pmatrix} x \\ y_2 \\ z_2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ t'' \end{pmatrix}$$

entonces $x'' = x'$, $t'' = t'$

v) El origen de s se desplaza en la dirección negativa del eje x' de s' a velocidad constante $-v < 0$ medida en s' .

Para formular la caracterización de T_V se requieren los conceptos de: Espacio Vectorial V ; subespacio generado por los elementos de un subconjunto de V ; Base; Transformación Lineal; Matriz de la Transformación; Subespacio Invariante; Producto Interior en V (V es un espacio vectorial sobre el campo de los números complejos); Transpuesta Conjugada A^* de A . Con L_A se denota el mapeo $L_A(x) = A(x)$

De la definición de producto interior y del Teorema siguiente

Teorema 1.- Si V es un espacio con producto interior de dimensión finita y T es un operador lineal en V , entonces existe un operador lineal único T^* en V tal que

$$(T(x), y) = (x, T^*(y)) \text{ para todos } x, y \text{ en } V.$$

se deduce que

$$(x, T(y)) = \overline{(T(y), x)} = \overline{(y, T^*(x))} = (T^*(x), y) \quad (1)$$

Del resultado anterior y de los axiomas, no es difícil demostrar el teorema siguiente

Teorema 2.- En R^4

- a) $T_V(e_i) = e_i$ para $i = 2, 3$
- b) $L(\{e_2, e_3\})$ es T_V - invariante
- c) $L(\{e_2, e_4\})$ es T_V - invariante
- d) $L(\{e_2, e_3\})$ y $L(\{e_2, e_4\})$ son T_V^* - invariantes

$$e) T_V^*(e_i) = e_i \quad \text{para } i = 2,3$$

Supóngase que en el instante en que los orígenes coinciden en s y s' , se emite un destello luminoso desde el origen común $(0,0,0,0)$.

Como la velocidad de la luz es 1, en $t \geq 0$ el destello se observa desde cualquier punto cuya distancia al origen de s sea $|l| = t$. Se trata de los puntos sobre la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

Esto mismo pasa en s' , $c' \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 = 0$;
por lo tanto podemos expresar

$$(x \ y \ z \ t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

A la matriz del centro le llamaremos A .

Teorema 3.- Para $w \in \mathbb{R}^4$, si $(L_A(w), w) = 0$, entonces

$$(T_V^* L_A T_V(w), w) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Esto solo es } (T_V^* L_A T_V(w), w) &= (L_A T_V(w), T_V(w)) = (Aw', w') \\ &= x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 = 0 \end{aligned}$$

Los vectores $w_1 = (1,0,0,1)$, $w_2 = (1,0,0,-1)$
constituyen una base ortogonal para $L(\{e_1, e_4\})$

De este hecho y del Teorema 3 se puede demostrar el teorema siguiente

Teorema 4.- Existen escalares a y b no nulos tales que

$$i) T_V^* L_A T_V(w_1) = a w_2$$

$$ii) T_V^* L_A T_V(w_2) = b w_1$$

De este teorema se deduce el resultado que se enuncia enseguida, el cual permite construir la matriz de la transformación B_V que cumpla con los requerimientos iniciales

Teorema 5.- Si $B_V = \{ T_V \}_\beta$ donde β es la base canónica

para \mathbb{R}^4 , entonces

$$a) B_V^* A B_V = A$$

$$b) T_V^* L_A T_V = L_A$$

Si ha transcurrido un segundo desde que los orígenes coincidieron, tendremos

por coordenadas en cada sistema $(v,0,0,1)$, $(0,0,0,t')$ respectivamente. Así expresamos

$$T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{1-v^2} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Del Teorema 5 tenemos, al aplicarlo a $(v,0,0,1)$

$$(T_v^* L_A T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = (L_A \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \left(\begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = v^2 - 1$$

$$(T_v^* L_A T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = (L_A T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T_v \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = (L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -t' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix} \right) = -t'$$

De aquí tenemos que $t' = \sqrt{1-v^2}$

Considerando que el origen de s se desplaza en la dirección negativa del eje x' de s' con $-v < 0$ medida en s' , un segundo después que los orígenes coincidieron existe $t' > 0$ en c' tal que

$$T_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -vt' \\ 0 \\ 0 \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ \sqrt{1-v^2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{1-v^2} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Para esto basta aplicar el Teorema 5 a $(0,0,0,1)$, de la misma manera en que se aplicó a $(v,0,0,1)$, con lo que se obtiene $-1 = -t'^2(1-v^2)$ y de aquí $t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

Si ahora restamos ambas (2) y (3) podemos obtener la imagen de e_1

$$T_v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1-v^2} \\ 0 \\ 0 \\ -v \\ \sqrt{1-v^2} \end{pmatrix}$$

Así tenemos la matriz de la transformación

$$B_v = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \sqrt{1-v^2} & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ -v & & & 0 & 0 & \\ \sqrt{1-v^2} & & & \sqrt{1-v^2} & & \end{pmatrix}$$

LA CONTRACCION DEL TIEMPO

Vimos que después de un segundo, en un cuerpo que "viaja" con respecto a

otro que permanece "fijo", el tiempo es $t' = \sqrt{1-v^2}$. Si un astronauta viaja a velocidad v medida con respecto al sistema, después de un tiempo t , en la nave el tiempo será $t \sqrt{1-v^2}$. Este resultado debe obtenerse al aplicar la matriz al vector $(vt, 0, 0, t)$, sabiendo que en la nave las coordenadas son $(0, 0, 0, t')$

LA EXPRESION COMUN

Si conocemos la velocidad en determinadas unidades, digamos kilómetros por segundos podemos pasar a segundos luz por segundo fácilmente.

$$v \frac{k}{seg} = v \frac{c}{c} = \frac{v \frac{k}{seg} \cdot \frac{1 \text{ seg. luz}}{seg}}{300,000 \frac{k}{seg}} = \frac{v}{300,000} \frac{\text{seg. luz}}{\text{seg}}$$

Así tenemos $t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence
Algebra Lineal; Publicaciones Cultural S.A.
- 2.- Arthur Beiser
Conceptos de física Moderna; McGraw-Hill
- 3.- Keith R. Symon
Mechanics; Addison-Wesley publishing Company
- 4.- G.J. Whitrow
Einstein: El hombre y su obra; siglo veintiuno Editores
- 5.- Albert Einstein
La relatividad; Grijalbo
De mi vida y mi pensamiento; Dante

R E P O R T E D E T E S I S
"OPTIMIZACION EN REDES DE FLUJO CON COSTOS CONCAVOS"
M.I.O JOAQUIN HUMBERTO LOPEZ BORBON. UNIVERSIDAD DE SONORA

RESUMEN

Las necesidades de consumo de nuestra sociedad, requieren de actividades comerciales, donde la función de costo presenta economía de escala, es decir, se dan precios de descuento, en la compra de grandes cantidades. En distintos campos, por ejemplo: inventarios, planeación de la producción, localización y distribución de servicios, transporte, sistemas de comunicación, entre otros, se plantean problemas que presentan economía de escala, algunos de estos problemas, pueden ser modelados en términos de redes sin ganancia con costos cóncavos.

El presente trabajo tiene como propósito el análisis de los fundamentos teóricos, descripción e implementación de un método de solución del problema de redes sin ganancia con costos cóncavos.

El método de solución desarrollado, mediante enumeración implícita, reduce el problema de redes sin ganancia con costos cóncavos, a uno de programación 0-1 mixto, el cual, es relajado a otro de redes sin ganancia con costos lineales, resuelto por el algoritmo de las desviaciones (Out-of-kilter). El método trabaja eficientemente si el número de arcos con costo fijo distinto de cero es menor que 50, y tiene dificultades si dicho número es mayor que 50. La utilidad del método es justificada resolviendo una considerable variedad de problemas de aplicación.

VENTAJAS DE LOS MODELOS DE REDES

Las técnicas de optimización de redes ofrecen las siguientes ventajas:

a) Se requiere menos habilidad para construir modelos de redes, que modelos de programación lineal u otros métodos de optimización.

b) La naturaleza gráfica de un modelo de redes permite su fácil asimilación por el usuario.

c) Su simple estructura de datos facilita su implantación.

d) La estructura de la red facilita la validación y búsqueda de errores.

e) La memoria requerida es mucho menor que la usada en programación lineal. Por ejemplo para redes con costo lineal, se han resuelto problemas con 63 millones de variables.

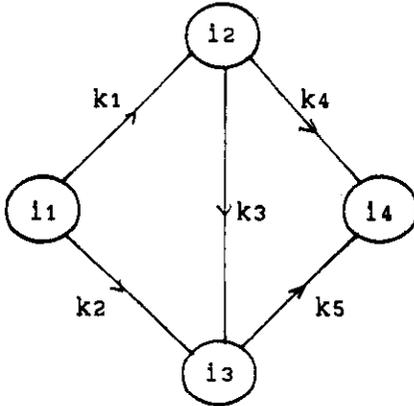
f) La velocidad de solución es entre 60 y 80 veces mayor que el mejor de los códigos de programación lineal, comparándolos en la solución del mismo problema con estructura de red.

g) Algoritmos eficientes resultados del aprovechamiento de la estructura de la red.

h) Fundamentos teóricos sumamente elegantes asociados a la teoría de gráficas.

FORMULACION Y CARACTERISTICAS DEL PROBLEMA

El problema de optimización de flujo en redes matemáticamente es formulado de la siguiente manera:



$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{k=1}^m h_k(f_k) \\ & \text{s.a. } \sum_{k \in M(i)} f_k - \sum_{k \in T(i)} a_k f_k = b_i; i=1, \dots, n \\ & 0 \leq f_k \leq C_k; k=1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Min } h(f) \\ & \text{s.a } Af=b \\ & 0 \leq f \leq C \end{aligned}$$

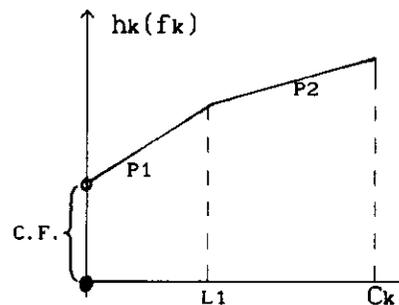
Algunas características de este problema, son las siguientes:

a) $h_k(f_k)$ es la función de costo del flujo f_k que circula por el arco k , esta función es cóncava y por lo tanto $h(f): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ cóncava aditiva.

b) Las restricciones son lineales $Af=b$. Si las capacidades C son finitas, la región de factibilidad es un compacto, de esta manera por el teorema de Weierstrass se garantiza la existencia del mínimo, siempre que la región factible sea no vacía.

c) Para redes sin ganancia $a_k=1$ para todo k , con esto, la matriz A es totalmente unimodular, lo cual garantiza que "Si b y C tienen componentes, enteras, entonces f es óptimo también".

d) Es frecuente que en economía de escala, h sea lineal por pedazos, por consiguiente, no es de clase C^1 . Incluso si h incluye costo fijo, ni siquiera es continua, es por esto que, los métodos tradicionales de optimización no lineal para funciones suaves, no son aplicables, pues, requieren que h sea de clase C^2 .



e) La matriz A es muy rara, esto puede provocar ineficiencia en los métodos para problemas de gran tamaño, aun cuando se empleen técnicas de matrices raras.

f) Existe un resultado que dice: "Todo mínimo local de una función convexa,

es un mínimo global", lo anterior, no sucede cuando la función es cóncava. Un método de solución consiste en: encontrar todos los mínimos locales, para luego, obtener el mínimo global, sin embargo, resulta computacionalmente improcedente cuando h tiene muchos mínimos locales.

g) El problema es combinatorio, clasificado como NP-completo. En la clase NP-completa están los problemas para los que no se conocen y quizás, no existan algoritmos polinomiales para resolverlos, problemas pequeños de esta clase pueden ser resueltos por algoritmos exponenciales, que resultan imprácticos para problemas grandes, ya que, el tiempo de solución crece de manera alarmante, en este caso, sólo se aspira a encontrar una buena solución, aunque no sea la óptima.

DESCRIPCION DEL METODO DE SOLUCION

En este trabajo, se desarrolla un método que resuelve el problema de flujo en redes sin ganancia, con h cóncava lineal por pedazos, ó bien, encuentra una aproximación lineal por pedazos del problema cuando h es cóncava no lineal por pedazos y la red asociada sin ganancia. El método, mediante enumeración implícita reduce el problema, a uno de programación 0-1 mixto, el cual, es relajado a un problema de redes sin ganancia con costos lineales. Iterativamente se resuelve el problema de redes sin ganancia con costos lineales, mediante el algoritmo de las desviaciones (Out-of-kilter), el cual, es altamente eficiente por ser polinomial, resultado del aprovechamiento de la estructura algebraica de la red, con una base teórica sumamente elegante asociada a la teoría de gráficas. El método tiene un costo computacional de $O(2^{mc})$, donde, mc es el número de arcos, con costo fijo distinto de cero, los cuales, resultan del proceso de linealización. Trabaja eficientemente si $mc \leq 50$, con dificultades si $mc > 50$, y no se garantiza que la solución sea encontrada si $mc > 100$.

APLICACIONES DEL MODELO

La importancia de este modelo, se justifica por la amplia variedad de problemas prácticos que permite resolver, en este trabajo se logró implementarlo en los siguientes problemas:

LOCALIZACION DE PLANTA.- El problema consiste en seleccionar de un conjunto de sitios dados, en dónde localizar plantas, y determinar sus niveles de producción y distribución para satisfacer la demanda conocida en los centros de consumo, todo lo anterior a costo mínimo. Los costos de producción de cada planta y los costos de distribución entre cada planta y punto de demanda pueden considerar economía de descuento, es decir, el costo unitario de producción o distribución del producto, es menor cuando se consideran

grandes cantidades. Puede considerarse capacidad de producción en cada planta y capacidad de transporte. Se considera un horizonte de planeación de T periodos, el cual, no incluye el tiempo de construcción de cada planta. Se desea determinar; cuántas plantas va construir, en cuál de los sitios se construirá una planta, con qué nivel de producción operará cada planta en cada periodo y cuánto producto enviará periódicamente cada planta a cada centro de consumo, de tal manera que se minimice el costo en cada periodo, sobre el horizonte de planeación.

NIVELACION DE TERRENOS.- Un problema que se les presenta a los ingenieros topógrafos, es la nivelación de terrenos agrícolas, de lo cual depende el buen funcionamiento del sistema de riego que se utilice y por lo tanto depende la producción. El problema consiste en encontrar un plan óptimo de distribución de tierra, de los puntos altos a los puntos bajos del terreno, con el fin de nivelarlo con una inclinación adecuada al sistema de riego que se utilice.

PLAN DE CONTRATACION DE PERSONAL.- El siguiente modelo puede ser utilizado para determinar la política de contratación de personal que balancee costos de contratación y despido, considerando costos de empleo ocioso, cuando la demanda no es uniforme.

COMPRA PRODUCCION Y DISTRIBUCION.- El problema consiste en determinar la producción de M plantas establecidas, las cuales operan dentro de sus capacidades de producción, además determinar la política de compra de materia prima en N fuentes, y la política de distribución del producto, para satisfacer la demanda ya determinada de S centros de consumo, todo lo anterior a costo mínimo. Se suponen conocidos los costos de compra, producción y distribución, estas funciones de costo por manejar economía de escala son cóncavas.

PRODUCCION-INVENTARIO.- Se considera un problema de planeación de la producción, multiproducto, permitiendo satisfacer las demanda no cubierta en periodos atrasados, sobre un horizonte de planeación finito, se suponen conocidas las demandas de productos en cada periodo, las funciones de costo de producción, inventario y déficit de cada producto en cada periodo. El problema consiste en determinar un plan de producción óptimo que satisfaga la demanda de cada producto en cada periodo. Además se lograron implantar las siguientes extensiones:

- a) PRODUCCION-INVENTARIO CON VARIAS ALTERNATIVAS DE PRODUCCION.
- b) PRODUCCION-INVENTARIO CON MULTI-INSTALACION EN SERIE.
- c) PRODUCCION-INVENTARIO, MULTIPRODUCTO, MULTI-INSTALACION EN PARALELO CON PROCESAMIENTO EN LOTE.

CONCLUSIONES Y EXTENSIONES

Se analizaron los fundamentos teóricos, descripción e implementación de un método de solución del problema de redes sin ganancia con costos cóncavos. El método fue programado en FORTRAN e implementado en PC.

La gran importancia del método radica en que existe una considerable variedad de problemas que presentan estructura de economía de escala, los cuales pueden ser modelados en términos de redes sin ganancia con costos cóncavos.

Cuando el método, tiene dificultades para obtener la solución óptima de un problema con instancia grande, se puede mejorar cualquier solución obtenida, utilizándola como inicial, reduciendo el error y obteniendo una nueva solución, la cual resultará mejor. Repitiendo lo anterior, se puede obtener una muy buena solución y quizás hasta la solución óptima.

Las posibles líneas de extensión, son las siguientes:

Considerar pérdida o ganancia en los arcos, restricciones adicionales y multiproducto. Estudio de la estructura de la red tendiente a mejorar la eficiencia computacional del algoritmo.

En últimas fechas, las técnicas recientes: recocido simulado y búsqueda tabú, han dado muy buenos resultados en algunos problemas de la clase NP-completa, quizás alguna de estas técnicas pueda adaptarse, para resolver el problema de redes con costos cóncavos y con ello, lograr resolver instancias más grandes de este problema.

BIBLIOGRAFIA BASICA

- | | |
|---|--|
| -Ahuja, Magnanti and Orlin
"Some Recent Advances in
Network Flows". Siam
Review Vol.33, No.2, pg.
175-219, Jun. 1991. | -Kennington and Helgason.
Algorithms for Network
Programming. John Wiley
and Sons, 1980. |
| -Dembo, Mulvey, Zenios
"Large-Scale Nonlinear
Network Models and their
Application". O.R. Vol.
37, No. 3, pg 353-372,
Mayo-Junio 1989. | -Minoux
"Network Synthesis and
Optimum Network Desing
Problems: Models,
Solution Methods and
applications". Network,
Vol.19, pg. 313-360, 1989 |
| -Jensen P.A., Barnes J.W.
Network Flow Programming
John Wiley and Sons, 1980. | -Rockafellar R.T.
Network Flows and Mon. O.
John Wiley and Sons, 1984. |

VERSION EN TURBOBASIC DEL MODELO MATRICIAL DINAMICO
EN VARIABLES DE ESTADO PARA UN SISTEMA ECOLOGICO DE
CRIA DE PECES

M.C. Jose G. Mares Martinez

D. de Cs. Q.B., Uni-Son.

M.C. Osvaldo Landavazo Gracia

D. de I.Q. y Met., Uni-Son.

El presente trabajo pretende ilustrar el tratamiento de sistemas dinámicos discretos, con ayuda de instrumentos didácticos que proveen los modernos lenguajes de computación. Para ello, se aborda el estudio del comportamiento dinámico de una población de peces, mediante la configuración de un versátil programa de computación, aplicado a las ecuaciones de un modelo matricial en variables de estado. Dicho programa hace fácil y ameno el entendimiento de la metodología para el análisis de sistemas dinámicos discretos; con la ayuda de gráficos, textos, color y sonido, así como algo de movimiento.

El programa de computadora desarrollado y aplicado al problema particular, que fué tomado de la bibliografía de Sistemas (1), comprende tres segmentos: la dinámica cualitativa del proceso de reproducción de los peces; se continúa con la construcción, tanto del diagrama de bloques con unidades de retardo como del modelo matemático, dinámico, discreto y matricial. Finalmente, se presenta el cálculo, mediante la corrida cuantitativa de las ecuaciones, simulándose el proceso con sus restricciones.

DINAMICA CUALITATIVA

En la dinámica cualitativa se distinguen los cuatro estados que presenta el desarrollo de un pez, empleándose para representar cada estado color y sonido diferente para cada caso. Tal código de colores se mantiene aún posteriormente, en la representación de las ecuaciones.

Para los propósitos de este escrito, la dinámica cualitativa quedará ilustrada (en forma estática y a un color) en la figura 1. En ella puede apreciarse que las literales a, b, e son coeficientes netos de conversión; c, d lo son de depredación; f es un coeficiente de producción y U_1 como U_2 son controles que operan sobre algunas de las variables X .

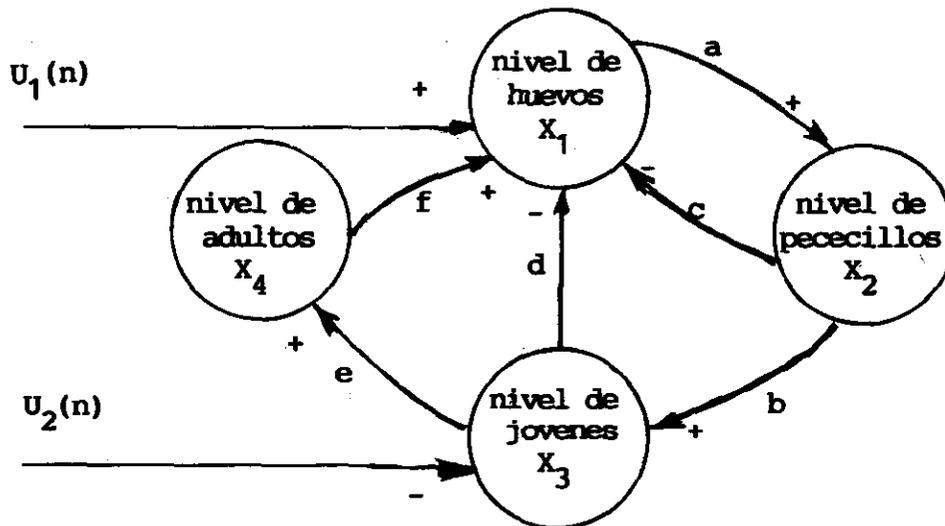


Fig. 1. Dinámica cualitativa en la crianza de peces

Al no tener como objetivos en este trabajo la propuesta de un mejor modelo, se mantienen los supuestos seguidos en la bibliografía ya citada, siendo algunos de ellos:

- . No hay depredación de peces adultos hacia estados menores y no se contempla captura o depredación hacia ellos.
- . Los peces adultos son de vida indefinida y todos producen huevos con una tasa f .
- . El paso de un estado a otro se da en periodos unitarios (e idénticos) de tiempo.
- . El control externo denotado por las variables U_1 y U_2 se da, respectivamente, sobre el número de huevos y sobre el número de juvenes, añadiendo de los primeros y extrayendo de los segundos.

MODELAJE MATEMATICO

El segundo segmento del programa computacional desarrollado, enfatiza la construcción de los diagramas dinámicos de bloques (que no se incluyen en este escrito); ilustrándose primero su uso en la generación de variables de estado en sistemas continuos y posteriormente se considera el caso discreto de cría de peces, donde se requieren unidades de retardo y ecuaciones discretas.

Al analizar el proceso descrito previamente, puede concluirse que el modelo a simular consta, por un lado, de una ecuación para el balance de huevos X_1

dentro de un mismo periodo n de tiempo.

$$X_1(n) = U_1(n) - cX_2(n) - dX_3(n) + fX_4(n) \quad \text{Ec. (1)}$$

y de tres ecuaciones con variable desfasada que matricialmente quedan representadas por

$$\begin{bmatrix} X_2(n+1) \\ X_3(n+1) \\ X_4(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ac & -ad & af \\ b & 0 & 0 \\ 0 & e & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2(n) \\ X_3(n) \\ X_4(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(n) \\ U_2(n) \end{bmatrix} \quad \text{Ec. (2)}$$

SIMULACION

El tercero y último segmento a destacar en el programa, aborda el cálculo numérico para las diversas situaciones que desearan simularse, dentro de las limitaciones del modelo y del programa. Para predecir el valor del vector de estado compuesto por X_2 , X_3 y X_4 a cualquier periodo n, se resuelve y programa la solución del modelo general lineal vectorial

$$X(n+1) = A X(n) + B U(n) \quad \text{Ec. (3)}$$

al cual se apega la ecuación (2). A y B son matrices de coeficientes.

La solución de la ecuación vectorial (3), según puede mostrarse fácilmente por cambio indicial e inducción, es

$$X(n) = A^n X(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} B U(j) \quad \text{Ec. (4)}$$

La ec.(4) predice, como ya se asentó, los valores de X_2 a X_4 cuando se proveen valores particulares de todos los coeficientes que participan en las matrices A y B; el vector de valores iniciales $X(0)$ y los controles U. El valor de X_1 se calcula aparte mediante la ecuación (1).

Varios detalles para un mejor seguimiento e identificación, se cubren sobre la pantalla del monitor de una computadora personal conforme se explota el programa presentado para el problema expuesto..

CONCLUSIONES

. Muchos sistemas dinámicos de la Biología y la Ecología, como de la Ingeniería y las Ciencias Sociales, siendo de importancia teórica y práctica son también de naturaleza evidentemente discreta. Conviene por lo tanto, sobre todo por la complejidad estructural de dichos sistemas, familiarizarse con las técnicas discretas matriciales cuya implementación en computadora es relativamente fácil y que son bien cubiertas en bibliografía especializada (2).

. El tratamiento de temáticas como la anterior se vuelve didácticamente atractivo y digerible, cuando su estudio se realiza frente a un monitor de computadora personal. Mucho más se logra cuando la exposición del tema se combina con el uso de gráficos y texto con movimientos, así como con color y sonido.

Estas últimas ayudas didácticas se cubren también en la bibliografía estandar sobre lenguajes de Programación (3), (4).

. De esta forma, está abierto un enorme filón para proyectos didácticos y de estudio por computadora que conviene explotar con imaginación y con oportunidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Gabel, R.A. y R.A. Roberts. Señales y Sistemas Lineales. Editorial Limusa, 1971.
2. Jauffred, M.F.J. y A.M. Bonett. Tecnicas Discretas en Ingenieria de Sistemas. Tomo I, Representaciones y Servicios de Ingenieria, S.A., Mexico, 1983.
3. Nameroff, S.. Quick Basic, Manual de Referencia. Mc Graw-Hill/Osborne, España, 1990.
4. Ceballos, F.J. Turbo Basic, Guia del Programador, Macrobit-Rama, Mexico, 1990.

NOTAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I.

Agustín Grijalva Monteverde, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.

Introducción.

El objetivo del presente trabajo es poner a consideración de los profesores las notas de clase elaboradas por el M.C. Eduardo Tellechea Armenta y el L.M. Agustín Grijalva Monteverde correspondientes al curso Cálculo Diferencial e Integral I del área de Ciencias e Ingeniería.

Se pretende, más que dar a conocer el contenido específico del material indicado, hacer algunas consideraciones sobre la importancia de desarrollar trabajos de elaboración de material didáctico de apoyo a las labores docentes.

Los profesores y los libros de texto.

Una de las preocupaciones fundamentales de profesores y estudiantes de cálculo es contar con un libro de texto que cubra los diferentes temas que se desarrollan en un curso. Sin embargo, al igual que sucede en los demás cursos de matemáticas se encuentran con que los libros sobre el mismo corresponden a traducciones del inglés que no necesariamente son de utilidad como textos.

Estos libros, al menos en la materia que nos ocupa, regularmente son especies de compendios de cálculo que versan sobre una gran cantidad de tópicos que no sólo se limitan a tratar los temas correspondientes a los cursos sino que incluyen material adicional como elementos de Geometría Analítica, Álgebra Lineal, Teoría de los números complejos, etc. Asimismo corresponden a las

intenciones de los programas de universidades de Estados Unidos que no tienen porque coincidir con los nuestros.

