MEMORIAS

XXIII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas

Editores:
Francisco A. Carrillo Navarro
Martín G. García Alvarado
Rodrigo González González
Inna K. Shingareva

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

MEMORIAS

de la

XXIII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas

Diciembre de 2013

Editores: Francisco A. Carrillo Navarro
Martín G. García Alvarado
Rodrigo González González
Inna K. Shingareva

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Departamento de Matemáticas
División de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Sonora

QA11. A1
.S44
2013

Semana Investigación y Docencia en Matemáticas
(11:12:2013. Hermosillo, Sonora)

Memorias de la XXIII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas; Hermosillo, Sonora. Diciembre de 2013 / Francisco A. Carrillo Navarro, Martín G. García Alvarado, Rodrigo González González, Inna K. Shingareva, Editores.- - Hermosillo, Sonora: Editorial Universidad de Sonora. División de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de Matemáticas, c2013.
154 p.: Il., Fotog.; 27cm.
ISSN: En trámite
Incluye Bibliografía.
1. Matemáticas - Investigaciones - Congresos, Conferencias, etc.
2. Matemáticas - Enseñanza, Congresos, Conferencias, etc.
I. Carrillo Navarro Francisco Armando, ed., II. García Alvarado Martín Gildardo, ed.
III. González González Rodrigo, ed., IV. Shingareva Inna Konstantinovna, ed.

Área de Análisis Bibliográfico, Subdirección de Servicios de Apoyo Académico, DSU, Universidad de Sonora.

Memorias de la Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas
Editada por Francisco Armando Carrillo Navarro, Martín Gildardo García Alvarado, Rodrigo González González e Inna Konstantinovna Shingareva

Derechos reservados para esta edición:

D. R. © 2013, Francisco Armando Carrillo Navarro, Martín Gildardo García Alvarado, Rodrigo González González e Inna Konstantinovna Shingareva (Editores)
D. R. © 2013, Universidad de Sonora

Universidad de Sonora
Calle Rosales y Blvd. Luis Encinas
Hermosillo, Sonora
C. P. 83000
Teléfono (01-662) 2592155
Fax (01-662) 2592219

ISSN: **En trámite**

Diseño de Portada: Roberto Núñez González

Hermosillo, Sonora, México.

Memorias de la XXIII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas

Directorio

Dr. Heriberto Grijalva Monteverde
Rector

Dr. Enrique Fernando Velázquez Contreras
Secretario General Académico

Dra. Arminda Guadalupe García de León Peñuñuri
Vicerrectora Unidad Regional Centro

Dra. Rosa María Montesinos Cisneros
Directora de la División de Ciencias Exactas y Naturales

Dr. Jorge Ruperto Vargas Castro
Jefe del Departamento de Matemáticas

Comité Organizador: Rodrigo González González
Presidente
Lina Morales Peral
Secretaria

María Esmeralda Carreño Montoya
Francisco Armando Carrillo Navarro
Juan Andrés Castillo Valenzuela
Herlinda Cota Grajeda
Guillermo Dávila Rascón
José Luis Díaz Gómez
Martín Gildardo García Alvarado
Pablo Ibarra Sagasta
Horacio Leyva Castellanos
Claudio Alfredo López Miranda
Rosa María Martínez Pineda
Mario Alberto Quiñonez Ayala
Inna K. Shingareva
Eleazar Silvestre Castro
Juan Pablo Soto Barrera
Josefina Torres Olivas
Adrián Vázquez Osorio

Memorias de la XXIII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas

PRESENTACIÓN

La Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas, es un evento académico anual organizado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, el cual se ha consolidado a nivel nacional como un foro para la difusión y discusión de resultados de investigación en las diversas áreas de la Matemática y sus aplicaciones, la presentación de los diversos enfoques didáctico-pedagógicos de la educación matemática y la problemática respecto al proceso enseñanza-aprendizaje de esta ciencia, así como el diseño y producción de sistemas de vanguardia en el área computacional.

Desde sus inicios, la Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas ha mantenido vigentes sus objetivos, a saber:

- ✦ Dar a conocer los resultados de los trabajos de investigación en Matemáticas, Matemática Educativa y Ciencias de la Computación, realizados por profesores e investigadores de diversas instituciones de educación superior, principalmente de la Universidad de Sonora.
- ✦ Impulsar el trabajo conjunto entre investigadores y profesores de matemáticas de los distintos niveles educativos.
- ✦ Fomentar entre los asistentes el interés sobre las distintas líneas de investigación y estudio de la Matemática, la Matemática Educativa y las Ciencias de la Computación que se desarrollan en nuestro país.
- ✦ Contribuir con la superación disciplinar y docente de los profesores en los distintos niveles educativos del Estado de Sonora y la Región Noroeste.

Para cumplir con estos objetivos, en la Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas se realizan diversas actividades, tales como conferencias plenarias, conferencias por invitación, mesas redondas, cursos cortos y ponencias por solicitud, las cuales conforman un amplio espectro de intereses académicos de los participantes, generando un fuerte impacto en el entorno.

En la vigésima tercera edición de la Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas, realizada del 04 al 08 de Marzo de 2013, además de las actividades usuales, también se tuvieron varias sesiones paralelas más especializadas: se llevaron a cabo el Cuarto Taller de Geometría y Sistemas Dinámicos, el Quinto Taller de Sistemas Dinámicos y Control, el Quinto Seminario de Probabilidad y Estadística, así como una Sesión Especial de Matemática Educativa. En consecuencia, se tuvo una amplia participación de académicos provenientes de más de una veintena de instituciones nacionales y tres internacionales, así como la participación de profesores pertenecientes a diferentes niveles educativos del Estado de Sonora.

Por otra parte, es importante observar que la realización de la Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas es posible gracias al empeño y entusiasmo de profesores, estudiantes y personal administrativo del Departamento de Matemáticas, quienes efectuan las diferentes tareas que la sustentan, desde la evaluación de las ponencias por solicitud, la impresión de materiales, el registro de participantes hasta la atención a los académicos invitados, sólo por mencionar algunas. Asimismo, es también oportuno señalar que este evento sería imposible sin la valiosa participación de diversas instancias universitarias que siempre han brindado su apoyo, como es el caso de la Vicerrectoría de la Unidad Regional Centro, la División de Ciencias Exactas y Naturales, la Dirrección de Desarrollo Académico e Innovación Educativa, la Dirección de Comunicación, los Talleres Gráficos de la Universidad de Sonora, entre otras.

Por esto y por otras razones, el Comité Organizador de la XXIII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas agradece profundamente a todas aquellas personas y a las instancias que contribuyen en la realización de este evento. Igualmente, se agradece profundamente a todos los participantes en esta edición de la Semana, especialmente a todas aquellas personas que con la presentación de sus trabajos han colaborado para lograr los objetivos de este foro.

La edición de estas Memorias, al igual que la edición pasada, ha sido completamente formateada por medio del sistema LaTeX, con el fin de uniformizar los artículos publicados que se reciben en diferentes formatos, con la expectativa de lograr una mejor presentación de la obra. Con la edición de las Memorias se concluyen los trabajos de la vigésima tercera edición de la Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas, esperando que lo publicado sea de utilidad y contribuya a fomentar, en nuestro medio, un mayor interés por la Matemática.

Los Editores
Hermosillo, Sonora,
Diciembre de 2013

CONTENIDO

PRESENTACIÓN v

Sobre el Modelo Dinámico para Turbinas de Velocidad Variable 1
Acácio da Conceição de Jesus Domingos, Efrén Vázquez Silva, Rodrigo González González

El Grupo Modular de una Superficie 9
Miguel A. Maldonado

Espacio Clasificante para Torcimientos Equivariantes de K-Teoría Torcida 16
Jesús Francisco Espinoza Fierro

Soluciones Periódicas de Sistemas Diferenciales Lineales de Varias Clases 25
Carmen María Romandía Flores, Inna K. Shingareva, Carlos Lizárraga-Celaya

Comparación de Secuencias de Código Genético utilizando Matrices de Substitución 32
José Antonio Cárdenas-Haro, A.J. Vargas-Figueroa, A.F. Maupome-Polanco

Topología de la Convergencia Pseudouniforme 40
Humberto Villegas Rodríguez, Martín Zavala León

La Propiedad de Kelley y Contractibilidad de Hiperespacios 46
Francisco Jesús Soufflé Ramos, Carlos A. Robles Corbalá, Alejandro Dueñas Osuna

Significados Institucionales de Polinomios usando Maple T.A. 53
Maximino Dórame Velásquez, Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez

Secuencia de Actividades Didácticas para el Estudio de la Recta en el Área de Ingeniería usando Maple T.A. 63
María de los Ángeles Mata González, Manuel Alfredo Urrea Bernal

Una Secuencia Didáctica para el Desarrollo de Procesos Cognitivos en Geometría mediante el uso de un Geoplano Virtual (en GeoGebra) 70
Ulises Bladimir García Ortiz, Martha Cristina Villalba Gutiérrez

Estrategia Didáctica para el Análisis e Interpretación de un Diagrama de Caja mediante Simulación en MATLAB 77
Gudelia Figueroa Preciado, Irma Nancy Larios Rodríguez, María Elena Parra Ramos

El "Descubrimiento" de las Tablas de Multiplicar y sus Efectos 83
Nohemí Baca Chávez, Oscar Jesús San Martín Sicre

El Diseño de Actividades Didácticas para el Tema de Medidas Descriptivas del Curso de Bioestadística 89
Alejandrina Bautista Jacobo

El Contexto del Teorema de Ptolomeo: La Tabla de Cuerdas **97**
José Luis Soto Munguía

La Modelación como Estrategia de Aprendizaje del Cálculo **104**
José Luis Díaz Gómez

Uso de la Geometría Dinámica para la Modelación de Funciones en Trozo a través de un Problema Geométrico **110**
José María Bravo Tapia, Agustín Grijalva Monteverde

Uso de la Modelación para la Construcción del Concepto de Función a través de una Secuencia Didáctica **114**
Ana Méndez Zazueta, José Luis Díaz Gómez

Identificación de Niños Matemáticamente Talentosos **120**
Zeidy Margarita Barraza García, José Luis Soto Munguía

Estrategia de Análisis para Reactivos de Geometría Analítica de la Prueba ENLACE 2012 **127**
Luis Enríquez Chapa, Manuel Alfredo Urrea Bernal

La Matemática como Herramienta de Modelización para dar Respuesta a Situaciones Problema **135**
Isabel Dorado Auz, José Luis Díaz Gómez

Actividad Didáctica para Promover los Significados del Coeficiente de Correlación **140**
Benjamín Morán Medina, Irma Nancy Larios Rodríguez

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2013, pp. 1–8.

Nivel: Superior

Sobre el Modelo Dinámico para Turbinas de Velocidad Variable

Acácio da Conceição de Jesus Domingos[1]; Efrén Vázquez Silva[2]; Rodrigo González González[3]

[1]Universidad Agostinho Neto, Luanda, Angola.
[2]Universidad de las Ciencias Informáticas, La Habana, Cuba.
[3]Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora, México.
e-mail: acacio_dejesus@yahoo.com.br[1]; vazquezsilva@uci.cu[2]; rgonzlz@gauss.mat.uson.mx[3]

Resumen

En el presente trabajo se aborda la posibilidad de aplicar resultados teóricos sobre las propiedades de estabilidad de la solución trivial de sistemas de ecuaciones diferenciales bidimensionales, concretamente, sistemas de interconexión, al estudio cualitativo del comportamiento dinámico de turbinas o generadores eléctricos de velocidad variable.

Palabras Clave: Generador DFIG, Sistema de Interconexión, Perturbación.

1 Introducción

Entre las alternativas viables con que cuenta la humanidad para enfrentar el agotamiento de los recursos naturales y las fuentes de energía no renovable, se encuentra el aprovechamiento de la energía eólica: una de las opciones de futuro en términos de fuentes renovables de energía eléctrica "limpia". El proceso de asimilación y dominio de esta fuente energética ha tenido avances notables en países altamente desarrollados, sin embargo, varios países emergentes y subdesarrollados también han hecho progresos en este sentido. Hay ejemplos en los que la generación distribuida de energía eléctrica ha sido una solución factible y fiable para garantizar el funcionamiento de comunidades aisladas a las que no llegan las redes convensionales de distribución.

Así mismo, el crecimiento vertiginoso de la cantidad de turbinas en operación a nivel mundial ha propiciado el desarrollo de técnicas y la aparición de trabajos científicos dedicados a los sistemas de transformación de la energía eólica en energía eléctrica. El estudio de estos tipos de sistemas, desde puntos de vista matemático, mecánico, electromagnético y aerodinámico, ha sido abordado en tesis de doctorado y maestría (ver, por ejemplo, [3], [5], [8]) y en diversas publicaciones científicas (ver, por ejemplo, [1, 2, 4]).

Considerando que actualmente está cambiando la forma de enfocar estos problemas, pasando de la generación de energía por medio de turbinas de velocidad fija a la generación con turbinas de velocidad variable, utilizando generadores de inducción doblemente alimentado (DFIG, siglas en Inglés), en el presente trabajo se valora la posibilidad de aplicar resultados teóricos sobre el comportamiento cualitativo de la solución trivial de ciertos modelos típicos (familias de sistemas bidimensionales de ecuaciones diferenciales con parte derecha seccionalmente continua, [6]) al estudio de la dinámica del generador DFIG, teniendo en cuenta las simplificaciones apropiadas de su modelo matemático en virtud de la transformada dq, de otras consideraciones y de los regímenes de velocidad del generador.

El presente trabajo está organizado de la siguiente forma: en la próxima sección se describe el modelo matemático (dinámico) del generador DFIG, a partir de los trabajos [1] y [4]. En la Sección 3 se compara este modelo con los modelos considerados en los trabajos [6] y [7]. Finalmente, en la Sección 4 se llega a conclusiones sobre la intersección de ambos enfoques y las espectativas que esto genera.

2 Modelo matemático del generador de inducción doblemente alimentado

El modelo matemático que caracteriza la dinámica de una turbina eólica se obtiene a partir de un sistema mecánico de cuatro masas en el que se considera que la unión entre las aspas y el buje está fuertemente amortiguada (ver [1]). El sistema de ecuaciones diferenciales que describe esta dinámica es:

$$\begin{cases} T_{Aer} - D_{Rot}\left(\omega_{Rot} - \omega_1\right) - Q_{Rot} = J_{Rot}\dfrac{d}{dt}\omega_{Rot} \\ D_{Rot}\left(\omega_{Rot} - \omega_1\right) + Q_{Rot} - T_1 = J_{Eng\,1}\dfrac{d}{dt}\omega_1 \\ T_2 - D_{Gen}\left(\omega_2 - \omega_{Gen}\right) - Q_{Gen} = J_{Eng\,2}\dfrac{d}{dt}\omega_2 \\ D_{Gen}\left(\omega_2 - \omega_{Gen}\right) + Q_{Gen} - T_{Elec} = J_{Gen}\dfrac{d}{dt}\omega_{Gen} \end{cases}, \tag{1}$$

donde

$$T_{Aer} = \tfrac{1}{2}\,\rho\,A\,R\,\frac{C_p\left(\lambda,\beta\right)}{\lambda}V^2; \qquad \lambda = \frac{\omega_{Rot}R}{\nu}\,; \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = n_{Eng}\,;$$

$$Q_{Gen} = K_{Gen}\int\left(\omega_2 - \omega_{Gen}\right)dt\,; \qquad Q_{Rot} = K_{Rot}\int\left(\omega_{Rot} - \omega_1\right)dt\,.$$

En estas expresiones: T_{Aer} se refiere al par aerodinámico, ρ es la densidad del aire, A es la superficie barrida por las aspas de la turbina, V es la velocidad equivalente del viento, C_p es el coeficiente de potencia, β es el ángulo de paso de las aspas, ω_{Rot} es la velocidad mecánica del rotor de la turbina, R es el radio del aspa de la turbina, n_{Eng} es la relación de engranajes de la caja multiplicadora, J_{Rot} es el momento de inercia de las aspas y el buje, J_{Gen} es el momento de inercia del generador de inducción, $J_{Eng\,1}$, $J_{Eng\,2}$ son los momentos de inercia de los engranajes de la caja multiplicadora, K_{Rot} , K_{Gen} son los coeficientes de rigidez de los ejes de baja y alta velocidades, respectivamente, D_{Rot} , D_{Gen} son los coeficientes de

amortiguamiento de los ejes de baja y alta velocidades, respectivamente, ω_{Rot} , ω_{Gen} , ω_1 , ω_2 son las velocidades mecánicas de la turbina, del generador de inducción y de los engranajes de la caja multiplicadora, respectivamente, y T_{Elec} es el par electromagnético producido por el generador inductor.

De forma particular, para el DFIG, el sistema de ecuaciones diferenciales que describe su dinámica se puede obtener respecto de un sistema de referencia ABC o de un sistema arbitrario de coordenadas dq, que gira a velocidad angular arbitraria (en este caso se simplifica el sistema correspondiente de ecuaciones diferenciales, en comparación con el primer caso, para el que las inductancias dependen de la velocidad del rotor, y por tal razón los elementos de la matriz de estados son funciones del tiempo).

Para pasar del sistema coordenado ABC al sistema de coordenadas dq, normalmente se aplica la *Transformada de Park* (ver [4]) y se asume la velocidad de sincronismo, ω_0, como velocidad de referencia. A continuación se describen las expresiones analíticas de esta transformación para las corrientes del estator y del rotor (I_s, I_r), respectivamente:

$$\begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t) & \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\text{sen}(\omega_0 t) & -\text{sen}\left(\omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right) & -\text{sen}\left(\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\text{sen}(\theta) & -\text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix}. \tag{3}$$

En la expresión matricial (3) se tiene que $\dfrac{d}{dt}\theta = \omega_0 - \omega_1$.

El sistema de ecuaciones diferenciales para las tensiones del estator y del rotor (V_s, V_r), respectivamente, que se obtiene después de aplicar las transformaciones de coordenadas descritas por las expresiones (2) y (3), es:

$$\begin{bmatrix} V_{ds} \\ V_{qs} \\ V_{dr} \\ V_{qr} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \\ I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_{ds} \\ \Psi_{qs} \\ \Psi_{dr} \\ \Psi_{qr} \end{bmatrix} + [\Omega] \begin{bmatrix} \Psi_{ds} \\ \Psi_{qs} \\ \Psi_{dr} \\ \Psi_{qr} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

donde

$$R = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix}, \qquad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_r - \omega_0 \\ 0 & 0 & \omega_0 - \omega_r & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{ds} \\ \Psi_{qs} \\ \Psi_{dr} \\ \Psi_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & 0 & L_m & 0 \\ 0 & L_{ss} & 0 & L_m \\ L_m & 0 & L_{rr} & 0 \\ 0 & L_m & 0 & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ds} \\ I_{qs} \\ I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix}.$$

En esta última ecuación matricial: R_s, R_r son las resistencias de los bobinados del estator y del rotor, respectivamente, L_{ss}, L_{rr} las inductancias de los bobinados del estator y del rotor, respectivamente, y L_m la inductancia mutua.

Para el tipo de turbina considerada, en su caracterización desempeñan roles importantes las siguientes magnitudes (ya descritas en coordenadas dq):

$$T_e = \frac{3}{2} P_f \, L_m \left(I_{dr} \, I_{qs} - I_{qr} \, I_{ds} \right) \, ,$$

$$P_{ACT} = \frac{3}{2} \left(V_{ds} \, I_{ds} + V_{qs} \, I_{qs} \right) \, , \qquad Q_{REA} = \frac{3}{2} \left(V_{qs} \, I_{ds} - V_{ds} \, I_{qs} \right) \, ,$$

las cuales son, respectivamente, el par electromagnético T_e, la potencia activa P_{ACT} y la potencia reactiva Q_{REA}. En la expresión para T_e, el término P_f representa el número de par de polos.

Modos de operación del generador DFIG: Los generadores de inducción doblemente alimentados son operados de dos formas diferentes, que dependen de la magnitud y fase de la tensión del rotor con relación al voltaje inducido. La forma sub-síncrona, que se caracteriza cuando el voltaje del rotor se encuentra en contrafase con el voltaje inducido y su magnitud es menor, mientras que la forma sobre-síncrona ocurre cuando el voltaje del rotor está en fase con el voltaje inducido y su magnitud es mayor.

Cuando la potencia del generador es controlada mediante una tensión aplicada al rotor se debe garantizar el modo sobre-síncrono, el cual es posible cuando la tensión satisface las desigualdades (ver [1]):

$$0 \leq V_{dr} \leq \infty \, ; \qquad -\infty \leq V_{qr} \leq 0 \, , \tag{5}$$

evitando así inestabilidad del sistema de generación.

En el caso de las potencias activa y reactiva de un generador de este tipo, conectado al sistema eléctrico, se recomienda efectuar el control de estas magnitudes por orientación del flujo estator. El objetivo de tal técnica es aproximar el comportamiento dinámico del generador de inducción a una máquina de corriente continua. En ese sentido se consideran las siguientes simplificaciones:

1. Despreciar R_s, la resistencia del bobinado del estator.
2. Suponer constante el valor de $\left| \overrightarrow{I_{ms}} \right|$, el fasor de corriente de magnetización.
3. Considerar constante la frecuencia del sistema (o red) eléctrico al cual se encuentra conectado el bobinado del estator.

Asumiendo constante el flujo del estator y que el mismo circula en una única dirección, es posible simplificar la expresión para el flujo magnético, el cual es dado por el vector $(\Psi_{ds}, \Psi_{qs}, \Psi_{dr}, \Psi_{qr})^{\mathrm{T}}$ que aparece en la expresión (4).

Así,

$$\begin{aligned}
\Psi_{ds} &= L_m \left|\overrightarrow{I_{ms}}\right| = L_{ss}\, I_{ds} + L_m\, I_{dr},\\
\Psi_{qs} &= L_{ss}\, I_{qs} + L_m\, I_{qr} = 0,\\
\Psi_{dr} &= \tfrac{L_m^2}{L_{ss}} \left|\overrightarrow{I_{ms}}\right| + \sigma L_{rr}\, I_{dr},\\
\Psi_{qr} &= \sigma L_{rr}\, I_{qr},
\end{aligned}$$

donde $\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_{ss}\, L_{rr}}$.

De acuerdo a simplificaciones citadas, a partir del sistema de ecuaciones (4), se deriva el sistema de ecuaciones que rige la dinámica del generador DFIG respecto de las variables de estado, a saber:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{dr} \\ \dot{I}_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_r}{\sigma L_{rr}} & \omega_{sl} \\ -\omega_{sl} & -\frac{R_r}{\sigma L_{rr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_{rr}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_{rr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{dr} \\ V_A \end{bmatrix}, \tag{6}$$

donde $V_A = V_{qr} - \frac{\omega_{sl} L_m^2 \left|\overrightarrow{I_{ms}}\right|}{L_{ss}}$.

En el nuevo sistema de referencia, las potencias activa y pasiva se definen respectivamente como:

$$P_{ACT} = -\,\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{V_s}\right| \frac{L_m}{L_{ss}} I_{qr}, \qquad Q_{REA} = \frac{3}{2}\left(\frac{\left|\overrightarrow{V_s}\right|^2}{\omega_0 L_{ss}} - \frac{\left|\overrightarrow{V_s}\right| L_m}{L_{ss}} I_{dr} \right). \tag{7}$$

3 Estabilidad de la dinámica del generador DFIG

El sistema de ecuaciones (6), que rige el funcionamiento del generador de inducción doblemente alimentado, escrito en forma matricial, tiene la forma:

$$\dot{I}_{dq} = M\, I_{dq} + N\, V_{dq}\,, \tag{8}$$

donde $I_{dq} = \begin{bmatrix} I_{dr} \\ I_{qr} \end{bmatrix}$, $V_{dq} = \begin{bmatrix} V_{dr} \\ V_A \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} -\frac{R_r}{\sigma L_{rr}} & \omega_{sl} \\ -\omega_{sl} & -\frac{R_r}{\sigma L_{rr}} \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_{rr}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_{rr}} \end{bmatrix}$.

El sistema de ecuaciones diferenciales (8) puede ser considerado como un sistema de interconexión, el cual es perturbado. Es decir, si se considera que el vector V_{dq} es nulo, entonces

$$\dot{I}_{dq} = M\, I_{dq}\,. \tag{9}$$

En el trabajo [6] se aborda el estudio de sistemas bidimensionales como el representado en (9). En concreto, se consideran las matrices cuadradas de segundo orden

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{12}^1 \\ a_{21}^1 & a_{22}^1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 \end{bmatrix},$$

estables, donde además, en la notación $\left(a_{ij}^k\right)$, el supraíndice k identifica cuándo el referido elemento corresponde a la matriz A_1 o a la matriz A_2.

Denotando por $N_t(A_1, A_2)$ al conjunto de funciones matriciales $t \to A(t)$, $t \in [0, +\infty)$, donde $A(t) = \alpha_1(t) A_1 + \alpha_2(t) A_2$, tal que las funciones $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ en cada instante de tiempo t toman valor 0 o 1, y $\alpha_1(t) + \alpha_2(t) \equiv 1$, se define la familia de sistemas de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = A(t)\, x(t), \ t \geq 0, (t) \in N_t(A_1, A_2), \tag{10}$$

para el que es válido el siguiente resultado.

Teorema 1. *Para que la familia de sistemas (10) tenga solución trivial asintóticamente estable, es necesario y suficiente que*

i) $\operatorname{tr}(A_i) < 0, \ \det(A_i) > 0, \ i = 1, 2;$

ii) $a_{12}^1 a_{21}^2 + a_{12}^2 a_{21}^1 - a_{11}^1 a_{22}^2 - a_{11}^2 a_{22}^1 \leq 2\sqrt{\det A_1 \det A_2}$;

iii) Si exactamente se cumple una de las condiciones

a) $a_{12}^1 > 0$ o $a_{12}^2 > 0$, y para cada $k \in \mathbb{R}$, $-a_{21}^i - (a_{22}^i - a_{11}^i)\, k + a_{12}^i k^2 > 0, \ i = 1$ o 2;

b) $a_{12}^1 < 0$ o $a_{12}^2 < 0$, y para cada $k \in \mathbb{R}$, $-a_{21}^i - (a_{22}^i - a_{11}^i)\, k + a_{12}^i k^2 < 0, \ i = 1$ o 2.

Entonces, si se cumple *a)*, $I^+ < 0$, mientras que si se cumple *b)*, $I^- < 0$, donde I^+ e I^- son expresiones integrales tales que para las integrales que en ellas aparecen las funciones integrando se expresan en términos de los elementos de las matrices A_1 y A_2.

Demostración. (Para probar este resultado y obtener I^+ e I^-, referirse a [6]). ■

El Teorema 1 puede ser aplicado al estudio del sistema de ecuaciones diferenciales (9) si se consigue establecer una correspondencia entre este y la familia de sistemas (10). Tal correspondencia puede ser establecida si se considera que la matriz M en (9) de forma general depende del tiempo y $M(t) \in N_t(M_1, M_2)$. Las matrices M_1, M_2 tendrían que ser estables y cada una de ellas describiría un modo de funcionamiento del DFIG en términos de los regímenes de velocidad (fija o variable) o en términos de sincronismo (modo subsíncrono o sobresíncrono).

Una vez garantizada la estabilidad del sistema "transitorio" (9), entonces es necesario considerar la perturbación, representada por el término NV_{dq}, en (8). En el artículo [9] se estudia el problema de la estabilidad de politopos de matrices de segundo orden, y como caso particular de este problema, en el trabajo [7] se considera el siguiente problema.

Sea el sistema nominal

$$\dot{x} = A\, x(t), \tag{11}$$

donde la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es estable.

Asociado al sistema (11), se considera el sistema perturbado

$$\dot{x} = [A + \delta(t) B] x(t), \tag{12}$$

donde $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es dada y diferente de la matriz nula. La función $\delta(\cdot) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{+}, \mathbb{R})$, con la norma $\|\delta(\cdot)\|_{\infty} = ess\,sup\,\{|\delta(t)|,\ t \in \mathbb{R}^{+}\}$.

Definición 1. Se llama radio de estabilidad real de la matriz A para perturbaciones afines dependientes del tiempo determinadas por la matriz B al número

$$r_{\mathbb{R},t}(A,B) = inf\ \left\{\|\delta(\cdot)\|_{\infty} : \delta(\cdot) \in L^{\infty}\left(\mathbb{R}^{+}, \mathbb{R}\right) \text{ y la ecuación (12) no es asintóticamente estable}\right\}.$$

Definición 2. Se llama radio de estabilidad real de la matriz A para perturbaciones afines no dependientes del tiempo determinadas por la matriz B al número

$$r_{\mathbb{R}}(A,B) = inf\ \{|\delta|\ :\ \delta \in \mathbb{R},\ \sigma(A + \delta B) \cap \mathbb{C}_{+} \neq \emptyset\},$$

donde $\mathbb{C}_{+} = \{\lambda \in \mathbb{C}\ :\ \mathcal{R}e\,\lambda > 0\}$ y $\sigma(H)$ representa el espectro de la matriz H.

El sistema de ecuaciones (8), que describe de forma general la dinámica del generador DFIG, es una combinación de los modelos (10) y (12). Además, en el caso del modelo representado por la expresión (8), para el generador DFIG, la perturbación a considerar una vez lograda la estabilidad del sistema de interconexión representado por (9), podría considerarse no dependiente del tiempo. En este caso, una medida de estabilidad de la matriz del sistema puede ser determinada por la Definición 2. Evidentemente, habría que medir, de alguna forma, la magnitud de la perturbación NV_{dq}, lo cual es una tarea simple. Entonces, calcular el número $r_{\mathbb{R}}(A,B)$ según se describe en [7] o [9].

4 Conclusiones

Interpretar el modelo del funcionamiento dinámico de un generador DFIG, descrito por el sistema de ecuaciones (8), desde este punto de vista es una combinación de dos problemas: el primero referido al estudio de la estabilidad de la solución trivial del sistema de interconexión descrito por las ecuaciones (9), y luego de determinado un régimen estable de "trabajo" para tal sistema, entonces considerar la perturbación afin, no dependiente del tiempo, descrita por el término (vector) NV_{dq}. Tal análisis permitiría encontrar marcos diferentes, por ejemplo, para el estudio de posibles regímenes de trabajo con nuevas caracterizaciones de las potencias activa P_{ACT} y reactiva Q_{REA}, así como una mejor exactitud en la determinación de las condiciones (5), que garantizan el modo sobre-síncrono. Por consiguiente, otras posibilidades para el rediseño de reguladores de potencia como el descrito en [1].

Referencias

[1] González Acevedo, H. *Diseño de un controlador LQR para una turbina de velocidad variable*. Proceedings of Euro-American Conference on Telematics and Information Systems EATIS, pp.22-24. Panamá (2010).

[2] González Acevedo, H., Vargas Torres, H. R. *Control de una turbina eólica de velocidad variable conectada a la red eléctrica*. Revista UIS INGENIERÍA, Vol.7, No.1, Universidad de Santander, Colombia (2008).

[3] Carrillo González, C. J. *Análisis y simulación de sistemas eólicos aislados*. Ph.D. Thesis, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Vigo, España (2001).

[4] Ong, Chee-Mun. *Dynamic Simulation of Electric Machinery*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River. New Jersey, USA (1998).

[5] Ovando Domínguez, R. II. *Emulador de turbina eólica para el banco de pruebas de generación eoloeléctrica*. Ms.C. Thesis, Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico (CENIDET), Departamento de Ingeniería Electrónica, Cuernavaca, Morelos, México (2007).

[6] Da Conceição de Jesus Domingos, A., Vázquez Silva, E. *Stability for a family of systems of differential equations with sectionally continuous right-hand side*. Electronic Journal of Differential Equations (EJDE), Vol.9, No.35, pp:1-16 (2009). http://ejde.math.swt.edu

[7] Vázquez Silva, E., González Mastrapa, H. *The real stability radius of matrices under time-dependent affine perturbations in the two-dimensional, continuous-time case*. Revista Ciencias Matemáticas, Universidad de la Habana, Cuba, Vol.17, No.2, pp:97-106 (1999).

[8] Iov, F. *Contributions to Modelling, Analysis and Simulation of Ac Drive Systems*. Ph.D. Thesis, Dunarea de Jos University-Galati (2003).

[9] Vázquez Silva, E., De La Hera, G., González Mastrapa, H. *On the stability of convex symmetric polytopes of matrices*. Electronic Journal of Differential Equations (EJDE). Vol.2, No.09, pp:1-17 (2000). http://ejde.math.swt.edu

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2013, pp. 9–15.

Nivel: Medio Superior y Superior

El Grupo Modular de una Superficie

Miguel A. Maldonado

Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
e-mail: mmaldonado@mate.reduaz.mx

Resumen

Daremos una introducción a la teoría de grupos modulares de superficies mediante un enfoque diferencial. Usando ciertos resultados clásicos de topología mostraremos algunos cálculos elementales de tal grupo y definimos unos de los elementos más sencillos (y no triviales) del grupo modular, los giros de Dehn. Ofrecemos también una breve introducción al grupo modular de superficies con puntos marcados.

1 Introducción

Uno de los principales problemas dentro de la topología es la clasificación de variedades diferenciables. Un estudio minucioso de este problema lleva a considerar la clasificación hasta isotopía de los difeomorfismos entre tales variedades y al estudio del tipo de homotopia del grupo de difeomorfismos $\mathrm{Diff}(M)$ considerado como grupo topológico. Este último problema es equivalente al cálculo de los grupos de homotopía $\pi_i\mathrm{Diff}(M)$.

Es un tema básico de la topología de bajas dimensiones que toda variedad compacta, sin frontera y de dimensión 2 es difeomorfa a una suma conexa de toros o de planos proyectivos ([13]). Por otro lado, los grupos de homotopía $\pi_i\mathrm{Diff}(M)$, para variedades de dimension 2, han sido calculados y la mayoría de ellos son triviales ([5]). Así, de los problemas mencionados anteriormente, sólo resta considerar el de la clasificación de los difeomorfismos $M \to M$. Dado que $\mathrm{Diff}(M)$ es un grupo bajo la composición de funciones, las clases de isotopía en $\mathrm{Diff}(M)$ forman un grupo llamado el *grupo modular*. Es este problema de clasificacion el que ha servido como motivación para el estudio del grupo modular.

El presente trabajo pretende ser una introducción a la teoría de grupos modulares de variedades de dimensión 2 o *superficies* usando conceptos elementales de la topología diferencial. Este enfoque particular resulta equivalente a definir el grupo modular usando elementos de la topología (auto-homeomorfismos) o de la teoría de homotopía (equivalencias homotópicas).

En la Sección 2 daremos los conceptos básicos de topología diferencial para introducir el grupo $\mathrm{Diff}(M)$ asícomo de la topología compacto-abierta que hace de $\mathrm{Diff}(M)$ un grupo topológico. Debido a que el grupo de difeomorfismos es grande se introduce la relación de equivalencia de isotopía y el conjunto de clases de isotopía hereda la estructura de grupo de $\mathrm{Diff}(M)$, el grupo resultante es el llamado grupo de difeotopía de la variedad M. Damos esta definición en la Sección 3. La Sección 4 presenta algunos cálculos directos de grupos modulares mostrando las herramientas topológicas que pueden ser usadas para estudiar estos grupos.

En la Sección 5 definimos elementos del grupo modular de una superficie llamados *giros de Dehn* en honor de M. Dehn, topólogo alemán que fue el precursor en el estudio del grupo modular. Estos elementos son importantes porque generan al grupo modular. Concluimos el trabajo en la Sección 6 definiendo el grupo modular de superficies que exhiben estructura extra como puntos marcados y componentes frontera.

2 El grupo de difeomorfismos

Diremos que un espacio topológico M es una *n-variedad topológica* si es un espacio Hausdorff, 2do numerable y localmente Euclidiano de dimensión n; esto es, para cada punto $x \in M$ existe una vecindad U y un homeomorfismo $\varphi : U \to O$, con O subespacio abierto de $\mathbb{R}^n$. Una pareja (U, φ) es llamada una *carta coordenada* para M si U es un subespacio abierto de M y φ es un homeomorfismo de U a un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Con la intención de definir una estructura diferencial en una variedad topológica revisaremos algunos conceptos del calculo diferencial de varias variables. Primero recordemos que una función $U \to V$ entre abiertos de espacios Euclidianos es llamada *diferenciable* si sus funciones componentes tienen derivadas parciales continuas de todos los ordenes. De igual forma, recordemos que un *difeomorfismo* es una función diferenciable y biyectiva con inversa tambien diferenciable. A continuación introduciremos las nociones de diferenciabilidad a los terrenos de las variedades topológicas.

Decimos que dos cartas coordenadas $(U, \varphi), (V, \psi)$, con $U \cap V \neq \varnothing$, son *compatibles* si la función $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo en el sentido mencionado anteriormente. Definimos un *atlas* de M como una colección de cartas coordenadas que cubren a M y diremos que el atlas es *diferenciable* si cualesquiera dos cartas coordenadas son compatibles. Una *estructura diferenciable* para una variedad topológica M es la elección de una atlas diferenciable *maximal*; es decir, que cualquier carta coordenada de M sea compatible con cualquier carta coordenada del atlas diferenciable. Finalmente, diremos que una n-variedad topológica M es una *n-variedad diferenciable* si se ha elegido un atlas diferenciable maximal para M.

Si M, N son variedades diferenciables diremos que una función $f : M \to N$ es *diferenciable* si para todo $x \in M$ existen cartas coordenadas diferenciables (U, φ) para x y (V, ψ) para $f(x)$ tal que $f(U) \subset V$ y la composición $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es una función diferenciable. Un *difemorfismo* $f : M \to N$ entre variedades diferenciables M, N es una función diferenciable, biyectiva y con inversa diferenciable.

Dada una variedad diferenciable M consideremos el conjunto de sus *auto-difeomorfismos* $f : M \to M$, denotado por $\mathrm{Diff}(M)$, y notemos que la composición usual de funciones diferenciables le otorga a $\mathrm{Diff}(M)$ una estructura de grupo. Este grupo puede ser dotado de la *topología-compacto abierta* para ser considerado como un grupo topológico. A continuación recordaremos ésta topología.

Dados X, Y espacios topológicos tomemos el conjunto $C(X, Y)$ de funciones continuas de $X \to Y$. Dados $K \subset X$ compacto y $O \subset Y$ abierto consideremos el conjunto

$$W(K, O) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset O\}$$

como subbase de la topología *compacto abierta* τ_{CO}. Asi, los abiertos de τ_{CO} se forman de intersecciones finitas y de uniones de una cantidad arbitraria de elementos en $W(K, O)$. Véase el apéndice de [6] para mas propiedades de esta topología.

Como puede observarse la topología compacto-abierta solo toma en consideración la estructura topológica de los espacios en cuestión y en muchos casos resulta conveniente considerar una topología que refleje la estructura adicional que un espacio pudiera tener. Tal es el caso de la *topología* C^∞ para el espacio de funciones infinitamente diferenciables o C^∞. En general estas topologías no coinciden y pueden arrojar resultados distintos pero en el caso en que el espacio dominio es compacto ambas topologías coinciden. Para una introducción a estas topologias recomendamos la Seccion 2.1 de [7].

3 El grupo modular

En general el espacio de auto-difeomorfismos $\mathrm{Diff}(M)$ es muy grande para fines prácticos pero para estudiar propiedades *topológicas* de M basta con considerar aquellos difeomorfismos que preservan tales propiedades. Es asi como se introduce la relación de equivalencia de isotopía en $\mathrm{Diff}(M)$. Dos funciones $f, g : M \to M$ son *isotópicas* si existe una función (diferenciable) $H : I \times M \longrightarrow M$ tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$ y para todo $t \in I$, H_t es un difeomorfismo. La función F es llamada una *difeotopía* entre f, g y usaremos la notación $f \cong g$ para denotar a funciones isotópicas.

Claramente la relación de isotopía en $\mathrm{Diff}(M)$ es una relación de equivalencia y llamaremos al grupo de clases de isotopía el *grupo de difeotopía de* M y lo denotaremos por $\Gamma(M)$. Equivalentemente, puede ser descrito como el grupo de componentes conexas de $\mathrm{Diff}(M)$; es decir, $\Gamma(M) = \pi_0\mathrm{Diff}(M)$ (Véase [16] para una definición de π_0).