Esta situación se torna especialmente difícil en los cursos de bachillerato porque los libros traducidos no van dirigidos a los estudiantes de este nivel y los profesores se ven en serias dificultades para adecuar los libros a sus cursos.

A fin de salvar esta situación en el Departamento de Matemáticas se ha promovido la elaboración de notas de clases para los diversos cursos que se imparten. Los avances no son significativos aunque tampoco se puede afirmar que no se ha realizado nada.

El área de Ciencias e Ingeniería cubre a las carreras de Matemáticas, Física, Geología, Ingeniería Civil, Ingeniería Química, Ingeniería Industrial Administrativa e Ingeniería en Minas. En algunos cursos la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas tiene programas similares a los de aquellas y entre tales cursos se incluye el de Matemáticas I correspondiente al de Cálculo Diferencial e Integral I.

Las carreras de Ciencias e Ingeniería tienen en promedio 433 créditos de los cuales 106 corresponden a los cursos de Matemáticas que imparte nuestro Departamento constituyendo aproximadamente el 25% del total. Los créditos de Matemáticas corresponden a los siguientes 11 cursos: Cálculo Diferencial e Integral I, Geometría Analítica, Álgebra Superior I, Cálculo Diferencial e Integral II, Álgebra Lineal I, Programación de Computadoras, Cálculo Diferencial e Integral III, Ecuaciones Diferenciales I, Probabilidad, Análisis Numérico y Estadística.

Aunque existen diversos materiales de apoyo didáctico para la implementación de estos cursos sólo se han editado las notas de clase para Cálculo Diferencial e Integral III elaboradas por los profesores Jacobo Núñez Utrías y Eduardo Tellechea Armenta y las notas de clase para Álgebra Superior I de Margarita Niño Torres. Para el curso de Análisis Numérico los profesores Israel Segundo Caballero y Silvia Elena Jbarra Olmos también cuentan con notas de clase pero su edición ha sido restringida.

Por nuestra parte hemos elaborado ya una propuesta de notas de clase para Cálculo Diferencial e Integral I y nos encontramos trabajando en las correspondientes a cálculo II de las cuales llevamos un avance de dos apartados o capítulos

En lo referente al cálculo I nos encontramos en una etapa de incorporación de sugerencias realizadas por profesores de la academia correspondiente y esperamos que para el próximo semestre sea posible contar con una primera impresión de las notas.

Estamos concientes de que nuestro trabajo no puede suplir a los diferentes libros de cálculo existentes pero consideramos que puede ser útil en la consecución de uniformizar los contenidos de los cursos impartidos por los profesores. Asimismo es necesario señalar que el trabajo deberá enriquecerse tanto a partir de las observaciones que surjan como resultado de utilizarlas como de las opiniones de los profesores y los estudiantes.

En las notas de clase pretendemos poner a disposición de los estudiantes un material de estudio acorde a lo visto en el aula y a las pretensiones del curso. El

desarrollo de los temas se motiva con ejemplos que conducen a la necesidad de contar con determinadas definiciones, de aplicar algoritmos para la resolución de problemas y se procura usar lo más posible las gráficas de funciones como auxiliares para la comprensión de los tópicos tratados. Se incluyen también ejemplos ilustrativos y al final de cada capítulo una sección de ejercicios.

Desde nuestro punto de vista las notas no deben seguirse al pie de la letra si es que los profesores piensan adoptarlas para sus cursos. Sólo son una propuesta sobre como pueden tratarse los temas y sobre el nivel de dificultad de los ejercicios que esperamos sean capaces de resolver los estudiantes.

Acerca de la formación metodológica de los profesores de Matemáticas

JOSÉ RAMÓN JIMÉNEZ RODRÍGUEZ

Departamento de Matemáticas.

Programa de Maestría en Matemática Educativa.

Universidad de Sonora, México.

VALERI ALEKSÁNDROVICH GÚSTEV

Facultad de Matemáticas.

Cátedra de Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas.

Instituto Pedagógico Estatal de Moscú, Rusia.

La modernización educativa que actualmente se encuentra en marcha en México, así como los cambios en el sistema educativo ruso, requieren de enormes esfuerzos. Es necesario diseñar nuevos planes, programas, textos y materiales de apoyo. También se requiere capacitar a los supervisores, directores de escuelas y funcionarios que de manera directa tendrán la responsabilidad de verificar la implementación de las reformas. Y como en cualquier reforma educativa, un papel fundamental lo jugará el profesor, pues es él precisamente quien materializará el proyecto de modernización que, hasta el momento, otros han confeccionado. De allí la necesidad de poner especial atención en aquellos aspectos de la formación de profesores que la modernización educativa exige sean resueltos, para poder convertirse en realidad.

En México, si bien no existen por el momento instituciones especialmente dedicadas a la formación de profesores para el Nivel Superior y Medio Superior, las que se ocupan de la formación de profesores para los niveles Básico y Medio Básico tendrán que realizar un enorme esfuerzo. A nuestro parecer, es necesario romper el esquema tradicional de los cursos de capacitación y rebasar la concepción ingenua de que bastarán unos cursillos de actualización para que los profesores estén en condiciones de implementar de manera debida los planes de la modernización educativa.

En ello vemos precisamente uno de los aspectos fuertes de la reforma. Los nuevos programas, por lo menos en lo que concierne a la enseñanza de las Matemáticas, exigen el estudio profundizado, tanto en los aspectos teórico como práctico, de las cuestiones centrales de la metodología de la enseñanza. No se puede por lo tanto reducir este problema a los simples cursillos intensivos de información que se han estado ofreciendo a lo largo y ancho del país. La tarea debe ser más consistente y de más fondo.

Entre los aspectos a estudiar se encuentran:

1. El estudio profundizado de las disciplinas psicológico-pedagógicas, en especial las del área del desarrollo cognitivo, pues en ellas se sustenta la concepción de la modernización educativa (Piaget, Bruner, Galperin y otros).
2. El reforzamiento de las relaciones interdisciplinarias.
3. Las metodologías y didácticas especiales para las diversas ramas del conocimiento matemático.
4. El análisis de los problemas relacionados con el uso de la tecnología educacional.
5. El estudio sistemático de la experiencia pedagógica de avanzada.

Por estas razones, el sistema de formación de profesores de Matemáticas debe contemplar, al menos, los siguientes apartados:

1. Disciplinas de corte psicológico-pedagógico.
2. Tecnología educacional.
3. Disciplinas especiales.
4. Investigación y práctica pedagógica.
5. Trabajo de Tesis.

Cada uno de estos apartados responde a objetivos específicos en la tarea de formar profesores.

En el caso de la Universidad de Sonora, no se cuenta con un programa para la formación de profesores de Matemáticas, aunque el programa de Maestría en Matemática Educativa (para la formación de investigadores) sí pretende cubrir los aspectos básicos arriba señalados. En el caso de los institutos pedagógicos de Rusia, estos problemas se discuten intensamente [1], y los planes y programas de estudio reflejan los logros alcanzados.

En ambos casos, un lugar muy importante y central lo ocupan las disciplinas del ciclo psicológico-pedagógico tales como "Psicología evolutiva", "Pedagogía", "Psicología general", "Psicología pedagógica" (Rusia), o "Fundamentos teóricos de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas" (Universidad de Sonora).

Es necesario organizar los cursos del ciclo psicológico-pedagógico de tal modo, que el profesor obtenga de ellos una utilidad práctica, y no solamente teórica. Una de las vías para lograr este objetivo consiste en integrar la investigación educativa en la formación de profesores, de esto ya hemos hablado en otra ocasión [2]; otra vía posible es la de estudiar el cuerpo teórico de conocimientos psicológico-pedagógicos en combinación con el análisis de implementaciones o diseños metodológicos de enseñanza concebidos en base a tales teorías [3].

En el caso de Rusia, todos los estudiantes de los institutos pedagógicos realizan una amplia práctica profesional durante los últimos semestres. Bajo la doble dirección de su asesor de tesis y de un profesor experimentado, la práctica transcurre en escuelas de enseñanza general y les ofrece amplias oportunidades para la observación empírica, la contrastación de los postulados teóricos y la investigación. En el caso de la Universidad de Sonora, donde no existe el programa de formación de profesores y el programa de posgrado se plantea formar investigadores, una estrategia adecuada para la práctica profesional bien pudiera consistir en la discusión colectiva, en forma de seminarios, de los planes de lecciones diseñados por cada uno de los profesores para impartir un cierto tema, o en seminarios didáctico-metodológicos de contenido concreto.

En ambos casos, la experiencia en la formación de profesores de Matemáticas e investigadores en Matemática Educativa muestra que el eslabón más débil de la cadena es precisamente el que corresponde a la formación metodológica, que dicha formación es o bien escasa y débil, o bien de carácter teórico general, y no se refleja inmediatamente en el desempeño cotidiano del profesor.

El profesor de Matemáticas y el investigador en Matemática Educativa deben en todo momento de estar en condiciones de fundamentar sus propuestas metodológicas desde el punto de vista de la psicología pedagógica, esto es, de las teorías del aprendizaje y de la enseñanza. La habilidad para hacer propuestas metodológicas fundamentadas es uno de los parámetros que miden el grado de perfeccionamiento metodológico del profesor y del investigador.

Las causas de esta deficiencia, en parte, residen en el insuficiente desarrollo de las teorías del aprendizaje y, como consecuencia, de las teorías de la enseñanza. Pero también, y por qué no decirlo,

se deben a la falta de esfuerzos para hacer avanzar los postulados teóricos hasta las consecuencias prácticas. Por muy poco que sea lo que conocemos actualmente acerca del aprendizaje, la verdad es que sabemos algo, y lo que se necesita es encontrar la forma de "tecnologizar" nuestros conocimientos psicológico-pedagógicos acerca del aprendizaje para convertirlos en metodologías.

Nosotros opinamos que la formación metodológica del profesor de matemáticas debe obligatoriamente tomar en consideración los siguientes aspectos

- 1 El conocimiento de los objetivos de la enseñanza de las Matemáticas en la etapa actual del desarrollo de nuestra sociedad: el profesor debe tener perfectamente claro *para qué* se necesita que él enseñe Matemáticas, *por que* precisamente estas matemáticas y no otras, de la misma manera que los estudiantes deben tomar conciencia de dichos objetivos.
- 2 El conocimiento profundo y multilateral de los contenidos del programa de estudios, así como también de los principales textos y manuales usados en la asignatura. El profesor debe saber encontrar las diferencias metodológicas entre un texto y otro, debe saber determinar las concepciones metodológicas del autor
3. El conocimiento de los segmentos difíciles del programa escolar, así como la naturaleza de las dificultades (epistemológica, psicológica, metodológica, etcétera) y las vías para superarlas.
4. La habilidad para resolver cualquier problema del curso escolar de Matemáticas.
- 5 La habilidad para organizar y conducir la actividad cognoscitiva de los alumnos, es decir, la habilidad para, apoyándose en los conocimientos emanados de la didáctica, la psicología y la pedagogía, elegir la variante óptima de enseñanza para las condiciones presentes, la habilidad para pasar de una forma de trabajo a otra, la habilidad para motivar a los estudiantes y mantener vivo su interés.
6. El empleo óptimo de todo un sistema de recursos didácticos y metodológicos para la enseñanza de las Matemáticas, es decir, de aquello que se conoce como tecnología educacional.
7. El conocimiento de las vías y formas para desarrollar y educar la personalidad de los estudiantes, en los marcos de la asignatura, esto es, para desarrollar en ellos los hábitos, habilidades y actitudes requeridos por los fines y objetivos de la enseñanza de las Matemáticas.

En los institutos pedagógicos de Rusia los futuros profesores toman por lo menos tres cursos fundamentales que pretenden abarcar los aspectos arriba señalados: "Metodología General de la Enseñanza de las Matemáticas", "Metodología Especial de la Enseñanza de las Matemáticas" y "Laboratorio de solución de problemas" En el caso del posgrado que se ofrece en la Universidad de Sonora, se ofrecen cursos análogos y los tópicos señalados se tratan en cursos tales como "Metodología de la investigación en Educación Matemática", "Didáctica del Álgebra", "Didáctica del Cálculo", "Didáctica de la Geometría".

Actualmente se investigan las principales habilidades metodológicas que debe poseer el profesor de Matemáticas. Algunas de ellas se enlistan a continuación

• Las habilidades psicológico-pedagógicas:

1. La habilidad para dirigir la actividad cognoscitiva de los estudiantes.
2. La habilidad para desarrollar la capacidad de reflexión en voz alta de los estudiantes.

3. La habilidad para formar el pensamiento abstracto de los alumnos.
 4. La habilidad para formar conceptos.
 5. La habilidad para utilizar los problemas y juegos recreativos como recurso para motivar a los estudiantes.
 6. Los hábitos profesionales del trabajo docente.
- Las habilidades educativas y formativas:
 1. La formación estética de los alumnos a través de las matemáticas.
 2. La formación de cualidades morales en la enseñanza de las Matemáticas.
 3. La educación científica a través de las matemáticas (el combate al misticismo de los números, por ejemplo).
 - Las habilidades metodológicas:
 1. La habilidad para encontrar en el contenido del material de estudio los momentos básicos, esenciales.
 2. La materialización de las relaciones interdisciplinarias en la enseñanza de las Matemáticas.
 3. La formación metodológica de los estudiantes.
 4. La habilidad para recurrir al historicismo.
 5. La versatilidad para utilizar la tecnología educacional.
 - Las habilidades matemáticas especiales:
 1. La habilidad para desarrollar las habilidades computacionales de los alumnos.
 2. La habilidad para exponer sus puntos de vista y argumentar sus opiniones.
 3. La habilidad para formar la convicción acerca de la necesidad de las demostraciones.
 4. La habilidad para interpretar gráficamente los procesos, fenómenos y regularidades matemáticas.
 5. La habilidad para emplear diferentes recursos matemáticos durante la solución de problemas en el curso de Matemáticas.
 6. La habilidad para formar el pensamiento lógico de los alumnos.
 7. La habilidad para formar el pensamiento espacial (geométrico) de los alumnos.
 - Habilidades politécnicas y profesionales:
 1. La habilidad para usar los materiales disponibles como recursos didácticos.
 2. La habilidad para organizar el gabinete (o Laboratorio) de Matemáticas como importante recurso didáctico.
 3. La habilidad para usar la Matemática en la profesión.
 - Las habilidades de investigación:
 1. La habilidad para realizar una investigación educativa en Matemáticas.

2. La habilidad para detectar los problemas susceptibles de investigación educativa.
3. La habilidad para diseñar un experimento educativo.
4. La habilidad para enseñar a los estudiantes a investigar.

Como ya lo señalamos anteriormente, una de las razones por las cuales este conjunto de habilidades se halla poco desarrollado en los profesores y en los investigadores reside en la falta de indicaciones y sugerencias de corte metodológico que ilustren la manera de dominar tales habilidades. Sin embargo, tales indicaciones no existen debido, sobre todo, a la falta de investigación en este campo. En efecto, están insuficientemente estudiados los casos en los que profesores de avanzada realizan uno u otra de tales habilidades, y no se conocen las regularidades que rigen el funcionamiento de la actividad del docente al estarlas implementando. Falta investigación básica que pueda aportar hechos y conocimientos al respecto, de manera que apoyándose en tales hechos y conocimientos sea posible estructurar un cuerpo teórico que tenga trascendencia práctica.

En el plano metodológico, la tarea consiste en formar profesores dinámicos, de iniciativa, críticos y creativos, que sean capaces de actualizar de manera independiente su arsenal de recursos metodológicos en concordancia con los cambios permanentes en las ciencias psicológico-pedagógicas y en los contenidos de la enseñanza.

Queremos finalmente señalar que, cualesquiera que sean las medidas que se tomen para perfeccionar la formación de los profesores de Matemáticas, al final de cuentas deberán reflejarse en un aspecto fundamental: el desempeño práctico cotidiano del maestro, como profesional en su área.

Referencias

1. Gúsiev V. A.: La formación metodológica de los futuros profesores de Matemáticas en los institutos pedagógicos. En: *Problemas actuales de la Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas*. Recopilación de artículos. Compiladores: N. S. Antónov y V. A. Gúsiev. Editorial "Prasvischénie". Moscú. 1985.
2. Jiménez R. J. R., Avila Godoy R.: Diplomado en Educación Matemática: una propuesta para la formación de profesores. En: *Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa*. Cuernavaca, Morelos, México. Julio de 1992.
3. Jiménez R. J. R., Avila Godoy R.: Actualización de los Módulos de Lectura para el curso "Fundamentos Teóricos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas". Trabajo en proceso. 1992.

USO DE LA CALCULADORA PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES APLICANDO LOS METODOS DE RUNGE-KUTTA.

Agustín Grijalva Montecarlo, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.

Introducción.

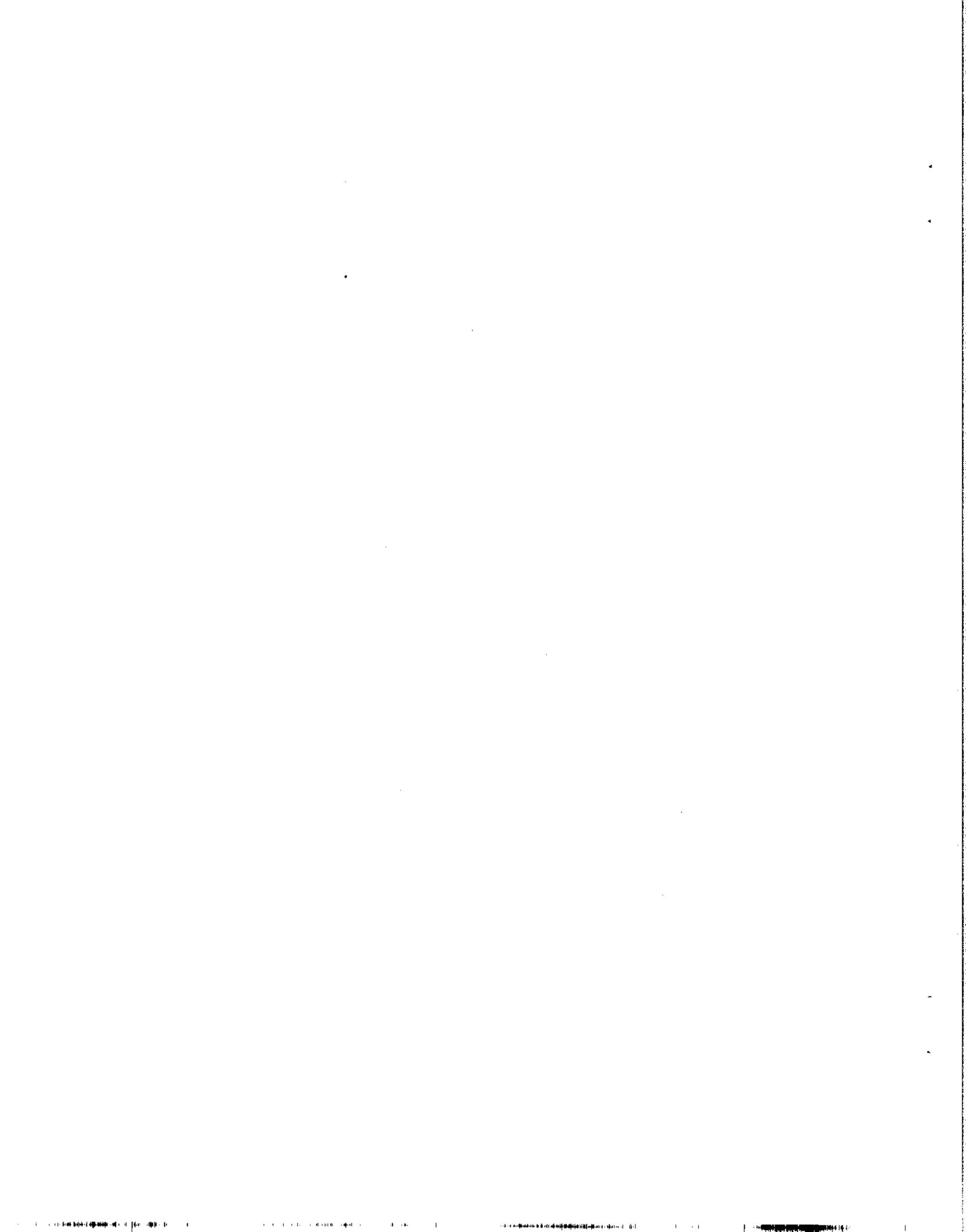
En la maestría en Matemática Educativa de nuestra universidad se formó, desde 1991, un grupo de trabajo que explora las posibilidades de usar la calculadora como auxiliar didáctico para el desarrollo de los diversos cursos en el aula. Como primera etapa en su investigación dicho grupo se plantea la elaboración de material escrito con apoyo en la calculadora para los algoritmos de los cursos de Ciencias e Ingeniería.

Entre tales trabajos se encuentra la resolución de ecuaciones diferenciales aplicando los métodos numéricos tradicionales como los algoritmos de Euler, Heun, Runge-Kutta, Adams, Milne, etc.

Aunque la computadora se ha convertido en un instrumento de primer orden en la resolución de problemas que en el pasado no se podían abordar nuestro planteamiento es que para la mayoría de ellos es suficiente una calculadora.

Como resultado de ello se cuenta con material escrito sobre los procesos numéricos de integración y de resolución de ecuaciones diferenciales, algunos de los cuales se han presentado en otros eventos como la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.

Los avances del proyecto han mostrado que las calculadoras no sólo son útiles para el rápido procesamiento de cálculos complejos sino que ofrece, entre otras, las siguientes ventajas: (1) formar y desarrollar las habilidades computacionales de los estudiantes, (2) formar y desarrollar sus habilidades algorítmicas y de programación, (3) superar la visión teórica de los cursos, que tradicionalmente dejan de lado los métodos numéricos y,



Para salvar esta dificultad existen un conjunto de métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales que tienen una exactitud equivalente a la serie de Taylor de tercero, cuarto, quinto o más alto orden pero sin involucrar derivadas superiores.

Estos métodos se basan en el desarrollo de diversas fórmulas cuyo principio lo encontramos en el trabajo de Runge en 1895 y continuados por Kutta en 1901.

Presentaremos a continuación la fórmula general de grado n para los métodos de Runge-Kutta. Obviaremos en cada caso (n=4 y n=5) demostrar los diferentes valores de los parámetros involucrados y nos limitaremos a mostrarlos.

Si consideramos el problema (1)-(2) los métodos de Runge-Kutta pueden ajustarse la fórmula general

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i, h)h$$

donde a $f(x_i, y_i, h)$ se le llama función incremento y puede interpretarse como el promedio de la pendiente sobre el intervalo. La función incremento se puede escribir en forma general como

$$f(x_i, y_i, h) = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \text{ en donde } a_i \text{ es constante para } i=1, 2, \dots, n \text{ y}$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + a_1 h, y_i + b_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + a_2 h, y_i + b_{21} k_1 h + b_{22} k_2 h)$$

$$k_n = f(x_i + a_{n-1} h, y_i + b_{n-1,1} k_1 h + b_{n-1,2} k_2 h + \dots + b_{n-1,n-1} k_{n-1} h).$$

Método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Los métodos de Runge-Kutta más utilizados son los de cuarto orden. Existen una infinidad de versiones de entre las cuales el siguiente es conocido como método RK clásico de cuarto orden:

$$y_{i+1} = y_i + h/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_{i+1}/2h, y_{i+1}/2hk_1)$$

$$k_3 = f(x_{i+1}/2h, y_{i+1}/2hk_2)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

Para las ecuaciones diferenciales ordinarias que son función sólo de x el método RK clásico de cuarto orden es equivalente a la regla de Simpson de 1/3.

Ejemplo 1: Caso Hewlett-Packard 42S. Resolver la ecuación diferencial $y' = 1/2xy$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 1$.

Este modelo de calculadora opera con la llamada lógica polaca inversa que tiene entre sus principios colocar primero los números que van a operarse y posteriormente las operaciones mismas. Para ello se emplea la tecla enter como se ilustra en el siguiente ejemplo: para sumar los números 4 y 5 presionamos en secuencia las teclas 4 enter 5 y por último +. La calculadora tiene una capacidad de más de 7 kbytes de memoria y sus programas pueden contar con tantos pasos como memoria disponible exista.

Por medio de la función ISG es posible introducir un contador que permite correr subrutinas tantas veces como se requiera. Para el problema que nos ocupa el diseño presentado consta de 73 pasos o líneas de programa.

<u>01</u> LBL "RK4"	<u>02</u> INPUT "A"	<u>03</u> INPUT "B"
<u>04</u> INPUT "N"	<u>05</u> INPUT "XK"	<u>06</u> INPUT "YK"
<u>07</u> RCL "B"	<u>08</u> RCL- "A"	<u>09</u> RCL / "N"
<u>10</u> STO "H"	<u>11</u> RCL "N"	<u>12</u> 1
<u>13</u> -	<u>14</u> 1000	<u>15</u> /
<u>16</u> STO "T"	<u>17</u> LBL 01	<u>18</u> XEQ F
<u>19</u> ISG "T"	<u>20</u> GTO 01	<u>21</u> VIEW "YK"

22 STOP	23 LBL F	24 0.5
25 RCL X "XK"	26 RCLX "YK"	27 STO "K1"
28 0.5	29 RCLX "H"	30 RCL+ "XK"
31 0.5	32 RCLX "H"	33 RCLX "K1"
34 RCL+ "YK"	35 X	36 0.5
37 X	38 STO "K2"	39 0.5
40 RCLX "H"	41 RCL+ "XK"	42 0.5
43 RCLX "H"	44 RCLX "K2"	45 RCL+ "YK"
46 X	47 0.5	48 X
49 STO "K3"	50 RCL "H"	51 RCL+ "XK"
52 RCL "H"	53 RCLX "K3"	54 RCL+ "YK"
55 X	56 0.5	57 X
58 STO "K4"	59 2	60 RCL "K2"
61 RCL+ "K3"	62 X	63 RCL+ "K1"
64 RCL+ "K4"	65 6	66 /
67 RCLX "H"	68 RCL+ "YK"	69 STO "YK"
70 RCL "XK"	71 RCL+ "H"	72 STO "XK"
73 PSE	74 END	

TRIGONOMETRIA CON REGLA Y COMPAS

PROFR. OSCAR SAN MARTIN SICRE

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

El presente reporte de investigación constituye un avance parcial dentro del proyecto intitulado "algunas implicaciones didácticas de una nueva - presentación para la definición de función trigonométrica de un ángulo agudo" que se realiza en esta Institución.

El trabajo se encuentra fundamentado esencialmente sobre tres elementos: 1). El concepto de enseñanza por ciclos, 2). La llamada "Algebra con regla y - compás" de las construcciones geométricas con Herramientas Euclidianas y - 3). Una interpretación geométrica de las seis funciones trigonométricas de un ángulo agudo.

Estos elementos constituyen un marco teórico para un propuesta de enseñanza-aprendizaje activo para algunos contenidos trigonométricos.

EL CONCEPTO DE ENSEÑANZA POR CICLOS

Este concepto se remonta al siglo XVII, aparece expresado en la obra "Didáctica Magna" de Jan Amos Komenski más conocido como Comenius.

Se enseña por ciclos, cuando un mismo tema o contenido se aborda y se repite en los diferentes grados de un sistema escolar, pero con niveles cada vez más amplios de dificultad. La maestra Emma Castelnuovo en su obra "Didáctica de la Matemática Moderna" (1) afirma que la enseñanza de la geometría en Italia se desarrolló por el método cíclico "...Las nociones aprendidas por vía experimental en la escuela elemental se vienen reorganizando y desarrollando en el curso de geometría intuitiva; estas mismas nociones son después reanudadas en el curso secundario superior y encuadradas en un sistema hipotético deductivo..." (Subrayado no aparece en original).