De igual forma, podemos definir a $\Gamma(M)$ como el cociente $\mathrm{Diff}(M)/\mathrm{Diff}_0(M)$, donde $\mathrm{Diff}_0(M)$ denota el subespacio de auto- difeomorfismos de M que son isotópicos a la identidad; es decir, en el lenguaje de grupos topológicos, $\mathrm{Diff}_0(M)$ es la *componente de la identidad*). Con esta definición se obtiene una sucesión exacta

$$1 \longrightarrow \mathrm{Diff}_0(M) \longrightarrow \mathrm{Diff}(M) \longrightarrow \Gamma(M) \longrightarrow 1$$

que tiene aplicaciones importantes en el estudio del grupo modular. En lo que sigue consideraremos el caso de 2-variedades.

Una *superficie* es una 2-variedad diferenciable y el teorema de clasificación asociado afirma que existen dos clases de superficies compactas sin frontera: la suma conexa de $g \geq 0$ toros, donde $g = 0$ corresponde a la 2-esfera y la suma conexa de g planos proyectivos . El primer conjunto se refiere a las superficies *orientables* y el segundo a las *no-orientables*. En este sentido es conveniente aclarar si cuando consideramos el grupo de difeomorfismos de una superficie consideramos difeomorfismos que preservan o no orientación. Asítendremos dos definiciones para el grupo de difeotopía de una superficie orientable y una para superficies no-orientables.

Tomemos S superficie orientable y consideremos a $\mathrm{Diff}(S)$ y al subgrupo $\mathrm{Diff}^+(S)$ de difeomorfismos que preservan orientación. Los grupos de difeotopía, o *grupos modulares*,

asociados se denotarán por $\Gamma(S)$ y $\Gamma^+(S)$, respectivamente. Notemos que tenemos una sucesión

$$1 \longrightarrow \Gamma^+(S) \longrightarrow \Gamma(S) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1,$$

con $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$. Notemos además que si S es una superficie no-orientable, entonces $\Gamma(S) = \Gamma^+(S)$.

El grupo modular también puede se definido usando el grupo $\mathrm{Top}(S)$ de auto-homeomorfismos de S debido al resultado clásico de que todo homeomorfismo es isotópico a un difeomorfismo; es decir, no sólo es posible aproximar a un homeomorfismo por una función diferenciable sino que además esta función tiene inversa también diferenciable ([12]). Más aún, si $\mathrm{HAut}(S)$ es el grupo de equivalencias homotópicas $S \to S$, entonces es posible definir $\Gamma(S) = \pi_0 \mathrm{HAut}(S)$. Véase [2] para una prueba de estos resultados.

4 Cálculos elementales de grupos modulares

La esfera. Sea S^2 la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$ y consideremos $\mathrm{Diff}(S^2)$. Es un resultado clásico dentro de la topología de superficies que la inclusión $SO(3) \subset \mathrm{Diff}^+(S^2)$ es una equivalencia homotópica ([14]), donde $SO(3)$ es el grupo especial ortogonal de matrices 3×3 de determinante 1 considerado como el grupo de isometrías de S^2. Esto muestra, en particular, que $\mathrm{Diff}^+(S^2)$ es conexo y cualquier auto-diffeomorfismo de S^2 es isotópico a la identidad. Por lo tanto $\Gamma^+(S^2)$ es el grupo trivial.

El toro T^2. El grupo de difeotopía $\Gamma(M)$ de una variedad actúa en cualquier invariante homotópico de M, algunos de ellos como el grupo fundamental $\pi_1 M$ y el grupo graduado de homología entera $H_*(M;\mathbb{Z})$ han sido de gran interés. En el caso de la superficie orientable S_g de género g la acción en $\pi_1 S_g$ conduce al *Teorema de Dehn-Nielsen* ([4]) que afirma que $\Gamma(S_g)$ es isomorfo al grupo de automorfismos exteriores $\mathrm{Out}(\pi_1 S_g)$ de $\pi_1 S_g$, con

$$\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G),$$

donde $\mathrm{Aut}(G)$ es el grupo de automorfismos de G y $\mathrm{Inn}(G)$ es el subgrupo de automorfismos internos de G. Para el caso del toro T^2 se tiene que $\pi_1 T^2 = \mathbb{Z}^2$ y por lo tanto $\Gamma(T^2) \cong GL(2,\mathbb{Z})$ y $\Gamma^+(T^2) \cong SL(2,\mathbb{Z})$.

Superficies no-orientables. Puesto que todo auto-difeomorfismo del plano proyectivo P^2 proviene de un auto-difeomorfismo de S^2 y como $\Gamma(S^2)$ es trivial se sigue que $\Gamma(\mathrm{P}^2)$ es también trivial. Este resultado tambien puede seguirse al considerar una presentación del grupo modular de superficies no-orientables ([10]). De este resultado también se obtiene que el grupo modular $\Gamma(\mathbb{K})$ de la botella de Klein es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

La siguiente seccíon esta dedicada a definir uno de los elementos más sencillos y no triviales del grupo modular de una superficie orientable, los llamados *giros de Dehn*.

5 Giros de Dehn

Tomemos $A = S^1 \times [-1, 1]$ y consideremos el difeomorfismo $T : A \to A$ definido mediante $T(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t)$. Sean S superficie orientable, a curva cerrada simple en S y N vecindad de C. Dado un encaje $i : A \to S$ tal que $i(S^1 \times 0) = a,\ i(A) = N$ que preserve la orientación de S^1 definimos el difeomorfismo

$$T_a(x) = \begin{cases} i \circ T \circ i^{-1}, & x \in N \\ x, & x \in S \backslash N \end{cases}$$

El difeomorfismo T_a es llamado el *giro de Dehn (derecho)* respecto a la curva a y su acción en S consiste en "cortar" la superficie S a lo largo de a, rotar uno de los lados en 360 grados (a la derecha) y despues volver a unir las partes. La figura A ilustra este procedimiento donde $T_a(b)$ denota la imágen de la curva b bajo el giro T_a.

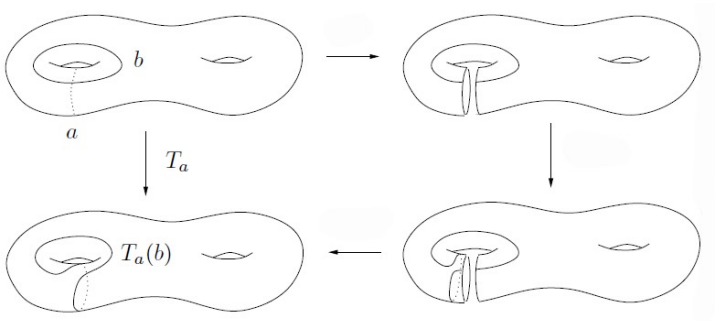


Figura A: Giro de Dehn.

Diremos que una curva cerrada simple a en una superficie S es *no separante* si $S \backslash a$ es conexo. Es un resultado de M. Dehn que el grupo modular $\Gamma(S_g)$ de la superficie orientable de género g es generado por una cantidad finita de giros de Dehn respecto a curvas no separantes. Este resultado fue mejorado por Lickorish ([10]) mostrando que el número de generadores es $3g - 1$. Más tarde, Humphries mejoró el número mostrando que el número de generadores es $2g + 1$. Más aún, demostró que este número es mínimo ([8]). La Figura B muestra las curvas no-separantes que definen estos generadores.

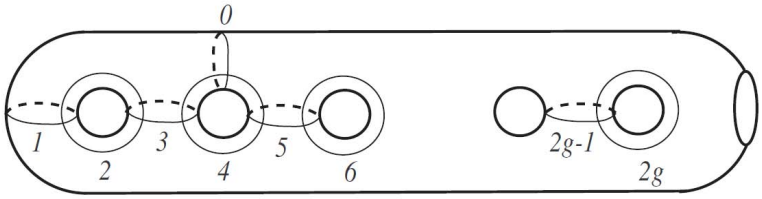


Figura B: Curvas no-separantes para los generadores de $\Gamma(S_g)$.

6 Puntos marcados y componentes frontera

Como se menciono anteriormente existen diferentes versiones del grupo de difeotopía que surgen de considerar distintos comportamientos de los difeomorfismos involucrados. Por ejemplo, si la variedad esta equipada con una métrica Riemmaniana entonces es razonable pedir a los difeomorfismos que preserven tal estructura. En lo que sigue consideraremos el caso en que la superficie tiene frontera no vacia y el caso en que cuenta con un conjunto de puntos distinguidos.

Superficies no-orientables. Es posible desarrollar una teoría de grupos modulares para superficies no-orientables de manera paralela al caso orientable; por ejemplo, es posible obtener un conjunto de generadores a partir de los generadores para el caso orientable. En particular, el grupo modular $\Gamma(N_g)$ de la superficie no-orientable de género g [1] es generado por una cantidad finita de giros de Dehn y un homeomorfismo que exhibe la no-orientabilidad llamado el *homeomorfismo* Y. Véase [9]

Componentes frontera. Consideremos la superficie S_d obtenida al remover d discos abiertos del interior de una superficie compacta S. Así, la frontera ∂S_d consiste de d círculos disjuntos o *componentes frontera*. Consideramos $\mathrm{Diff}(S_d)$ el grupo de difeomorfismos que permute las d componentes frontera y definimos $\Gamma(S_d) = \pi_0\mathrm{Diff}(S_d)$. Este grupo esta relacionado con fenomenos de estabilización y el caso de la estabilización de los grupos de homología del grupo modular ha recibido atención en años recientes. Véase [15].

Puntos marcados. Tomemos un subconjunto $Q_k \subset S$ de cardinalidad k de una superficie S, orientable o no. Tomemos el grupo $\mathrm{Diff}(S;k)$ de difeomorfismos tales que $f(Q_k) \subset Q_k$ y definamos el grupo modular asociado como el grupo modular de S con k *puntos marcados*, denotado por $\Gamma^k(S)$. La acción natural de $\mathrm{Diff}(S)$ en S induce una acción en el espacio de k puntos distintos de S; esto es, en el espacio dado por

$$F_k(S) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in S^k \mid x_i \neq x_j, i \neq j\}.$$

Este espacio es llamado el *k-esimo espacio de configuración* de S. Existe una acción del grupo simétrico Σ_k dada por el reordenamiento de los subíndices y al cociente por esta acción $F_k(S)/\Sigma_k$ se le llama el k-esimo espacio de configuración *desordenado*.

Resulta claro que la acción inducida en $F_k(S)/\Sigma_k$ es transitiva y por lo tanto se tiene un homeomorfismo $\mathrm{Diff}(S)/\mathrm{Diff}_0(S) \cong F_k(S)/\Sigma_k$ que puede ser utilizado para estudiar el grupo modular de superficies desde un punto de vista homotópico. En particular, el espacio

$$E\mathrm{Diff}(S) \underset{\mathrm{Diff}(S)}{\times} F_k(S)/\Sigma_k,$$

llamado la *construcción de Borel*, puede ser usada para obtener información acerca de la cohomología de $\Gamma^k(S)$ ([11]).

[1] El género de una superficie no-orientable se determina por el número de planos proyectivos P^2 en una descomposición por suma conexa

Referencias

[1] Aguilar, M., Gitler, S., Prieto, C., Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint, Universitext, Springer-Verlag (2002).

[2] Boldsen, S.K., *Different versions of mapping class groups of surfaces*, http://arxiv.org/abs/0908.2221

[3] Epstein, D. B. A., *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Mathematica **115** (1966), 83-107.

[4] Farb, B., Margalit, D., *A Primer on Mapping Class Groups*, Princeton University Press, 2011.

[5] Gramain, A., *Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., **4-6** (1973), 53-66.

[6] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Princeton University Press, 2011.

[7] Hirsch, M.,W., *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics **33**, Springer-Verlag New York, 1976.

[8] Humphries S., *Generators for the mapping class group*, Topology of low-dimensional manifolds, Lecture Notes in Mathemaicas, Springer-Verlag, Berlin, **722** (1979).

[9] Korkmaz, M., *On generators of the mapping class groups of a nonorientable surface*, (1998).

[10] Lickorish, W. B. R., *A finite set of generators for the homeotopy group of a* 2*-manifold*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **60** (1964), 769-778.

[11] Maldonado, M.A., *Homotopy theory of non-orientable mapping class groups*, Morfismos, Vol. 16 **2**, 2012.

[12] Munkres, J. R., *Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms*, Ann. of Math., **2-72** (1960), 521-554.

[13] Munkres, J. R., *Topology*, Boston: Prentice-Hall, 2000.

[14] Smale, S., *Diffeomorphisms of the 2-sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 621-626.

[15] Wahl, N., *Homological stability for the mapping class groups of non-orientable surfaces*, Invent. Math., **171**(2) (2008), 389-424.

[16] Wu, J., *What are homotopy groups?*. Disponible en la pagina personal de Jie Wu: http://www.math.nus.edu.sg/ matwujie/

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2013, pp. 16–24.

Nivel: Superior

Espacio Clasificante para Torcimientos Equivariantes de K-Teoría Torcida

Jesús Francisco Espinoza Fierro

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: jesus.espinoza@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Dado un G-CW-complejo finito X, M. Atiyah y G. Segal construyen en [1] un espacio ad hoc $\mathcal{P}$ el cual clasifica los torcimientos equivariantes de la K-teoría, y la construcción que ellos realizan se basa en un procedimiento estándar mediante el cual se pega una familia de espacios $\mathcal{P}_H$ y el cual es G-homotópicamente equivalente a un espacio que representa al funtor de cohomología de Borel equivariante de grado 3. En este trabajo se presenta otra construcción del espacio clasificante para los torcimientos equivariantes de la K-teoría y se estudian sus grupos de homotopía. Se demuestra además que este espacio es G-homotópicamente equivalente a un representante del funtor de cohomología de Borel equivariante.

1 Introducción

En [4], R. K. Lashof, J. P. May y G. Segal estudian la colección de κ-haces principales G-equivariantes sobre X, llamados (G, κ)-haces, cuyo resultado principal establece que si G y κ son grupos de Lie compactos, con κ **abeliano**, y X del mismo tipo de homotopía G-equivariante que un G-complejo celular, entonces existe un isomorfismo entre esta colección y el conjunto de clases de isomorfismo de κ-haces principales sobre el espacio ordinario (no equivariante) $EG \times_G X$, dado por la construcción de Borel sobre X.

Posteriormente, en [1] los autores, M. F. Atiyah y G. Segal, analizan el caso $\kappa = PU(\mathcal{H})$ y realizan una construcción ad hoc para el correspondiente espacio clasificante. Luego, mediante el estudio de los grupos de homotopía de tal espacio clasificante establecen que los torcimientos equivariantes deben ser clasificados por el tercer grupo de cohomología de Borel equivariante $H^3_G(X; \mathbb{Z})$. El objetivo de estas notas es proporcionar una construcción alternativa de un espacio clasificante para los torcimientos equivariantes y el correspondiente espacio universal. La construcción de este espacio se realiza en la Sección 2 y el cálculo de sus grupos de homotopía es realizado en la Sección 3. Finalmente, en la Sección 4 se demuestra que efectivamente los torcimientos equivariantes están clasificados por $H^3_G(X; \mathbb{Z})$, como era de esperarse.

Un aspecto relevante de esta construcción es la posibilidad de generalizarse a acciones propias de grupos discretos. Varios de los resultados establecidos en este trabajo se encuentran contenidos en el artículo [2] el cual surge del trabajo en colaboración con Noé Bárcenas, Michael Joachim y Bernardo Uribe, y es una generalización de varios resultados de estas notas al caso donde la acción es dada por un grupo discreto G que actúa propiamente sobre un espacio X el cual es un G-ANR. En este trabajo nos restringimos al caso de una acción de un grupo de Lie compacto.

2 El $PU(\mathcal{H})$-haz unitario proyectivo G-equivariante

Iniciamos con una introduccón a la teoría de haces proyectivos unitarios con la acción de un grupo de Lie compacto G, los cuales son también llamados $PU(\mathcal{H})$-haces principales G-equivariantes. El material aquí expuesto puede encontrarse en [6] y [4].

Sea κ un grupo topológico y $P \longrightarrow X$ un κ-haz principal sobre el CW-complejo finito X. El grupo de simetrías del haz principal P es definido como el subgrupo de elementos del grupo de homeomorfismos $Homeo(P)$ que son κ-equivariantes, esto es,

$$Sim(P) := \{F \in Homeo(P) \mid F \text{ es } \kappa\text{-equivariante}\}.$$

Por otro lado, dado cualquier homeomorfismo $f : X \longrightarrow X$ tal que existe un isomorfismo $\phi : P \cong f^*P$ de κ-haces principales, podemos construir un homeomorfismo κ-equivariante $F : P \longrightarrow P$, $F := \bar{f} \circ \phi$, donde $\bar{f}$ es la aplicación canónica $\bar{f} : f^*P \longrightarrow P$ inducida por f. Si denotamos por $Homeo_P(X)$ al grupo de tales homeomorfismos $f : X \longrightarrow X$, tenemos la siguiente sucesión exacta corta,

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}_G(P) \longrightarrow Sim(P) \longrightarrow Homeo_P(X) \longrightarrow 1$$

donde $\mathcal{G}_G(P)$ es el conjunto de simetrías que inducen la identidad en el espacio base, esto es, el grupo de *transformaciones de calibración*.

Definición 2.1 *Sean G y κ grupos de Lie compactos y X un G-complejo celular. Llamamos κ-haz principal G-equivariante a un κ-haz principal $p : P \longrightarrow X$ para el cual se satisface que P y X son G-espacios (por la izquierda), p es G-equivariante y las acciones de G y κ sobre P conmutan.*

Dos κ-haces principales G-equivariantes P y P' son isomorfos si existe un isomorfismo G-equivariante $P \cong P'$ de κ-haces principales.

Denotamos el conjunto de clases de isomorfismo de κ-haces principales G-equivariantes sobre X, por

$$Bun_G(X, \kappa).$$

El caso que consideraremos es cuando G corresponde a un grupo de Lie compacto y $\kappa = PU(\mathcal{H})$, el conjunto de operadores proyectivos unitarios sobre un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita $\mathcal{H}$, y es dado como la proyectivización del conjunto de operadores unitarios $U(\mathcal{H}) := \{U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \mid UU^* = U^*U = \mathrm{Id}\}$.

Observamos que cuando X corresponde al G-espacio trivial dado por un punto, se sigue que

$$Bun_G(*, \kappa) \cong Hom(G, \kappa)/\kappa$$

con $Hom(-,-)$ el conjunto de homomorfismos continuos de grupos y el cociente por κ lo particiona en clases de conjugación por elementos en κ. De modo que para G un grupo de Lie compacto y $\kappa = PU(\mathcal{H})$, definimos la aplicación

$$\Psi : Hom(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H}) \longrightarrow Ext(G, S^1),$$

al conjunto de clases de isomorfismo de extensiones S^1-centrales

$$1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1,$$

de la siguiente manera: Si $a : G \longrightarrow PU(\mathcal{H})$ es cualquier homomorfismo, éste determina una extensión S^1-central de G dada por $\widetilde{G} := a^*U(\mathcal{H})$, de modo que Ψ es definida por

$$\Psi : (a : G \longrightarrow PU(\mathcal{H})) \longmapsto (\widetilde{G} = a^*U(\mathcal{H})).$$

Definición 2.2 *Consideremos el subespacio $V_{sc}(\widetilde{G})$ de $L^2(\widetilde{G})$ generado por los vectores sobre los cuales $S^1 \subset \widetilde{G}$ actúa por multiplicación de escalares. Un homomorfismo $a : G \longrightarrow PU(\mathcal{H})$ es llamado* ***estable*** *si la representación unitaria definida por $\widetilde{a} : \widetilde{G} \longrightarrow U(\mathcal{H})$ contiene cada una de las representaciones irreducibles de $\widetilde{G}$ contenidas en $V_{sc}(\widetilde{G})$, un número infinito de veces. Denotamos por*

$$Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \subset Hom(G, PU(\mathcal{H}))$$

el subespacio de tales homomorfismos estables.

De hecho, la aplicación Ψ establecida previamente, induce una biyección de conjuntos

$$Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H}) \xrightarrow{\cong} Ext(G; S^1),$$

entre el conjunto de clases de isomorfismo de homomorfismos estables continuos y el conjunto de extensiones S^1-centrales de G.

Consideremos el grupoide acción

$$[Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H})]$$

asociado a la acción del grupo $PU(\mathcal{H})$ en los homomorfismos estables continuos por conjugación; este grupoide, también denotado por $PU(\mathcal{H}) \ltimes Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))$, consiste en el grupoide cuyos objetos son los elementos $\phi \in Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))$ y los morfismos $\sigma : \phi \longrightarrow \varphi$ son los elementos $\sigma \in PU(\mathcal{H})$ tales que $\sigma \cdot \phi = \varphi$. Este grupoide también se puede ver como el grupoide cuyos objetos son funtores de la categoría definida por G (i.e., $G_0 = \{*\}$ y $G_1 = G$) a la categoría definida por $PU(\mathcal{H})$ (i.e., $PU(\mathcal{H})_0 = \{*\}$ y $PU(\mathcal{H})_1 = PU(\mathcal{H})$), y cuyos morfismos son transformaciones naturales.

Las componentes conexas del espacio clasificante de esta categoría (grupoide acción)

$$B[Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H})],$$

están paremetrizadas por las extensiones S^1-centrales de G,

$$\pi_0(EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))) \cong Ext(G, S^1),$$

y la componente conexa de una aplicación estable $a : G \to PU(\mathcal{H})$ es homotópicamente equivalente al espacio clasificante del subgrupo de $PU(\mathcal{H})$ que estabiliza a,

$$PU(\mathcal{H})_a = \{b \in PU(\mathcal{H}) | \forall g \in G,\ b^{-1}a(g)b = a(g)\},$$

esto es,

$$EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})_a} \{a\} \simeq B(PU(\mathcal{H})_a).$$

Si denotamos por $\widetilde{G}_a$ a la extensión S^1-central $a^*U(\mathcal{H})$ definida por a, entonces el homomorfismo inducido $\widetilde{a} : \widetilde{G}_a \to U(\mathcal{H})$ define una acción sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ haciéndolo isomorfo al espacio de Hilbert $V_{sc}(\widetilde{G}_a)$ dado en la Definición 2.2. Ahora podemos tomar la acción de $\widetilde{G}_a$ sobre $U(\mathcal{H})$ por conjugación mediante la aplicación $\widetilde{a}$; este induce una acción del grupo G sobre $PU(\mathcal{H})$ por conjugación mediante la aplicación a. Denotemos la acción de G sobre $PU(\mathcal{H})$ por conjugación mediante la aplicación a por G_a.

Sea $PU(\mathcal{H})^{G_a} := \{b \in PU(\mathcal{H}) | g \in G,\ a(g)^{-1}ba(g) = b\}$ el conjunto de puntos fijos de la acción G_a sobre $PU(\mathcal{H})$, entonces $PU(\mathcal{H})^{G_a} = PU(\mathcal{H})_a$. De modo que el conjunto de puntos fijos de la acción de G_a es el mismo que el estabilizador del homomorfismo a.

Teorema 2.3 *Sea $PU(\mathcal{H})$ el espacio de operadores proyectivos unitarios con una G-acción mediante un homomorfismo estable $a : G \longrightarrow PU(\mathcal{H})$. Entonces,*

$$\pi_0(PU(\mathcal{H})^{G_a}) \cong Hom(G_a, S^1).$$

Además, cada componente conexa de $PU(\mathcal{H})^{G_a}$ tiene el tipo de homotopía de $K(\mathbb{Z}, 2)$.

Definición 2.4 *Un $PU(\mathcal{H})$-haz principal G-equivariante $P \longrightarrow X$ sobre el G-espacio X, es llamado* ***estable****, si para para todo $x \in X$ con subgrupo de isotropía G_x, existe una vecindad G_x-equivariante U_x de x y un isomorfismo de haces G_x-equivariantes*

$$P|_{U_x} \cong U_x \times PU(\mathcal{H})$$

de tal manera que la G_x-acción sobre el factor $PU(\mathcal{H})$ del lado derecho es mediante homomorfismos estables.

Dos haces estables G-equivariantes unitarios proyectivos P y P' sobre X se dicen ser isomorfos si existe un homeomorfismo G-equivariante $P \longrightarrow P'$ de $PU(\mathcal{H})$-haces principales. Las clases de isomorfismo de haces estables G-equivariantes unitarios proyectivos sobre X serán denotados por

$$Bun_G^{st}(X, PU(\mathcal{H})).$$

Los elementos en $Bun_G^{st}(X, PU(\mathcal{H}))$ serán llamados *torcimientos G-equivariantes.*

Sea G un grupo de Lie compacto y consideremos el $PU(\mathcal{H})$-haz unitario proyectivo G-equivariante

$$\begin{array}{ccc} PU(\mathcal{H}) & \longrightarrow & EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \\ & & \downarrow \\ & & EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \end{array} \tag{1}$$

La $PU(\mathcal{H})$-acción derecha sobre el espacio total del haz en (1) es definida por:

$$\begin{array}{rcl} EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \times PU(\mathcal{H}) & \longrightarrow & EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \\ ((a, f), F) & \longmapsto & (aF, F^{-1}fF) \end{array}$$

donde $F^{-1}fF$ denota el homomorfismo conjugado de f por F.

La G-acción izquierda sobre el espacio total de (1) es definida como:

$$\begin{array}{rcl} G \times EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) & \longrightarrow & EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \\ (g, (a, f)) & \longmapsto & (af(g), f(g)^{-1} f\, f(g)) \end{array}$$

donde un cálculo directo muestra que la G-acción es efectivamente una acción izquierda.

Llamamos al espacio base de este haz, el *cociente homotópico*.

Se sigue que el espacio total del haz (1) tiene una G-acción izquierda induciendo una G-acción trivial sobre la base. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.5 *El haz unitario proyectivo*

$$\begin{array}{ccc} PU(\mathcal{H}) & \longrightarrow & EPU(\mathcal{H}) \times Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \\ & & \downarrow \\ & & EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H})) \end{array} \tag{2}$$

es un haz estable G-equivariante unitario proyectivo.

3 Grupos de homotopía del $PU(\mathcal{H})$-fibrado universal

Teorema 3.1 *Sea G un grupo de Lie compacto y $Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))/PU(\mathcal{H})$ la categoría cuyo espacio de objetos consiste de los homomorfismos estables continuos de G al grupo unitario proyectivo con la topología compacto-abierto, y cuyo espacio de morfismos consiste en las transformaciones naturales. Entonces las componentes conexas del cociente homotópico son parametrizadas por las extensiones S^1-centrales de G,*

$$\pi_0(EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))) = Ext_c(G, S^1),$$

y los grupos superiores de homotopía de cualquier componente conexa son

$$\pi_i(EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))) = \begin{cases} Hom(G, S^1) & si\ i = 1 \\ \mathbb{Z} & si\ i = 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Del análisis de la sección anterior tenemos que las componentes conexas del cociente homotópico

$$EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))$$

son parametrizadas por $Ext_c(G, S^1)$. Además, para todo homomorfismo estable $a : G \longrightarrow PU(\mathcal{H})$, la componente conexa definida por a es homotópicamente equivalente a

$$EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})_a} \{a\} \cong B(PU(\mathcal{H})_a) = B(PU(\mathcal{H})^{G_a}).$$

Por el teorema 2.3 tenemos que $\pi_0(PU(\mathcal{H})^{G_a}) = Hom(G, S^1)$ es un isomorfismo de grupos, y por lo tanto,

$$\pi_1(B(PU(\mathcal{H})^{G_a})) = Hom(G, S^1).$$

Además, también por el Teorema 2.3, tenemos que $\pi_2(PU(\mathcal{H})^{G_a}) = \mathbb{Z}$ y que los demás grupos de homotopía son triviales. Por lo tanto,

$$\pi_3(B(PU(\mathcal{H})^{G_a})) = \mathbb{Z}$$

y

$$\pi_i(B(PU(\mathcal{H})^{G_a})) = 0$$

para $i = 2$ e $i > 3$.

Estos grupos de homotopía descritos en el teorema son precisamente los grupos de cohomología para el espacio clasificante BG en los grados que se muestran en el siguiente resultado.

Corolario 3.2 *Para un grupo de Lie compacto G tenemos los siguientes isomorfismos,*

$$\pi_i(EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} Hom_{st}(G, PU(\mathcal{H}))) = H^{3-i}(BG, \mathbb{Z}).$$

En efecto, como el espacio BG es conexo se sigue que $H^0(BG, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, coincidiendo con el tercer grupo de homotopía del cociente homotópico. Luego, como el grupo G es compacto, se sigue que $\pi_0(BG)$ es finito, entonces $\pi_1(BG)$ también es finito y por lo tanto, $H^1(BG, \mathbb{Z}) = 0$, lo cual establece el isomorfismo para $i = 2$.

En [4, Prop. 4] se demuestra que la aplicación natural

$$Hom(G, A) \longrightarrow [BG, BA]$$

es un isomorfismo cuando A y G son grupos de Lie compactos y A es abeliano. En consecuencia,

$$Hom(G, S^1) \xrightarrow{\cong} [BG, BS^1] = H^2(BG, \mathbb{Z}),$$

lo cual prueba el isomorfismo para $i = 1$.

Por último, Atiyah y Segal demuestran en [1, Prop. 6.3] que $H^3(BG, \mathbb{Z}) \cong Ext_c(G, S^1)$, estableciendo el isomorfismo para $i = 0$. La idea de la demostración de este resultado es usar los grupos de hipercohomoloía $\mathbb{H}^*(N_\bullet G, sh(S^1))$ del nervio del grupo G con coeficientes en la gavilla de funciones con valores en S^1. Primero observan que

$$\mathbb{H}^*(N_\bullet G, sh(S^1)) \cong H^{*+1}(BG, \mathbb{Z})$$

y posteriormente aplican una sucesión espectral a los grupos de hipercohomología para demostrar que $\mathbb{H}^2(N_\bullet G, sh(S^1))$ puede describirse por medio de haces S^1-principales sobre G a los cuales se les puede dar una estructura de grupo que desciende sobre la estructura de grupo de G, más las extensiones centrales de G por S^1 parametrizadas por 2-cociclos continuos de G con valores en S^1, lo cual es precisamente $Ext_c(G, S^1)$.

4 Torcimientos equivariantes y cohomología de Borel equivariante

Dado un G-complejo celular finito X, se define su cohomología de Borel equivariante como

$$H^*_G(X) := H^*(X \times_G EG).$$

El objetivo del siguiente resultado es caracterizar los torcimientos G-equivariantes sobre un G-espacio en términos de su cohomología de Borel equivariante.

Teorema 4.1

$$Bun^{st}_G(X, PU(\mathcal{H})) \cong H^3_G(X; \mathbb{Z})$$

Es fácil ver que el espacio $\mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))$, con la G-acción trivial sobre $BPU(\mathcal{H})$, representa el funtor $X \longmapsto H^3_G(X; \mathbb{Z})$. En efecto,

$$\begin{aligned} [X, \mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))]_G &\cong [X \times EG; BPU(\mathcal{H})]_G \\ &\cong [X \times_G EG; BPU(\mathcal{H})] \\ &\cong H^3_G(X; \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

donde el último isomorfismo se sigue por el hecho de que $BPU(\mathcal{H})$ es homotópicamente equivalente a $K(\mathbb{Z}, 3)$, lo cual es una consecuencia de la sucesión exacta larga en homotopía inducida por la fibración

$$1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow U(\mathcal{H}) \longrightarrow PU(\mathcal{H}) \longrightarrow 1\ .$$

De modo que el Teorema 4.1 es equivalente a demostrar que

$$\iota : Bun^{st}_G(X, PU(\mathcal{H})) \longrightarrow [X, \mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))]_G$$

es un isomorfismo. Para la demostración de este teorema seguimos las técnicas usadas por Atiyah y Segal en [1], y esta se divide en dos partes.

Se tiene en primer lugar, en el Lema 4.2, que la aplicación ι definida a continuación es inyectiva. Dado $P \in Bun^{st}_G(X, PU(\mathcal{H}))$ se define $\iota(P)$ como la aplicación inducida $\iota(P) : X \longrightarrow \mathrm{Map}(EG, BPU(\mathcal{H}))$ por la función clasificante $X \times EG \longrightarrow BPU(\mathcal{H})$ del haz proyectivo G-equivariante $P \times EG \longrightarrow X \times EG$.

Lema 4.2 (Atiyah-Segal, [1]) *La aplicación*

$$\iota : Bun^{st}_G(X, PU(\mathcal{H})) \longrightarrow [X, \mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))]_G,$$

es inyectiva.

Para demostrar la sobreyectividad, se construirá un G-espacio $\mathfrak{B}$ el cual es G-homotópicamente equivalente al G-espacio $\mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))$, Lema 4.3; de tal manera que el isomorfismo inducido $[X;\mathfrak{B}]_G \longrightarrow [X, \mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))]_G$ se factoriza a través de ι, es decir, hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[X;\mathfrak{B}]_G} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & {[X, \mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))]_G} \\
& {Bun_G^{st}(X, PU(\mathcal{H}))} \arrow[ur, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

probando así el teorema.

Veremos a continuación la construcción del G-espacio $\mathfrak{B}$, que necesitaremos para concluir la demostración del Teorema 4.1.

Para cada subgrupo $H \subset G$, consideremos el espacio

$$B_H = \coprod_{\widetilde{H} \in Ext(H,S^1)} B\left(PU(\mathcal{H}_{\widetilde{H}})^H\right)$$

donde a cada extensión S^1-central $\widetilde{H}$ de H le asociamos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_{\widetilde{H}}$ con la representación proyectiva estable inducida por la extensión.

Luego, sea B el funtor contravariante de la categoría de G-órbitas (cf. Apéndice Bredon) a espacios, definido por $B(G/H) = B_H$ y consideremos la categoría topológica $\mathcal{O}_B$ cuyos objetos son ternas (S, s, y), con S una órbita, $s \in S$ y $y \in B(S)$, tal que un morfismo $(S_0, s_0, y_0) \longrightarrow (S_1, s_1, y_1)$ es una función $\theta : S_0 \longrightarrow S_1$ en $\mathcal{O}$, con $\theta(s_0) = s_1$ y $\theta^*(y_1) = y_0$. Definimos

$$\mathfrak{B} := |\mathcal{O}_B|$$

la realización geométrica de la categoría $\mathcal{O}_B$ en el sentido de [5].

Es claro que el grupo G actúa sobre la categoría $\mathcal{O}_B$ por

$$g \cdot (S, s, y) = (S, gs, y),$$

de modo que el espacio $\mathfrak{B}$ hereda una G-acción.

Por otro lado, el G-espacio $\mathfrak{B}$ tiene un haz proyectivo G-equivariante tautológico $\mathfrak{E} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{B}$, dado por la realización geométrica $|\mathcal{O}_E|$ de la categoría $\mathcal{O}_E$ descrita anteriormente, asociada al funtor

$$E : G/H \longmapsto E_H = \coprod_{\widetilde{H} \in Ext(H,S^1)} E\left(PU(\mathcal{H}_{\widetilde{H}})^H\right).$$

Luego, si denotamos por $\widetilde{\mathfrak{F}} : \mathfrak{B} \times EG \longrightarrow BPU(\mathcal{H})$ la G-función que clasifica el haz proyectivo G-equivariante $\mathfrak{E} \times EG \longrightarrow \mathfrak{B} \times EG$, esto es,

$$\begin{tikzcd}
PU(\mathcal{H}) \arrow[r] & \mathfrak{E} \times EG \arrow[d, "\pi \times id"'] & \\
& \mathfrak{B} \times EG \arrow[r, "\widetilde{\mathfrak{F}}"] & BPU(\mathcal{H})
\end{tikzcd}$$

entonces tenemos una G-función inducida

$$\mathfrak{F} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H})).$$

El teorema se sigue del siguiente resultado.

Lema 4.3 *La aplicación* $\mathfrak{F} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathrm{Map}(EG; BPU(\mathcal{H}))$ *es una* G*-equivalencia homotópica.*

Por el resultado de James y Segal (cf. [3]), el lema se sigue a partir del isomorfismo

$$\pi_i(B_H) \cong \pi_i(\mathrm{Map}(BH; BPU(\mathcal{H}))) \cong H^{3-i}(BH; \mathbb{Z}),$$

para todo subgrupo cerrado $H \subset G$.

Referencias

[1] Michael F. Atiyah and Greame Segal. Twisted K-Theory. *Ukr. Mat. Visn.*, 1(3):287–330, 2004.

[2] Noe Barcenas, Jesus Espinoza, Michael Joachim, and Bernardo Uribe. Classification of twists in equivariant k-theory for proper and discrete actions. *http://arxiv.org/abs/1202.1880*, Noviembre 2012.

[3] I. M. James and Greame Segal. On equivariant homotopy type. *Topology*, 3:267–272, 1978.

[4] R. K. Lashof, J. P. May, and G. B. Segal. Equivariant bundles with abelian structural group. *Proceedings of the Northwestern Homotopy Theory Conference (Evanston, Ill., 1982)*, 19:167–176, 1983.

[5] Greame Segal. Classifying spaces and spectral sequences. *Publications Mathematiques de Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 34:105–112, 1968.

[6] Bernardo Uribe. Group actions on dg-manifolds and their relation to equivariant cohomology. *arXiv:1010.5413v2 [math.DG]*, Octubre 2010.

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2013, pp. 25–31.

Nivel: Superior

Soluciones Periódicas de Sistemas Diferenciales Lineales de Varias Clases

Carmen María Romandía Flores, Inna K. Shingareva, Carlos Lizárraga-Celaya

Departamentos de Matemáticas y Física, Universidad de Sonora
e-mail: carmenm.romandiafl@correoa.uson.mx, inna@gauss.mat.uson.mx, carlos.lizarraga@correo.fisica.uson.mx

Resumen

En el presente trabajo se consideran sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes periódicos de primer orden y de diferentes clases (sistemas no autónomos unidimensionales y n-dimensionales, sistemas autónomos n-dimensionales) y la aplicación de la teoría de sistemas lineales para encontrar soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales no lineales autónomas. Basado en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, teoría de Floquet, los métodos de álgebra lineal y álgebra computacional, se obtienen los resultados que describen soluciones periódicas de problemas particulares relevantes y las condiciones de periodicidad de los problemas considerados.

1 Introducción

Consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$X_t' = A(t)X, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

donde X es un vector columna, y $A(t)$ es una matriz real de dimensión $n \times n$. Epstein [1] demostró que este sistema de ecuaciones diferenciales tiene soluciones T-periódicas si los elementos de A son funciones de t continuas impares y T-periódicas. Muldowney [3] generalizó el resultado de Epstein y propuso las condiciones relevantes para la periodicidad de sistemas diferenciales lineales.

En este trabajo, obtenemos resultados que describen soluciones periódicas y condiciones de periodicidad considerando sistemas diferenciales lineales de diferentes clases, es decir, sistemas no autónomos unidimensionales y n-dimensionales, sistemas autónomos n-dimensionales, y la aplicación de la teoría de sistemas lineales para ecuaciones diferenciales no lineales autónomas.

2 Sistemas Diferenciales Lineales No Autónomos Unidimensionales

Empezamos con el sistema diferencial lineal homogéneo unidimensional. Su forma general con condición inicial es

$$X_t' = A(t)X, \quad X(0) = X_0, \qquad A(t+T) = A(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

donde $X(t) = x(t)$, y $A(t) = a(t)$ es una función periódica con período T. Esta ecuación se puede resolver por el método de separación de variables,

$$x(t) = x(0) \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right).$$

La linealidad de las ecuaciones y la periodicidad de los coeficientes restringen los posibles tipos de soluciones: si $x(t)$ es solución, entonces $y(t) = x(t+T)$ también es solución, ya que $y_t' = x_t'(t+T) = a(t+T)x(t+T) = a(t)y(t)$. Por lo tanto, $x(t+T)$ y $x(t)$ satisfacen la ecuación (2). Sin embargo, no necesariamente son la misma función. Puesto que la ecuación diferencial es lineal y de primer orden, existe solo una solución linealmente independiente:

$$x(t+T) = Cx(t), \tag{3}$$

donde C es una constante. Generalizamos este resultado para $x(t+nT)$, donde n es un número entero.

Teorema 2.1 *Sea n un número entero, entonces*

$$x(t+nT) = C^n x(t),$$

donde $a(t)$ es una función periódica con período T y $C = \exp\left(\int_0^T a(t)\ dt\right)$.