De manera similar, una enseñanza por ciclos de la trigonometría elemental pudiera contemplar por ejemplo, un ciclo de verificación empírica de hechos y otro ciclo para demostraciones y contenidos más formales.

En este punto, es de hacer notar, que se puede establecer una concordancia o paralelismo entre el sistema de enseñanza por ciclos, y algunos elementos de la escuela psicogenética-constructivista de Piaget, a saber: A la etapa de las operaciones lógicas concretas de esta última podría asociarse un-

conjunto de ciclos empíricos dentro del aula, y a la etapa de las operaciones lógicas formales podría hacersele corresponder un grupo de ciclos lógicos o hipotético-deductivos.

ALGEBRA CON REGLA Y COMPAS

Como es conocido, en el proceso que condujo a la solución de los famosos problemas clásicos de construcciones geométricas de los griegos (duplicación, trisección y cuadratura) hizo su aparición la denominada "Algebra con regla y compás". Esta álgebra nos permite resolver problemas geométricos con herramienta algebraica y viceversa. Indicamos a continuación algunos de los elementos de la misma. (Figs. 1 a 6).

Dados los segmentos de longitudes a , b , 1 ; podemos construir con regla y compás los segmentos de longitudes

$$a + b, \quad a - b, \quad 2a \quad (\text{Fig. 1})$$

$$a \cdot b, \quad a^2 \quad (\text{Figs. 2 y 3})$$

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{b}{a} \quad (\text{Figs. 4 y 5})$$

$$\text{y } \sqrt{a} \quad (\text{Fig. 6})$$

La manera de construir $a + b$, $a - b$ y $2a$ se deriva fácilmente de la Fig. 1

Para obtener $a \cdot b$, a^2 , $\frac{1}{a}$ y $\frac{b}{a}$ se utilizan los triángulos semejantes arbitrarios ABE y ACD . En este caso hemos seleccionado triángulos semejantes que también son rectángulos, porque permiten aprovechar papel cuadrado para facilitar las construcciones.

Para dibujar \sqrt{a} se utilizan los triángulos semejantes ABD y BCD y teoremas de la geometría elemental.

Notas:

1. Las instrucciones para multiplicar, dividir y obtener raíz cuadrada pueden indicarse más explícitamente.

2. Desde un punto de vista formal bastaría con indicar las construcciones correspondientes a $a + b$, $a - b$, -

FIG. 1

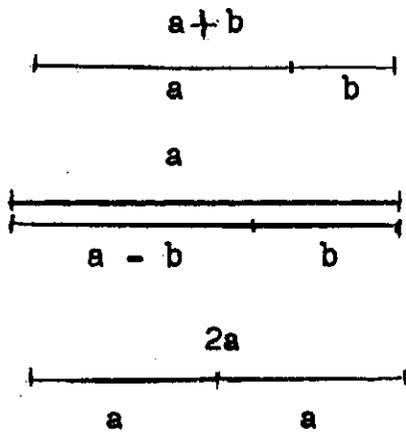


FIG. 2

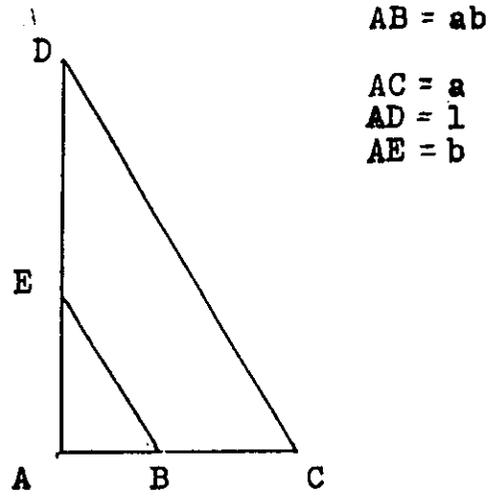


FIG. 3

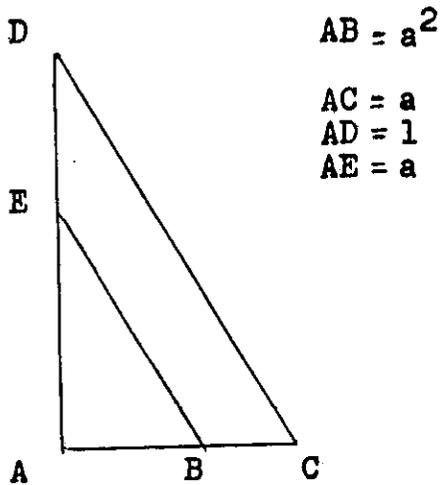


FIG. 4

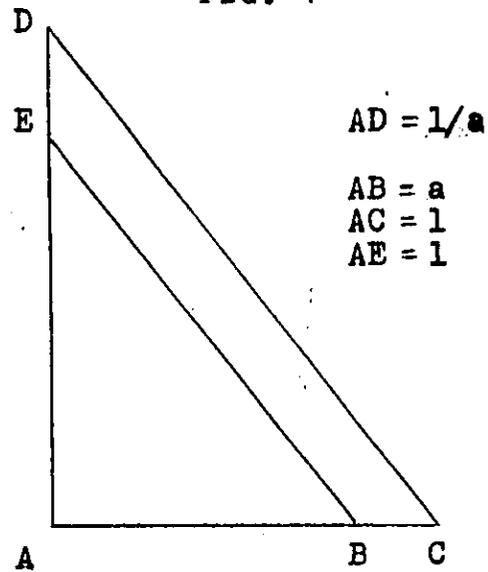


FIG. 5

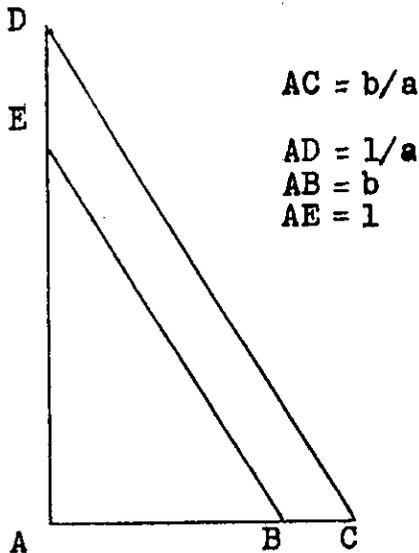
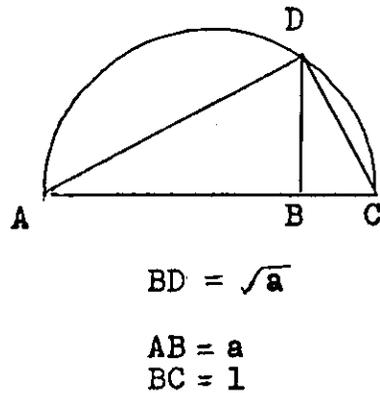


FIG. 6



Un trabajo como el que se presenta, implica una revisión total de programas y contenidos. Este estudio está en proceso de realización y de producción de alternativas viables. Como un avance del mismo se presenta una manera de trabajar empíricamente el tema de las identidades trigonométricas.

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Un tratamiento usual de este tema es el siguiente:

1. Se define lo que es una identidad trigonométrica.
2. Se presentan listas de identidades trigonométricas.
3. Se demuestran las identidades de las listas.

La demostración usual de las mismas consiste en una manipulación algebraica simple donde se aplican: sustituciones, el Teorema de pitágoras, otras identidades en uno de los miembros de la identidad hasta transformarlo en el otro.

El enfoque empírico que se propone para este tema reemplaza la demostración por una verificación empírica de la identidad para un ángulo arbitrario.

Para la verificación deberán utilizarse, regla y compás; - algebra con regla y compás y la interpretación geométrica de las 6 funciones como segmentos provista en la Figura 7.

Ejemplo: Verifique que $\text{Sen } A \text{ Csc } A = 1$

Solución: (Ver Figura 8)

1. Se dibuja una figura como la Fig. 7 para un ángulo arbitrario A .
2. Se dibuja el primer cuadrante de un sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares.
3. Con ayuda del compás se traslada el segmento BD ($\text{Sen } A$) al origen del sistema de coordenadas y se coloca sobre el eje X del mismo. Originará el segmento OD' .
4. Con ayuda del compás se traslada el segmento unitario AB al origen del sistema de coordenadas y se coloca sobre el eje Y . (Sea OA' el segmento correspondiente).
5. Con la regla se dibuja el segmento $D'A'$.
6. Se traslada hacia el origen del sistema de coordenadas el segmento BE ($\text{Csc } A$) y se coloca sobre el eje Y . Sea OE' el segmento correspondiente.

$a \cdot b$, $\frac{b}{a}$ y \sqrt{a} pero por razones didácticas se han -
 incluido las correspondientes a $2a$, a^2 y $\frac{1}{a}$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO AGUDO-UNA INTERPRETACION GEOMETRICA

La figura 7, que se presenta a continuación consiste en un semicírculo de diámetro AB unitario con dos perpendiculares levantadas en los extremos del diámetro. En esta figura los 5 triángulos rectángulos que aparecen son semejantes, lo que aunado al diámetro unitario permite interpretar como segmentos las 6 funciones trigonométricas de un ángulo agudo de manera fácil. Se indican a continuación los segmentos antes mencionados.

Sen A =	BD	Cos A =	AD
Tan A =	BC	Cot A =	AE
Sec A =	AC	Csc A =	BE

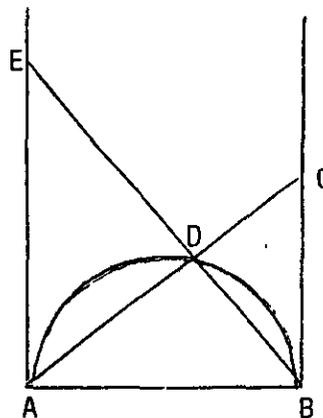


Fig. 7

UN CICLO EMPIRICO PARA LA TRIGONOMETRIA ELEMENTAL

Los objetivos principales de este trabajo son tres:

1. Aportar elementos para la introducción de un ciclo experimental o empírico para los contenidos trigonométricos básicos.
2. Aumentar el campo de las opciones didácticas disponibles para la enseñanza de la trigonometría.
3. Someter a análisis, discusión y crítica constructiva competente la presente aportación.

7. Con el compás y la regla se dibuja la paralela a $D'A'$ que pasa por E' y que determinará sobre el eje X un punto que representaremos B' . El segmento OB' corresponde precisamente al producto $BD \cdot BE$, esto es, $(\text{Sen } A) \cdot (\text{Csc } A)$.

8. Se verifica con el compás que el segmento OB' también es unitario

Las demás identidades pueden verificarse de manera similar.

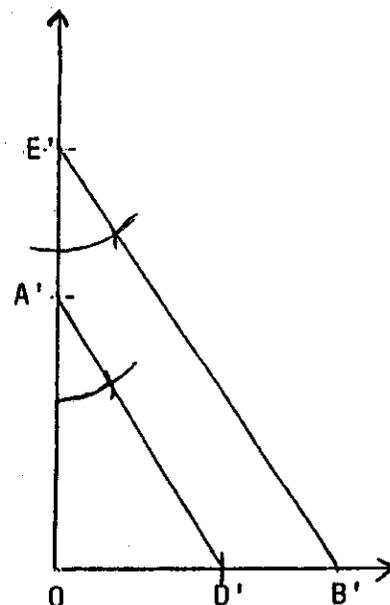


FIGURA 8

BIBLIOGRAFIA

COURANT, Richard y Herbert Robbins. ¿Qué es la Matemática? Ed. Aguilar, Madrid, 1979.

CASTELNUOVO, Emma. Didáctica de la Matemática Moderna. Ed. Trillas. México. 1984.

ANFOSSI, Agustín. Trigonometría Rectilínea. Ed. Progreso. México. 1947.

KAJ L., Nielsen. Trigonometría Moderna. Ed. CECOSA. México, 1974.

GONZALEZ, Marcela. et.al. Matemáticas I Vol. 2.UPN. SEP. México. 1980.

SAN MARTIN S.,Oscar. Transportador Trigonométrico Cuadrático. Memoria IV - Reunión Centroamericana y del caribe sobre Formación de Profesores e - Investigación en Matemática Educativa. México; 1990.

SAN MARTIN S., Oscar. Sobre la definición de función trigonométrica de un ángulo agudo - Una propuesta pedagógica. Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Cuernavaca, Morelos, México. 1992.

La habilidad computacional, ¿qué es?

JOSÉ RAMÓN JIMÉNEZ RODRÍGUEZ

Departamento de Matemáticas.

Programa de Maestría en Matemática Educativa.

Universidad de Sonora, México.

Introducción

Uno de los objetivos que actualmente se plantean ante la enseñanza de las Matemáticas consiste en *desarrollar las habilidades computacionales de los estudiantes* [1, 2]. Sin embargo, ¿qué significa esto? He tenido oportunidad de escuchar algunas versiones al respecto, no siempre coincidentes. Esto me ha motivado a escribir el presente trabajo, en el que intento exponer mi propio punto de vista.

Niveles de aplicación

Mi primera opinión en torno a este problema es que el objetivo de desarrollar las habilidades computacionales de los estudiantes debe ser comprendido a varios niveles. No es lo mismo hablar de las habilidades computacionales del escolar que de las del estudiante de nivel medio o del nivel superior. Por ello, en cada uno de los niveles señalados el objetivo en cuestión debe adquirir una connotación especial o específica.

Por ejemplo, en el caso del nivel escolar elemental estoy de acuerdo en que la interpretación de tal objetivo significa *desarrollar las habilidades para el cálculo mental y la estimación de los resultados*, fundamentalmente de las operaciones aritméticas. Esta interpretación, sin embargo, no es absoluta, ya que en los niveles medio y medio superior las operaciones que efectúa el estudiante (y para las que también debe desarrollar las habilidades referidas) no son solamente aritméticas: hay operaciones con funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, raíces cúbicas y cuadráticas, etcétera.

La habilidad para el cálculo mental y la estimación de resultados debe desarrollarse de manera permanente en todos los niveles, si bien sus soportes se construyen en los inferiores.

Pero la habilidad computacional significa mucho más que la habilidad para el cálculo mental y la estimación. La habilidad computacional es un término surgido a raíz de la existencia de la tecnología computacional. Como sabemos, ésta ha pasado por diferentes etapas en su desarrollo: desde los primeros instrumentos que permitían realizar exclusivamente cálculos aritméticos hasta las modernas computadoras y calculadoras, capaces de realizar operaciones que no son exclusivamente aritméticas. No es por lo tanto extraño que la habilidad computacional esté directamente ligada al manejo de dicha tecnología.

Manejo de tecnología computacional

En efecto, la habilidad computacional en nuestros días supone el *manejo eficiente de la tecnología computacional como herramienta que permite realizar cálculos*. Actualmente, con la habilidad computacional se relacionan las siguientes dos importantes cualidades:

- la "cultura algorítmica", entendida ésta como la capacidad del estudiante para interpretar, desarrollar y crear algoritmos;

- la *habilidad de programación*, esto es, la habilidad para traducir un algoritmo a un programa realizable en la tecnología computacional, con la exigencia de que el programa sea óptimo.

Me parece que aquí también habría que incluir una tercera cualidad, a saber: *la habilidad para usar a la tecnología computacional como laboratorio*, es decir, como instrumento para la búsqueda, exploración e investigación de regularidades, patrones o resultados.

Estas últimas connotaciones de la habilidad computacional son exclusivas de los niveles medio superior y superior, ya que las posibilidades para desarrollarlas en los niveles básico y medio básico no son muchas.

A continuación, intentaré ilustrar en base a ejemplos concretos lo que significan cada una de las componentes de la habilidad computacional. Es necesario aclarar que los ejemplos ilustrativos que ofrezco están referidos a un contexto muy concreto, como es el de utilizar a las calculadoras en calidad de tecnología computacional. Esto se explica por mi interés personal en investigar las posibilidades de las calculadoras como instrumento didáctico. En particular, los programas que más adelante aparecen están diseñados para la calculadora CASIO fx-7000G.

La habilidad para optimizar los cálculos

La habilidad para optimizar los cálculos es a la vez la habilidad para usar de manera óptima a las calculadoras como instrumento de cómputo. Esto, a su vez, significa aplastar el mínimo número de teclas posible para efectuar un cálculo. En otro trabajo [3] he analizado el caso en que los estudiantes, usando calculadoras, aplastan un total de 46 teclas para evaluar $f(x) = 4x^3 - 180x^2 + 2000x$ en $x = 20$, cuando el problema se puede resolver aplastando únicamente 27 teclas. En el caso de una calculadora programable, el problema se reduce mucho más, no en términos del número de teclas, sino de repetir la fórmula para diversos valores de x .

Análogamente, en [4] he mostrado cómo una serie de operaciones complicadas pueden efectuarse con facilidad incluso en las calculadoras no programables.

La habilidad para implementar algoritmos de manera óptima

Muchas veces, la implementación directa de un algoritmo no es la óptima. Adaptaciones alternas del algoritmo pueden hacer que su implementación requiera de menos pasos de programa y de menos memoria usada.

Por ejemplo, consideremos el algoritmo de integración numérica por el método de Gauss-Legendre de cuarto orden de acuerdo con la fórmula

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \left[0.236926885 f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} 0.906179846\right) + \right. \\ + 0.47862867 f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} 0.53846931\right) + \\ + 0.568888889 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \\ + 0.47862867 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} 0.53846931\right) + \\ \left. + 0.236926885 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} 0.906179846\right) \right]$$

Aquí la función $f(x)$ se integra en el intervalo $[a, b]$, para lo cual se toman los valores de la función en cada uno de los puntos $\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} 0.906179846$, $\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} 0.53846931$, $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} 0.53846931$ y $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} 0.906179846$. Para aumentar el grado de exactitud de la fórmula, por lo común en intervalo $[a, b]$ se subdivide en m segmentos iguales de longitud $h = \frac{b-a}{m}$ y se aplica la fórmula para cada uno de ellos.

La implementación directa del algoritmo, es decir, su traducción a programa para la calculadora en la forma en aparece arriba escrito, requiere de una gran cantidad de memoria. De hecho, casi se agota la memoria de una calculadora programable tan versátil, como la CASIO fx-7000G.

Sin embargo, una adaptación del algoritmo requiere de mucho menos memoria para implementarlo. En principio, la estructura de las fórmulas que nos permiten obtener los diversos valores de x_i es básicamente la misma. Además, observando que $b_i = a_i + h$ y que por lo tanto

$$\frac{a_i + b_i}{2} \pm \frac{b_i - a_i}{2} C = a_i + H \pm H C = a_i + (1 \pm C) H \quad (H = \frac{h}{2})$$

resulta mucho más cómodo expresar en esta última forma la expresión para evaluar los diferentes x_i . En consecuencia, el algoritmo requiere ahora de mucho menos memoria de programa. El programa respectivo se transcribe a continuación, con algunos detalles que ilustran la manera óptima de usar la tecnología computacional en el caso de la implementación de un algoritmo.

Programa para la fórmula de Gauss-Legendre de cuarto orden

```

    "A" ? → A : "B" ? → B : "M" ? → M : (B-A) ÷ 2 M → H :
Lbl 1 : .53846931 → C : 4 → N :
Lbl 2 : A + (1 + C) H → X :
Lbl 3 : ..... → S [ N ] : N = 3 ⇒ Goto 4 :
    N = 1 ⇒ Goto 5 : N = 0 ⇒ Goto 6 :
    - C → C : Dsz N : Goto 2 :
Lbl 4 : .906179846 → C : 2 → N : Goto 2 :
Lbl 5 : 0 → C : 0 → N : Goto 2 :
Lbl 6 : F + .56888889 S [ 0 ] + .236926885 ( S [ 1 ] + S [ 2 ] ) +
    .47862867 ( S [ 3 ] + S [ 4 ] ) → F :
    Dsz M : Goto 7 : H F → I : "I=" ▲ I ▲
Lbl 7 : A + 2 H → A : Goto 1

```

Este programa usa 237 bytes de memoria, quedando 185 bytes libres para poder incorporar una amplia gama de funciones integrando.

Distribución de los registros de memoria

- Los valores de a , b y m se guardan en los registros A, B y M, respectivamente.
- El valor de $h = \frac{b-a}{2m}$ se guarda en el registro H.
- El registro A sirve al principio para guardar el valor de a , pero luego se usa para guardar el valor a_i del extremo izquierdo de cada uno de los segmentos de integración.

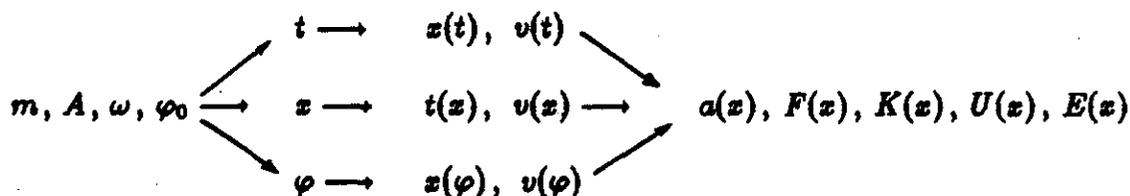
- El registro C se usa para guardar los valores 0, ± 0.53846931 y ± 0.906179846 de manera alternada.
- El registro X se usa siempre para guardar el valor corriente del argumento x_i .
- Los valores de $f(\frac{a_i+b_i}{2})$, $f(\frac{a_i+b_i}{2} - \frac{b_i-a_i}{2} \cdot 0.906179846)$, $f(\frac{a_i+b_i}{2} + \frac{b_i-a_i}{2} \cdot 0.906179846)$, $f(\frac{a_i+b_i}{2} - \frac{b_i-a_i}{2} \cdot 0.53846931)$ y de $f(\frac{a_i+b_i}{2} + \frac{b_i-a_i}{2} \cdot 0.53846931)$ se guardan en los registros S[0], S[1], S[2], S[3] y S[4], respectivamente.
- El valor aproximado de la integral se guarda en el registro I.
- El valor de m sirve a la vez como contador de ciclos, y su valor corriente se guarda en el mismo registro M.
- El valor de $n = 4$ también se usa como contador de puntos, y su valor corriente se guarda en el mismo registro N.
- El registro F sirve para acumular las sumas iteradas en cada segmento.

La habilidad para crear algoritmos

La solución de problemas es un componente esencial de la formación matemática. Se reconoce que la habilidad para resolver problemas es también la habilidad para asimilar el algoritmo de solución de tal o cual clase de problemas. En este sentido, es importante lograr que el estudiante comprenda el algoritmo que subyace en el proceso de solución de una cierta clase de problemas, y no solamente que se limite a resolver una gran cantidad de ejercicios tipo, sin comprender lo que todos ellos tienen en común: el algoritmo que los resuelve.

Recientemente tuve una experiencia interesante al respecto con estudiantes de preparatoria en un curso de Física [5]. Al estudiar el movimiento del péndulo, me interesaba que comprendieran que todos los problemas que iban a resolver podían ubicarse dentro de un esquema general y, no sin dificultades, logré que construyeran tal esquema. Como resultado, fué para ellos fácil diseñar un algoritmo para resolver, con auxilio de la calculadora, todo el conjunto de problemas propuesto en un tiempo mínimo.

El programa que diseñaron les permitió calcular los valores de las diferentes magnitudes físicas que caracterizan al movimiento del péndulo (posición, velocidad, aceleración, fuerza, energía cinética, energía potencial, energía mecánica total) para diferentes valores del tiempo t , de la posición x o de la fase $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Era la implementación del siguiente esquema ramificado:



"m" ? → M : "A" ? → B : "W" ? → W : "Ø" ? → Z :
 Lbl 1 : "P" ? → I : I = 0 ⇒ Goto 3 :
 B cos (WI + Z) → X : "X=" Δ X Δ

Lbl 2 : - WB sin (WI + Z) → V : "V=" ▲ V ▲ Goto 5 :
 Lbl 3 : "X" ? → X : X = 0 ⇒ Goto 4 :
 (cos⁻¹ (X ÷ B) - Z) ÷ W → I : "I=" ▲ I ▲
 - WB sin (WI + Z) → V : "V=" ▲ V ▲ Goto 5 :
 Lbl 4 : "P" ? → P : P = 0 ⇒ Goto 6 :
 B cos P → X : "X=" ▲ X ▲
 - WB sin P → V : "V=" ▲ V ▲
 Lbl 5 : - W² X → A : "A=" ▲ A ▲
 M A → F : "F=" ▲ F ▲
 MV² ÷ 2 → K : "K=" ▲ K ▲
 MW² X² ÷ 2 → U : "U=" ▲ U ▲
 MW² A² ÷ 2 → E : "E=" ▲ E ▲ Goto 1 :
 Lbl 6: "END" ▲

Esta experiencia me condujo a formular la hipótesis de que, cuando los estudiantes captan el algoritmo que une en un todo a un conjunto de problemas , y sobre todo, cuando son ellos mismos (auxiliados por el profesor, por supuesto) quienes diseñan el programa que implementa dicho algoritmo, el aprendizaje de la solución de problemas puede facilitar el proceso de formación de la habilidad general para resolver problemas.

La habilidad para explorar

Existen estudios que muestran las enormes posibilidades que ofrecen las calculadoras para explorar patrones y regularidades matemáticas ([6], [7], [8]). Estos estudios, sin embargo, son en realidad actividades propuestas por el profesor para que sean realizadas por el estudiante. Así por ejemplo, en [6] se sugiere usar la calculadora para explorar diferencias del tipo

$$\begin{aligned}
 &8^2 - 3^2 \\
 &78^2 - 23^2 \\
 &778^2 - 223^2 \\
 &7778^2 - 2223^2 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}
 &12345679 \times 9 \\
 &12345679 \times 18 \\
 &12345679 \times 27 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

En los trabajos [7] y [8] se sugiere usar a la calculadora para aproximarse intuitivamente a la idea de límite y obtener algunos límites comúnmente usados en los cursos del nivel superior.

Aparte de ayudar a los estudiantes a comprender conceptos difíciles (como el límite) apoyándose en las calculadoras, también es deseable desarrollar en ellos la habilidad para usar a las calculadoras como instrumento para explorar e investigar. La situación en que estudiante construye las bases de

su propio conocimiento explorando de manera independiente es sumamente deseable. El problema y el reto radican entonces en organizar adecuadamente la actividad de los estudiantes al usar las calculadoras, de tal manera que dicha actividad contribuya a formar en ellos la habilidad para experimentar y explorar regularidades.

Conclusiones

La habilidad computacional, tal como se entiende actualmente en los marcos del uso de la tecnología computacional, y especialmente de las computadoras y calculadoras, es un concepto complejo que involucra al menos las siguientes tres componentes importantes: la habilidad para agilizar y optimizar los cálculos, la habilidad para instrumentar y diseñar algoritmos de manera óptima, y la habilidad para usar la tecnología computacional en calidad de laboratorio para la exploración, la indagación y la formulación de conjeturas. Probablemente existan otras componentes que, por el momento, no hayan sido estudiadas. Las tres que mencioné, sin embargo, ya plantean ante el profesor de Matemáticas problemas interesantes, tales como: investigar las estrategias óptimas para formar y desarrollar en los estudiantes las habilidades referidas, esclarecer el lugar y el papel que debe jugar la enseñanza de las Matemáticas en la formación y desarrollo de dichas habilidades, encontrar el material de estudio concreto que permitirá materializar las estrategias propuestas, elaborar el material didáctico adecuado a tales tareas, etcétera. Un campo interesante y fecundo está abierto a la creatividad de los profesores entusiastas.