Prueba. Puesto que para $x(t+T) = Cx(t)$ para $n = 1$, esta ecuación tiene la forma general $x(t+nT) = Cx(t+(n-1)T)$ para $n \in \mathbb{Z}$, y de acuerdo con (3) tenemos $x(t+(n-1)T) = Cx(t+(n-2)T)$, la cual podemos sustituir en la ecuación anterior, $x(t+nT) = C[Cx(t+(n-2)T)]$. Luego, obtenemos $x(t+nT) = C \cdots C[x(t+(n-n))T]$, esto es, $x(t+nT) = C^n x(t)$. ■

Si analizamos el comportamiento cualitativo de la solución $x(t)$ para varios valores de C, obtenemos las siguientes condiciones para soluciones periódicas:

1. $C > 1$: C^n crece exponencialmente cuando n crece, así la solución $x(t)$ también crece exponencialmente.

2. $C < 1$: $C^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, así $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

3. $C = 1$: $x(t+T) = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, entonces la solución es periódica. Esto ocurre si se cumple el siguiente teorema.

Teorema 2.2 *Sea $x(t)$ una solución periódica de (2), entonces el valor medio de $a(t)$ es cero, es decir* $\int_0^T a(t)dt = 0$.

PRUEBA. Por la periodicidad tenemos $x(t+T) = x(t)$ si $C = 1$. Obteniendo C de la ecuación[1], y sustituyendo en la condición anterior, obtenemos $1 = \exp\left(\int_0^T a(t)dt\right)$. Así, $\int_0^T a(t)dt = 0$. ■

Ahora, veremos un ejemplo en el cual se ilustra esta interpretación. La ecuación

$$x_t' = x\,\mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(\sigma t), \quad x(0) = 1, \quad 0 < \sigma \leq 1,$$

donde $\sigma = p/q$ y p, q son primos relativos. Se pueden demostrar (con ayuda de sistemas de álgebra computacional [5]) los siguientes resultados:

a) La solución es de la forma: $x(t) = \exp\left(\dfrac{\mathrm{sen}(\sigma-1)t}{2(\sigma-1)} - \dfrac{\mathrm{sen}(\sigma+1)t}{2(\sigma+1)}\right)$.

b) La solución es periódica con período $T = \pi q$ y $C = 1$, en este caso $x(0) = x(\pi q) = 1$.

c) El valor máximo de la solución no está acotado (para $0 < \sigma < 1$).

3 Sistemas Diferenciales Lineales No Autónomos n-Dimensionales

Ahora, consideremos el sistema lineal homogéneo n-dimensional:

$$X_t' = A(t)X, \quad X(0) = X_0, \qquad A(t+T) = A(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

donde $A(t)$ es una matriz real de dimensión $n \times n$ cuyos elementos son funciones continuas T-periódicas, $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $A(t) : \mathbb{R} \to M_{nn}(\mathbb{R})$, $A(t) \in C(\mathbb{R}, M_{nn}(\mathbb{R}))$. Con las n soluciones linealmente independientes del sistema, $(X_1(t), \ldots, X_n(t))$, podemos formar la matriz fundamental

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

que satisface la ecuación matricial $\Phi_t' = A(t)\Phi$. Los vectores $Y_k(t) = X_k(t+T)$ también son soluciones de la ecuación diferencial, ya que $Y_{k_t}' = X_{k_t}'(t+T) = A(t+T)X_k(t+T) = A(t)Y_k$. Así $Y_k(t)$ debe ser una combinación lineal de las soluciones, $Y_k(t) = \sum_{j=1}^{n} X_j(t)e_{jk}$, para algunas constantes e_{jk}. Estas soluciones se utilizan para formar la matriz fundamental $\Phi(t+T)$, y así tenemos $\Phi(t+T) = \Phi(t)E$, donde E es la matriz con elementos e_{ij}. Ya que $\det(\Phi(t+T)) = \det(\Phi(t))\det(E)$ y $\det(\Phi) \neq 0$, entonces E es no singular.

[1]Resolviendo la ecuación diferencial $x_t' = a(t)x$ por el método de separación de variables, tenemos $\ln x = \int a(t)dt$. Por la periodicidad de x, $\ln \frac{x(t+T)}{x(t)} = \int a(t)dt$. Despejamos C de (3) y tenemos $\ln C = \int_0^T a(t)dt$. Esto es, $C = \exp\left(\int_0^T a(t)dt\right)$.

Teorema 3.1 *Sea I_n la matriz identidad de dimensión $n \times n$ y $\Phi(t)$ la matriz fundamental que satisface la condición $\Phi(0) = I_n$. Entonces la matriz fundamental $\Phi(t)$ satisface la ecuación matricial*

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T). \tag{5}$$

Prueba. En general, la matriz fundamental satisface la ecuación matricial,

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)E. \tag{6}$$

Ya que $\Phi(0) = I_n$, entonces tenemos $\Phi(T) = \Phi(0)E = E$ y así, $\Phi(T) = E$. Sustituyendo en la ecuación (6), finalmente obtenemos $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T)$. ■

Los eigenvalores y eigenvectores de E son importantes. Si λ es un eigenvalor de E y V su eigenvector asociado, $EV = \lambda V$, entonces la solución

$$Z(t) = \Phi(t)V \quad \text{tiene la propiedad} \quad Z(t+T) = \lambda Z(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esto se sigue de $Z(t+T) = \Phi(t+T)V = \Phi(t)EV = \lambda\Phi(t)V = \lambda Z(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Los eigenvalores de la matriz E se denominan *múltiplos característicos* del sistema (4). Ahora demostramos el resultado que relaciona los múltiples característicos y la estructura de la matriz $A(t)$.

Teorema 3.2 *Los múltiplos característicos λ_k del sistema (4) satisfacen la ecuación*

$$\prod_{k=1}^{n} \lambda_k = \exp\left(\int_0^T \operatorname{Tr}(A(t))\right). \tag{7}$$

Prueba. Puesto que el Wronskiano $W = \det(X(T))$ del sistema (4) satisface la ecuación [4] $\det(X(T)) = \det(X(0)) \exp\left(\int_0^T \operatorname{Tr}(A(t)\,dt)\right)$, obtenemos la ecuación para la matriz fundamental $\det(\Phi(T)) = \det(\Phi(0)) \exp\left(\int_0^T \operatorname{Tr}(A(t)\,dt)\right)$. Ya que la matriz fundamental satisface la condición $\Phi(0) = I_n$ y sustituimos el valor $t = 0$ en la ecuación , obtenemos $\Phi(T) = E$. Luego, puesto que $\det(X(T)) = \det(\Phi(T)) = \det(E) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ [2], finalmente obtenemos el resultado (7). ■

A continuación presentamos otro resultado importante que nos permite econtrar la solución periódica del sistema (4) en el caso particular si los eigenvalores satisfacen la ecuación $\lambda^m = 1$.

Teorema 3.3 *Sea λ un eigenvalor de la matriz E y la m-ésima raíz de la ecuación $\lambda^m = 1$ ($m \in \mathbb{N}$). Sea V un eigenvector asociado con λ. Entonces la solución de la ecuación matricial $Z(t) = \Phi(t)V$ es periódica con el período mT.*

Prueba. Si V es un eigenvector de la matriz E, entonces tenemos $EV = \lambda V$ y si $Z(t)$ satisface la ecuación matricial $Z(t) = \Phi(t)V$, entonces

$$Z(t + nT) = \Phi(t + nT)V = \Phi(t)E^n V = \Phi(t)\lambda^n V.$$

Puesto que $Z(t)$ satisface la ecuación matricial anterior, obtenemos $\lambda^n \Phi(t)V = \lambda^n Z$. Esto es, $Z(t + nT) = \lambda^n Z$. Si $\lambda^m = 1$, entonces $Z(t + mT) = \lambda^m Z = Z$. Esto significa que la solución del sistema (4) en el caso particular $\lambda^m = 1$ es periódica con período mT. ■

4 Sistemas Diferenciales Lineales Autónomos n-Dimensionales

Consideremos el sistema autónomo n-dimensional:

$$X'_t = F(X), \tag{8}$$

donde $X = (x_1, \ldots, x_n)$ y $F = (f_1, \ldots, f_n)$ vectores columnas n-dimensionales, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.1 *Sea $P(t) = (p_1, \ldots, p_n)$ una solución periódica del sistema (8). Supongamos que $X = P(t) + Z(t)$ ($Z(t) = (z_1, \ldots, z_n)$, $\|Z\| \ll \|P\|$). Entonces $P'_t(t)$ es una solución del sistema (8) y $Z(t)$ satisface el sistema diferencial lineal no autónomo $Z'_t = A(t)Z$, donde $A(t)$ es una matrix real de dimensión $n \times n$ con coeficientes periódicos $A_{ij} = \partial f_i/\partial x_j$ evaluados en $x_i = p_i(t)$.*

Prueba. Si tenemos el sistema de la forma $X'_t = F(X)$ y si $X(t)$ es una solución periódica, entonces $X(t+T)$ (donde T es una constante) es también una solución periódica. Si $X = P(t)$ es una solución periódica, entonces $Y(t) = P(t + T)$ es también una solución periódica.

Consideremos la solución $X = P(t) + Z(t)$ ($\|Z\| \ll \|P\|$). Sustituendo esta solución en el sistema (8) y expandiendo el resultado en la serie de Taylor alrededor del punto P, obtenemos

$$P'_t + Z'_t = F(P) + A(t)Z + O(Z^2), \tag{9}$$

donde $A(t)$ es la matriz con elementos $A_{ij} = \left.\dfrac{\partial F_i}{\partial x_i}\right|_{x_i = p_i(t)}$. Expandiendo $P(t + T)$ en la serie de Taylor alrededor del punto t, tenemos

$$Y(t) = P(t + T) = P(t) + P'_t(t)T + O(T^2). \tag{10}$$

Si comparamos las expansiones (9) y (10), obtenemos que $P'_t(t)$ es una solución del sistema lineal no autónoma $Z'_t = A(t)Z$. ■

5 Aplicación a Ecuaciones Diferenciales No Lineales Autónomas

Una de las aplicaciones de la teoría de sistemas diferenciales lineales es determinar soluciones periódicas de ecuaciones no lineales autónomas. Esta aplicación la ilustramos con la ecuación diferencial no lineal autónoma de Liénard:

$$x''_{tt} + f(x)x'_t + g(x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones arbitrarias. Asumimos que existe una solución periódica de la ecuación de Liénard.

Teorema 5.1 *Sea $p(t)$ una solución T-periódica de la ecuación (11) y $x(t) = p(t)+z(t)$ una transformación. Entonces $p'_t(t)$ es una solución periódica de la ecuación diferencial lineal no autónoma*

$$z''_{tt} + f(p)z'_t + \left(f'_t(p)p'_t + g'_t(p)\right) z = 0, \tag{12}$$

o del sistema diferencial lineal no autónomo equivalente

$$Z'_t = A(t)Z, \tag{13}$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p'_t f'_t(p) - g'_t(p) & -f(p) \end{pmatrix} \quad y \quad Z = \begin{pmatrix} z \\ z'_t \end{pmatrix}.$$

Prueba. Si sustituimos la transformación $x(t) = p(t) + z(t)$ en la ecuación de Liénard (11), obtenemos la siguiente ecuación $(p(t)+z(t))''_{tt}+f(p(t)+z(t))(p(t)+z(t))'_t+g(p(t)+z(t)) = 0$. Simplificando, encontramos la ecuación diferencial lineal no autónoma (12) y su forma matricial equivalente (13). Puesto que la ecuación de Liénard (11) es autónoma, entonces si T es una constante arbitraria, $p(t+T)$ también es una solución de la ecuación. Expandiendo $p(t+T)$ alrededor de $T = 0$, obtenemos $x(t) = p(t+T) = p(t) + p'_t(t)T + O(T^2)$ y $p'_t(t)$ es una solución de la ecuación (12). ■

Teorema 5.2 *Sea p'_t una solución periódica de la ecuación (12) y $z(t) = \omega p'_t$ una transformación. Entonces*

$$z(t) = Cp'_t \int \frac{1}{(p'_t)^2} \exp\left(-\int f(p)\,dt\right) dt \tag{14}$$

es también una solución periódica de la ecuación (12).

Prueba. Si sustituimos la transformación $z(t) = \omega p'_t(t)$ en la ecuación (12) y simplificamos la ecuación resultante considerando que p'_t es una solución de la ecuación (12), obtenemos

$$\omega''_{tt}p'_t + \omega'_t\left(2p''_{tt} + f(p)p'_t\right) = 0.$$

Aplicando el método de separación de variables e integrando, encontramos

$$\omega'_t = \frac{C}{(p'_t)^2} \exp\left(-\int f(p)\,dt\right),$$

donde C es una constante de integración. Al integrar nuevamente, tenemos

$$\omega(t) = \int \frac{C}{(p_t')^2} \exp\left(-\int f(p)\,dt\right)\,dt.$$

Aplicando la transformación $z(t) = \omega(t)p_t'$, obtenemos la solución periódica (14). ■

6 Conclusiones

En el presente trabajo hemos considerado métodos analíticos para encontrar soluciones analíticas periódicas de sistemas diferenciales lineales con coeficientes periódicos de primer orden y de diferentes clases. En particular, consideramos sistemas no autónomos unidimensionales y n-dimensionales, sistemas autónomos n-dimensionales, y la reducción de ecuaciones diferenciales no lineales autónomas a sistemas diferenciales lineales. Basado en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, teoría de Floquet, los métodos de álgebra lineal y álgebra computacional, obtenemos los resultados que describen soluciones periódicas de problemas particulares relevantes y las condiciones de periodicidad de los problemas considerados.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias a financiamiento de la División de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Sonora, proyecto "Un Estudio Analítico de Sistemas Diferenciales Lineales Periódicos" (2012).

Referencias

[1] Epstein, I. J. *Periodic solutions of systems of differential equations. Proc. Amer. Math. Soc.,* 13, 690–694, 1962.

[2] Coddington, E. A., Carlson, R. *Linear Ordinary Differential Equations.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.

[3] Muldowney, J. S. *Linear Systems of Differential Equations with Periodic Solutions. Proc. Amer. Math. Soc.,* 18 (1), 22–27, 1967.

[4] Richards, D. *Advanced Mathematical Methods With Maple.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[5] Shingareva, I. and Lizárraga-Celaya, C. *Maple and Mathematica. A Problem Solving Approach for Mathematics. Second Edition.* Wien–New York: Springer, 2009.

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2013, pp. 32–39.

Nivel: Medio Superior y Superior

Comparación de Secuencias de Código Genético utilizando Matrices de Substitución

Cárdenas-Haro J.A., Vargas-Figueroa A.J., Maupome-Polanco A.F.

Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California
e-mail: {armando.vargas, antonio.cardenas, amaupome} @uabc.edu.mx

Resumen

La información proveniente de genomas crece de manera exponencial por el avance de la informática y de las técnicas de extracción de dichos datos. Esto al mismo tiempo que resuelve problemas de biología, trae nuevos retos en la busqueda de soluciones para otros más complejos relacionados a la biotecnología y a la biomedicina. Aquí se analizan y utilizan matrices de substitución BLOSUM que se basan en un método heurístico para determinar el grado de homología entre dos secuencias de código genético. En la práctica esto sirve para la incorporación de avances en el diagnóstico, tratamiento y prevención de enfermedades.

1 Introducción

Nuevas tecnologías de secuenciación han roto muchas barreras experimentales para el escalamiento en la secuenciación del genoma, lo cual conlleva a la extracción de grandes cantidades de información genómica y la expansión de las bases de datos biológicas. Esto establece la necesidad de encontrar nuevas formas, nuevos algoritmos para descifrar e interpretar la información contenida en dichas bases de datos, para poder darle así una aplicación de utilidad [9], [10] y [11].

La gran acumulación de información proveniente de genomas, incluyendo sus secuencias, ha dado como resultado no solamente la solución a muchos problemas de biología, sino nuevos intentos para resolver otros y además la formulación de nuevas hipótesis. El almacenamiento, procesamiento, descripción, transmisión, conexión y análisis de estos datos ha dado nacimiento a la bioinformática, que a su vez se ha convertido una de las ciencias aplicadas más relevantes para este nuevo siglo, avanzando a la par con la biología molecular moderna e impactando áreas como la biotecnología y la biomedicina, apoyándose en las matemáticas como herramienta indispensable [6], [12].

Algunos métodos empleados son los modelos de Markov [4] o la bipartición de grafos [14]. Los algoritmos aleatorios son muy utilizados para resolver problemas complejos o donde los algoritmos determinísticos normalmente requieren de gran cantidad de recursos computacionales para llegar a la solución. Los algoritmos aleatorios simplifican la labor y eficientizan los recursos dando soluciones con aproximaciones muy buenas. El tiempo requerido para llegar a la solución es mucho menor que su contraparte determinística [8]. En este artículo nos enfocamos en analizar y utilizar las matrices de substitución que vienen dentro de la herramienta BLAST (Basic Local Alignment Search Tool) [1], [2].

2 La Matriz de Substitución

Para los experimentos utilizamos el BLOSUM (BLOcks of Amino Acid SUbstitution Matrix) que es una matriz de substitución de bloques de aminoácidos utilizada para alineación de secuencias de proteinas. Este tipo de matrices fueron propuestas por los hermanos Henikoff [5]. Se utilizan para detectar las alineaciones entre diferentes secuencias de proteinas, a mayor similitud entre ellas mayor es el número de alineaciones, lo cual infiere que tan cercano es su ancestro en común. Existen diferentes tipos de matrices BLOSUM que se clasifican según las bases de datos que utilizan en las alineaciones. Si las secuencias a compararse están muy relacionadas, conviene utilizar matrices con números de identificación grandes como la BLOSUM80, mientras que para secuencias mś divergentes puede utilizarse la BLOSUM45, que se refieren a secuencias con 80% ó mas de similitud y 45% ó mas de similitud repectivamente.

Yu y Altschul [15] hablan sobre la construcción de este tipo de matrices de comparación, sin embargo establecen que las matrices estándar no son las ideales para este tipo de comparaciones. Sin embargo, en el caso del BLOSUM62 ciertas inexactitudes en los cálculos mejoran el desempeño de la busqueda [13]. La siguiente es la ecuación utilizada para el cálculo de las matrices BLOSUM [3]:

$$S_{ab} = \frac{1}{\lambda} \log \left(\frac{P_{ab}}{f_a f_b} \right) \tag{1}$$

Donde P_{ab} representa la probabilidad de que los aminoácidos a y b sean los mismos en una secuencia homóloga, mientras que f_a y f_b representan a las probabilidades de encontrar a los aminoácidos a y b aleatoriamente en cualquier secuencia de proteina. Partiendo de la misma ecuación 1 tenemos que $P_{ab} = f_a f_b e^{\lambda S_{ab}}$ donde la suma de todos los valores de P_{ab} debe ser igual a 1. Esto es:

$$\sum_{ab} f_a f_b e^{\lambda S_{ab}} = 1 \tag{2}$$

El problema es encontrar el valor adecuado de λ que funciona además como un escalar, lo cual hace que los valores en la matriz sean fáciles de computar, ya que en las compuadoras se pierde precisión haciendo operaciones con números muy pequeños.

Las frecuencias P_{ab} son la probabilidad esperada de que las secuencias a y b presenten una alineación homóloga. Para estos pronósticos se utilizan como referencia muchos alineamientos bien conocidos. A mayor información que tengamos sobre las dos secuencias que queremos alinear, más acertadas serán las estimaciones sobre las frecuencias. La distancia evolutiva entre los organismos es la que determina su grado de similitud.

Una matriz de sustitución lo que hace es describir la frecuencia a la que un elemento o carácter en una secuencia cambia a otro carácter con el tiempo. Los pronósticos de estas substituciones se basan en datos históricos de muchas otras secuencias relacionadas bien conocidas. La similitud entre dos secuencias que tienen un ancestro en común, depende del tiempo desde su divergencia (distancia evolutiva). La matriz de identidad sería la matriz de substitución más simple. En esta cada elemento de la secuencia se considera máximamente similar a sí mismo, pero no puede transformarse en algún otro elemento. Esta matriz no

serviría para alinear secuencias poco relacionadas, solo para alinear secuencias muy similares. En la matriz de identidad se trabaja solo con probabilidades de 1 para la diagonal principal y de 0 para todos los demás elementos. Una buena matriz de substitución maneja todo un rango de probabilidades basándose en datos históricos.