Referencias

1. National Council of Teachers of Mathematics.: Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. 1989.
2. National Council of Teachers of Mathematics.: New Goals for Mathematics Science Education. 1983.
3. Jiménez Rodríguez J. R.: La calculadora y la cultura computacional: una experiencia en el aula. *Matemáticas*. Vol. 2, No. 20. Septiembre de 1990.
4. Jiménez Rodríguez J. R.: La calculadora como recurso didáctico en la enseñanza de las Matemáticas. Módulo de Lecturas No. 4 para el curso "Introducción al uso de los recursos computacionales" de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa. Departamento de Matemáticas. 1991.
5. Jiménez Rodríguez, J. R.: Hacia una metodología para la enseñanza de la Física con apoyo en la calculadora: el péndulo simple. En: *Memorias del XXXV Congreso Nacional de Física*. Puebla, Pue. Octubre de 1992.
6. Wenzelburger G., Elfriede.: Guía práctica para el uso de la calculadora en la enseñanza de la Matemática. Manuscrito original del autor. 1989.
7. Flores P., Alfinio.: Las calculadoras en el Cálculo: el límite. *Educación Matemática*. Vol. 3, No. 1. Abril de 1991.
8. Jiménez R., J. R.: Derivando con la calculadora. *Educación Matemática*. Vol. 2, No. 3. Diciembre de 1990.

La computadora en la enseñanza de las matemáticas

Dos aplicaciones con Logo

M. C. José Luis Díaz Gómez
Departamento de Matemáticas.
Universidad de Sonora.

Introducción

Los problemas de aprendizaje de conceptos matemáticos han sido estudiados desde distintos puntos de vista. En particular uno que ha sido impulsado debido a los avances tecnológicos es el que relaciona la visualización con el aprendizaje de las matemáticas.

Para este propósito la visualización es considerada en un amplio sentido e incluye la perspectiva psicológica y la educación matemática.

Desde el punto de vista psicológico la visualización involucra un pensamiento figurativo y un operativo. El pensamiento figurativo se relaciona con patrones estáticos e imágenes, mientras que el pensamiento operacional trata con patrones de objetos en movimiento y la manipulación de imágenes visuales.

La visualización desde este punto de vista juega un papel más allá de la simple percepción, siendo un apoyo a la formación de una *imagen mental* de un concepto. De hecho Piaget e Inhelder (1956), afirman: "*La imagen ya nos es interpretada como una extensión de la percepción sino que tiende a adquirir el estatus de símbolo ... Las imágenes son un instrumento del conocimiento y por tanto dependen de funciones cognoscitivas*".

Desde la perspectiva de la educación matemática, la visualización involucra la habilidad de interpretar y entender información figurativa usada en trabajos geométricos; por ejemplo gráficas, mapas, y diagramas de todos tipos, así como la habilidad para conceptualizar y traducir relaciones abstractas e información no figurativa en términos visuales. (Bishop, 1963).

En la enseñanza de las matemáticas, el modelo de utilizar representaciones de objetos concretos y semi-concretos para facilitar el proceso de la adquisición de conceptos abstractos e ideas es ampliamente aceptada. La visualización es una componente central de muchos procesos para la transición del modo de pensamiento concreto al abstracto. Es una herramienta para representar ideas matemáticas e información, por ejemplo, los diagramas de Venn para ilustrar la intersección y unión de conjuntos, diagramas de árbol para analizar nociones de combinatoria y probabilidad y diagramas como ayuda para resolver problemas.

Richardson (1977) clasifica el aprendizaje individual de acuerdo con tres modos de representación, identificadas como verbal, gráfica (visual) y una mezcla que combina las dos representaciones. Los tres modos no son disjuntos más bien se pueden pensar como que apuntan a un *continuum* visual/no visual. Ben-Chaim (1986) reporta resultados que sustentan ésta clasificación. Las estrategias de enseñanza que usan la visualización son necesarias especialmente para la verbalización y aquellas que mezclan los dos modos desarrollan las habilidades espaciales. (Ben-Chaim, et al, 1989).

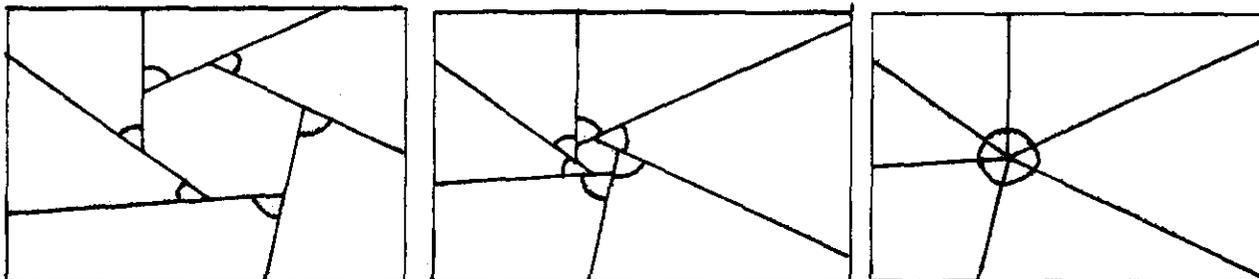
Tomando en consideración los resultados y marco teórico de los autores señalados, los cuales hacen un énfasis especial en el papel que juega la visualización de conceptos matemáticos para el aprendizaje de los mismos, se presenta en este escrito una forma de utilizar la visualización para la enseñanza de la geometría plana en un ambiente de "papel, lápiz y computadora".

1.-Visualización Relacionada a Conceptos de Geometría Plana con Microcomputadora.

Muchas aplicaciones de la computadora en la enseñanza de las matemáticas utilizan el "acercamiento" ("*zooming in*") hacia una parte de una gráfica para estudiar características específicas de la gráfica (e.g. Montaner, 1987). Los ejemplos más comunes usan la computadora para efectuar acercamientos para calcular las raíces de un polinomio y otras funciones (e.g. Friesen, 1986). Raramente se utiliza la computadora para realizar alejamientos ("*zooming out*") de una gráfica o de una figura para estudiar propiedades de la figura. Una importante excepción a esto es el uso de la computadora en el estudio de los fractales. (Para una ilustración de este uso vea "*The Beauty of Fractals*", H. O. Peitgen and P. H. Richter, Springer-Verlag, 1986). Uno de los propósitos de este artículo es ilustrar de que manera el potencial de la técnica del alejamiento se puede implementar en la computadora, y utilizado por los profesores de matemáticas para estudiar las características de muchas figuras geométricas. A este método de estudiar las figuras geométricas le llamaremos el "Método de Expansión". La implementación del método en la computadora se realizó con el lenguaje LOGO.

El "Método de Expansión".

El "método de expansión" esencialmente consiste en seleccionar un punto y continuamente "dilatarse" el plano sobre el punto utilizando razones cada vez menores. En la computadora, las figuras se hacen cada vez más pequeñas dando la impresión de un alejamiento. Puesto que la imagen que se obtiene en cualquier etapa es simplemente una dilatación de la imagen original, las dos imágenes son matemáticamente semejantes. Específicamente, las medidas de los ángulos correspondientes en las dos imágenes permanecen invariantes (Martin, 1982). El método de expansión se ilustra en la Figura 1. La computadora dibuja un exágono, con sus seis ángulos externos, que se extienden infinitamente (Figura 1a). Reduciendo la escala lineal de la gráfica la computadora produce imágenes cada vez menores, una de las cuales se muestra en la Figura 1b. El exágono se hace más pequeño a medida que nos alejamos de él.

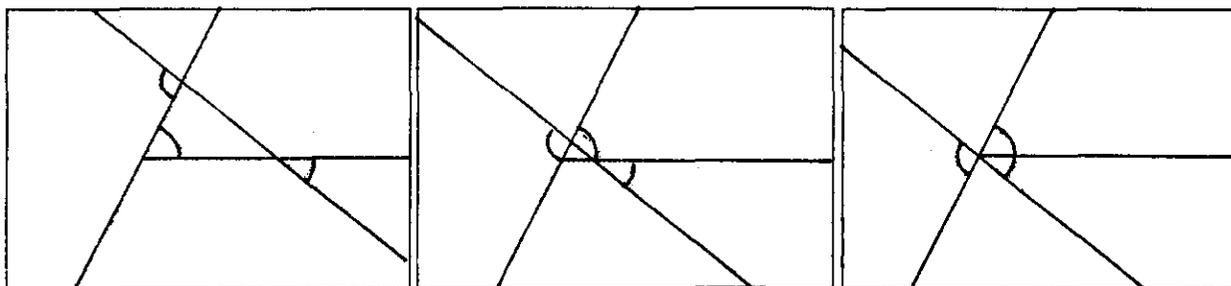


Sin embargo, los ángulos se alargan hacia los lados de la pantalla y parecen ser del mismo tamaño (puesto que los ángulos se extienden infinitamente y son invariantes bajo la dilatación del alejamiento). Después de repetidas reducciones de la escala la computadora finalmente "converge" a la imagen mostrada en la figura 1c. Nótese que el exágono aparece como un punto (el punto fijo de la dilatación) pero sus seis ángulos externos aún son visibles. Este ejemplo de alejamiento proporciona al profesor un agradable método para ilustrar a los alumnos la proposición de que la suma de los ángulos externos de un exágono convexo es de 360 grados.

Es claro que este método no nos proporciona una "demostración", pero sí una potente analogía por medio de la cuál se pueden ilustrar muchos teoremas de geometría a cualquier nivel escolar. El programa en LOGO que se escribió produce la serie de imágenes que se muestran en la Figura 1. También produce los siguientes cuatro ejemplos del "método de expansión".

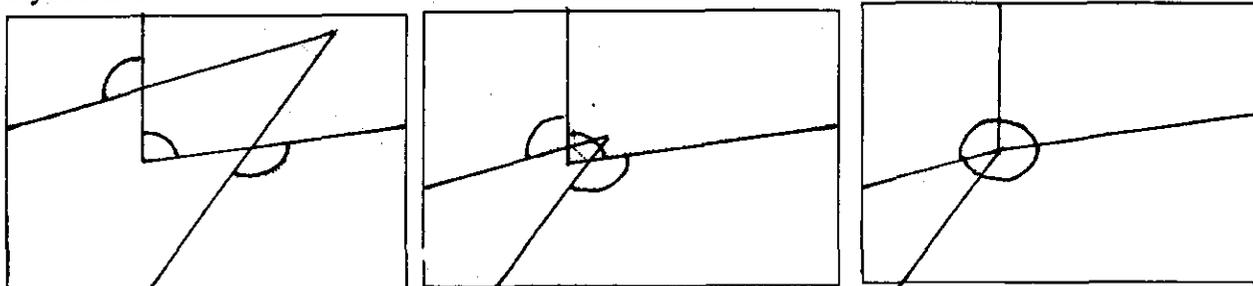
Ejemplo 1. *Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.*

La imagen de la Figura 2 ilustra esta proposición. El ángulo externo se marca como 1, los ángulos no adyacentes se marcan con los números 2 y 3. Cuando aplicamos el alejamiento el triángulo se contrae a un punto y los ángulos 2 y 3 parecen converger formando el ángulo 1.



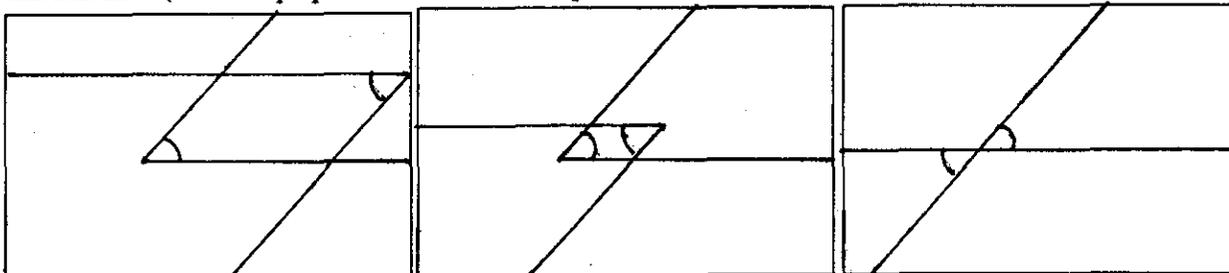
Ejemplo 2. *La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es de 360 grados.*

La imagen de la figura 3 nos ilustra esta proposición. Se dibuja un cuadrilátero arbitrario. Se marcan dos de los ángulos interiores como 1 y 2, mientras que los ángulos opuestos a los otros dos interiores como 3 y 4. Al efectuar el alejamiento, el cuadrilátero se contrae a un punto y los vértices de los cuatro ángulos convergen formando ángulos cuya suma es 360

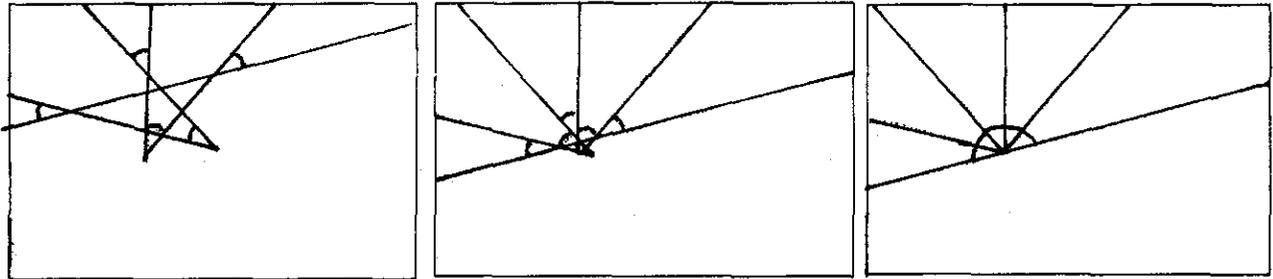


Ejemplo 3. *Los ángulos opuestos en un paralelogramo son congruentes.*

La imagen de la figura 4 ilustra esta proposición. Se dibuja un paralelogramo arbitrario. Dos de sus ángulos interiores opuestos se marcan con los números 1 y 2. Al aplicar el alejamiento, el paralelogramo se contrae a un punto y los vértices de los dos ángulos convergen formando ángulos opuestos por el vértice. Con este ejemplo se ilustra que con el "método de expansión", no sólo figuras finitas convergen a un punto fijo, sino que también líneas paralelas convergen a una sola línea. (Estas son propiedades de límite de la operación de dilatación cuando la razón tiende a cero).



Ejemplo 4. La suma de los ángulos en las puntas de una estrella de cinco picos es de 180 grados.



La imagen de la Figura 5 muestra esta proposición. Una estrella de cinco picos se dibuja en la pantalla de la computadora. Las verticales de tres de los ángulos en la estrella se marcan con los números 1, 2 y 3. Los dos ángulos restantes se marcan como 4 y 5. Al hacer el alejamiento la estrella se contrae a un punto y los vértices de los cinco ángulos convergen formando cinco ángulos cuya suma es igual a un ángulo de 180 grados.

Consideraciones para la enseñanza.

El método de expansión para explorar propiedades geométricas de las figuras desafía las habilidades espaciales analíticas de los estudiantes. Algunos estudiantes pueden visualizar instantáneamente la expansión de una figura mientras que otros tendrán que dibujarla sobre papel o la computadora. La experiencia, sin embargo, vale el tiempo. Hacer que los estudiantes dibujen o hagan predicciones sobre la forma de la figura antes de que vean el resultado de aplicar el alejamiento con la computadora, es una excelente actividad, especialmente si los estudiantes están a la expectativa para verbalizar las hipótesis que se sugieren por el método. Es también una actividad que hace que se aprecie el potencial del alejamiento de la computadora puesto que manualmente se hace una reproducción a escala de una imagen en poco tiempo.

La método de expansión a menudo revela muchas propiedades de una figura al mismo tiempo. Por ejemplo, cuando las líneas paralelas se cortan por una transversal, el método de expansión simultáneamente sugiere varias proposiciones sobre los ángulos que se forman. Los estudiantes pueden entonces "ver" que estas proposiciones forman un grupo de propiedades de la figura.

El método ofrece al profesor un excelente camino para ilustrar lo "informal", pero además una potente técnica matemática de razonamiento por analogía. Por ejemplo, el programa para verificar la suma de los ángulos externos del exágono (Fig. 1 a, b, c) crea una analogía entre los ángulos externos del exágono y los ángulos sobre un punto. También ofrece al profesor una interesante aplicación de transformación por dilatación y la noción de semejanza matemática.

El método ofrece al estudiante una importante perspectiva unificada sobre cómo aproximarse a muchos problemas matemáticos. Esto prepara a los estudiantes para conceptos como el de "asíntotas" y el comportamiento en el límite de algunas funciones que pueden graficarse en álgebra y cálculo.

2.-Representaciones intrínsecas de funciones e integración gráfica.

Los interesados en la geometría de la tortuga, así como los críticos de ella, están encadenados a su "local" e "intrínseca" naturaleza. [1-3]. Esta naturaleza proviene de los comandos de movimiento básicos de la tortuga FORWARD y RIGHT, que instruyen a la tortuga a avanzar hacia adelante una distancia o girar hacia la derecha un número de grados con respecto a su posición actual. A los procedimientos de tortuga (programas en Logo) que utilizan sólo estos

comandos y sus inversos BACK y LEFT les llamaremos "Procedimientos puros de tortuga" (PPT). Por supuesto los PPT pueden involucrar las usuales construcciones de Logo (no de la tortuga) tales como asignaciones y comandos de control, así como las operaciones matemáticas como en RIGHT 360/: N (los dos puntos enfrente de un nombre de variable denota en Logo el valor de la variable). Las descripciones de formas y curvas por medio de PPT son intrínsecas en el sentido de que no se refieren a un marco fijo de referencia (tales como un sistema de Coordenadas Cartesiano). También son locales en el sentido de que se refieren sólo a puntos en una pequeña vecindad de la tortuga.

A continuación desarrollaremos un esquema general para convertir una representación Cartesiana de una curva en una intrínseca. Como se mencionó antes, los procedimientos intrínsecos consisten esencialmente de repeticiones de "pasos básicos" de la siguiente forma

RIGHT<ángulo> FORWARD<longitud>

Todo lo que necesitamos es calcular el ángulo y la longitud para cada paso. Estos son los cambios en la posición y dirección de la tortuga en un instante en el proceso de dibujar una curva.

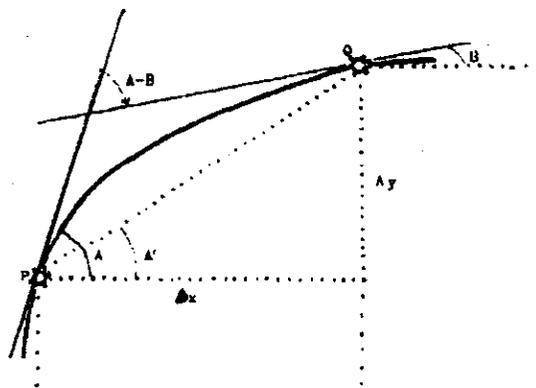
Elegimos un sistema Cartesiano particular de coordenadas que dependa del estado inicial de la tortuga; es decir, el origen está en la posición de la tortuga y el eje-y en la dirección a la que apunta la tortuga. Supongamos que la tortuga ha trazado la curva hasta un cierto punto P, y coincide con la dirección de la tangente a la curva (figura 6). Denotemos por x el valor correspondiente sobre el eje-x, y por A el ángulo de inclinación de la tangente en P. Consideremos un punto adyacente Q sobre la curva en $x+\Delta x$ y denotemos por B el ángulo de inclinación de la tangente en Q.

Como puede verse en la figura 6, el paso que describiremos está dado por la cuerda de P a Q. También, el giro necesario de la tortuga está dada por el ángulo externo entre las dos tangentes sucesivas. Para una subdivisión más fina podemos aproximar la inclinación del ángulo A de la tangente en P por el ángulo de inclinación A' de la cuerda. Así la longitud de la curva es $\Delta x / \cos A$, y el ángulo de giro

(en $x+\Delta x$) es $A-B$.

El siguiente paso es renombrar Q como P y repetir el argumento para el nuevo punto P. Las repeticiones se llevan a cabo para toda x en el dominio que deseamos graficar, con incrementos de x .

Nos queda ahora el cálculo de los ángulos A en cada punto de subdivisión sobre la curva (el ángulo B de la figura 6 será el A del siguiente punto). La idea básica es simple, puesto que la tortuga está siempre colocada en la dirección de la tangente a la curva, la pendiente de la curva en cada punto i.e. $\tan A$, está dada por la derivada de $f(x)$ en ese punto. Así, $A = \arctan f'(x)$. Para expresar esto en logo, usaremos el comando MAKE para asignar este valor a la variable A



en la dirección de la tangente a la curva, la pendiente de la curva en cada punto i.e. $\tan A$, está dada por la derivada de $f(x)$ en ese punto. Así, $A = \arctan f'(x)$. Para expresar esto en logo, usaremos el comando MAKE para asignar este valor a la variable A

MAKE "A ARCTANG <f'(x)>

donde $f(x)$ puede ser cualquier función expresable en Logo.

Podemos ahora escribir el esquema general para una representación intrínseca de una función $f(x)$ sobre el intervalo $[x_0, x_1]$ con subdivisiones de longitud x

```
TO CURVA.INTR :A :X
  IF (:X > :X1) [STOP]
```

```

MAKE "B ARCTAN <F(X + X)>
RIGHT :A- :B
FORWARD :DELTA.X/COS :A
CURVA.INTR :B (:X + :DELTA.X)

```



Figura 7

END

(La suposición es que este procedimiento se ejecuta con valores específicos para :X0 :X1 y :DELTA.X y que :X es inicializado en :X0).

Como un ejemplo escribiremos la función seno como una representación intrínseca en el intervalo (en grados) $[0, 360]$, con x igual a 10 "pasos de tortuga". De hecho, para ajustar mejor la figura con la pantalla de la computadora, hemos tomado en su lugar la función $y = k \text{seno } 3x$ en el intervalo $[0, 120]$. El factor k , que es aproximadamente 20, se ha elegido para producir la derivada $\cos 3x$.

```

TO SENO.INTR :A :X
  IF (:X > 120) [STOP]
  MAKE "B ARCTAN COS 3* :X
  RIGHT :A- :B
  FORWARD 10/COS :A
  SENO.INTR :B (:X + 10)

```

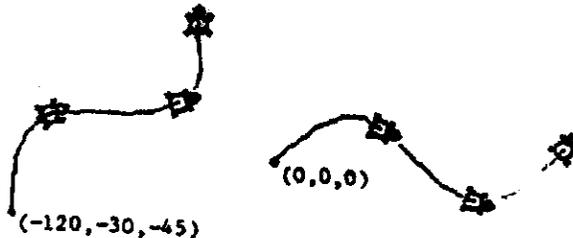


Figura 8.

END

La figura 7 muestra el resultado de ejecutar este procedimiento en el intervalo $[-120, 120]$ este es precedido por un RIGHT 90 para cambiar la dirección cero desde el Norte (como en Logo), al Este (como en matemáticas).

Integración Gráfica.

Hemos visto que colocando la dirección de la tortuga de acuerdo con la derivada f , se produce la gráfica de la función f . Sustituyendo f por f' , podemos obtener la gráfica de la antiderivada de f , i.e su integral indefinida. A este algoritmo le llamaremos integración gráfica.

Por ejemplo, en la sección anterior demostramos que aplicando la integración gráfica a $\cos x$ se produce la gráfica de $\text{seno } x$. De la misma manera se puede obtener la gráfica de la integral de cualquier función elemental definible en Logo. Es más, este algoritmo produce la gráfica de la integral aún de funciones cuya integral no es expresable en términos de funciones elementales.

La Figura 8. muestra la ejecución de INTEGRAL [COS 3* :X][0, 120] 10 en diferentes estados iniciales de la tortuga. En Logo formulamos este algoritmo como un procedimiento con tres entradas, la primera para la función, la segunda para el intervalo sobre el cual deseamos graficar la integral, y la tercera para el incremento de x . Por razones técnicas la función no se puede dar directamente como una entrada: además, la entrada es una lista que contiene una representación algebraica de la función.

Cuando se requiere evaluar la función con los valores actuales de x (como en la expresión ARCTAN de abajo), simplemente ejecutamos (RUN) esta lista. El intervalo está dado por sus puntos finales como una lista de dos elementos. A continuación mostramos el procedimiento intrínseco para dibujar la gráfica de la integral indefinida de una función dada.

```

TO INTEGRAL : FUNCION :INTERVALO :DELTA

```

```

RIGHT 90
LOOP 0 (FIRST :INTERVALO) [STOP]
END
TO LOOP :A :X
  IF (:X>LAST :INTERVALO) [STOP]
  MAKE "B ARCTAN (RUN :FUNCION)
  RIGHT :A- :B
  FORWARD :DELTA/COS :A
LOOP :B (:X + :DELTA)
END

```



Figura 9.

Como primer ejemplo, al ejecutar INTEGRAL [COS 3*X] [-120 120] 10 se obtendrá la gráfica de la función seno (Figura 6).

Note que este procedimiento, como la integral indefinida, no define una única curva, pero si una familia infinita de curvas congruentes, que dependen del estado inicial de la tortuga (x, y, h), como en la figura 8.

La Figura 8 ilustra la representación intrínseca de la curva logarítmica por integración de la función $1/x$ (en una escala apropiada).

El último ejemplo de integración grafica intrínseca (Figura 9), caracteriza la función $y=(\text{sen}x)/x$ cuya integral no puede expresarse por medio de funciones elementales. (cf. [8])



Este artículo compara diferentes representaciones de funciones, con el propósito de establecer algunas conexiones entre ellas. En muchos aspectos

las representaciones de tortuga - que tienden a ser discretas, locales, intrínsecas y procesales- complementan las representaciones matemáticas estándar y agregan una fresca intuición a los tópicos familiares.

La principal cadena que se establece aquí, es entre la representación de la tortuga y la Cartesiana de funciones. Esta cadena se forma esencialmente igualando dos descripciones de la pendiente de una curva en un punto dado, a saber, la derivada y (la tangente de) la cabeza de la tortuga así como la curva que dibuja. En un sentido, nuestro algoritmo de integración gráfico comprueba la sugerencia de Papert de que los procedimientos de tortuga son semejantes a ecuaciones diferenciales, y que al ejecutarlos producen el efecto de la integración computarizada. Para los procedimientos simples de tortuga, Papert también demanda que su local e intrínseca naturaleza los coloca muy cercana a las intuiciones de los niños mas que las representaciones geométricas estándar. Sin embargo, al tratar con representaciones de tortuga de curvas mas generales que requieren un conocimiento de matemáticas superiores, la noción de lo que es intuitivo es cada vez mas discutible. Podemos ver el beneficio de la geometría de la tortuga agregando mas representaciones de funciones, que complementen las estándar y además ejecutables en la computadora, esto ofrece muchas oportunidades para explorar y descubrir.

Bibliografía:

- 1.-Maurice Burke. *Zooming Out: A Novel Use of the Computer in Geometry*. *J. of Computers in Mathematics and Science Teaching*. Vol. 9 (1), 1989.
- 2.-Uzi Armon and Uri Leron. *Turtle Goes to College: Intrisec Representations and Graphical Integration*. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 1991., Vol. 22, No. 4.

TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS ATRAVES DEL DOBLADO DE PAPEL

GERARDO CALDERON AYALA

CENTRO DE ESTUDIOS SUPERIORES DEL ESTADO DE SONORA.

El doblado de papel es un material que en manos del Profesor de matemáticas puede ser un valioso auxiliar en la enseñanza de la Geometría, brinda un campo de aplicación de los conocimientos adquiridos reforzando así el aprendizaje. Proporciona "experiencias matemáticas activas", propiciando la creatividad en la resolución de problemas de construcción, fijando un antecedente valioso para un posterior trabajo más formal de la Geometría. En particular ilustra y sienta las bases de los conceptos y las ideas en torno a las transformaciones geométricas.

El trabajo del doblado de papel se sustenta en los siguientes axiomas o postulados:

1. *Todo pliegue de papel produce una línea recta.*
2. *Por dos puntos sobre el papel pasa un pliegue y sólo uno.*
3. *Por un punto sobre el papel es posible pasar cualquier número de pliegues.*
4. *Dados dos puntos distintos sobre el papel, éste puede plegarse de manera que los puntos coincidan.*
5. *Dadas dos rectas distintas sobre el papel es posible plegarlo de modo que las rectas coincidan.*
6. *Dados dos puntos y una recta sobre el papel existen hasta dos formas de plegarlos de modo que uno de los puntos esté sobre la recta y el pliegue obtenido pase por el otro punto.*

Este grupo de axiomas nos garantiza el poder realizar tantas construcciones geométricas como sean necesarias, en particular, las siguientes cuatro construcciones básicas:

1. Construir la mediatriz de un segmento.
2. Construir la perpendicular a una recta dada, por un punto dado.
3. Construir la paralela a una recta dada, por un punto dado.
4. Construir la bisectriz de un ángulo.

Los dos grupos precedentes de proposiciones se apoyan de manera natural en las transformaciones puntuales en el plano, a saber:

REFLEXION SOBRE UNA RECTA:

SEA l UNA RECTA FIJA DEL PLANO.

Reflexión en una recta l , designa a la transformación de S sobre si mismo que lleva cada punto P del plano al punto P' del mismo, tal que l sea la mediatriz del segmento PP' .

La recta l se llama EJE DE LA REFLEXION.

REFLEXION RESPECTO A UN PUNTO:

SEA O UN PUNTO FIJO DEL PLANO.

Reflexión (o semivuelta) respecto a un punto O , designa la transformación del plano sobre si mismo que lleva cada punto P del plano al punto P' del mismo, tal que O sea el punto medio del segmento PP' .

El punto O se llama CENTRO DE LA REFLEXION.

TRASLACION:

SEA AB UN SEGMENTO DEL PLANO.

Traslación del segmento AB designa la transformación del plano sobre si mismo que transporta cada punto P del plano al punto P' tal que el segmento PP' es congruente y paralelo con el segmento AB .

El segmento dirigido AB se llama VECTOR DE LA TRASLACION.

ROTACION:

SEA O UN PUNTO FIJO DEL PLANO Y BAC UN DETERMINADO ANGULO.

Rotación de centro O y magnitud BAC, designa la transformación del plano sobre si mismo que lleva cada punto P del plano al punto P' del mismo, tal que $OP' = OP$ y el ángulo POP' sea congruente con el ángulo BAC.

El punto O se llama CENTRO de la rotación y BAC es el ángulo de la rotación.

Evidentemente, estas transformaciones se fundan básicamente, en una sola: la reflexión del plano sobre si mismo.

La mediatriz de un segmento AB se obtiene transformando el punto A en el punto B mediante una reflexión en torno a una recta, dicha recta es la mediatriz del segmento.

La perpendicular a una recta l desde un punto P es totalmente análoga a la construcción anterior, con la salvedad de que el eje de reflexión debe contener al punto P.

La paralela a una recta dada en un punto P es una doble aplicación de la simetría en torno a una recta y da lugar a una traslación de la recta dada.

La bisectriz se obtiene mediante la reflexión de un lado del ángulo en el otro, el eje de reflexión es la bisectriz del ángulo.

Así mismo, la reflexión nos permite localizar P' simétrico de un punto P respecto a otro punto dado O, si P' es colineal con los puntos O y P decimos que la transformación realizada es una reflexión en torno a un punto o una semivuelta, si no lo son, entonces se ha efectuado una rotación de magnitud POP'.

LAS TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS Y LOS METODOS DE CONSTRUCCION.

Las transformaciones geométricas tratadas en este ámbito del doblado de papel son aplicables a la resolución de problemas o ejercicios de construcción, representando un método de construcción, tanto en sí mismas, como en combinación con otros métodos, de los cuales podemos mencionar: el método de semejanza y el de lugares geométricos.

Los ejemplos siguientes son ilustrativos de lo afirmado.

METODO DE TRANSFORMACIONES

Construir un segmento congruente a otro dado en un punto dado.

Sean AB y P el segmento y el punto dados.

El problema puede ser resuelto en cualquiera de las siguientes formas:

* Por simetría en torno a una recta.

Se pliega el papel de modo que el punto P se superponga al punto A , se determina el punto B' . El segmento PB' es congruente con el segmento AB .

O bien,

Se pliega el papel de modo que el punto P se superponga al punto B , se determina el punto A' . El segmento PA' es congruente con el segmento dado AB .

* Por simetría en torno a un punto.

Se pliega el papel para obtener la recta PA y se determina el punto medio O del segmento PA . Se obtiene la recta BO y se construye la paralela a AB por el punto P , estas dos últimas rectas se intersectan en un punto B'' . El segmento PB'' es congruente con el segmento AB .

Otra forma,

Se pliega el papel para obtener la recta PB y el punto medio M del segmento PB , se trazan AM y la paralela a AB por el punto P , determinando la intersección de estas dos rectas el punto A'' . El segmento PA'' es congruente con el segmento AB .

* Por traslación.

Se construyen los siguientes pliegues: PA y por el punto B una recta paralela a PA, la paralela a AB por el punto P. Estos dos pliegues se intersectan en un punto Q. El segmento PQ es congruente con el segmento AB.

Análogamente, puede obtenerse el segmento PR congruente con el segmento AB, mediante una traslación de P tomando a BA como vector de la traslación. (Fig. 1)

Trazar la tangente a una circunferencia dada desde un punto dado.

Sean O, A y P el centro de la circunferencia, un punto de la circunferencia y un punto exterior, respectivamente.

Aplicando las transformaciones se procede de la siguiente manera: se traza una tangente cualquiera y luego mediante una rotación en torno a la circunferencia se hace pasar por el punto dado.

CONSTRUCCION:

Se pliega el papel para obtener la recta OA y su perpendicular l en el punto A, esta recta es tangente a la circunferencia dada. Se obtiene OP y mediante una rotación se determina P' sobre l . El ángulo P'OP define la magnitud de la rotación que debe aplicarse a l . La recta OC es bisectriz del ángulo AOP, con OC como eje de simetría se localiza OD simétrico de OP'. Los ángulos AOP' y DOP son congruentes. Por rotación del segmento OA se obtiene sobre OD el punto T. La recta PT es tangente a la circunferencia de centro O y radio OA.

La recta simétrica a PT sobre PO también es tangente a la circunferencia dada y pasa por el punto P. (Fig. 2)

METODO DE SEMEJANZA

Construir un triángulo equilátero cuyos vértices estén sobre dos rectas paralelas dadas.

Sean l_1 , l_2 y P las rectas paralelas y el punto dados.

La construcción se realiza siguiendo esta idea: sobre una de las rectas paralelas se construye un triángulo equilátero cualquiera, posteriormente se trasladan los lados de dicho

triángulo hasta hacer coincidir el tercer vértice con la otra paralela.

CONSTRUCCION:

Se elige sobre l_1 un segmento cualquiera MN, se construye su mediatriz m y por rotación de MN se obtiene sobre m el punto P, los puntos M, N y P son los vértices de un triángulo equilátero. La mediatriz m corta a l_2 en un punto S, por ese punto S se construyen rectas paralelas a los lados NP y PM las cuales intersectan a l_1 en R y T respectivamente. Los puntos R, S y T son los vértices de un triángulo equilátero y todos ellos pertenecen a las rectas paralelas dadas.

Nótese que por cualquier de l_1 o l_2 pueden trazarse rectas paralelas a los lados NP y PM que darán como resultado un triángulo equilátero con sus vértices sobre las rectas paralelas dadas. (Fig. 3)

METODO DE LUGARES GEOMETRICOS

Determinar el centro de una circunferencia que pasa por un punto dado y es tangente a dos rectas paralelas dadas.

Sean l_1 , l_2 y P las rectas paralelas y el punto dados.

El punto requerido por la construcción, pertenece a ciertos lugares geométricos, determinar dos de ellos y sobre todo la intersección de dos lugares geométricos equivale a resolver el problema. En particular si la circunferencia debe ser tangente a las rectas dadas, entonces su centro debe localizarse sobre una recta b equidistante a l_1 y l_2 , el radio de la circunferencia debe ser igual a la distancia d entre b y cualquiera de las rectas l . Consecuentemente, si la circunferencia de centro P y radio d intersecta a la recta b , determinará sobre b puntos que satisfagan el requisito de ser equidistantes de las rectas paralelas l_1 y l_2 y del punto P.

CONSTRUCCION:

Se construyen las rectas b y t , la primera mediante una reflexión de l_1 sobre l_2 y la segunda perpendicular a las rectas paralelas, la recta t intersecta a l_1 y b en los puntos A y B respectivamente. Se traslada el segmento AB hacia el punto P y se rota hasta obtener un punto O que pertenece a b .

Las soluciones de la construcción pueden ser 0, 1 o 2 dependiendo de si la distancia del punto P a la recta b es mayor, igual o menor que d . (Fig. 4)

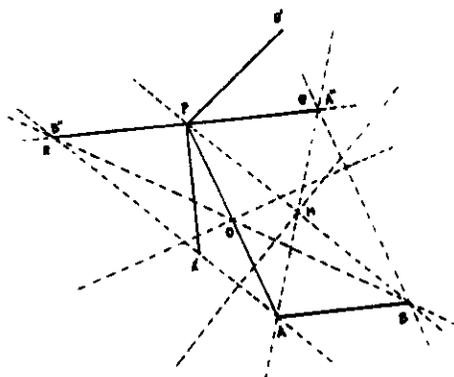


FIGURA 1.

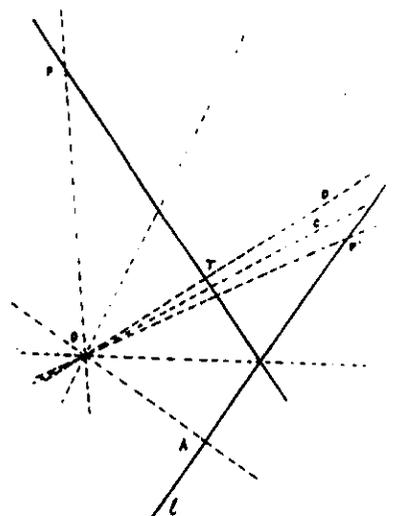


FIGURA 2.

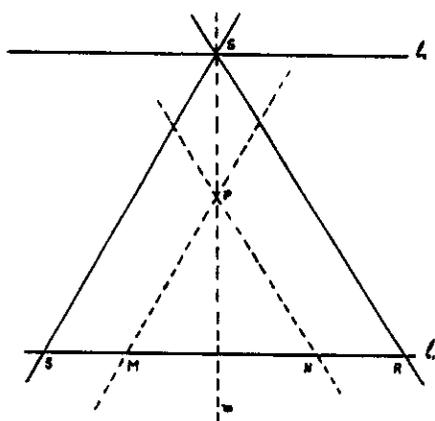


FIGURA 3.

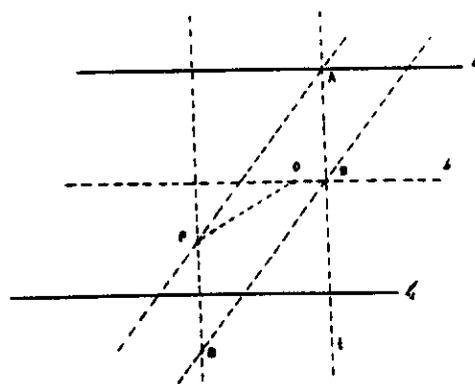


FIGURA 4.

BIBLIOGRAFIA.

- Dill, Mario. *Gemetría Constructiva*. México, Librería de la Vda. de Ch. Bouret, 1919, 127 pág.
- Gibs, William. "Papers polygons" en *Mathematics Teaching*, No. 103, junio de 1983.
- Hilton, Peter, Pedersen Jean. "Aproximating any regular polygons by folding paper" en *Mathematics Magazine*. Vol. 56, No.3, mayo de 1983.
- Hilton, Peter, Pedersen Jean. "Folding regular star polygons and number theory", en *Mathematical Intelligencer*, Vol.7, No.1, 1985.
- Sundara, Row T. *Geometric ejercicios in paper folding*. New York, Dover Publications, Inc. 1966, 148. pág.

EL PRECALCULO: SU INSERCIÓN EN LA CURRÍCULA MATEMÁTICA DEL BACHILLERATO Y SU POSIBLE REFORMULACIÓN.

*M. C. José Luis Soto Munguía
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora.*

INTRODUCCIÓN.

Los planes para modernizar la educación mexicana, actualmente en marcha, traerán como consecuencia la modificación de los planes y programas de estudio así como los libros de texto del nivel básico, vigentes desde hace cerca de dos décadas. Como una consecuencia natural de estos cambios, se espera que en el corto plazo el currículo de los niveles subsecuentes sea también transformado.

El presente trabajo se refiere al área de matemáticas del bachillerato, en particular al *precálculo*; en él se pretende dar un bosquejo del contexto en el que la reforma curricular se estaría impulsando, así como plantear algunos de los problemas que tendría que enfrentar y la dirección en la que podrían enfilarse los cambios.

EL BACHILLERATO MEXICANO.

Referirse al bachillerato mexicano suele no ser una tarea sencilla, el ciclo es ofrecido a lo largo y a lo ancho del país por una gran cantidad de instituciones, bajo diversas modalidades y con planes y programas de estudio distintos. Su diversidad ha sido reiteradamente señalada como uno de sus principales problemas, Pantoja Morán lo hacía ver en 1982 en los términos siguientes:

"En efecto se constata fácilmente una gran diversidad de planes de estudio y de programas de las materias, pues existen aproximadamente 186 planes de estudio diferentes, que comprenden 275 materias que presentan diferencias en el nombre, extensión, ubicación o contenido programático. Se detecta también una dispersión significativa por cuanto a criterios metodológicos y de concepción en el proceso enseñanza-aprendizaje y una indefinición sustantiva

respecto a su función y fines específicos."¹

La década de los 70 se caracteriza por el fuerte impulso dado al bachillerato, no sólo porque en ella se crearon dos de las instituciones más importantes del país que ofrecen este nivel; el Colegio de Ciencias y Humanidades (1971) y el Colegio de Bachilleres (1973) y se multiplicaron los Bachilleratos Tecnológicos, dependientes de la Subsecretaría de Educación e Investigación Tecnológica (SEIT), sino porque además se realizaron una serie de esfuerzos nacionales para atacar los principales problemas de este ciclo, entre los que destaca el mencionado por Pantoja. Estos esfuerzos culminaron con la realización del Congreso Nacional del Bachillerato llevado a cabo en Cocoyoc, Estado de Morelos los días 10, 11 y 12 de marzo de 1982.

Aunque en términos generales la situación descrita por Pantoja subsiste hasta la actualidad, la disparidad mencionada debiera ser tomada con cierta reserva, pues un análisis más detenido permite observar que persiste un grupo de 15 materias que cubren el 60% de las horas-clase², mostrando al bachillerato como un ciclo más homogéneo de lo que parece, al menos en lo que respecta a los contenidos.

EL PRECALCULO EN EL BACHILLERATO.

En lo que se refiere al área de matemáticas, existe una gran coincidencia de contenidos en las diversas modalidades curriculares. Prácticamente en todas ellas están presentes los nueve grandes temas del área:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1. Aritmética. | 6. Probabilidad. |
| 2. Álgebra. | 7. Estadística. |
| 3. Geometría. | 8. Cálculo Diferencial. |
| 4. Trigonometría. | 9. Cálculo Integral. |
| 5. Geometría Analítica. | |

Se entiende por *precálculo* el conjunto de contenidos matemáticos considerados prerrequisitos para acceder a un curso de cálculo. Estos

contenidos han cambiado a lo largo de la historia del bachillerato mexicano, por ejemplo la *lógica matemática* fue incluida en los 70's como consecuencia del movimiento conocido como "matemática moderna", pero fue desapareciendo de los programas conforme el movimiento decaía. En este trabajo consideraremos como *precálculo* la agrupación de los cinco primeros temas de la lista dada anteriormente, los subtemas típicos correspondientes pueden observarse en el siguiente listado:

ARITMETICA. Sistemas de números, operaciones con números reales y sus propiedades, orden y valor absoluto de números reales.

ALGEBRA. Exponentes y radicales, expresiones algebraicas, polinomios y sus operaciones, factorización de expresiones algebraicas, ecuaciones de primer grado, sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones de segundo grado, desigualdades.

GEOMETRIA. Estructura y método de la geometría, rectas y ángulos, congruencia y semejanza de triángulos, polígonos, áreas de figuras planas, el círculo.

TRIGONOMETRIA. Razones trigonométricas, identidades trigonométricas, funciones trigonométricas y sus gráficas, ley de los senos y ley de los cosenos, ecuaciones trigonométricas, el concepto de función, funciones exponencial y logarítmica.

GEOMETRIA ANALITICA. Coordenadas cartesianas, razón en la que un punto divide a un segmento, distancia y pendiente, lugares geométricos, la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse, la hipérbola, la ecuación general de segundo grado, ecuaciones paramétricas.

Una somera revisión de las currícula de cuatro de las principales instituciones del bachillerato mexicano: el Colegio de Bachilleres (CB), el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) y la SEIT; ha confirmado que el *precálculo* está presente en las currícula respectivas durante los dos primeros años del ciclo, incluso en general el orden de los temas y subtemas coincide con el que aquí se ha dado. Esto significa que estos contenidos son obligatorios para todos los estudiantes que cursan el nivel.

Esto no quiere decir que el *precálculo* que se enseña en los diversos subsistemas es el mismo, pero las principales diferencias podrían no encontrarse en los contenidos, sino en otra parte: por ejemplo en la cantidad de horas dedicadas al área, en la metodología de la enseñanza empleada, en el énfasis puesto en los diferentes temas, etc.

De cualquier manera, estos contenidos están íntimamente ligados al objetivo considerado primordial para el ciclo, en el Congreso Nacional de Cocoyoc y formulado en los siguientes términos:

"En virtud de que el bachillerato es la etapa en la que culmina la educación básica anterior a la especialización y quizás la última instancia en la que el educando tiene contacto con la cultura universal, se hace indispensable que dicho sistema le proporcione una cultura integral básica que vaya acorde con la época en la que vive".

ALGUNAS REFLEXIONES ACERCA DE LOS POSIBLES CAMBIOS EN EL CURRÍCULO DEL PRECALCULO.

La historia del bachillerato mexicano está cruzada por una gran diversidad de proyectos educativos, contruidos sobre distintas concepciones del ciclo, es una historia rica en experiencias, en éxitos y fracasos que la reforma curricular en puerta no debiera ignorar.

En esta última sección incluimos una serie de reflexiones acerca de las posibilidades de cambio en el currículo del *precálculo*, tanto en lo que se refiere a sus contenidos como a la metodología con la que se enseña.

* Una tendencia natural de todo proceso de revisión curricular es la actualización de los contenidos, esto se explica por la pretensión de incorporar a la escuela los nuevos conocimientos que el desarrollo científico va generando y las nuevas necesidades que la sociedad va creando. La selección de nuevos contenidos para incorporar a la curricula tiene sin embargo el riesgo de saturar poco a poco las curriculas e ir produciendo programas de estudio

sobrecargados de contenido. Al respecto nos parece oportuno retomar el criterio sugerido por la Comisión Bourdieu-Gros y que podría resumirse en los siguientes términos: "La incorporación de nuevos temas deberá ser compensada con la supresión de otros"³. En el caso particular que nos ocupa, la posibilidad de incorporar temas como *vectores* y *matrices*, parece una propuesta factible y además necesaria, tanto por su importancia conceptual en el desarrollo actual de la ciencia, como porque así lo están exigiendo los cambios curriculares del Nivel Superior. Según el criterio mencionado (aunque su aplicación no tendría porque ser mecánica), la inclusión de nuevos temas, debiera dar respuesta a la pregunta: ¿Qué temas del *precálculo* actual suprimimos?

* La división del *precálculo* en los cinco temas aquí mencionados, podría no ser la mejor manera de organizar su contenido, y debiera hacerse una revisión crítica de esta partición. El *precálculo* como una colección de temas superpuestos uno tras otro, ha traído entre otras consecuencias, una clasificación artificial de los problemas como aquellos que se resuelven con Aritmética, los que se resuelven con Algebra, etc., tal clasificación es desde luego completamente artificial y no tiene nada que ver con la realidad. Una integración más adecuada de sus contenidos podría dar al estudiante una visión más global de la matemática y posiblemente permitiría abordar la resolución de problemas más interesantes.

* La matemática en lo general, y el *precálculo* en lo particular, se han enseñado tradicionalmente siguiendo la secuencia teoría-problemas que se resuelven con la teoría. La consecuencia de esto ha sido que la teoría se enseña carente de significado y posteriormente se aborda la resolución de problemas como una manera de darle significación a los conceptos. Esto restringe el tipo de problemas a aquellos donde la teoría se aplica. La posibilidad de invertir la secuencia iniciando con situaciones problemáticas que hagan ver la necesidad de la teoría y le den significado nos parece una posibilidad interesante. El álgebra como un manejo abstracto de símbolos, que se utilizan como una herramienta para posteriormente resolver problemas no pareciera haber resultado hasta ahora muy atractivo a los estudiantes del bachillerato.

* Creemos que la formalización de los conceptos "de golpe", ha contribuido a formar una visión en los estudiantes de que la matemática es una ciencia árida e incluso innecesaria, a la que sólo pueden sentir aversión. Nos parece entonces que aquellos conceptos que sea necesario formalizar, deberán ir precedidos por una serie de tratamientos informales que conduzcan a la formalización como una necesidad. Presentar a los estudiantes la versión de la geometría como una rama de la matemática estrictamente deductiva, nos parece un buen ejemplo de lo que no debieramos hacer en el bachillerato.

* El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (NTCM) ha publicado recientemente un estudio titulado "Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática"⁴. La sección de este trabajo que se refiere a la matemática de los grados nueve al doce, hace referencia a gran parte de los contenidos de lo que aquí hemos llamado precálculo. Las reflexiones que aparecen en esta sección, tanto en lo que se refiere a los contenidos como a la metodología, podrían dar algunas ideas acerca de las direcciones en las que pudieran orientarse los cambios curriculares del precálculo.

¹ Pantoja Morán, David. Notas y reflexiones acerca de la historia del Bachillerato. UNAM. 1989. p. 50.

² cfr. Castrejón Díez, J. "Curriculum" en Prospectiva del Bachillerato 1980-2000. Grupo de Estudios sobre el Financiamiento de la Educación. SPP-SEP-SHCP. México. 1989. p. 11.

³ Bourdieu, P. y Gros, F. "Los Contenidos de la Enseñanza/ Principios para la Reflexión". Universidad Futura, Volumen 2, No. 4. febrero de 1990.

⁴ NTCM, "Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática". Traducido y publicado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES". Sevilla. 1991.

SITUACION ACADEMICA EN MATEMATICAS DE LOS ESTUDIANTES

DE NUEVO INGRESO A LA UNIVERSIDAD DE SONORA

M.C. ENRIQUE HUGUES GALINDO

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

UNIVERSIDAD DE SONORA

INTRODUCCION

El presente trabajo surge como una inquietud de parte de un grupo de profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, pensando en que ésta es una dirección viable para esclarecer la problemática académica en que se debaten los primeros semestres de las carreras universitarias y con la firme creencia de que se arrojaría luz sobre algunos supuestos comunes. El estudio se desenvuelve durante el semestre 91-2 en las aulas de la Universidad de Sonora, Unidad Hermosillo.

Los trabajos empezaron analizando qué se entendería como los conocimientos mínimos (en matemáticas) necesarios al iniciar una carrera profesional, para ello, se tuvo como referencia planes y programas de estudio de algunas de las instituciones del nivel medio superior (NMS) así como nuestra experiencia docente. Esto se plasmó posteriormente en un instrumento de medición o diagnóstico, mediante el cual se pretendió obtener una idea del grado en que se alcanzan tales requisitos. Una vez que se contó con el instrumento de medición se pasó a las etapas de: aplicación, evaluación, análisis de resultados y conclusiones.

Con el reconocimiento de que existieron algunas limitaciones en el trabajo, derivados de la falta de una prueba de confiabilidad del diagnóstico y de una aplicación más sistemática, de hecho institucional, a continuación resumo las etapas del trabajo.

PRELIMINARES: HACIA UNA EVALUACION DE LA SITUACION ACADEMICA

El análisis sobre los requisitos para ingresar a la Universidad, nos llevó a que estos se encuentran vinculados con la matemática escolar denominada como precálculo o que al menos esto debía ser el común denominador, independientemente de la carrera a que se aspire y del bachillerato de procedencia. Los planes y programas de estudio revelaron que existe un amplio grupo de contenidos, en los diferentes sistemas del NMS, que responden a las intenciones del precálculo. Por lo anterior es que se concibe a esta parte de la matemática escolar como uno de los componentes presentes en la actual concepción de una cultura básica del egresado del NMS y a determinar que los reactivos a seleccionar debían explorar contenidos en: álgebra, geometría y trigonometría.

Para facilitar la aplicación del diagnóstico, éste se planificó en dos partes y a cada una de ellas se le asignó un objetivo: medir la información básica que deben manejar los alumnos que ingresan a la Universidad (parte I) y medir su formación matemática (parte II). Antes de la aplicación masiva, se hizo un pilotaje que permitió

corregir algunos errores de redacción y verificar superficialmente la confiabilidad del instrumento.

APLICACION DEL DIAGNOSTICO Y RESULTADOS

Como se quería recabar la imagen de un egresado promedio del bachillerato en la selección de los alumnos que estarían sujetos a la medición, se intentó incluir alumnos de todas las carreras que ofrece la Universidad provenientes de los diferentes bachilleratos del Estado. Bajo ese único criterio, se seleccionaron alumnos de nuevo ingreso en quince grupos de primer semestre (el total de grupos de primer semestre fue de cincuenta y cinco), participando en la evaluación cerca de cuatrocientos alumnos. Para el trabajo anterior se contó con la colaboración de algunos compañeros de labores, quienes les explicaron a sus alumnos los fines del diagnóstico y las reglas a que estaría sujeta su aplicación.

Para la evaluación se elaboró un baremo que contemplara el total de los reactivos (11 de la parte I y 6 de la parte II) y se instruyó a algunos colaboradores sobre la forma de proceder en el análisis de resultados.

CONCENTRACION POR SISTEMA ESCOLAR DEL DIAGNOSTICO 1991													
PORCENTAJES DE RESPUESTAS CORRECTAS POR REACTIVO													
PARTE I		R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	SUB
EVALUADOS													
BACHTEC	114	70	71	27	15	3	19	31	58	53	9	8	33
COBACH	74	81	82	30	27	1	31	57	72	55	5	5	41
PIUNISON	40	70	75	30	13	5	18	55	58	40	15	3	35
OTRAS	25	52	56	4	0	0	16	24	52	40	4	4	23
TOTAL	253	72	74	26	17	2	22	42	61	50	8	8	34
PARTE II		SR1	SR2	SR3	SR4	SR5	SR6	SUBT					
EVALUADOS													
BACHTEC	114	32	34	29	18	1	11	21					
COBACH	74	26	27	14	9	0	14	15					
PIUNISON	40	20	20	28	20	0	8	16					
OTRAS	25	28	28	28	8	0	16	18					
TOTAL	253	28	29	24	15	0	12	18					

TABLA 1

En la organización de los resultados se consideró como un criterio el sistema escolar de procedencia, tomando como tales:

- BACHTEC: todos los bachilleratos dependientes de la Subsecretaría de Educación e Investigación Tecnológica.
- COBACH: los Colegios de Bachilleres del Estado de Sonora y otros

Estados.