3 Cálculo de una Matriz BLOSUM

A manera de ejemplo de cálculo de una matriz BLOSUM, consideremos las siguientes cuatro secuencias:

1:	V	V	A	D
2:	A	A	A	D
3:	D	V	A	D
4:	D	A	A	A

En estas secuencias tenemos tres letras o caracteres que son A, D y V. Estos caracteres cambian de posición en las diferentes secuencias. El primer caracter de la primer secuencia, en este caso la letra V, en la segunda secuencia cambia a ser A, y en la tercera y cuarta a ser la letra D. El análisis se hace por columnas y las letras pueden representar bloques. Lo interesante aquí es encontrar la frecuencia de los cambios, N_{AD} representa los cambios de caracter A a D de una secuencia respecto a otra, y N_{DA} viceversa. Por tanto $N_{AD} = N_{DA}$. Un caso especial es cuando se repite la misma letra, como en N_{AA} que se cuenta doble, es decir, de ida y vuelta.
Analizando cada caso por partes tenemos:

$N_{AA} = 2(0 + 1 + ((4 * 3)/2) + 0) = 14$
$N_{AD} = 2 + 0 + 0 + 3 = 5$
$N_{AV} = 1 + 4 + 0 + 0 = 5$
$N_{DA} = 2 + 0 + 0 + 3 = 5$
$N_{DD} = 2(1 + 0 + 0 + ((3 * 2)/2)) = 8$
$N_{DV} = 2 + 0 + 0 + 0 = 2$
$N_{VA} = 1 + 4 + 0 + 0 = 5$
$N_{VD} = 2 + 0 + 0 + 0 = 2$
$N_{VV} = 2(0 + 1 + 0 + 0) = 2$

Sumando todos estos resultados nos da un total de 48, entonces la probabilidad de que ocurra cierto cambio de letra o caracter está dado por $P_{ij} = N_{ij}/48$ para este caso, es decir $P_{AA} = 14/48$. Consideremos ahora a Q como el cociente de la cantidad de cierto tipo de caracter respecto del total de caracteres. Entonces para los tres diferentes caracteres en las cuatro secuencias mencionadas tenemos que $Q_A = 8/16$, $Q_D = 5/16$, y $Q_V = 3/16$. La siguiente fórmula se deriva directamente de la fórmula 1, en este caso se considera $\lambda = 1/2$ y los logaritmos son en base 2. Tenemos entonces:

$$S_{ij} = 2\log_2\left(\frac{P_{ij}}{Q_i Q_j}\right) \tag{3}$$

Aplicando esta fórmula 3 en el ejemplo aquí ilustrado, obtenemos la siguiente matriz:

	A	D	V
A	0.44	-1.17	0.30
D	-1.17	1.54	-0.98
V	0.30	-0.98	0.49

Como puede observarse, esta es una matriz simétrica, en mucha bibliografía solo se muestra el triangular inferior. Este es solo un ejemplo didáctico de como se construyen las matrices BLOSUM, en la práctica estas matrices son mucho más grandes y sirven para determinar la similitud que hay entre diferentes secuencias de aminoácidos, tomando como referencia secuencias ya bien conocidas. En este tipo de matrices, como puede verse, nunca se usa extrapolación como sí es en el caso de las matrices PAM (Point Accepted Mutation). Se ha demostrado que las matrices BLOSUM dan mejores resultados en la alineación de secuencias con poca similitud (distantemente relacionadas), respecto de las matrices PAM (capítulo IV de [7]).

4 Comparación de Secuencias Biológicas

A continuación se muestran los resultados de comparaciones de pares de secuencias utilizando BLOSUM. En las figuras A, B, C y D se puede observar el resultado de las comparaciones de las secuencias de aminoácidos *Serum paraoxonase/arylesterase* con *Gastric triacylglycerol lipase* de humanos. Las figuras A y B muestran los resultados de utilizar BLOSUM62, dado que la similitud entre dichas secuencias es muy baja, procedemos a utilizar BLOSUM45 lo cual nos da mejores resultados como se muestra en las figuras C y D.

Las líneas diagonales en las gráficas A y C muestran las secciones con la similitud entre ambas secuencias. El eje "x" representa a la secuencia *Serum paraoxonase/arylesterase*, mientras que el eje "y" representa a la secuencia *Gastric triacylglycerol lipase*. En el caso de las figuras B y D, estas muestran también en que partes las secuencias son homólogas. La línea roja muestra el largo de las secuencias, los colores indican la cantidad (rango) de elementos homólogos. La línea inferior de la figura B contiene tres secciones en color negro, esto indica de acuerdo al código de colores que los elementos homólogos en esa parte son menos de cuarenta. La posición de dichas secciones indican en que parte de la secuencia están las similitudes; estas tres secciones corresponden a las tres líneas diagonales que se observan en la figura A. Idem para las figuras C y D.

En las figuras E, F, G y H podemos ver el resultado de la comparación de las secuencias de proteinas *Tropomodulin* de bovinos con *Leiomodin* de ratones, usando también BLOSUM. Ambas proteinas pertenecen a la misma familia, por este hecho presentan grandes similitudes en varias partes de sus secuencias de código genético. Las figuras E y F muestran el resultado de las comparaciones con BLOSUM62. En estas puede apreciarse la gran homología

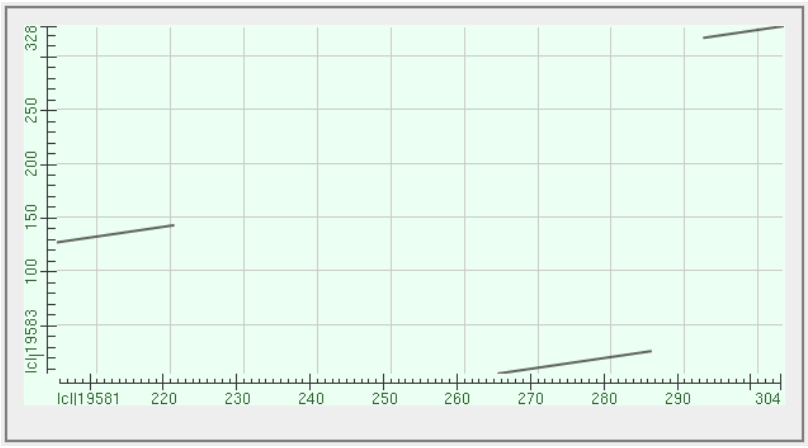


Figura A: Comparación de las secuencias de aminoácidos *Serum paraoxonase/arylesterase* vs. *Gastric triacylglycerol lipase* con BLOSUM62.

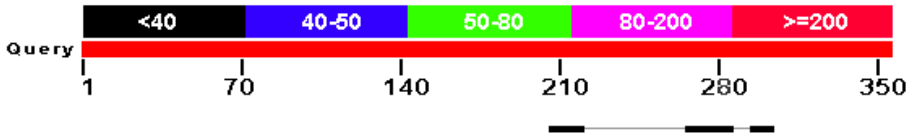


Figura B: Código de colores para cantidad de alineaciones de las secuencias de *Serum paraoxonase/arylesterase* vs. *Gastric triacylglycerol lipase* con BLOSUM62.

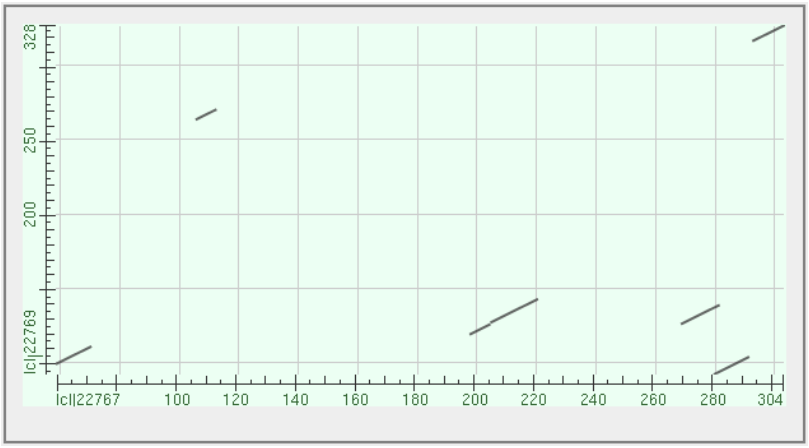


Figura C: Comparación de las secuencias de aminoácidos *Serum paraoxonase/arylesterase* vs. *Gastric triacylglycerol lipase* con BLOSUM45.

entre ambas secuencias. Por lo cual se procedió a utilizar BLOSUM90, que es una matriz diseñada para trabajar en secuencias de alta homología. Los resultados de usar BLOSUM90 se muestran en las figuras G y H.

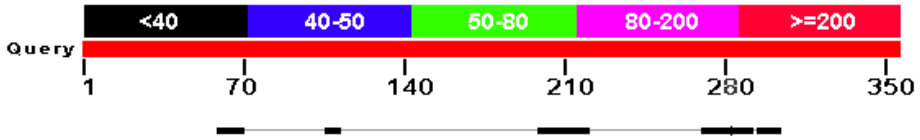


Figura D: Código de colores para cantidad de alineaciones de las secuencias de *Serum paraoxonase/arylesterase* vs. *Gastric triacylglycerol lipase* con BLOSUM45.

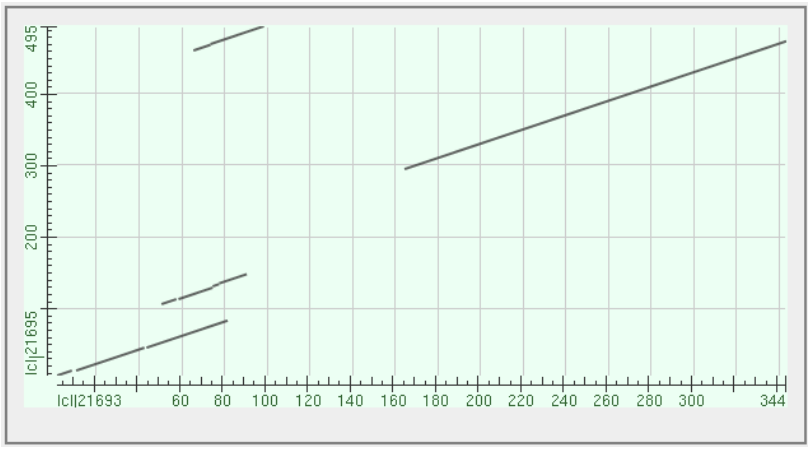


Figura E: Comparación de las secuencias de proteinas *Tropomodulin* vs. *Leiomodin* con BLOSUM62.

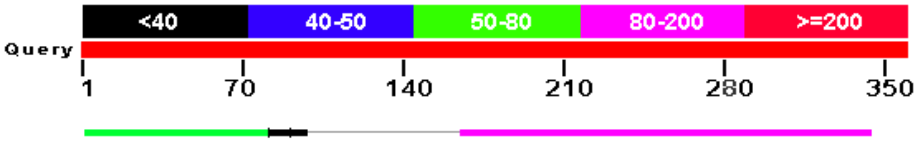


Figura F: Código de colores para cantidad de alineaciones de las secuencias de *Tropomodulin* vs. *Leiomodin* con BLOSUM62.

5 Conclusiones

Las matrices de substitución de bloques de aminoácidos (BLOSUM) se usan para encontrar homologías en secuencias genéticas; se basan en alineamientos locales. Estas son parte de BLAST, que es una herramienta informática muy útil en el alineamiento de secuencias genéticas (ADN, ARN o proteinas). Para ello se utilizan bases de datos con una gran cantidad de secuencias que sirven como referencia. Dado que el método utilizado en estas matrices es heurístico, no hay garantía de tener la solución óptima. Sin embargo como complemento, la misma herramienta BLAST nos provee de parámetros para poder juzgar la calidad de los resultados obtenidos. El grado de similitud (homología) depende de la distancia evolutiva que hay entre los organismos que se están analizando. Encontrar similitudes en las secuencias

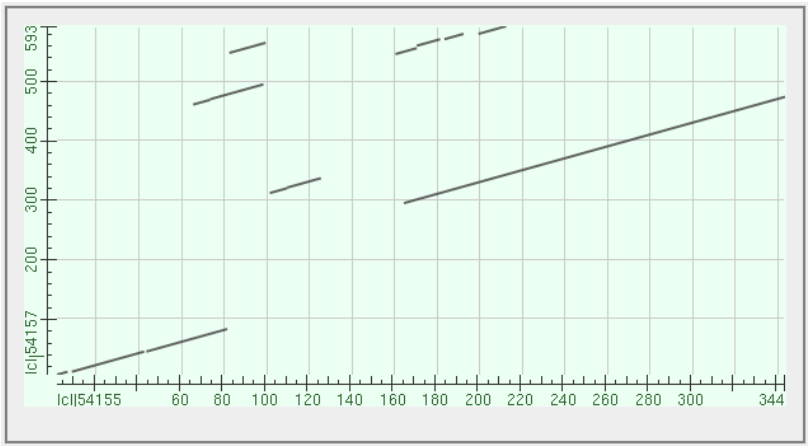


Figura G: Comparación de las secuencias de proteinas *Tropomodulin* vs. *Leiomodin* con BLOSUM90.

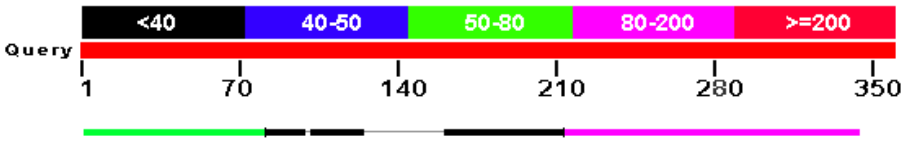


Figura H: Código de colores para cantidad de alineaciones de las secuencias de *Tropomodulin* vs. *Leiomodin* con BLOSUM90.

es una manera de descubrir funciones biológicas por referencia. Se ha demostrado que los mejores resultados al buscar dichas similitudes, se logra a través de las matrices BLOSUM. Por ello la importancia de analizar su modelo matemático.

Referencias

[1] Altschul, S.F., Madden, T.L., Schäffer, A.A., Zhang, J., Zhang, Z., Miller, W., and Lipman, D. J. *Gapped BLAST and PSI-BLAST: a new generation of protein database search programs.* Nucleic acids research 25, 17 (Sept. 1997), 3389-3402.

[2] Altschul, S.F., Wootton, J.C., Gertz, E.M., Agarwala, R., Morgulis, A., Schäffer, A.A., and Yu, Y.-K. K. *Protein database searches using compositionally adjusted substitution matrices.* The FEBS journal 272, 20 (Oct. 2005), 5101-5109.

[3] Eddy, S.R. *Where did the BLOSUM62 alignment score matrix come from?* Nature Biotechnology 22, 8 (Aug. 2004), 1035-1036.

[4] Gollery, M. Handbook of Hidden Markov Models in Bioinformatics, 1 ed. Chapman & Hall/CRC, 2008.

[5] Henikoff, S., and Henikoff, J.G. *Amino acid substitution matrices from protein blocks.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 89, 22 (Nov. 1992), 10915-10919.

[6] Isaev, A. Introduction to Mathematical Methods in Bioinformatics (Universitext). Springer, Oct. 2006.

[7] Korf, I., Yandell, M., and Bedell, J.A. BLAST - an essential guide to the basic local alignment search tool. O'Reilly, 2003.

[8] Lu, H. H.-S., Schlkopf, B., and Zhao, H., Eds. Handbook of Statistical Bioinformatics. Springer Handbooks of Computational Statistics. Springer, 2011.

[9] Polanski, A., and Kimmel, M. Bioinformatics, 1st ed. Springer Publishing Company, Incorporated, 2010.

[10] Posada, D. Bioinformatics for DNA Sequence Analysis, 1st ed. Humana Press, 2009.

[11] Schmidt, B. Bioinformatics: High Performance Parallel Computer Architectures, 1st ed. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 2010.

[12] Shen, S., and Tuszynski, J. Theory and mathematical methods for bioinformatics. Biological and medical physics, biomedical engineering. 2008.

[13] Styczynski, M.P., Jensen, K.L., Rigoutsos, I., and Stephanopoulos, G. *BLOSUM62 miscalculations improve search performance.* Nature biotechnology 26, 3 (Mar. 2008), 274-275.

[14] Sun, B., Schwartz, J.T., Gill, O.H., and Mishra, B. *Combat: Search rapidly for highly similar protein-coding sequences using bipartite graph matching.* In International Conference on Computational Science (2) (2006), V.N. Alexandrov, G.D. van Albada, P.M.A. Sloot and J. Dongarra, Eds., vol. 3992 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, pp. 654-661.

[15] Yu, Y.-K., and Altschul, S.F. *The construction of amino acid substitution matrices for the comparison of proteins with non-standard compositions.* Bioinformatics 21, 7 (Apr. 2005), 902-911.

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2013, pp. 40–45.

Nivel: Medio Superior y Superior

Topología de la Convergencia Pseudouniforme

Humberto Villegas Rodríguez **Martín Zavala León**

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Sinaloa
e-mail: vrhi@uas.edu.mx, mzavala@uas.edu.mx

Resumen

El espacio de las funciones continuas $C(X)$ tiene la ***propiedad P*** *si su topología es más débil que la topología de la convergencia uniforme y cada sucesión convergente topológicanente es uniformemente convergente. En este trabajo estudiamos $C(X)$ con la* ***topología de la convergencia psudouniforme****, a este espacio lo denotamos por $C_s(X)$. Probamos que $C_s(X)$ tiene la propiedad P, obtenemos algunas relaciones con la topología de la convergencia uniforme, y analizamos las propiedades de separabilidad, Lindelöf, y segundo numerable. Probamos que si X es Tychonoff, $C_s(X)$ es metrizable si y sólo si X es separable, y que $C_s(X) = C_u(X)$ si y sólo si X es separable.*

1 Introducción

Consideremos el conjunto $C(X)$ de funciones continuas de valores reales definidas en un espacio topológico X. Este conjunto se ha estudiado con diferentes topologías y una de las más importantes es la topología de la convergencia uniforme. Esta topología se puede definir como sigue: para cada $f \in C(X)$, y $\epsilon > 0$ definimos el conjunto $V(f,\ \epsilon)$ por

$$V(f,\ \epsilon) = \{g \in C(X) : |f(x) - g(x)| < \epsilon,\ \text{para todo } x \in X\}.$$

La *topología de la convergencia uniforme* sobre $C(X)$ es la que tiene como base de vecindades de $f \in C(X)$ la colección

$$\{V(f,\ \epsilon) : \epsilon > 0\},$$

y $C(X)$ con esta topología lo denotamos por $C_u(X)$. No es difícil probar que si una sucesión en $C_u(X)$ converge topológicamente, entonces converge uniformemente, lo que justifica el nombre para esta topología. Este espacio ha sido muy estudiado en Topología General ya que los problemas de convergencia del Análisis se reducen a la determinación de subespacios compactos de $C_u(X)$, de aquí la importancia de la investigación de sus propiedades de compacidad. Un resultado muy importante en esta dirección es el teorema de Arzela-Ascoli, que establece que si X es compacto, entonces $S \subset C_u(X)$ es compacto si y sólo si S es cerrado, acotado y equicontinuo. Observe que las condiciones para que un subconjunto de $C_u(X)$ sea compacto son muy restrictivas, esto se debe a que este espacio tiene demasiados abiertos.

Decimos que un espacio $C(X)$ con una topología más débil que la topología de la convergencia uniforme tiene la *propiedad P* si cada sucesión en $C(X)$ convergente topológicamente tambien converge uniformemente. Determinar condiciones para que un espacio de funciones

tenga la propiedad P es un problema que aparece frecuentemente en la investigación sobre convergencia de sucesiones de funciones continuas, ver [4], [1].

El estudio de la propiedad P es una línea de investigación interesante para tratar problemas de compacidad de $C_u(X)$ ya que generalmente las topologías débiles tienen mejores propiedades de compacidad. La consideración de topologías débiles con alguna restricción es útil en otras áreas de las matemáticas, por ejemplo, en Análisis Funcional se consideran topologías mínimas sobre espacios vectoriales de dimensión infinita en las que las funcionales lineales son continuas.

En este artículo se estudia una topología con la propiedad P, la topología de la convergencia pseudouniforme. Se presentan algunas de sus propiedades, principalmente separabilidad, segundo numerable y Lindelöf.

En todo lo que sigue usamos la siguiente convención: si X y Y son espacios topológicos con el mismo conjunto base usamos la notación $X < Y$ para indicar que la topología sobre X es más debil que la topología sobre Y. Suponemos que todos los espacios son Tychonoff, es decir, Hausdorff y completamente regulares. Todos los conceptos no definidos se encuentran en [3].