-PIUNISON: las escuelas preparatorias incorporadas a la Universidad de Sonora.

-OTRAS: cualquier escuela preparatoria que no se encuentre en las clases anteriores.

En la Tabla 1 se resumen los resultados, organizados de acuerdo a este criterio, en cuyas columnas RJ indica el reactivo J de la parte I en el diagnóstico y SRK el reactivo K en la parte II del diagnóstico.

Otro criterio que también fue utilizado en la organización de los datos es la carrera de ingreso en la Universidad. Un resumen de los datos, organizados bajo este criterio, se presenta en la Tabla 2, en la cual se utiliza como notación: IC= Ing. Civil, IIA= Ing. Industrial Administrativo, IIS= Ing. Industrial y de Sistemas, LF= Lic. en Física, LM= Lic. en Matemáticas, IQ= Ing. Químico, QB= Químico Biólogo, IA= Ing. Agrónomo, LAE= Lic. en Administración de Empresas, CP= Contador Público, LD= Lic. en Derecho y LE= Lic. en Economía.

CONCENTRACION POR CARRERA DEL DIAGNOSTICO 1991													
PORCENTAJES DE RESPUESTAS CORRECTAS POR REACTIVO													
PARTE I		R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10	R11	SUBT
EVALUADOS													
IC	43	86	74	40	35	2	58	70	79	88	5	2	49
IIA	14	86	93	71	29	0	79	86	86	100	43	7	62
IIS	11	64	82	18	27	9	18	64	91	82	9	0	42
LF	5	100	100	80	100	40	60	80	100	100	80	40	80
LM	3	100	100	67	33	0	100	100	100	100	33	33	70
IQ	4	75	75	25	0	25	50	75	100	100	25	0	50
QB	24	79	79	33	4	0	17	25	63	21	4	4	30
IA	24	63	92	29	17	4	17	25	46	46	8	0	31
LAE	31	55	71	23	10	0	0	19	35	26	0	23	24
CP	65	69	63	9	8	0	3	23	52	35	3	0	24
LD	15	53	47	7	0	0	0	7	27	7	0	0	13
LE	14	71	71	7	7	0	0	86	86	43	7	14	36
TOTAL	253	72	74	26	17	2	22	42	61	50	8	6	34

PARTE II		SR1	SR	SR	SR	SR	SR	SUBT
EVALUADOS								
IC	43	86	74	40	35	2	58	27
IIA	14	86	93	71	29	0	79	33
IIS	11	64	82	18	27	9	18	20
LF	5	100	100	80	100	40	60	44
LM	3	100	100	67	33	0	100	36
IQ	4	75	75	25	0	25	50	23
QB	24	79	79	33	4	0	17	19
IA	24	63	92	29	17	4	17	20
LAE	31	55	71	23	10	0	0	14
CP	65	69	63	9	8	0	3	14
LD	15	53	47	7	0	0	0	10
LE	14	71	71	7	7	0	0	14
TOTAL	253	72	71	26	17	2	22	19

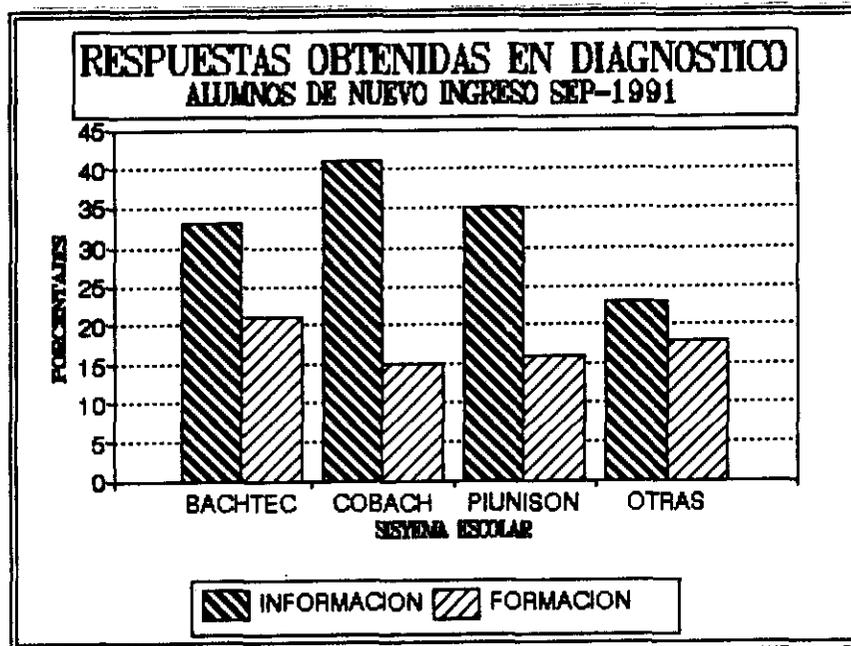
TABLA 2

CONCLUSIONES

Con todo y las limitaciones del diagnóstico (las señaladas y las omitidas), los resultados muestran suficiente evidencia de que existen deficiencias en el cumplimiento de los requisitos concebidos. Se puede hablar de un bajo nivel académico en matemáticas en aquellos que ingresan a la Universidad, lo cual no resulta del todo novedoso para quienes realizamos labores docentes en ella. Sin embargo la gravedad de la situación, a la luz de los resultados, merece varias precisiones que deben hacerse.

Obtener una eficiencia global por debajo del treinta por ciento puede tener sus explicaciones, entre las que se encuentran la validez misma del diagnóstico hasta los posibles inconvenientes de los actuales programas de estudio en el NMS. Dentro de esto hay aspectos preocupantes que salen a relucir entre los diferentes matices que se le pueden dar al estudio.

1º Los resultados muestran una inclinación hacia la información en detrimento de la formación en todos los sistemas de procedencia, de acuerdo con la Gráfica 1.



GRAFICA 1

Ante esto cabe preguntarse, si acaso, ¿No es el NMS esencialmente formativo? ¿No tiene, dentro de sus fines, un carácter propedéutico? ¿Cómo tomar estos resultados desde la perspectiva universitaria?

2º ¿Pueden deberse los resultados a una complejidad en los reactivos utilizados? No sólo dudo de ello, pienso que una muestra de reactivos y de la eficiencia en su solución avalan una postura contraria definida.

Los reactivos que se muestran enseguida, remiten a contenidos básicos que deben resultar elementales a cualquier alumno que inicie estudios profesionales. Pero entonces ¿Qué podemos esperar de nuestros alumnos? ¿Qué saben de álgebra y geometría? ¿Han tenido un acercamiento al cálculo, a la probabilidad o la estadística?

R3.- Resolver: $X^2 - 6X + 8 = 0$.

RESP. CORR. = 26

R6.- Hallar la distancia entre los puntos (1,2) y (3,5).

RESP. CORR. = 22

R11.- Calcular:

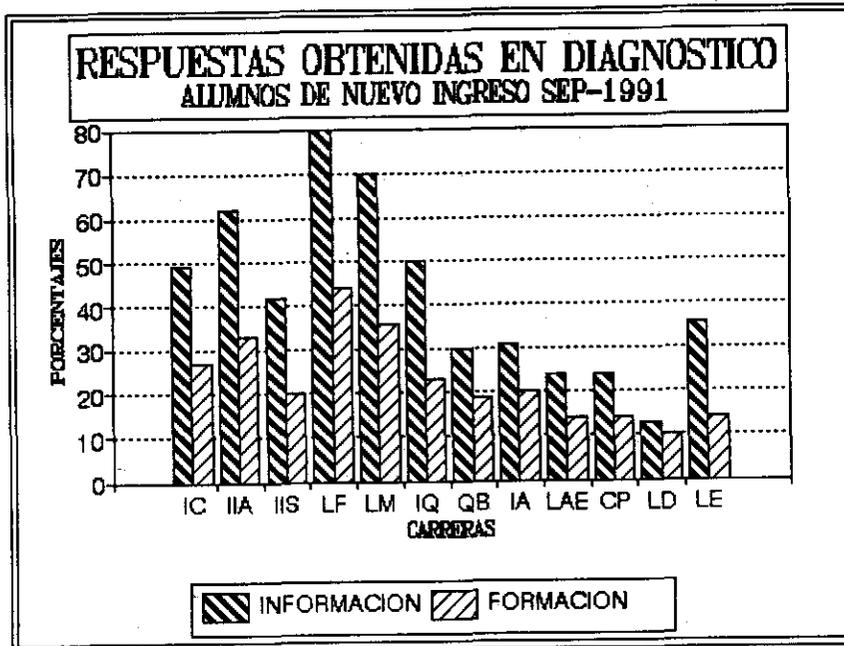
a) $\text{Sen } 45^\circ =$ b) $\text{Tan } 60^\circ =$

RESP. CORR. = 6

SR2.- En un taller fueron reparados, durante un mes, 40 vehículos entre automóviles y bicicletas. El número total de ruedas de los vehículos reparados fue de 100 exactamente. ¿Cuántos automóviles y cuántas bicicletas se repararon?

RESP. CORR. = 29

3º Otra cuestión por plantear debe iniciarse con una aclaración. Antes se mencionó que fueron objeto de evaluación cerca de cuatrocientos alumnos pero en las tablas de resultados se reporta sólo un total de doscientos cincuenta y tres; esto se debe a que se incluyen sólo los alumnos que presentaron ambas partes del diagnóstico con el fin de revisar una posible relación entre los aspectos informativo y formativo que se promueven en el NMS. Un primer acercamiento a esta cuestión lo proporciona la Gráfica 2, la cual vuelve a resaltar la preponderancia del aspecto informativo sobre el formativo con todo y que la Tabla 3 muestra que el primero no sienta bases para el segundo cuando se hace



GAFICA 2

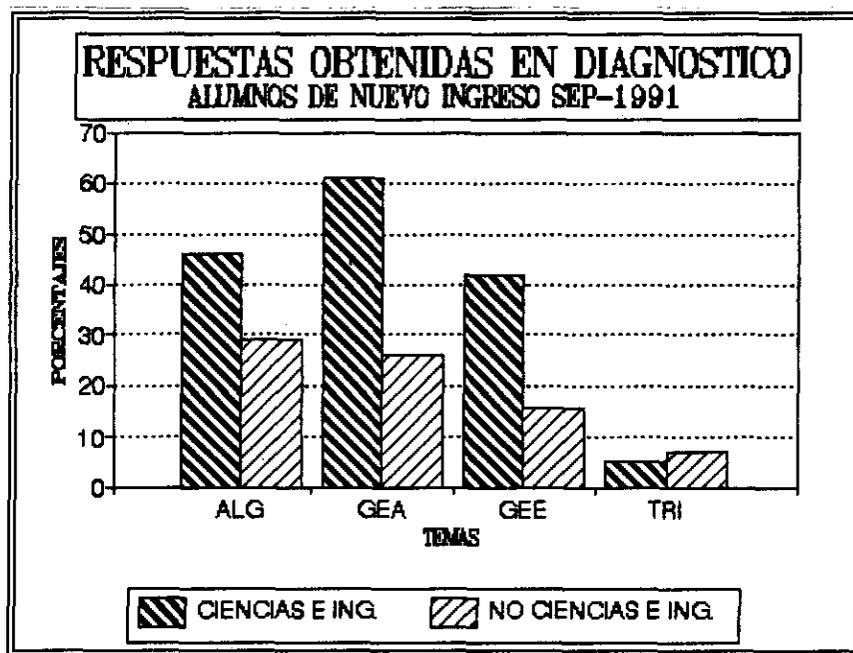
una comparación alumno por alumno pero aparentemente si la hay tomando los resultados carrera por carrera..

	NO CEING	CEING	GLOBAL	
R_{1f}^2	0.077	0.23	0.2	por alumno
	0.64	0.93	0.995	por carrera

TABLA 3

Al aspecto formativo en matemáticas a éste se le atribuye la generación de capacidades para abordar problemas, de ahí su importancia escolar. Por lo que habrá que replantear su presencia escolar, concretamente en el NMS.

4º Existe una gran heterogeneidad en la situación académica matemática de quienes ingresan a la Universidad. Como muestra la Gráfica 2, la elección de una opción de estudios profesionales depende de ella, con todo y que se pregone el alcance de una cultura básica para todos.



GRAFICA 3

5º Otros análisis son posibles a partir de los resultados aquí mostrados. Pero en general, debe quedar claro que los supuestos de que comunmente partimos los profesores universitarios son falsos, que hacen falta diagnósticos e investigaciones en diferentes momentos del proceso educativo; que esta responsabilidad debe corresponder tanto a la Universidad como a las Instituciones del NMS y que ésto es necesario para una reformulación de planes y programas de estudio realistas.

INTRODUCCION A LA TOPOLOGIA

Carlos A. Robles Corbalá
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Octubre de 1992

Introducción

La historia de la topología se remonta hace dos siglos. La topología es el punto terminal de la evolución de la geometría. Esbochemos esta evolución.

Una de las mayores tareas de las matemáticas fue el desarrollo de sistemas geométricos más y más sencillos. Históricamente estos se presentaron así:

- *Geometría Euclideana*: Geometría elemental familiar.
- *Geometría no Euclideana*: Negación de la unicidad de paralelas por Lobachevsky y Bolgai alrededor de 1830.
- *Geometría Proyectiva*: por Poncelet y Von Staudt.
- *Geometría Afín*: Geometría euclideana sin distancia.
- Por último la más simple de todas la *Topología*: Geometría donde se admite sólo transformaciones continuas.

La topología se ocupa de *formas* y no de *medidas*, de *calidad* y no de *cantidad*.

Ahora bien, hoy en día la topología ha invadido todas las ramas de las matemáticas, es por ello que se presenta como un elemento indispensable de la cultura de todo matemático.

El objetivo de este curso es presentar los conceptos más primarios de lo que así se ha hecho llamar **Topología de Conjuntos** ó **Topología General**.

Espacios Métricos

Primeramente estudiaremos los espacios métricos, los cuales tienen la propiedad de que dados dos puntos tenemos definida una distancia entre ellos. Esto es pues, una generalización de las propiedades de distancia que tenemos en los espacios \mathbb{R}^n . Pondremos una variedad de ejemplos, y distinguiremos subconjuntos importantes en estos espacios.

Los espacios métricos nos proporcionarán ejemplos de espacios topológicos.

Espacios Topológicos

Dado un conjunto X , definiremos lo que es una topología en X (aquí el conjunto X no tiene por qué tener definida una distancia); comparemos topologías definidas sobre un conjunto X y presentaremos ejemplos importantes.

Dado un espacio topológico (X, τ) y $E \subseteq X$ definiremos el conjunto derivado, la cerradura, el interior y la frontera de E , y discutiremos propiedades de estos operadores. Asimismo, introduciremos el concepto de topología relativa.

Continuidad y Homeomorfismos

Los conceptos de continuidad y en particular el de homeomorfismo, son los más importantes en esta rama de las matemáticas. En esta sección presentaremos sus definiciones y proposiciones equivalentes a ellas; así como una variedad de ejemplos.

Topología Cociente

Consideraremos un espacio topológico X , un conjunto Y y una función f suprayectiva de X en Y . Esto nos dará lugar a definir una topología en Y , llamada **Topología Cociente** que tendrá propiedades bastante sugerentes.

Ahora bien, un procedimiento para obtener funciones suprayectivas consiste en considerar las clases de equivalencia de una relación de equivalencia. De esta forma, si X es un espacio topológico y \sim una relación de equivalencia

en X , definimos $f : X \rightarrow X/\sim$ por $f(x) = [x]$, la clase de equivalencia que contiene a x (X/\sim designa el conjunto de clases de equivalencia). Así diremos que X/\sim con la topología cociente ha sido obtenido por identificación topológica. Presentaremos ejemplos importantes.

Deformaciones y Contracciones

Utilizando la topología cociente y la topología relativa, presentaremos espacios en los cuales se encuentran curvas cerradas simples que se pueden deformar a un punto en el mismo espacio (sin salirnos de él); y aún más, espacios topológicos que pueden ser deformados a un punto continuamente.

Bibliografía

1. J. Dugundji. *Topology*. Ed. Allyn and Bacon Inc. (1966).
2. García M. A.-Tamariz M. A. *Topología General*. Ed. Porrúa. (1988)
3. Hinrichsen D.- Fernández J. L. *Topología General*. Ed. Pueblo y Educación. (1977)
4. Hu S. T. *Introduction to General Topology*. Ed. Holdenday Inc. (1966)
5. Kosniowsky C. *Topología Algebraica*. Ed. Reverté S.A. (1986)
6. Simmons G. F. *Introduction to topology and Modern Analysis*. Ed. McGraw Hill-Kogakusha. (1963)
7. Willard S. *General Topology*. Ed. Addison-Wesley Publishing Company. (1970)

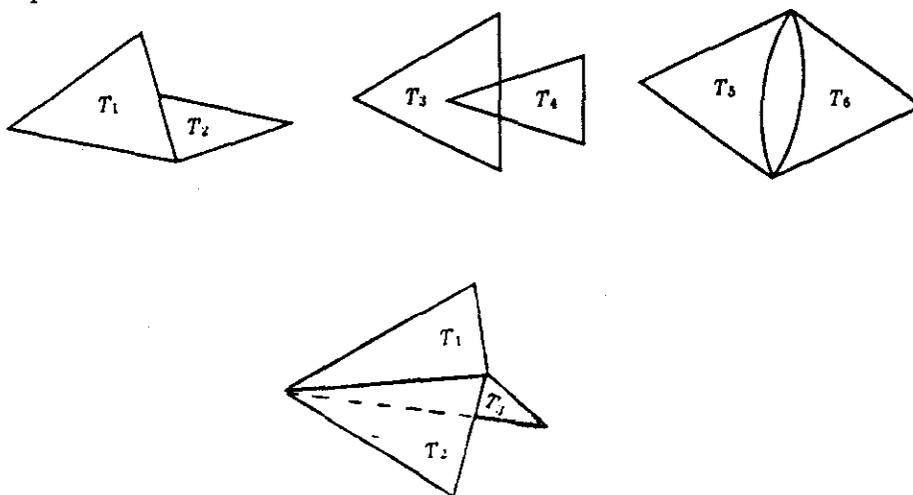
TEOREMA DE CLASIFICACION DE SUPERFICIES

Gabriela Gpe. Hinojosa Palafox
Estudiante de Matemáticas
Universidad de Sonora

Octubre de 1992

El concepto topológico de superficie es una abstracción del concepto familiar de superficie. Consideraremos una superficie como un espacio topológico tal que localmente tiene las mismas propiedades que el plano y que cada dos puntos en él poseen entornos disjuntos. A lo largo de la plática, nos estaremos refiriendo como *superficies* a aquellas superficies que son conexas, compactas y con frontera vacía.

En 1925, T. Radó probó que toda superficie admite una triangulación, es decir, toda superficie se puede dividir en un número finito de triángulos que cumplen con la condición de que dados dos triángulos distintos T_i y T_j o son disjuntos, o tienen un solo vértice, o toda una arista en común. No se admite por ejemplo:



De esta forma una superficie puede considerarse como construida “pegando” primero aquellos triángulos tal que la figura que nos quede sea homeomorfa a un disco con segmentos y una “receta” para pegarlos, por supuesto, cada segmento tiene su pareja.

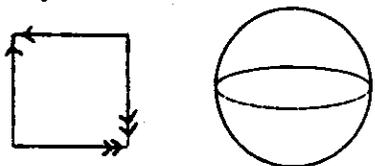
Para convencernos de esto, escojamos un triángulo T_1 , luego fijémonos en aquellos triángulos que tienen una arista en común con T_1 , tomemos uno de ellos, lo denotamos por T_2 y lo pegamos con T_1 .



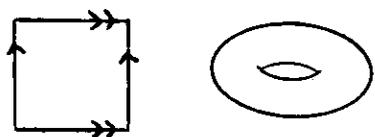
Continuando inductivamente sobre el número de triángulos obtenemos la figura mencionada.

Los ejemplos más sencillos de superficies son aquellos para los cuales el disco está dividido en cuatro segmentos.

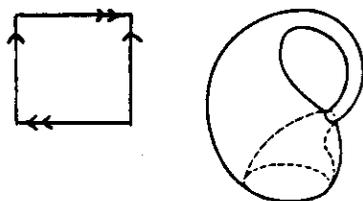
1. *Esfera*



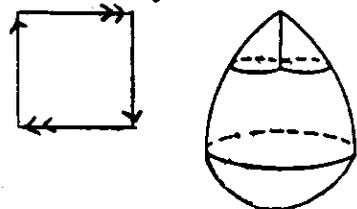
2. *Toro*



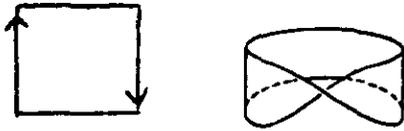
3. *Botella de Klein*



4. *Plano Proyectivo*



y la *Banda de Moebius* que aunque no es una superficie (por tener frontera) nos será de utilidad.



Ahora, a partir de superficies podemos obtener otras superficies por un proceso llamado "suma conexas". Sean S_1 y S_2 dos superficies. Su suma conexas, designada por $S_1 \# S_2$ está formada practicando un pequeño agujero en cada superficie y pegando entonces las dos superficies a lo largo del borde de estos agujeros.

Con lo anterior, podemos enunciar el *Teorema de Clasificación de Superficies*:

Teorema: Toda superficie es homeomorfa a una esfera, a una suma conexas de toros, o a una suma conexas de planos proyectivos. Ninguna de estas superficies es homeomorfa a otra.

Este teorema es muy importante ya que nos clasifica completamente a todas las superficies. Su demostración se basa en la triangulación de superficies, ya que como veíamos, una superficie se puede representar como un polígono y mediante operaciones de "cortar y pegar" se llega a la representación de una de las superficies enunciadas en el teorema.

BIBLIOGRAFIA

1. Kosniowski C. Topología Algebraica. Ed. Reverté.
2. Massey W. S. Introducción a la Topología Algebraica. Ed. Reverté.
3. Armstrong M. A. Topología Básica. Ed. Reverté.

CURSO DE ALGORITMOS DE FLUJO EN REDES

Myriam Cisneros Molina
Estudiante de la Lic. en Matemáticas
Universidad de Sonora

26 de Octubre de 1992

PRELIMINARES

Para el estudio de problemas de flujo en redes como el de transporte y otros más también importantes, se utilizan conceptos y resultados de la Teoría de Gráficas.

Esta primera parte pretende dar un panorama básico de Teoría de Gráficas para dejar en claro conceptos y proposiciones que más adelante se utilizarán.

GRÁFICAS Y DIGRÁFICAS

Def. Una **Gráfica** $G = (X, A, f)$ consta de:

1. Un conjunto $X = X(G)$ cuyos elementos se llaman *vértices* (puntos o nodos) de G .
2. Un conjunto $A = A(G)$, el conjunto de las *aristas* (o líneas) de G .
3. Una función $f : A(G) \rightarrow X(G) \times X(G)$, la función de *incidencia* de G .

Siempre que nos refiramos a una gráfica supondremos de antemano que es finita.

Si a es una arista de G y $f(a) = (u, w)$ se dice que u y w son los *extremos* o *vértices terminales* de a . Una arista cuyos extremos coinciden es un **lazo**. Dos aristas a y a' son paralelas si tienen los mismos extremos, es decir si $f(a) = f(a')$.

Def. Una **Digráfica** (o gráfica dirigida) es una terna $D = (X, A, f)$ formada por:

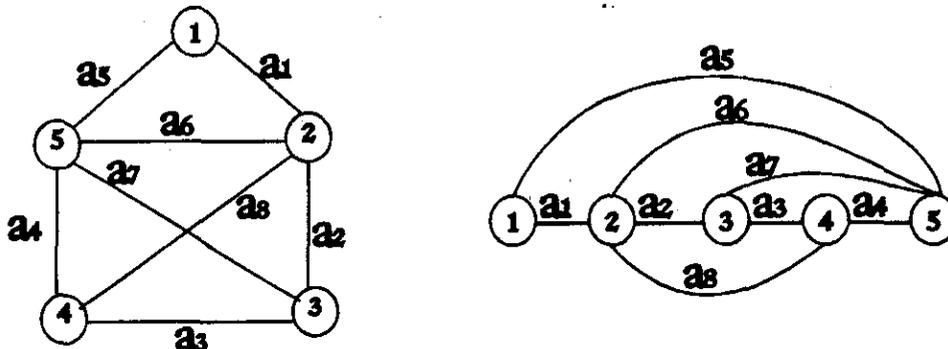
- (a) Un conjunto $X = X(G)$ cuyos elementos se llaman *vértices* (puntos o nodos) de G .
- (b) Un conjunto $A = A(G)$, el conjunto de los *arcos* de G .
- (c) Una función $f : A(G) \rightarrow X(G) \times X(G)$ la función de *incidencia* de G .

Si a es un arco de G y $f(a) = (u, v)$ se dice que u es el extremo inicial y v el extremo final del arco a .

Obsérvese que la única diferencia, aunque importante, entre ambas definiciones, es que en una digráfica los extremos de los arcos están ordenados, mientras que en una gráfica no.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE UNA GRÁFICA

Los nodos de la gráfica se representan mediante puntos y las aristas por líneas entre nodos. Si es gráfica dirigida los arcos se diferencian poniendo una flecha en la dirección de llegada. Ejemplos:



SUBGRÁFICAS

Def. Sea $G = (X, A, f)$ y $G' = (X', A', f')$ dos gráficas. Se dice que G' es subgráfica de G ($G' \subset G$) si $X' \subset X$, $A' \subset A$ y $f(a) = f'(a)$ para toda arista a de G . Si $G = (X, A, f)$ y $G' = (X', A', f')$ y $G' \subseteq G$ se dice que G' es una subgráfica

GRADO DE NODOS

Def. Si v es un vértice de una gráfica G , se llama *grado* de v y se denota $\Gamma(v)$ al número de arcos de G que tienen a v como extremo.

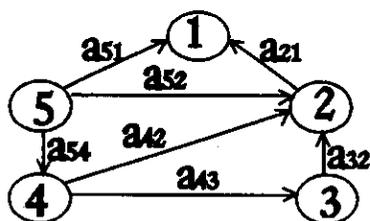
Def. Si D es una digráfica y v un vértice, se llama *grado de entrada* de v y se denota $\Gamma^+(v)$ al número de arcos cuyo extremo final es v y se llama *grado de salida* de v y se denota $\Gamma^-(v)$ al número de arcos cuyo extremo inicial es v .

Denotemos $\Gamma(u, v)$ al número de arcos con extremo inicial u y extremo final v .

Proposición. Si D es una digráfica, si u, v son dos vértice y a el número de arcos, se verifican las propiedades:

$$(a) \Gamma^+(v) = \sum_{u \in X} \Gamma(u, v); \quad \Gamma^-(v) = \sum_{u \in X} \Gamma(u, v)$$

$$(b) a = \sum_{v \in X} \Gamma^+(v) = \sum_{v \in X} \Gamma^-(v)$$



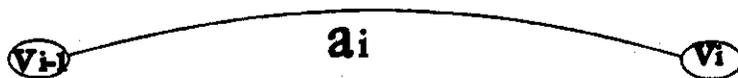
$\Gamma(1) = 2$	$\Gamma^-(1) = 2$	$\Gamma^+(1) = 0$
$\Gamma(2) = 4$	$\Gamma^-(2) = 3$	$\Gamma^+(2) = 1$
$\Gamma(3) = 2$	$\Gamma^-(3) = 1$	$\Gamma^+(3) = 1$
$\Gamma(4) = 4$	$\Gamma^-(4) = 1$	$\Gamma^+(4) = 3$
$\Gamma(5) = 4$	$\Gamma^-(5) = 1$	$\Gamma^+(5) = 3$

CAMINO, PASEO, TRAYECTORIA CICLO Y CIRCUITO

Def. Sea G una gráfica. Un **Camino** es una sucesión alter-nante

$$(v_0, a_1, v_1, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n)$$

de vértices y aristas de G y cada arista a_i tiene por extremo al vértices v_{i-1} que le precede y al que le sigue v_i



Si γ es un camino, la longitud de γ , $l(\gamma)$ es el número de aristas no necesariamente distintas que figuran en γ .

Un Camino no nulo cuyos extremos son iguales se llama *Cerrado*.

Un camino que no repite aristas se llama *Paseo* o camino simple.

Un camino que no repite vértices se llama *Cadena* o camino elemental.

Nótese que toda cadena es un paseo pero no recíprocamente.

Def. Un **ciclo** es un camino cerrado elemental de longitud positiva.

Def. Sea D una digráfica. Un **Camino Dirigido** en D es una sucesión de vértices y arcos.

$$(v_0, a_1, v_1, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n) \text{ con } n \geq 0$$

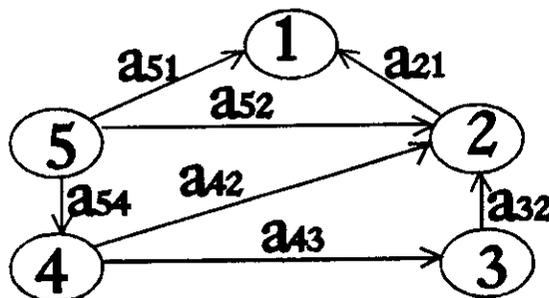
tal que v_{i-1} y v_i son, respectivamente, los extremos inicial y final del arco a_i .



Un camino dirigido que no repite vértices se llama *Trayectoria Cerrada*.

Def. Un **Circuito** es una trayectoria que no repite aristas.

Ejemplos:



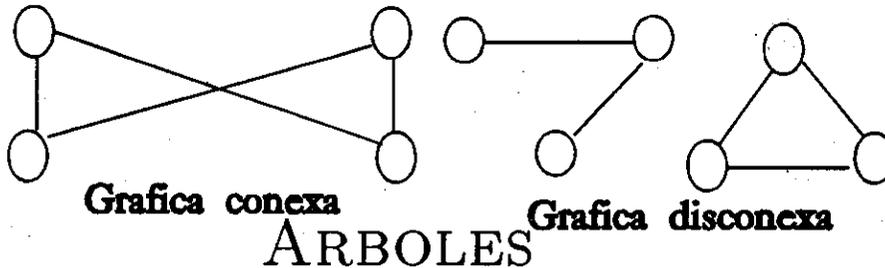
- $\gamma_1 = (1, a_{21}, 2, a_{32}, 3, a_{43}, 4, a_{42}, 2, a_{32}, 3)$ $l(\gamma_1) = 5$ ES UN CAMINO
- $\gamma_2 = (1, a_{51}, 5, a_{54}, 4, a_{45}, 5, a_{52}, 2)$ $l(\gamma_2) = 4$ ES UN PASEO
- $\gamma_3 = (4, a_{42}, 2, a_{32}, 3)$ $l(\gamma_3) = 2$ ES UNA CADENA
- $\gamma_4 = (1, a_{21}, 2, a_{32}, 3, a_{43}, 4, a_{54}, 5, a_{51}, 1)$ $l(\gamma_4) = 5$ ES UN CICLO
- $\gamma_5 = (4, a_{43}, 3, a_{32}, 2, a_{21}, 1)$ $l(\gamma_5) = 3$ ES UNA TRAYECTORIA
- $\gamma_6 = (5, a_{54}, 4, a_{45}, 5)$ $l(\gamma_6) = 2$ ES UN CIRCUITO

CONEXIDAD

Def. Dos vértices u y v de una gráfica G se dice que están conectados cuando existe un camino en G de extremos u y v .

Def. Una gráfica G es **conexa** si, y sólo si para todo par de vértices u y v de G existe un camino en G que conecta u y v .

Ejemplos:



Def. Una gráfica G se dice que es un **Arbol** si, y sólo si se verifican las siguientes condiciones.

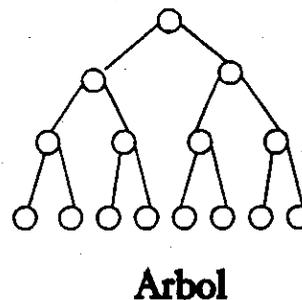
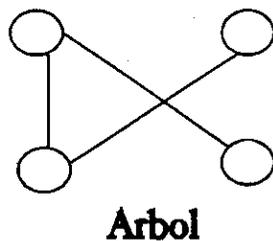
- (a) G es conexa;
- (b) G no posee ciclos (acíclica)

Def. Un árbol A se dice que es un árbol generador de la gráfica G si A es subgráfica de G tal que su conjunto de vértices coincide con el de G .

Proposición. Todo grafo conexo posee un árbol generador.

Proposición. Un árbol con n vértices tiene $n - 1$ arcos.

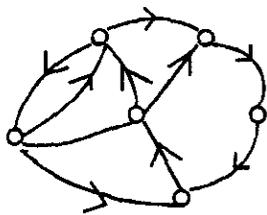
Proposición. Todo árbol con mas de un vértice posee al menos dos vértices de grado 1.



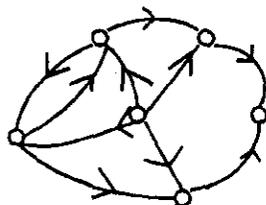
ARBOLES DIRIGIDOS

Def. Un vértice v de una digráfica D se dice que es una *raíz* de la digráfica si existe camino dirigido a todos los demás vértices de D .

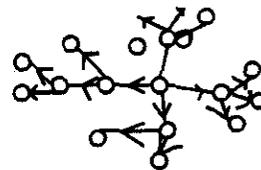
Def. Un árbol con raíz (árbol dirigido) o *Arborescencia* es una digráfica tal que posee una raíz y su gráfica asociada es un árbol, o bien se trata de la digráfica vacía.



Todo nodo es raíz



Solo hay una raíz



Es una arborescencia

Utilizaremos alguna terminología nueva cuando tratemos con arborescencias:

- i. Si el par de vértices u y v son los extremos inicial y final respectivamente de un arco de un árbol dirigido, diremos que v es *hijo de u* o bien que u es *padre de v* .
- ii. Llamaremos grado de un vértice al número de hijos es decir Γ^- . Tengamos en cuenta que Γ^+ es uno en todos los vértices salvo en el raíz que es cero.
- iii. Si u es un vértice de un árbol dirigido, llamaremos subárbol de raíz u al subgrafo generado por el vértice n y todos sus descendientes.
- iv. Llamaremos nivel o profundidad de un vértice a la longitud del único camino que existe con extremos inicial en la raíz del árbol y extremo final en dicho vértice, y diremos que la profundidad de un árbol es p si p es el máximo de las profundidades de sus vértices.
- v. Un árbol de profundidad p diremos que es completo de grado k si todos los vértices del árbol (salvo los de nivel p , es decir salvo las hojas) tienen grado p .

ESTRUCTURA DE DATOS

Edelmira Rodríguez Alcántar
Estudiante de la Lic. en Matemáticas
Universidad de Sonora

27 de octubre de 1992

Los datos pueden organizarse en muchas formas diferentes; el modelo matemático o lógico de una organización particular de datos y las operaciones que en él pueden realizarse recibe el nombre de *estructura de datos*.

ARRAYS (ARREGLOS)

Las estructuras de datos pueden clasificarse en lineales y no lineales. Se dice que una estructura es lineal si sus elementos forman una secuencia o, en otras palabras, una lista lineal. Los elementos de las estructuras pueden estar formados de varias partes de información. Existen dos formas básicas de representar estas estructuras lineales en memoria. Una de ellas es representando esta relación de los elementos, almacenándolos en posiciones consecutivas de memoria. Estas estructuras reciben el nombre de *arrays*. La otra forma es representando esta relación por medio de punteros o enlaces. A estas últimas estructuras se les denomina *listas enlazadas*. Las operaciones que suelen realizarse habitualmente sobre una estructura lineal, sea esta un array o una lista enlazada, son las siguientes:

1. *Recorrido*. Procesamiento de cada elemento de la lista.
2. *Búsqueda*. Búsqueda de la posición ocupada por un elemento con un determinado valor, o del registro con un determinado número de clave.
3. *Inserción*. Adición de un nuevo elemento de la lista.
4. *Borrado*. Eliminación de un elemento de la lista.
5. *Ordenación*. Organizar los elementos de la lista de acuerdo con algún tipo de orden.

Un array lineal es una lista de un número finito de n elementos homogéneos (i.e. elementos del mismo tipo). El número n recibe el nombre de longitud o tamaño del array. Los elementos de un array podemos denotarlos utilizando corchetes

$$A[1], A[2], \dots, A[n]$$

El computador no necesita contabilizar las posiciones de todos los elementos de Grafica, sino que solo necesita conocer la dirección del primer elemento de Grafica.

RECORRIDO DE ARRAYS LINEALES

Sea A un conjunto de datos almacenados en la memoria del computador. Supongamos que queremos imprimir el contenido de cada elemento de A , o que queremos contar el número de elementos de A que presentan una determinada propiedad. Esto puede hacerse *recorriendo* A , i.e., accediendo y procesando (a veces se dice *visitando*) cada elemento de A exactamente una sola vez.

INSERCIÓN Y BORRADO

Sea A un conjunto de datos almacenados en la memoria del computador. Definimos la operación de "inserción" como aquella consistente en añadir un nuevo elemento al conjunto A . Por el contrario, la operación de "borrado" consiste en la eliminación de uno de los elementos de A .

BÚSQUEDA

Sea DATOS un conjunto de datos almacenados en memoria. Supongamos que se nos da un determinado valor del tipo almacenado, ELEMENTO. El término *búsqueda* hace referencia a la operación consistente en encontrar la posición LUGAR que ocupa ELEMENTO en DATOS, o bien a la impresión de un mensaje que nos indica que ELEMENTO no se encuentra en la lista. Existen varios algoritmos de búsqueda distintos. Aquí presentaremos el algoritmo más simple llamado búsqueda secuencial.

BÚSQUEDA SECUENCIAL

Sea DATOS un array lineal con n elementos. Si no disponemos de mas información acerca de DATOS, la forma más directa de localizar ELEMENTO dentro de DATOS es comparar ELEMENTO con todos los componentes de DATOS uno a uno. Así, comparamos si $DATOS[1]=ELEMENTO$, en caso contrario si $DATOS[2]=ELEMENTO$, y así sucesivamente. hasta localizar ELEMENTO.

LISTAS ENLAZADAS

Una *lista enlazada* o *lista unidireccional* la constituyen una colección lineal de elementos, llamados *nodos*, donde el orden de los mismos se establece mediante *punteros*. Cada nodo se divide en dos partes: una primera que contiene la información asociada al elemento, y una segunda, llamada campo de enlace o *campo de puntero al ENLACE*, que contiene la dirección del siguiente nodo de la lista. La figura 1 muestra un diagrama esquemático de una lista enlazada compuesta por seis nodos. La parte izquierda del nodo representa información asociada al elemento (por ejemplo NOMBRE, DIRECCION), y la parte derecha representa el campo de puntero del nodo del cual emana una flecha que indica el siguiente nodo de la lista. Esta es la representación gráfica habitual de las listas enlazadas. El campo puntero del último nodo contiene un valor especial, llamado valor *NULL* simbolizado por \bullet , que es una dirección con la cual indicamos el final de la lista. Las listas enlazadas incorporan también una variable puntero especial llamada *COMIENZO* o *NOMBRE* que contiene la dirección que ocupa el primer nodo de la lista. En la representación gráfica esto se simboliza con una flecha que saliendo de *COMIENZO* apunta al primer nodo.

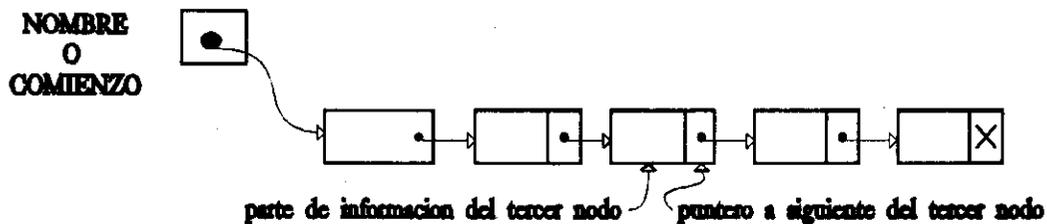


fig. 1

REPRESENTACIÓN DE LISTAS ENLAZADAS EN MEMORIA

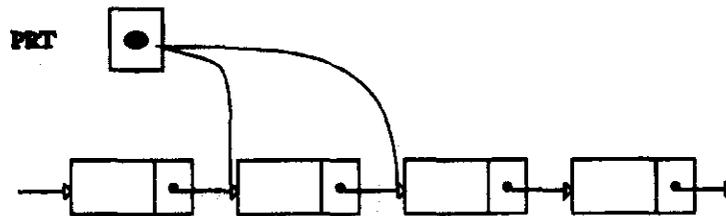
Sea LISTA una lista enlazada. Almacenamos LISTA en memoria de la forma siguiente. Como mínimo, LISTA estará compuesta por dos partes, a los que llamaremos *INFORM* y *SIGUIENTE*, donde la primera contiene la información y la segunda la dirección del siguiente nodo de la lista. Como ya se ha citado necesitamos también una variable *COMIENZO* que contiene la posición ocupada por el primer elemento de la lista, y una marca especial *NULL* que indica el final de la misma.

RECORRIDO DE UNA LISTA ENLAZADA

Sea la lista enlazada, almacenada en memoria mediante dos partes *INFORM* y *SIGUIENTE*. Adicionalmente definimos la variable *COMIENZO* que apunta al primer elemento de la lista y suponemos que el último elemento de la lista contiene en su campo *SIGUIENTE* el valor *NULL*. Supongamos que queremos recorrer *LISTA* para procesar cada uno de sus nodos exactamente una vez. Se utiliza la variable puntero *PTR* que apunta siempre al nodo procesado en cada momento. De esta forma la asignación.

$$PTR = PTR \rightarrow SIGUIENTE$$

tiene el efecto de mover el puntero al siguiente nodo de la lista, como se presenta en la figura siguiente.



BÚSQUEDA EN UNA LISTA ENLAZADA

Las listas pueden ser ordenadas o no ordenadas, dependiendo de lo cual es la búsqueda. Supongamos que los elementos de lista no están ordenados. En este caso podremos localizar *ELEMENTO* sin más que recorrer *LISTA* utilizando el puntero *PTR* y comparando *ELEMENTO* con el contenido de $PTR \rightarrow INFORM$ de cada nodo. Supongamos ahora que los datos de *LISTA* están ordenados. De nuevo buscamos *ELEMENTO* en la lista recorriendo la misma utilizando una variable puntero y comparando *ELEMENTO* con el contenido de $PTR \rightarrow INFORM$ nodo a nodo. En este caso, sin embargo, podremos finalizar la búsqueda una vez que *ELEMENTO* sea mayor que $PTR \rightarrow INFORM$.

INSERCIÓN EN UNA LISTA ENLAZADA

Sea *LISTA* una lista enlazada en la que los nodos *A* y *B* ocupan posiciones sucesivas en el orden impuesto en la lista, ver figura 2(a). Supongamos que queremos insertar en ella un nodo *N* que debe ocupar un lugar entre *A* y *B*. La representación esquemática de cómo se realiza esta operación se muestra en la figura 2(b). En resumen, después de la operación el nodo *A* apuntará al nodo *N* y éste apuntará a *B*, i.e., el nodo al que apuntaba antes *A*.

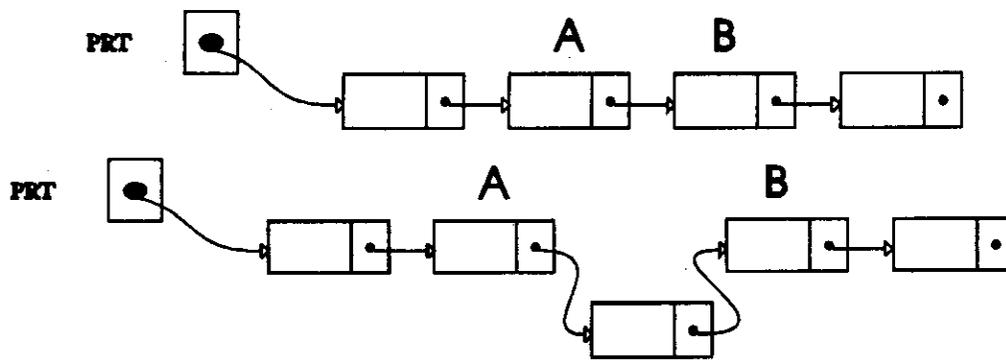


fig2

ELIMINACIÓN DE UN ELEMENTO DE UNA LISTA ENLAZADA

Sea LISTA una lista enlazada en la cual el nodo N se encuentra entre los nodos A y B, como se muestra en la figura 3(a). Supongamos que queremos eliminar el nodo N de la lista. Una representación esquemática de cómo hacerlo se muestra en la figura 3(b). La eliminación se produce tan pronto como el puntero de enlace siguiente del nodo A apunte al nodo B.

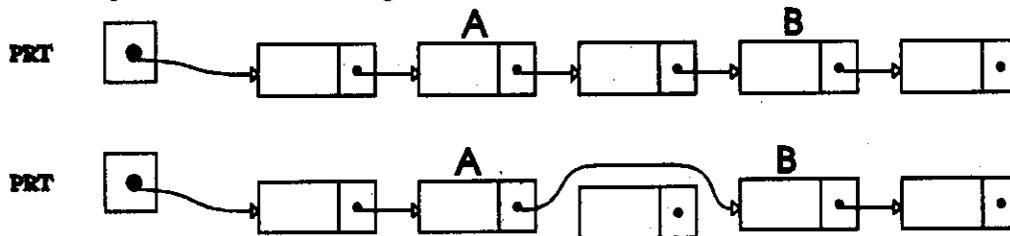


fig. 3

PILA

Una *pila* es una lista de elementos en la cual un elemento sólo puede ser insertado o eliminado por un extremo, llamado la *cima* de la pila. En particular, esto significa que los elementos se sacan de la pila en orden inverso al que se insertaron en él. Las pilas se pueden representar en las computadoras de varias maneras, generalmente por medio de una lista enlazada o de un array lineal. Nuestra pilas se mantendrán en una lista enlazada.

Las estructuras de datos hasta aquí estudiadas han sido lineales. A continuación presentaremos una estructura de datos no lineal llamada árbol. Nosotros veremos el caso particular de un árbol binario.

ARBOL BINARIO COMPLETO

Un árbol binario T se defina como un conjunto finito de elementos, llamados *nodos*, de forma que:

1. T es vacío (en cuyo caso se llama árbol NULL o árbol vacío) o
2. T contiene un nodo distinguido R , llamado raíz de T , y los restantes nodos de T forman un par ordenado de árboles binarios disjuntos T_1 y T_2 .

Si T_1 no es vacío, su raíz se llama *hijo izquierdo* de R ; y análogamente, si T_2 no es vacío, su raíz se llama *hijo derecho* de R . Un árbol T se dice que es *completo* si todos sus niveles, excepto posiblemente el último, tienen el máximo número de nodos posibles y si todos los nodos del último nivel están situados lo más posible a la izquierda. Representaremos un árbol binario con arrays lineales. Existen tres formas de recorrer un árbol binario T de raíz R . Estos tres algoritmos son los denominados preorden, inorden y postorden. Para efectos prácticos aquí solo estudiaremos uno de ellos: el recorrido inorden.

RECORRIDO INORDEN

El algoritmo de recorrido inorden usa una variable PTR (puntero) que contendrá la posición del nodo N que se está examinando, y un array, que mantendrá las direcciones de los nodos que queden por procesar. De hecho, en este algoritmo, un nodo sólo se procesa cuando se saca de la pila.

Algoritmo : Inicialmente meter NULL en PILA (como centinela) y hacer $PTR = RAIZ$. Entonces repetir los siguientes pasos hasta que $PTR = NULL$.

1. Bajar por la izquierda a partir de PTR , metiendo cada nodo N en la PILA y parando cuando el nodo N no tenga hijo izquierdo que meter en PILA.
2. (Vuelta atrás). Sacar y procesar los nodos en PILA. Si se saca NULL, Salir. Si se procesa un nodo N con un hijo derecho $R(N)$, hacer $PTR = R(N)$ y volver al paso (1).

Hacemos hincapié en que un nodo solo se procesa cuando es sacado de la PILA.

ARBOLES EN MONTÓN

Suponga que H es un árbol binario completo con n elementos. Se dice que H es un *árbol en montón* si cada nodo N tiene la siguiente propiedad: El valor de N es menor o igual que el valor de cualquier hijo de N .

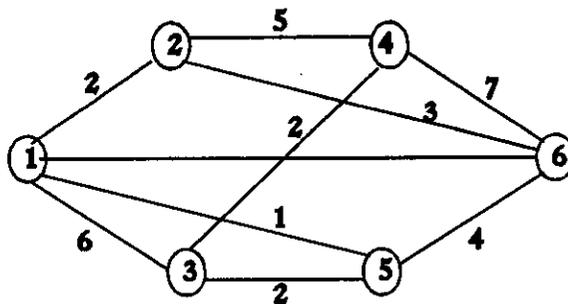
La manera de quitar y añadir elementos al montón se verá con detalle en el transcurso de esta conferencia.

KRUSKAL

Edelmira Rodríguez Alcántar
Estudiante de Lic. en matemáticas
Universidad de Sonora

28 de octubre de 1992

Supongamos que tenemos la siguiente red.



Digamos que representa los distintos caminos, con sus costos respectivos, que pueden construirse para comunicar algunas ciudades, nuestro problema será encontrar la forma más barata de comunicarlas todas.

El problema se transforma en:

Se tiene un conjunto de nodos y un conjunto de aristas. Asociado a cada arista se tiene un costo y el problema es encontrar un subconjunto del conjunto de arista de forma tal que se pueda ir de un nodo a cualquier otro "viajando" solo sobre las aristas de este subconjunto y que el costo total (suma de costos) del subconjunto de aristas sea lo menos posible. Esto lo vamos a hacer mediante un algoritmo, el Kruskal, que presentamos a continuación.

Antes de presentar el algoritmo, analicemos nuestro problema:
Lo que queremos es, dada una ciudad, poder comunirla con todas las demás de la forma más barata posible. Así pues ¿ será factible tener un camino cerrado (ciclo) en la solución del problema? La respuesta es no, pues si existe un ciclo la solución comunicando las ciudades, quitando un arco de la solución las ciudades seguirán conectadas con lo cuál la solución obtenida no es la óptima.

Visto lo anterior, es claro que el algoritmo debe ser capaz de detectar los ciclos en caso de que se formen, para así dar la óptima solución.

La solución obtenida es un árbol de mínima expansión.

Algoritmo Kruskal

Sean

- $\{a\}_{i=1}^m$ conjunto de aristas.
- j : número de iteraciones.
- k : número de aristas en la solución.
- A' : conjunto de aristas en la solución.

1. Primero ordenar el conjunto de aristas en la solución respecto al peso (se usa una estructura de montón).

$$k = j = 0$$

$$A' = \Phi$$

2. $j = j + 1$

⊕ Tomar a_j y si no forma ciclo con las aristas en A' hacer

$$A' = A' \cup \{a_j\}$$

$$k = k + 1$$

Hacer ⊕ hasta que $k = n - 1$

Para darnos una idea grafica de cómo detectar ciclos lo que se hace es : en el conjunto A' nos fijamos en los nodos con grado uno (nodos pendiente), i.e., los que tienen sólo un arco conectado, estos arcos los quitamos de la solución y nos fijamos en red resultante, si aparecen de nueva cuenta nodos pendiente se repite el proceso hasta que, o queden todos los nodos con grado cero o bien existan algunos con grado mayor que uno.

Algoritmo para encontrar ciclos

1. Los nodos de grado 1 se meten en una *PILA*.
2. Sacar un nodo de la *PILA*.
 - (a) Si tiene grado 1, quitar el arco de la solución (i.e. etiquetarlo temporalmente).
 - (b) Repetir hasta que $PILA = NULL$.
3. Revisar si quedaron nodos pendientes (nodos con grado 1).
 - Si. Ir a 1.
 - No. Hay nodos con grado mayor que cero? (i.e. se formó ciclo)
 - Si. a_j no entra en la solución.

Cabe mencionar la existencia de otro algoritmo que resuelve el problema propuesto. Este algoritmo se llama PRIM y da como solución, al igual que el KRUSKAL, un árbol de mínima expansión.

Problemas de Ruta Mínima: DIJKSTRA

Irene Rodríguez Castillo
Estudiante de la Lic. en Matemáticas
Universidad de Sonora.

29 de Octubre de 1992

Los problemas de ruta mínima están planteados sobre digráficas, y pueden ser de tres tipos:

Sea $G = [X, A, d]$ una digráfica.

1. Dados $i, j \in X$ encontrar el camino de peso mínimo que va de i a j .
2. Dado $i \in X$ encontrar los caminos de peso mínimo para todos los $x \in X$ tales que exista algún camino de i a x .
3. Para todo $i \in X$ encontrar los caminos de peso mínimo para todos los $x \in X$ tales que exista un camino de i a x .

Ejemplos de problemas de cada tipo serían los siguientes:

1. trasladarse de un lugar a otro en un país de manera que resulte lo más barato posible.
2. Un almacén que distribuye su mercancía en el menor tiempo posible.
3. Transportación de paquetería en el país de tal manera que las rutas sean lo más cortas posibles.

El primer tipo de problema es un caso particular del segundo y con el segundo se resuelve el tercer tipo aplicándolo a todo $i \in X$.

En esta sección se presentará el algoritmo de Dijkstra para resolver problemas del segundo tipo, por ejemplo:

Supóngase que un fabricante desea distribuir su producto desde la ciudad donde se encuentra (nodo 1) a las cinco ciudades restantes de la gráfica mostrada en la figura 1, las cuales están comunicadas por carreteras de un solo sentido (arcos). Los costos de traslado (peso del arco) de una ciudad a otra se muestran en la figura. Supóngase que se quiere optimizar el costo total de la distribución del producto.