2 La topología de la convergencia pseudouniforme

Sea $f \in C(X)$, $F \subset X$ un conjunto numerable y $\epsilon > 0$. Definimos el conjunto $V(f, F, \epsilon)$ por

$$V(f, F, \epsilon) = \{g \in C(X) : |f(x) - g(x)| < \epsilon, \text{para todo } x \in F\}$$

A la topología sobre $C(X)$ que tiene como base de vecindades de $f \in C(X)$ la colección

$$\{V(f, F, \epsilon) : F \subset X,\ F \text{ numerable},\ \epsilon > 0\},$$

la llamaremos *topología de la convergencia pseudouniforme* y a $C(X)$ con esta topología la denotamos por $C_s(X)$.

Observe que $C_s(X) \leq C_u(X)$. Mostramos enseguida que $C_s(X)$ tiene la propiedad P.

Teorema 2.1 *Para cualquier espacio X, $C_s(X)$ tiene la propiedad P.*

Prueba. Sea $\{f_n\}$ una sucesión convergente topológicamente en $C_s(X)$, y supongamos que no converge uniformemente. Entonces existe $\epsilon > 0$ y una sucesión de puntos $x_1, x_2, ...$ en X tal que $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$, $n = 1, 2, 3, ...$ Por otra parte, dado que $\{f_n\}$ converge topológicamente, existe un entero positivo N tal que si $n > N$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $x \in \{x_1, x_2, ...\}$. Pero esto es una contradicción. ■

Teorema 2.2 *Para cualquier espacio X, $C_s(X)$ es un espacio Tychonoff, es decir Hausdorff y completamente regular.*

Prueba. $C_s(X)$ con la suma ordinaria de funciones es un grupo topológico T_0, por tanto es Hausdorff y completamente regular, ver [2]. ■

Dado que $C_s(X) \leq C_u(X)$ es natural buscar condiciones para que $C_s(X) = C_u(X)$. En este sentido, encontramos que una condición necesaria y suficiente es que X sea separable. Recordemos que un espacio X es *separable* si tiene un conjunto denso numerable.

Teorema 2.3 *Si X es Tychonoff entonces $C_s(X) = C_u(X)$ si y sólo si X es separable.*

Prueba. $\Leftarrow$) Supongamos que X es un espacio separable, dado que $C_s(X) < C_u(X)$ sólo hay que probar que $C_u(X) < C_s(X)$. Sea

$$B(f, \epsilon) = \{g \in C(X) : |f(x) - g(x)| < \epsilon, \forall x \in X\}$$

un abierto básico de $C_u(X)$ y D un subconjunto denso numerable de X. Basta probar que $V(f, D, \frac{\epsilon}{3}) \subset B(f, \epsilon)$. Sea $g \in V(f, D, \frac{\epsilon}{3})$, esto es

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \forall x \in D.$$

Probaremos que

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon \text{ para todo } x \in X.$$

Sea $x_0 \in X$, por la continuidad de f y g, existe una vecindad V de x_0 tal que si

$$y \in V, \text{ entonces } |g(y) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ y } |f(y) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

En particular, si $p \in V \cap D$,

$$|g(p) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ y } |f(p) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Luego

$$\begin{aligned} |f(x_0) - g(x_0)| &\leq |f(x_0) - f(p)| + |f(p) - g(p)| + |g(p) - g(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Dado que x_0 es arbitrario se tiene que $g \in B(f, \epsilon)$, por tanto $V(f, D, \frac{\epsilon}{3}) \subset B(f, \epsilon)$.

$\Rightarrow$) Supongamos ahora que $C_s(X) = C_u(X)$. Sea c la función constante cero y $\epsilon > 0$. Por hipótesis existe $\delta > 0$ y un conjunto $D \subset X$ numerable tal que $V(c, D, \delta) \subset B(c, \epsilon)$. Si D no es denso en X, existe un abierto V no vacío tal que $D \cap V = \emptyset$. Elegimos entonces un punto $x \in V$ y una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X - V) = \{0\}$. Es claro que $f \in V(c, D, \delta)$ y $f \notin B(c, \epsilon)$, lo cual es una contradicción. ■

Este resultado dice que $C_s(X) \neq C_u(X)$ si X es un espacio Tychonoff no separable, así que $C_s(X)$ tiene menos abiertos que $C_u(X)$ y tiene la propiedad P.

Recordemos que un espacio topológico X es *metrizable* si existe una métrica d en X tal que la topología generada por esta métrica coincide con la toplogía de X. Un espacio topológico X es *primero numerable* si tiene una base de vecindades numerable en cada punto $x \in X$. Un espacio topológico X es *Frechet -Urysohn* si para cada $A \subset X$ y cada punto $x \in \bar{A}$ existe una sucesión $\{x_n\}$ en A que converge a x. Se puede ver que un espacio metrizable es primero numerable, y los espacios primero numerables son Frechet-Urysohn pero las implicaciones inversas no son válidas.

$C_u(X)$ es metrizable para cualquier espacio X, ver [5], pero $C_s(X)$ es metrizable solamente si X es separable. Enseguida probamos algo más fuerte.

Teorema 2.4 *$C_s(X)$ es Frechet-Urysohn si y sólo si X es separable.*

Prueba. Supongamos que $C_s(X)$ es un espacio Frechet-Urysohn. Si $C_s(X) < C_u(X)$, existe un conjunto cerrado $A \subset C_u(X)$ que no es cerrado en $C_s(X)$, luego $A \subset cl_s(A)$, donde $cl_s(A)$ denota la cerradura de A en $C_s(X)$. Sea $f \in cl_s(A)$ y $f \notin A$, dado que A es cerrado en $C_u(X)$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f, \epsilon) \cap A = \emptyset$. Por otra parte, por la suposición de que $C_s(X)$ es Frechet-Urysohn, existe una sucesión $\{f_n\}$ en A tal que $f_n \to f$ topológicamente, y por teorema 2.1, $f_n \to f$ uniformemente. Luego existe un natural N tal que si $n \geq N$ entonces $f_n \in B(f, \epsilon)$. Pero esto contradice que $B(f, \epsilon) \cap A = \emptyset$, luego $C_s(X) = C_u(X)$, y por teorema 2.3, se tiene que X es separable. El otro sentido se obtiene aplicando el teorema 2.3. ■

Corolario 2.5 *$C_s(X)$ es metrizable si y sólo si X es separable.*

3 Propiedades segundo numerable, Lindelöf y separabilidad de $C_s(X)$

En lo que sigue hacemos un análisis de las propiedades segundo numerable, Lindelöff y separabilidad de $C_s(X)$. Recordemos que un espacio X es *segundo numerable* si tiene una base numerable. Un espacio X es *Lindelöf*, si de cualquier cubierta abierta de X se puede extraer una subcubierta numerable. En los espacios metrizables las propiedades segundo numerable, Lindelöf y separabilidad son equivalentes, ver [3] para una prueba.

Teorema 3.1 *Si X es un espacio segundo numerable y regular entonces es metrizable.*

Teorema 3.2 *$C_u(X)$ es segundo numerable si y sólo si X es compacto metrizable.*

Una prueba del Teorema 3.1 se encuentra [6] y del Teorema 3.2 en [5].

Teorema 3.3 *$C_s(X)$ es segundo numerable si y sólo si $C_u(X)$ es segundo numerable.*

Prueba. Si $C_s(X)$ es segundo numerable y como ya sabemos por teorema 2.2 que también es regular, entonces es metrizable por teorema 3.1; además por corolario 2.5 X es separable, luego por teorema 2.3 $C_s(X) = C_u(X)$ y entonces $C_u(X)$ es segundo numerable. Recíprocamente, si $C_u(X)$ es segundo numerable entonces X es compacto metrizable por teorema 3.2, y entonces separable por lo mencionado al inicio de la sección, luego por teorema 2.3 $C_s(X) = C_u(X)$ y entonces $C_s(X)$ es segundo numerable. ■

Corolario 3.4 *$C_s(X)$ es segundo numerable si y sólo si X es compacto metrizable.*

Prueba. Aplicar teoremas 3.3 y 3.2 ■

¿Que se puede decir acerca de la separabilidad de $C_s(X)$?

Teorema 3.5 *Si $C_s(X)$ es separable, entonces $C_u(X)$ es separable.*

Prueba. Sea $D = \{f_1,\ f_2, ...\}$ un conjunto denso numerable de $C_s(X)$, mostraremos que D también es denso en $C_u(X)$. Sea $f \in C_u(X)$ y $\epsilon > 0$, y supongamos que $B(f, \epsilon) \cap D = \emptyset$, luego para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$. Por otra parte, dado que D es denso en $C_s(X)$, se tiene que $V(f, E, \epsilon) \cap D \neq \emptyset$, donde $E = \{x_1, x_{2,}...\}$. Así que existe $f_m \in V(f, E, \epsilon)$, esto es $|f_m(x) - f(x)| < \epsilon$, $\forall\ x \in E$. En particular $|f_m(x_m) - f(x_m)| < \epsilon$, pero esto es una contradicción. ■

Corolario 3.6 *$C_s(X)$ es separable si y sólo X es compacto metrizable.*

Prueba. Si $C_s(X)$ es separable, por teorema 3.5 $C_u(X)$ es separable y como es metrizable, también es segundo numerable, luego por teorema 3.2 se tiene que X es compacto metrizable. El recíproco se obtiene por teoremas 2.3 y 3.2 ■

Dado que en los espacios metrizables las propiedades segundo numerable y Lindelöf son equivalentes, se tiene por el teorema 3.2 que $C_u(X)$ es Lindelöf si y sólo X es compacto metrizable; de aquí que $C_s(X)$ es Lindelöf si X es un espacio compacto metrizable ya que $C_s(X) \leq C_u(X)$. Sin embargo, el recíproco de la última afirmación no es cierto, ya que existen espacios compactos no metrizables X tales que $C_s(X)$ es Lindelöf, ¡pero $C_u(X)$ no lo es! [7]. Este resultado muestra que $C_s(X)$ se comporta mejor que $C_u(X)$ para este tipo de compacidad debil, como es la propiedad de Lindelöf.

Lo anterior plantea problemas interesantes de investigación.

Problema 3.7 *Encontrar una caracterización de la propiedad de Lindelöf de $C_s(X)$ en términos de las propiedades topológicas de X.*

En Análisis es de gran importancia la caracterización de los subconjuntos compactos de $C_u(X)$ (Teorema de Arzela-Ascoli) por lo que también es de interés el siguiente:

Problema 3.8 *Caracterizar los subconjuntos compactos de $C_s(X)$.*

Referencias

[1] Bagley, R.W., On pseudocompact spaces and convergence of sequences of continuos functions, (36), (1960).

[2] Comfort, W.W., Topological groups: Introduction and unsolved problems., XI Escuela Latinoamericana de Matemáticas, comunicaciones 15, Sociedad Matematica Mexicana (1995).

[3] Engelking, R., *General topology*, second ed., Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989, Translated from the Polish by the author. MR **91**c:54001.

[4] Isiwata, T., *On Convergences of Sequences of Continuous Functions*, Proc. Japan Acad. Volume 37, Number 1 (1961), 4-9.

[5] McCoy, R.A. and Ntantu, I., *Topological properties of spaces of continuous functions*, Lecture Notes in Math. 1315, Springer-Verlag, 1988.

[6] Nagata, J., Modern general topology. Nort Holland Math, Amsterdam (1985).

[7] Pichardo-Mendoza, R., Tamariz-Mascarúa, A. and Villegas-Rodríguez, H., Pseudouniform topologies on $C(X)$ given by ideals (En revisión)

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
4 de Febrero del 2013., pp. 46–52.

Nivel: Superior

La Propiedad de Kelley y Contractibilidad de Hiperespacios

Francisco Jesús Soufflé Ramos, Carlos A. Robles Corbalá, Alejandro Dueñas Osuna

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail:

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar la propiedad de J. L. Kelley como respuesta a la pregunta "¿Qué propiedades topológicas debe tener un continuo X para que sus hiperespacios asociados $C(X)$ y 2^X sean contraíbles?".

Dicha propiedad fue presentada por Kelley en el articulo [2], donde investiga la contractibilidad de estos hiperespacios.

Introducción

El estudio de la topología general puede tornarse demasiado abstracta y es complicado tener una idea geométrica de lo que estamos haciendo, por otro lado, en la *Teoría de Continuos* tenemos siempre la ayuda de la métrica, que nos invita a imaginar por lo menos la distancia que hay entre los puntos del espacio. La compacidad es una de las propiedades topológicas más deseables, ya que nos deslinda de muchas problemáticas comunes en topología general y en análisis; la conexidad, por su parte, mantiene una idea de unidad (en algún sentido) del espacio.

Un continuo X es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado, es decir, con más de un punto. Los hiperespacios de un continuo X, más estudiados son:

$$\begin{aligned}
&2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}\,,\\
&C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\right\},\\
&F_n(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo mas } n \text{ puntos}, n \in \mathbb{N}\right\},\\
&C_n(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo mas } n \text{ componentes}, n \in \mathbb{N}\right\}.
\end{aligned}$$

Intuitivamente un espacio topológico Y es contraíble si lo podemos comprimir o deformar continuamente hasta llevarlo a un punto en Y.

La idea fundamental del trabajo es ver cuando los hiperespacios de un continuo son contraíbles.

1 Definiciones

Definición 1.1 *Sean X y Y espacios topologicos, $I = [0,1]$ el intervalo unitario de la recta real $\mathbb{R}$. Decimos que dos aplicaciones continuas $f, g : X \longrightarrow Y$, son homotopicas si existe una aplicación continua $h : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$. h es llamada una homotópia.*

Podemos parafrasear esta definición diciendo que f y g son homotópicas si podemos deformar f continuamente hasta llegar a g.

Definición 1.2 *Un espacio topológico es contraíble si la función identidad $i : X \to X$ es homotópicas a una función constante.*

Podemos parafrasear la definición anterior diciendo que un espacio topológico X es contraíble si podemos comprimirlo continuamente hasta llevarlo a un punto de X.

Teorema 1.3 *Para todo continuo X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$F_1(X)$ es contraíble en $C(X)$.*
2. *$F_1(X)$ es contraíble en 2^X.*
3. *$C(X)$ es contraíble.*
4. *2^X es contraíble.*

La demostración al teorema se puede ver en [3].

Corolario 1.4 *Si X es contraíble, entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles.*

Demostración:

Si X es contraíble, $F_1(X)$ es contraíble ya que son isométricos, luego $F_1(X)$ es contraíble en cualquier espacio que lo contenga, por lo tanto $F_1(X)$ es contraíble en $C(X)$ entonces, por el teorema anterior 2^X y $C(X)$ son contraíbles. ■

Nuestro interés se centra en encontrar condiciones en el continuo X que implique que sus hiperespacios son contraíbles. Sean A y $B \in C(X)$ tal que $A \subset B$, sabemos que podemos encontrar un arco ordenado de A a B en $C(X)$, $\lambda : I \to C(X)$ tal que $\lambda(0) = A$, $\lambda(1) = B$ y $\lambda(s) \subset \lambda(t)$, si $s \leq t$, llamaremos a $\lambda(s)$ la inflada de A donde $0 < s < 1$, lo cual se puede revisar con más detalle en [5], página 90, teorema 6.10.

Si para cada $A \in C(X)$ pudiéramos fijar un arco ordenado $\lambda_A : I \to C(X)$ de tal manera que a conjuntos cerrados A y B le toquen infladas también cercanas, a las cuales llamaremos infladas parejas entonces podemos definir:

$$F : C(X) \times I \to C(X) \text{ tal que } F(A,t) = \lambda_A(t),$$

como las infladas son cercanas F sería continua y $F(A,0) = \lambda_A(0) = A$ y $F(A,1) = \lambda_A(1) = X$ para toda $A \in C(X)$, por lo tanto F será una contracción, luego $C(X)$ será contraíble.

La contractibilidad de $C(X)$ es equivalente a tener infladas parejas para los elementos de $C(X)$.

Kelley en 1942 encontró una propiedad que garantiza la existencia de infladas parejas, dicha propiedad es llamada *propiedad de Kelley* en su memoria.

Antes de la definición de la propiedad de Kelley dotaremos de una métrica a los hiperespacios. Todos los hiperespacios se definen como subespacios de 2^X, entonces para darle una métrica a todos ellos, bastara dársela a 2^X.

Definición 1.5 *Dadas $\epsilon > 0$, $p \in X$ y $A \in 2^X$, definimos:*

$$N(\epsilon, A) = \{q \in X : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } d(x,q) < \epsilon\}.$$

Este conjunto se llama la nube de radio ϵ centrada en A.

Estamos listos para definir una métrica para 2^X, llamada *métrica de Hausdorff*.

Definición 1.6 *Dados $A, B \in 2^X$, definimos:*

$$H(A,B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}.$$

La idea intuitiva de esta métrica es que dos conjuntos están cercanos si ellos casi se empalman uno en el otro. La prueba de que H es métrica se puede consultar en [1].

Definición 1.7 ***(Propiedad de Kelley)***
Un continuo X tiene la propiedad de Kelley en $a \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon, a) > 0$ tal que para todo $b \in B_\delta(a)$ y para todo $A \in C(X)$ con $a \in A$, existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $H(A,B) < \epsilon$, donde H es la métrica de Hausdorff definida en los hiperespacios.
Cuando esto pasa decimos que X es de Kelly en a.

Teorema 1.8 *Sea $a \in X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es de Kelly en a.*
2. *Para todo $A \in C(X)$, con $a \in A$ y para toda sucesión $(a_n)_n$ en X, tal que $a_n \longrightarrow a$, existe una sucesión $(A_n)_n \in C(X)$ tal que $a_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \longrightarrow A$.*

Para ver detalles de la demostración puede revisar [1].

Ejemplo 1.9 *Sea X el continuo que se muestra en la figura A, afirmamos que X no es de Kelly en a.*

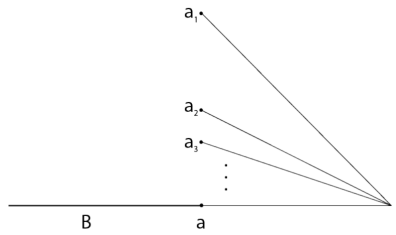


Figura A: Escoba con pata alargada.

En efecto, con la sucesión $(a_n)_n$ y el $B \in C(X)$, tal que $a \in B$, vemos que no existe $(B_n)_n$ sucesión de subcontinuos tal que $B_n \longrightarrow B$ con $a_n \in B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

En las siguientes dos secciones se presentan dos funciones que se usan en la demostración del teorema principal de este trabajo.

2 Función *Sub*

Sea $Sub(a) = \{A \in C(X) : a \in A\}$ la cual está definida de X en $C^2(X)$, esto se puede revisar en [1].

Definición 2.1 *Sea $g : X \longrightarrow Y$, definimos:*

1. *g es semicontinua por abajo en $x_0 \in X$ si y solo si $g(x_0) \subset \liminf g(x_n)$ para toda sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $x_n \longrightarrow x_0$.*
2. *g es semicontinua por arriba en $x_0 \in X$ si y solo si $\limsup g(x_n) \subset g(x_0)$ para toda sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $x_n \longrightarrow x_0$.*

La definición anterior se puede revisar con detalle en [1].

Teorema 2.2 *La función Sub es semicontinua por arriba en cada $a \in X$.*

Demostración:

Sea $a \in X$ y $(a_n)_n \subset X$ tal que $a_n \longrightarrow a$. Demostraremos que $lim \sup Sub(a_n) \subset Sub(a)$. Sea $A \in lim \sup Sub(a_n)$, entonces $A \in C(X)$ y existe $n_1 < n_2 < \ldots$ y puntos $A_{n_k} \in Sub(a_{n_k})$ para toda $k \in \mathbb{N}$ tal que $A_{n_k} \longrightarrow A$. Entonces $a \in A$, lo que implica que $A \in Sub(a)$, por lo tanto $lim \sup Sub(a_n) \subset Sub(a)$. ■

Teorema 2.3 *Sea $a \in X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Sub es semicontinua por abajo en a.*

2. *Sub es continua en a.*

3. *X es de Kelley en a.*

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2). Por el teorema anterior Sub es semicontinua por arriba en a. Entonces Sub es semicontinua por arriba y por abajo en a, entonces Sub es continua en a.

(2) $\Rightarrow$ (1). Por hipótesis tenemos que Sub es continua en a, pero esto es si y solo si Sub es semicontinua por arriba y por abajo en a, entonces Sub es semicontinua por abajo en a.