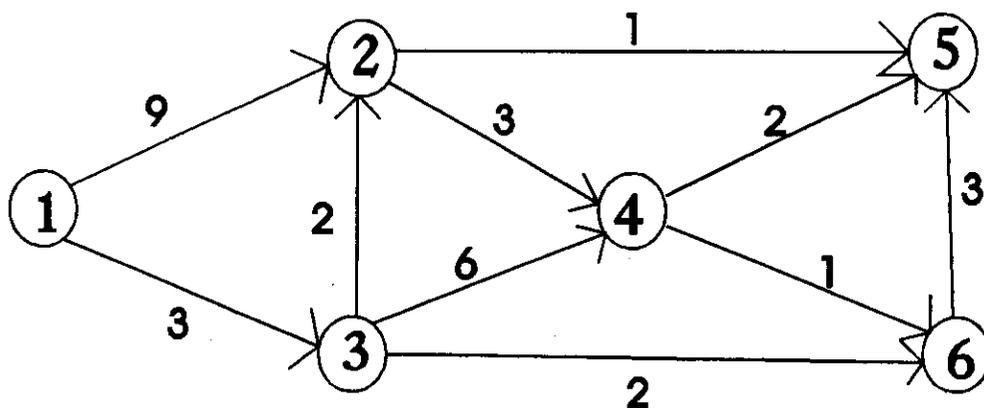


Fig. 1

El Dijkstra es un algoritmo de etiquetado en el cual se garantiza la existencia de solución siempre y cuando:

1. $d : A \rightarrow \mathbb{R}^+$
2. exista algún camino de i a $x \forall x \in X$. (Donde i es el nodo a partir del cual se desea calcular ruta mínima.)

La solución dada por Dijkstra es una arborescencia de peso mínimo con i como raíz (que no necesariamente es el árbol de mínima expansión). Si $d : A \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, si en la gráfica hay algunos nodos con costos negativos, el algoritmo Dijkstra no da la solución óptima al problema pero sí da una arborescencia para la gráfica.

Existe una versión generalizada del Dijkstra que sí da la solución óptima en este caso.

Notación:

Sean $i, j \in X$:

$ant(i)$	es el antecesor en la ruta mínima de i
$d(i)$	es la distancia mínima desde la raíz al nodo i .
$d(i, j)$	es el peso del arco (i, j)

NOTA: Se utilizará una estructura de montón para ordenar los nodos con respecto a $d(i)$ de menor a mayor.

Algoritmo Dijkstra

1. Inicializar etiquetas:

$$ant(i) = i \quad \forall i \in X$$

$$d(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ es la raíz} \\ \infty & \text{si } i \text{ no es la raíz} \end{cases}$$

Ningún nodo ha sido tocado por el algoritmo. Se tiene una etiqueta de revisión del algoritmo.

2. Se mete la raíz al montón.

3. Se saca un elemento del montón y se hace $p =$ elemento sacado.

4. Se marca el nodo p como definitivo, después cada nodo $i \in \Gamma^+(p)$ se revisa y:

(a) Si no lo ha tocado el algoritmo:

- i. se marca i temporalmente,
- ii. se hace $d(i) = d(p) + d(p, i)$,
- iii. se hace $ant(i) = p$,
- iv. el nodo i se mete al montón.

(b) Si está marcado temporalmente y si $d(i) > d(p) + d(p, i)$:

- i. se hace $d(i) = d(p) + d(p, i)$,
- ii. se hace $ant(i) = p$,
- iii. se actualiza el montón.

NOTA: Los nodos marcados definitivamente no se vuelven a revisar.

5. Se repite el tercer paso mientras el montón no esté vacío

Si se termina y quedaron nodos sin que los tocara el algoritmo entonces no existe una arborescencia de peso mínimo.

PROBLEMAS DE RUTA MINIMA: FLOYD

Miguel Angel Norzagaray Cosío
Estudiante de Matemáticas
Universidad de Sonora

30 de Septiembre de 1992

Los problemas de ruta mínima son problemas del siguiente tipo: en una digráfica, dados dos nodos, encontrar la ruta de mínimo peso que los une.

El algoritmo de Floyd es un algoritmo de reetiquetado e inserción de arcos en el que se encuentran las rutas mínimas entre todas las parejas de nodos de la gráfica. Así mismo, detecta ciclos negativos.

Para su implementación requiere que los nodos se coloque en una lista. De cada nodo parten dos listas:

1. Una para los arcos a nodos sucesores, donde cada estructura necesita el nodo antecesor, el sucesor y el peso, además de la dirección al siguiente arco de esa lista.
2. Otra lista para los arcos a nodos antecesores, donde cada estructura necesita el nodo inicial y el peso, así como la dirección al siguiente arco de esa lista.

Al término del algoritmo, se dispone en la estructura de todas las rutas posibles en la digráfica, siempre y cuando no se hallan encontrado ciclos negativos. El algoritmo se presenta a continuación:

1. Se recorre la lista de nodos. Sea k cada nodo.
2. Para cada nodo k , se recorre cada nodo j en la lista de sucesores
3. En cada nodo sucesor j , se recorre cada nodo antecesor i del nodo k
Sea $d = d(i, k) + d(k, j)$
4. Si i es igual a j , y $d < 0$ entonces hay ciclo negativo y el algoritmo termina
5. Si el arco (i, j) existe y $d(i, j) > d$ entonces:
 - en la lista de sucesores de i , a j se le cambia el antecesor por k y el peso por d
 - en la lista de antecesores de j , a i se le cambia el peso por d
 - se continúa con el siguiente nodo i
6. Si no existe dicho arco, entonces:
 - en la lista de sucesores de i se agrega el arco (k, j) con peso d
 - en la lista de antecesores de j se agrega el arco (j, k) con peso d
 - se continúa con el siguiente nodo i

Para el caso de la gráfica de la figura 1, la estructura de datos al comenzar el algoritmo quedaría como se muestra en la figura 2. La figura 3 muestra como queda la estructura al terminar la implementación.

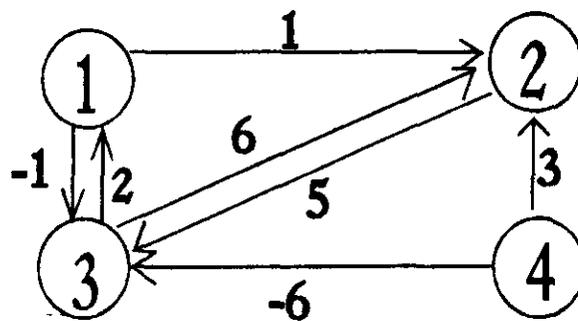


Fig. 1

La estructura de lista ligada presentada puede ser cambiada por otra que sea mas conveniente dependiendo de las necesidades, como pudieran ser listas ordenadas para la lista de nodos, arrays, etc.

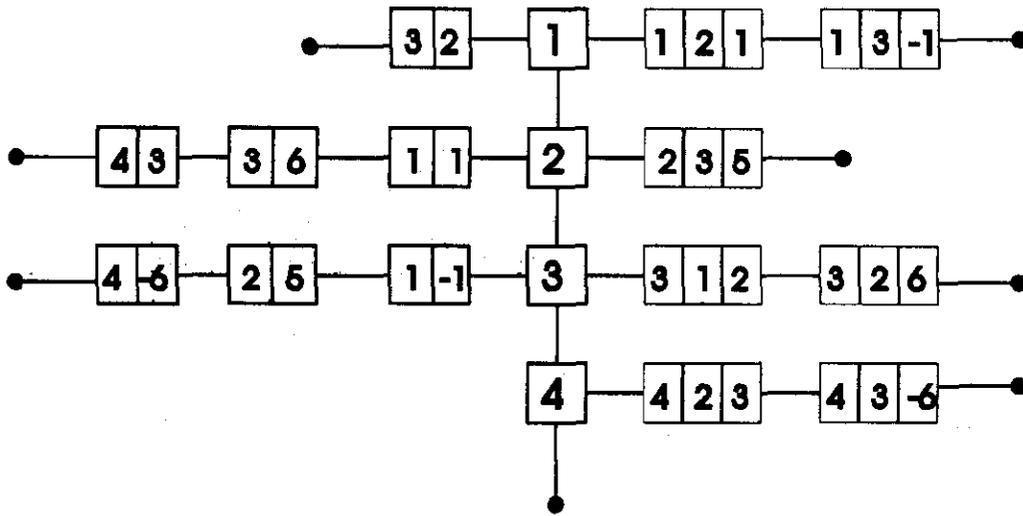


Fig. 2

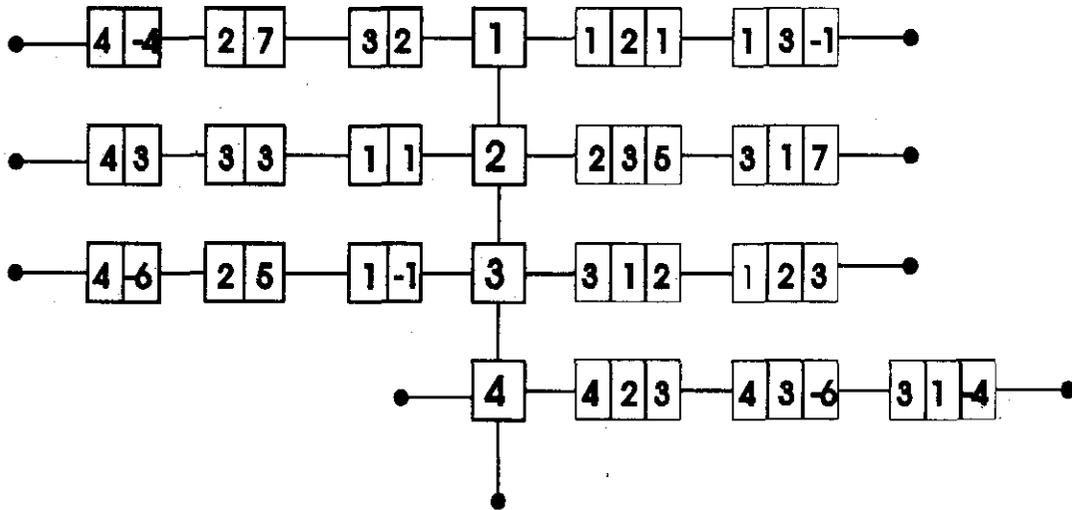


Fig. 3

Teorías de Homología y Ecuaciones de Yang-Mills

Marcelo Aguilar
Instituto de Matemáticas
UNAM

Octubre 1992

El propósito del minicurso es presentar los resultados sobre la clasificación de variedades de dimensión 4. Para esto es necesario tratar los siguientes temas. Teorías de homología; cohomología y productos; haces fibrados; conexiones; curvatura y formas diferenciables; ecuaciones de Yang-Mills.

Teorías de Homología

El concepto de homología fue introducido por Poincaré a principios de este siglo. A cada complejo simplicial K se le asocia una familia de grupos abelianos, $H_q(K)$ ($q \geq 0$), llamados grupos de homología simplicial. Esto se hace tomando el complejo de cadenas ordenadas ó el complejo de cadenas orientadas. Si X es un espacio homeomorfo a la realización de un complejo simplicial $|K|$, diremos que X es un poliedro. En este caso la homología simplicial de X se define como $H_*(X) \equiv H_*(K)$. En 1915 Alexander probó que si K y K' son complejos simpliciales tales que sus realizaciones $|K|$ y $|K'|$ son homeomorfas, entonces $H_*(|K|) \cong H_*(|K'|)$. A este resultado se le conoce como invariancia topológica de la homología simplicial, ya que muestra que la homología simplicial no depende de la triangulación K , sino de la topología del espacio.

En los años 40, Eilenberg definió la homología singular. Esta teoría asocia

a cualquier espacio X , grupos de homología $H_*(X)$. De hecho si $A \subset X$, tenemos definidos grupos $H_*(X, A)$ llamados grupos de homología relativos. Si G es un grupo abeliano se pueden definir grupos de homología con coeficientes en G y se denotan $H_*(X, A; G)$. Cuando $G = \mathbf{Z}$, escribimos $H_*(X, A)$.

Estas teorías satisfacen ciertas propiedades que se conocen como axiomas de Eilenberg-Steenrod y que caracterizan a una teoría de homología en la categoría de poliedros compactos. Con otros dos axiomas adicionales se pueden caracterizar a las teorías en la categoría de todos los espacios topológicos.

Cohomología y Productos

La cohomología se define para poder tener una estructura algebraica más rica. Dado un espacio X se pueden definir grupos $H^*(X)$ llamados grupos de cohomología singular de X . En ellos es posible definir un producto, que se denota por \cup , por lo que se conoce como producto "cup": $\cup : H^p(X) \times H^q(X) \rightarrow H^{p+q}(X)$. Este producto le da a la cohomología una estructura de anillo graduado. Para definirlo se usa la estructura de anillo de \mathbf{Z} , ó de cualquier otro anillo R , definiendo así $H^*(X; R)$. Una teoría de cohomología también se puede caracterizar axiomáticamente en forma similar a la teoría de homología.

Si M es una variedad orientada, compacta, de dimensión n , se tiene un isomorfismo $H^p(M) \cong H_{n-p}(M)$, conocido como dualidad de Poincaré. Esto permite expresar el producto cup en homología. Si M es además diferenciable, en ciertos casos es posible representar a las clases de homología usando subvariedades de M . En este caso el producto "cup" está dado por la intersección trasversal.

Haces Fibrados

El concepto de haz fibrado es fundamental en la topología, en la geometría y recientemente también en física. Su origen está en el haz tangente asociado a una variedad diferenciable, en el que las fibras del haz son espacios vectoriales y el grupo estructural es $GL(n, \mathbf{R})$. En el caso general el grupo estructural es un grupo topológico G que actúa en forma efectiva sobre un

espacio F , que se conoce como fibra del haz. Un haz fibrado $p : E \rightarrow X$, de fibra F y grupo G , está determinado por una cubierta abierta de X , $\{U_\alpha\}$ y una familia de funciones continuas $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$, con la propiedad de que $g_{\gamma\beta} \circ g_{\beta\alpha} = g_{\gamma\alpha}$. Dada esta familia el haz se obtiene pegando los cilindros $U_\alpha \times F$, mediante las funciones $g_{\beta\alpha}$ y la acción $G \times F \rightarrow F$ (esta acción en el caso de haces vectoriales es simplemente la evaluación de la matriz). Si pegamos cilindros de la forma $U_\alpha \times G$, mediante las funciones $g_{\beta\alpha}$ y la acción $G \times G \rightarrow G$ que consiste en traslación por la izquierda, obtenemos un haz de fibra G , llamado haz principal.

Conexiones, Curvatura y Formas Diferenciales

Si tomamos un haz fibrado $p : E \rightarrow M$, de fibra F y grupo G de manera que todos los espacios son variedades diferenciables, todas las funciones son diferenciables y G es un grupo de Lie, decimos que es un haz fibrado diferenciable. En este caso si $a \in E$, el espacio tangente $T_a E$ contiene al espacio $T_a F$. Escoger, en forma diferenciable, una dirección horizontal H_a , tal que $T_a E = T_a F \oplus H_a$, se llama una conexión en el haz.

En Muchas ocasiones es conveniente trabajar con conexiones en haces principales. Si ahora $p : P \rightarrow M$ es un haz principal de fibra y grupo G , una conexión estará dada por subespacios horizontales con la propiedad adicional de ser G -equivariantes con respecto a la acción libre $P \times G \rightarrow P$ que tiene todo haz principal.

Si denotamos por $\Omega^p(P; g)$ al espacio vectorial de las p -formas diferenciables en P con valores en g , que es el álgebra de Lie de G , entonces una conexión está dada por una 1-forma $\omega \in \Omega^1(P; g)$ que es G -equivariantes y que restringida a $T_b G \subset T_b P$, coincide con la 1-forma que identifica al espacio tangente $T_b G$ con el espacio tangente en el idéntico $T_e G$, que es por definición g . De esta manera para cada $b \in P$, $\omega_b : T_b P \rightarrow g$ es una función lineal y la dirección horizontal está dada por $H_b = \text{Ker} \omega_b$.

Si denotamos a las p -formas G -equivariantes como $\Omega_G^p(P; g)$ entonces se tiene un isomorfismo $\Omega_G^p(P; g) \cong \Omega^p(M; P \times_G g)$, donde el término de la derecha son las p -formas en M con valores en el haz vectorial $P \times_G g \rightarrow M$,

asociado al haz principal $P \rightarrow M$. En particular la conexión está dada ahora por un elemento, que también denotamos por ω , en $\Omega^1(M; P \times_G g)$. Las formas con valores en un haz se puede expresar como $\Omega^p(M; P \times_G g) \cong \Gamma(P \times_G g) \otimes \Omega^p(M; R)$, donde $\Gamma(-)$ denota el espacio de secciones del haz.

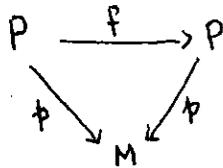
Dada la conexión $\omega \in \Omega^1(M; P \times_G g)$ se puede definir un operador $D_\omega : \Omega^p(M; P \times_G g) \rightarrow \Omega^{p+1}(M; P \times_G g)$. En particular tenemos $D_\omega : \Omega^1(M; P \times_G g) \rightarrow \Omega^2(M; P \times_G g)$. A la 2-forma $F_\omega = D_\omega(\omega)$ se le llama curvatura de la conexión.

Ecuaciones de Yang-Mills

Sea $p : P \rightarrow M$ un haz principal diferenciable de fibra G . Denotamos por $G(P)$ al grupo de nome del haz, es decir,

$$G(P) = \{f : P \rightarrow P \mid f \text{ es difeomorfismo, } f \text{ es } G\text{-equivariante} \\ \text{y } f \text{ hace conmutar al diagrama (*)}\}$$

donde (*)



Denotamos por $A(P)$ al espacio de todas las conexiones en P (que es un espacio afín). En este espacio tenemos una acción de $G(P)$ y consideramos el espacio cociente $A(P)/G(P)$.

Tomemos una variedad diferenciable de dimensión 4. M , que sea compacta y 1-conexa. Tomemos una métrica Riemanniana en M y una métrica invariante en G . Esto permite dar un producto interno en los espacios de formas y definir un operador de Hodfe $\star : \Omega^q \rightarrow \Omega^{n-q}$, tal que $\Psi \wedge \star \varphi = \langle \Psi, \varphi \rangle \text{ vol}$.

En particular tenemos

$$\star : \Omega^2(M; P \times_G g) \xrightarrow{\cong} \Omega^2(M; P \times_G g).$$

Sea $\mu(P) = \{[\omega] \in A(P)/G(P) | F_\omega =^* F_\omega\}$. A este espacio se le llama espacio de las conexiones autoduales. Si consideramos haces con grupo $G = SU(2)$, se tiene una clase de isomorfismo para cada $k \in \mathbf{Z}$, de manera que se tiene un espacio de conexiones autoduales para cada k , que denotamos por $\mu(k)$.

Los operadores D_ω , tienen asociados operadores

$$D_\omega^* : \Omega^{p+1}(M; P \times_G g) \rightarrow \Omega^p(M; P \times_G g).$$

Las ecuaciones de Yang-Mills son $D_\omega^* F_\omega = 0$, es decir, son ecuaciones que debe satisfacer la curvatura de una conexión. Dado que la identidad de Bianchi afirma que $D_\omega F_\omega = 0$, entonces las conexiones autoduales en $\mu(k)$ satisfacen las ecuaciones de Yang-Mills.

Cuando $k = -1$, $\mu(-1)$ es una variedad con singularidades de dimensión 5. Las singularidades corresponden a conexiones reducibles y cada una tiene una vecindad que es un cono sobre $\mathbf{C}P^2$. Esto permite construir una variedad de dimensión 5, W , tal que su frontera es M y la unión ajena de $\vartheta(M)$ copias de $\mathbf{C}P^2$. donde $\vartheta(M) = \#\{u | \varphi_M(u, u) = 1\}/2$ y donde φ_M es la forma de intersección de M , $\varphi_M : H_2(M) \times H_2(M) \rightarrow \mathbf{Z}$.

Es fácil ver que $\vartheta(M) \leq \sigma(M)$ donde $\sigma(M)$ es la signatura de la forma de intersección, y que $\vartheta(M) = \sigma(M) \leftrightarrow \varphi_M \sim_{\mathbf{Z}}$ forma diagonal (si φ_M es definida positiva). La existencia de la variedad W implica que

$$\sigma(M) = \sigma(\mathbf{C}P^2 \cup \dots \cup \mathbf{C}P^2) = \sum_{\vartheta(M)} \sigma(\mathbf{C}P^2)$$

pero $\sigma(\mathbf{C}P^2) = +, -. 1$ y sabemos que son $\vartheta(M)$ proyectivos, por lo tanto, $\sigma(M) \leq \vartheta(M)$ y entonces $\sigma(M) = \vartheta(M)$ de donde se obtiene que si M es diferenciable, 1-conexa con forma φ_M definida positiva entonces $\varphi_M \sim_{\mathbf{Z}}$ diagonal.

ENSEÑANZA DE LA SIMETRÍA Y LA CONGRUENCIA
Prototipos didácticos.

M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro

Coordinador de la Maestría en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa.
División de Ciencias exactas y naturales
UNIVERSIDAD DE SONORA.

Antecedentes: Durante la realización de las actividades del "Segundo simposium internacional sobre la enseñanza de las Matemáticas" realizado en la ciudad de Cuernavaca, Morelos, México, a fines del mes de Julio de 1990; en una de las conferencias presentadas en el área de Geometría, en esta ocasión por el Doctor Angel Gutiérrez, investigador de la Universidad de Valencia, España, afirmó lo siguiente: "...en la enseñanza de la Geometría, uno de los conceptos más difíciles de entender para los niños Españoles es el concepto de simetría..."

En esa ocasión me causó extrañeza tal afirmación, ya que en reflexiones previas yo había ideado ya algunas estrategias didácticas para enseñar éste y otros conceptos, sin haberlos llevado aún a la práctica.

En verano de 1991, fui invitado a participar en un evento internacional promovido por el Departamento de Educación Especial del Estado de Sonora, el cual se realizaría en el mes de Noviembre del mismo año, y se me pedía participar con un taller acerca de la enseñanza de la simetría para niños de nivel primaria que asisten a los centros psicopedagógicos donde reciben dicha educación especial, ya que asisten a dichos centros a causa de presentar dificultades de aprendizaje durante su estancia en la escuela ordinaria.

Por las circunstancias antes expuestas, me dí a la tarea de adquirir y revisar los libros de texto de Matemáticas que se usan en la escuela primaria, tanto los obligatorios editados por la SEP, como algunos textos complementarios sujetos a los programas oficiales publicados por editoras particulares; la conclusión de dicho análisis, en lo que a la enseñanza de la simetría se refiere, lo resumí en los siguientes puntos:

- 1.- La enseñanza del concepto de simetría es muy escasa.
- 2.- Dicha enseñanza está muy desarticulada.
- 3.- Sólo se hace énfasis en la simetría axial, descuidando la

- comprensión de la también importante simetría puntual.
- 4.- Sólo se analizan las propiedades globales de simetría que tiene una figura dada, tales como trazarle un eje de simetría a dicha figura si acaso es posible, pero no se analiza localmente las propiedades matemáticas elementales que tienen, por ejemplo, un par de puntos simétricos con respecto a un eje dado.
 - 5.- Las aplicaciones que de dicho concepto se presentan, son también muy escasas..

PROPUESTA DE SOLUCION AL PROBLEMA.

Tanto en el taller antes mencionado, realizado en el mes de Noviembre de 1991, como el que se presenta en esta "Tercera semana regional de investigación y docencia en Matemáticas", se implementaron las siguientes dos estrategias encaminadas a dar solución al problema planteado.

I.- Trabajos con papel blanco y papel carbón.

Este trabajo consta básicamente de los siguientes pasos:

- 1.- Sobre una hoja blanca, trazar un segmento de recta de borde a borde:
- 2.- Doblar la hoja a lo largo del segmento trazado, sin ocultar dicho trazo.
- 3.- Colocar una hoja de papel carbón sobre la mesa con la parte entintada hacia arriba y sobre ella colocar la hoja blanca previamente doblada.
- 4.- Trazar con bolígrafo una figura cualquiera sobre la parte superior de la hoja que fué previamente doblada.
- 5.- Extender la hoja blanca y descubrir, que con respecto a la línea trazada originalmente tomada como eje de simetría, la figura trazada y la marcada por el papel carbón por la presión del bolígrafo son simétricas (Visión global).
- 6.- Colocando de nuevo la misma hoja doblada ya y como se indicó en el punto 3, marcar sobre la figura trazada con bolígrafo y con suficiente presión un punto P, lo cual permitirá que sobre la figura al carbón quede marcado un punto P'.

- 7.- Extender de nuevo la hoja blanca y trazar, con ayuda de una regla, un segmento de recta que una los puntos P y P'.
- 8.- Con ayuda de escuadra y regla graduada, descubrir propiedades de puntos simétricos, tales como la perpendicularidad de la línea PP' con respecto al eje de simetría y la equidistancia de dichos puntos al mismo eje (Propiedades locales). Esto se puede reafirmar con el uso de hojas cuadrículadas milimétricas tomando una de las líneas principales como eje de simetría.
- 9.- Hacer aplicaciones del concepto de simetría axial, tales como analizar las propiedades cartesianas de puntos simétricos con respecto a los ejes coordenados; aprovechar el sistema de ejes cartesianos - para descubrir la simetría puntual a través de una doble simetría axial y sus correspondientes propiedades expresadas en términos de coordenadas cartesianas; hacer el trazo de la inversa de una función vista como la gráfica simétrica con respecto a la recta cuya ecuación es $y = x$; etc.

II.- Trabajos realizados con ayuda de un dispositivo óptico.

Este dispositivo consiste de una estructura que sostiene a un marco articulado en el cual se puede colocar, sobre una ranura previamente realizada, un espejo o un semiespejo de fácil adquisición en el comercio con el nombre de "Vidrio reflecta" que permite además de reflejar la imagen de los objetos colocados frente a él, ver los que se encuentran detrás de él; y cuya perpendicularidad con respecto a la mesa de trabajo es posible lograrla con ayuda de un par de figuras simétricas logradas con el procedimiento del papel carbón descrito arriba.

Este mecanismo permite repetir, de manera mas viva y colorida, todos los 9 pasos descritos anteriormente.

Utilidades adicionales descubiertas del dispositivo óptico.

Debido a que la simetría es una de las llamadas "transformaciones isométricas", la imagen simétrica conserva la forma y tamaño del objeto original, ello nos permitió utilizar el mismo dispositivo para descubrir y estudiar las propiedades de figuras geométricas congruentes (Sean lineales, planas o tridimensionales).

Si tengo dos trozos de madera de iguales dimensiones (Por lo tanto congruentes), no es posible compenetrar físicamente uno en el otro, pero sí es posible compenetrar uno en la imagen del otro y poder verlo con ayuda de los semiespejos y poder juzgar en forma visual la congruencia o no de dos figuras dadas.

Si a los cuerpos geométricos los pintamos de distintos colores, tendremos también un medio para aprender acerca del fenómeno físico de la fusión o mezcla de colores, y lograr hacer así mas vivencial y atractiva la comprensión de ciertosmconceptos matemáticos.

Desde este valioso medio hacemos una exhortación a todos los profesores de matemáticas de todos los niveles a que investiguen la manera de lograr que los estudiantes, en cierto modo, "sientan" los conceptos matemáticos y logren así comprenderlos y retenerlos más firmemente. Frecuentemente nos "cruzamos de brazos" por tener la errónea idea de que los medios para lograrlo son siempre caros e inaxesibles, tal es el caso de algunos medios electrónicos, tales como la computación pero yo pienso que para lograrlo sólo se requieren dos cosas: **AMOR E INGENIO**; la primera convencionalmente expresada por una figura simétrica el corazón. ¡¡Adelante!!

IMPRESO EN:

**LOS TALLERES GRAFICOS DEL COLEGIO DE BACHILLERES DEL
ESTADO DE SONORA**

HERMOSILLO, SONORA, MEXICO.

El contenido de los articulos es responsabilidad de los autores.