(1) $\Rightarrow$ (3). Sea $(a_n)_n \subset X$ tal que $a_n \longrightarrow a$, por hipótesis tenemos que $Sub(a) \subset lim\sup Sub(a_n)$, por lo que para toda $A \subset Sub(a)$ existe $A_n \in Sub(a_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \longrightarrow A$, luego por el **teorema 1.8**, X es de Kelley en a.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $\epsilon > 0$, entonces por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que para cada $b \in B_\delta(a)$, $Sub(a) \subset N(\epsilon, Sub(b))$, la cual es la definición de semicontinuidad por abajo en a. ■

3 Función F_μ

Definición 3.1 *Un mapeo de Whitney en 2^X es una función continua $\mu : 2^X \longrightarrow [0, \infty)$, que satisface:*

1. *$\mu(\{p\}) = 0$ para todo $p \in X$.*

2. *$\mu(A) < \mu(B)$ siempre que $A \subsetneq B$.*

Análogamente se definen mapeos de Whitney en $C(X)$.

Observación:
Un mapeo de Whitney normalizado es un mapeo Whitney μ tal que:

$$\mu(X) = 1.$$

Definición 3.2 *Sea μ un mapeo de Whitney normalizado. Para cada $(a, t) \in X \times I$, definimos:*

$$F_\mu(a, t) = \{A \in Sub(a) : \mu(A) = t\}.$$

Con el mismo tratamiento que dimos en la sección anterior a la función Sub, obtenemos resultados similares para la función F_μ, los cuales enunciaremos a continuación.

Teorema 3.3 *La función F_μ es semicontinua por arriba.*

Teorema 3.4 *X es de Kelley en $a \in X$ si y solo si F_μ es continua en (a, t) para cada $t \in I$.*

Para revisar las demostraciones de los dos teoremas anteriores puede revisar [3].

4 Contractibilidad de Hiperespacios

Presentamos a continuación el teorema principal de este trabajo.

Teorema 4.1 *Si X es de Kelley, entonces 2^X y $C(X)$ son contraíbles.*

Demostración:

Por hipótesis se tiene que X es de Kelley, entonces por el teorema 3.4 F_μ es continua. Definimos

$$g : F_1(X) \longrightarrow X,$$

tal que $g(\{x\}) = x$, para cada $\{x\} \in F_1(X)$, entonces g es continua, ya que $F_1(X)$ y X son isométricos. Luego para cada $(\{x\}, t) \in F_1(X) \times I$ definimos:

$$G : F_1(X) \times I \longrightarrow 2^X$$
$$G(\{x\}, t) = \psi(F_\mu(g(\{x\}), t)),$$

donde $\psi : 2^{2^X} \longrightarrow 2^X$ es un mapeo, llamado mapeo unión, que cumple con las siguientes condiciones:

1. $\psi(\mathcal{A}) \in 2^X$, para todo $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$.
2. Si $\mathcal{A}$ es conexo y $\mathcal{A} \cap C \neq \varnothing$, entonces $\psi(A) \in C(X)$.
3. $\psi : 2^{2^X} \longrightarrow 2^X$ es una función continua.

Lo anterior se puede consultar [1]. Demostraremos que G es una contracción.

1. G es continua por ser composición de funciones continuas.
2. $G(\{x\}, 0) = \{x\}$ para toda $\{x\} \in F_1(X)$.

   En efecto $\{x\} \in F_1(X)$, entonces
   $$F_\mu(g(\{x\}), 0) = F_\mu(x, 0) = \{A \in Sub(x) : \mu(A) = 0\} = \{\{x\}\},$$
   ya que $A = \{x\}$ es único en $Sub(x)$ tal que $\mu(A) = 0$, entonces
   $$G(\{x\}, 0) = \psi(F_\mu(g(\{x\}), 0)) = \psi(\{\{x\}\}) = \{x\}.$$
3. $G(\{x\}, 1) = \{x\}$ para toda $\{x\} \in F_1(X)$.

   En efecto $\{x\} \in F_1(X)$, entonces
   $$F_\mu(g(\{x\}), 1) = F_\mu(x, 1) = \{A \in Sub(x) : \mu(A) = 1\} = \{X\},$$
   ya que $A = X$ es único en $Sub(x)$ tal que $\mu(X) = 1$, entonces
   $$G(\{x\}, 1) = \psi(F_\mu(g(\{x\}), 1)) = \psi(\{X\}) = X.$$

Por lo tanto G es una contracción de $F_1(X)$ en 2^X, entonces $F_1(X)$ es contraíble en 2^X. Por el teorema 1.3 se concluye que 2^X y $C(X)$ son contraíbles. ■

Referencias

[1] Soufflé Ramos Francisco Jesús. *La propiedad de Kelley y contractibilidad de hiperespacios.* Universidad de Sonora. Hermosillo Sonora 2012.

[2] Kelley J. L. *Hyperspaces of a contunuum.* Trans.Amer.Math.soc. p. 22 - 36. 1942.

[3] Munkres John. *Topología.* Madrid España 2002.

[4] Illanes Alejandro, Nadler Sam. *Hyperspaces. Fundamentals and recent result.* New York y Basel 1999.

[5] Illanes Alejandro. *Hiperespacios de continuos.* Aportaciones matemáticas No. 28. SMM 2004.

[6] T. Sims Benjamín. *Fundamentals of Topology* MacMillan Publishing Co., Inc. New York 1976.

[7] Hinrichsen Diederich, Fernández José, Fraguela Andrés, Álvarez Ángel. *Topología general.* Aportaciones matemáticas No. 31. SMM 2003.

[8] Wodjyslawski M. *Sur le contractibilite des hyeperespaces des continus localemet connexes.* Fundamenta mathematicae. 1938.

[9] Escobedo Raul, Macias Sergio, Mendez Héctor. *Invitación a la teoría de los continuos y sus hiperespacios.* Aportaciones matemáticas No. 33. SMM 2006.

[10] Nadler Sam. *Continuum theory an introduction* Marcel Dekker. 1992.

[11] Nadler Sam. *Hyperspaces of set. A test with reserch question.* Aportaciones matemáticas. 2006.

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Septiembre, 2013, pp. 53–62.

Nivel: Superior

Significados Institucionales de Polinomios usando Maple T.A.

Maximino Dórame Velásquez **Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez**

Departamento de Ciencias Básicas, Instituto Tecnológico de Hermosillo
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: mdorame@ciencias.uson.mx, acastillo@gauss.mat.uson.mx

Resumen

El propósito de este trabajo es presentar la descripción de los significados institucionales [1] del tema de polinomios y sus raíces, en un curso de Álgebra para estudiantes de primer semestre de Ingeniería, cuando se utiliza el sistema Maple T.A. para la realización de tareas y exámenes. La descripción de los significados institucionales es importante puesto que sirve de base para la descripción y contraste del significado personal construido por los estudiantes. El análisis realizado está fundamentado en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática. Compartimos con Godino [2] que "La investigación didáctica debería centrar la atención de modo preferente en el estudio de las relaciones entre los significados institucionales de los objetos matemáticos y los significados personales construidos por los sujetos".

1 Introducción

Este trabajo está relacionado con algunos proyectos que el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora ha impulsado desde inicios del año 2008 [3], [4], cuyo objetivo es el diseño e implementación de tareas y exámenes estandarizados en línea utilizando el sistema Maple T.A. para diferentes asignaturas. Uno de esos proyectos considera la asignatura de Álgebra, que se imparte a los programas académicos de la División de Ingeniería. El propósito de este trabajo es presentar la descripción de los significados institucionales de polinomios del curso de Álgebra al usar el sistema Maple T.A. para la realización de tareas y exámenes. Para describir el significado institucional de referencia se analizó el programa oficial de la materia de Álgebra junto con algunos textos usados por los profesores de la asignatura. Para describir los significados institucionales pretendido e implementado se analizan los reactivos que forman las tareas en el Maple T.A. y para describir el significado institucional evaluado se analizan los reactivos que forman el examen en el sistema. Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación más amplio que incluye también la descripción de los significados personales.

2 Problema de Investigación

La mayoría de los estudiantes de primer ingreso inscritos a Programas Académicos de ingeniería en la Universidad de Sonora presentan deficiencias en la resolución de ecuaciones polinomiales. Se presenta, además, el inconveniente de que el tiempo establecido en el programa oficial de la asignatura Álgebra, para abordar el tema de polinomios y raíces es reducido. Para enfrentar estas dificultades algunos profesores están implementando tareas y

exámenes a través del sistema Maple T.A. Debido a la casi nula investigación acerca de las prácticas promovidas mediante el uso de este sistema, nos hemos propuesto caracterizar el Significado Institucional de polinomios de la materia Álgebra en ese ambiente. Consideramos que la descripción de los significados institucionales constituye un primer acercamiento, que posibilitará su contrastación con significados personales, lo que constituye el propósito principal del proyecto de investigación del cual este trabajo se desprende. Lo anterior puede aportar elementos importantes para entender los procesos de enseñanza y aprendizaje de polinomios y sus raíces al usarse el sistema Maple T.A.

3 Elementos teóricos

Para fundamentar este trabajo se consideran algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) [5]. Entre los elementos a considerar, podemos mencionar los sistemas de prácticas, los objetos personales e institucionales, sus significados sistémicos, los elementos básicos del significado y las relaciones que se establecen entre ellos (funciones semióticas). El significado de un objeto matemático se define como el sistema de prácticas que manifiesta una institución (significado institucional) o un individuo (significado personal) sobre dicho objeto matemático. El *significado institucional* tiene una tipología, éste puede ser de *referencia, pretendido, implementado* o *evaluado.* Los elementos básicos o primarios constitutivos del significado son: *Situaciones-problema, Elementos lingüísticos, Conceptos-definición, Procedimientos, Propiedades* y *Argumentos.* Estos elementos se relacionan entre sí formando *configuraciones epistémicas.*

4 Metodología

Para cumplir con el propósito planteado, de acuerdo con el marco teórico seleccionado, se implementa una técnica analítica que nos permite caracterizar los significados institucionales. Ésta consiste en realizar un análisis de texto sistemático de los objetos matemáticos y funciones semióticas que se ponen en juego en un segmento de actividad matemática. Dicho análisis es llamado análisis *ontológico-semiótico* o simplemente *semiótico,* el cual permitirá identificar el sistema de entidades que se ponen en juego en el estudio de polinomios y sus raíces, y se basará en la descomposición del texto en unidades de análisis. El análisis se realiza a través de las siguientes fases o etapas:

Etapa 1.- Describir el significado institucional de referencia. Es decir, determinar los objetos matemáticos y los sistemas de prácticas que se promueven en el programa oficial de la asignatura, así como en algunos textos usados por los profesores que imparten la materia. El criterio para definir las unidades de análisis es considerar cada punto del contenido temático del programa como una unidad elemental. Para lograrlo se considera necesario llevar a cabo las siguientes acciones:

> Analizar la parte del programa oficial de la materia Álgebra que trata los temas referentes a polinomios, así como, la bibliografía recomendada, con el propósito de identificar los objetos matemáticos primarios y los sistemas de prácticas involucrados.

Analizar otros textos no incluidos en el programa pero que son utilizados por profesores que imparten regularmente la materia y utilizan el sistema Maple T.A.

Etapa 2.- Describir el significado institucional pretendido y el significado institucional implementado, mediante el uso del software Maple T.A. Se determinan los objetos matemáticos y los sistemas de prácticas que se promueven utilizando el sistema Maple T.A. En este caso, para llevar a cabo el análisis semiótico se toma cada tarea del sistema como una unidad de análisis. Etapa 3.- Describir el significado institucional evaluado. Es decir, determinar los objetos matemáticos y los sistemas de prácticas que se consideraron pertinentes para ser incluidos en la evaluación en línea. El significado institucional evaluado se determina analizando los reactivos que fueron seleccionados para estructurar el examen sobre este tema en el sistema Maple T. A.

5 Análisis y resultados

ETAPA 1. Las fuentes para determinar el *Significado Institucional de Referencia* de polinomios en la institución donde se lleva a cabo el estudio es, en primer plano, el Programa Oficial de Álgebra, los textos y materiales incluidos en las referencias bibliográficas del Programa [6], y algunos otros textos que incluyen el tema de polinomios y raíces, referidos por profesores que imparten la asignatura [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14]. En la siguiente tabla se muestra la configuración epistémica correspondiente.

Tabla 1: Configuración epistémica asociada al tema de Polinomios y sus raíces

Situaciones-problema:
- Resolver algebraicamente ecuaciones de segundo y tercer grado
- Representar gráficamente polinomios de grado n
- Factorizar polinomios de grado n
- Obtener las raíces reales y/o complejas de un polinomio de grado n.
- Construir un polinomio de grado n a partir de sus raíces.
- Articular la representación gráfica y algebraica de un polinomio.
- Determinar el grado de un polinomio.
- Determinar las raíces racionales de un polinomio.
- Representar gráficamente las raíces complejas de un polinomio.
- Estimar el número total de raíces positivas, negativas y complejas de un polinomio.
- Aproximar las raíces reales de un polinomio.

Lenguaje: – Natural – Algebraico – Gráfico – Tabular (en mucha menor medida).	*Definiciones y conceptos:* Ecuación, ecuación cuadrática, fórmula general, ecuación cúbica, fórmulas de Cardano, solución de una ecuación, raíces de ecuaciones, raíces reales, raíces complejas, polinomio de grado n, grado de un polinomio, ceros de polinomios, fórmulas de Vieta, factorización de polinomios, división de polinomios, división sintética, cociente, residuo, factores lineales, factores cuadráticos, gráfica de un polinomio, derivada de un polinomio, multiplicidad de raíces, variaciones de signo.

Procedimientos:
Utilizar la fórmula general; utilizar las fórmulas de Cardano; dividir polinomios; multiplicar polinomios; evaluar polinomios; utilizar división sintética; construir un polinomio de grado n a partir de sus raíces; graficar polinomios como funciones reales de variable real; articular las expresiones algebraica y gráfica de un polinomio; estimar el número total de raíces positivas, negativas o complejas de un polinomio; utilizar el método de bisección.

Proposiciones:
– Si r y s son números reales, entonces $rs = 0$ sí y sólo sí $r = 0$ ó $s = 0$.
– La fórmula general conduce a la solución de una ecuación cuadrática.
– Las fórmulas de Cardano conducen a la solución de una ecuación cúbica.
– Si z_0 es una raíz compleja de un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales, entonces su conjugado $\overline{z}_0$ también es raíz de $p(x)$.
– Si x_0 es una raíz de multiplicidad $k > 1$ de un polinomio $p(x)$ entonces x_0 es una raíz de multiplicidad $k - 1$ de la derivada de $p(x)$.
– Si x_0 es una raíz de multiplicidad $k > 1$ de un polinomio $p(x)$ entonces $(x - x_0)^k$ es factor de $p(x)$, pero $(x - x_0)^{k+1}$ no lo es.
– Teorema del factor y Teorema del residuo. Fórmulas de Vieta. Teorema de raíces racionales.
– Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos que está definido por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$, entonces, $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$, con r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ una raíz compleja de $p(x)$.
– Si x_0 es una raíz real del polinomio representado por $p(x)$ entonces, el punto $(x_0, 0)$ es la intersección de la gráfica de $p(x)$ con el eje de las abscisas.
– Si $p(x)$ tiene un factor $(x - c)^k$ donde c es real y k es un entero positivo, entonces
(1) si k es impar, la gráfica cruza al eje de las abscisas en $x = c$;
(2) si k es par, la gráfica toca el eje de las abscisas en $x = c$ pero no lo cruza.
– Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, $n \geqslant 1$, la representación algebraica de un polinomio de grado n, entonces:
(3) si n es par y $a_n > 0$, el recorrido es el intervalo $[m, \infty)$ donde m es el valor mínimo de $p(x)$;
(4) si n es par y $a_n < 0$, el recorrido es el intervalo $(-\infty, M]$, donde M es el valor máximo de $p(x)$;
(5) si n es impar, el recorrido es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. En este caso no existe un valor máximo o mínimo.

– Teorema fundamental del álgebra: Si un polinomio $p(x)$ tiene grado positivo y coeficientes complejos, entonces $p(x)$ tiene al menos un cero complejo. – Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces complejas. – Regla de Descartes para la separación de raíces de un polinomio. – Si $p(x)$ denota un polinomio con coeficientes reales y si a y b son números reales tales que $p(a)$ y $p(b)$ son de signos opuestos, entonces el polinomio $p(x)$ tiene al menos una raíz real entre a y b.
Argumentos: – Justificación de la validez de las proposiciones antes enunciadas.

Etapa 2.- Describir el significado institucional pretendido y el significado institucional implementado, mediante el uso del Maple T.A. Cabe aclarar que se está acotando el análisis a las actividades diseñadas con Maple T.A., y no se abordará globalmente el significado institucional pretendido e implementado, a través de otras actividades. Se presenta en la Tabla 2 la configuración epistémica identificada.

Tabla 2: Configuración epistémica asociada al tema de Polinomios y sus raíces en Maple T.A.

Situaciones-problema: Encontrar la solución de una ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$. Asociar la expresión algebraica y la gráfica de una función cuadrática. Resolver una ecuación cúbica del tipo $x^3 + px + q = 0$ utilizando las fórmulas de Cardano. Construir una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ dadas sus soluciones. Determinar raíces reales de un polinomio mónico de tercer grado dado que se conocen algunas de sus raíces. Expresar un polinomio como producto de factores lineales. Relacionar los factores de un polinomio con sus raíces. Identificar la factorización de una suma de cuadrados y de un trinomio cuadrado perfecto, así como la de un trinomio que puede expresarse como un trinomio cuadrado perfecto más el número uno. Utilizar división sintética para ilustrar el Algoritmo de la División y para evaluar un polinomio. Determinar la suma y el producto de las raíces de un polinomio a partir de sus coeficientes. Determinar el número de variaciones de signo de un polinomio de cuarto grado. Determinar la multiplicidad de una raíz de un polinomio dado. Determinar el grado de un polinomio expresado como producto de factores lineales. Asociar la expresión algebraica y la gráfica de un polinomio expresado como producto de factores lineales. Dada la gráfica de $P(x)$, asociar las gráficas dadas que corresponden a $-P(x)$ o a $P(-x)$.

<table>
<tr><td colspan="3">Lenguaje:</td></tr>
<tr><td>Términos y expresiones:
Soluciones exactas, ecuación, expresión algebraica, función cuadrática, gráfica. Fórmulas de Cardano, forma polar, raíces cúbicas, forma binómica, ángulos, soluciones de la de segundo grado, números reales, números complejos, números enteros, raíz real, polinomio, raíz compleja, factor, factores lineales, división sintética, evaluar el polinomio, dividir, cociente, residuo, producto, divisor, variaciones de signo, multiplicidad de una raíz, raíz real, número entero, división. Grado del polinomio, gráfica, expresión algebraica.ecuación, raíces. Ecuación</td><td>Algebraico:
$ax^2 + bx + c = 0$,
$x^3 + px + q = 0$,
$x = u + v$.
$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$
$a + bI, (a, b, c)$.
$-x^3 + 3x^2 + 25x - 75$,
$(x - 5 - I)(x + 5 + I)$,
$(x + 2)^2(x - 3)^3$,
$f(x), -f(x), f(-x)$.
Numérico:
$4, -2, 7I, -\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, 1 + I$,</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Conceptos- definición:
Soluciones, ecuación, ecuación cuadrática. Función cuadrática, gráfica. Fórmulas de Cardano, resolver una ecuación, raíces de una ecuación, raíces cúbicas de un número complejo, forma polar de un número complejo, forma binómica de un número complejo. Ecuación de segundo grado, número real, número complejo, números enteros. Raíz real, polinomio, raíz compleja, factores lineales, factorización.
División sintética, evaluar el polinomio, división, cociente, residuo, producto, divisor, factor de polinomio, suma. Grado del polinomio.
Variaciones de signo de un polinomio, raíz de polinomio, multiplicidad de una raíz, división de polinomios.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Procedimientos:
Factorizar polinomios, despejar la incógnita, completar el cuadrado, uso de la fórmula general para ecuaciones cuadráticas. Articular la representación gráfica y algebraica de un polinomio. Uso de las fórmulas de Cardano. Operaciones con números complejos. Relacionar las raíces del polinomio con sus coeficientes (Aplicar las fórmulas de Vieta). Factorizar trinomios de segundo grado, usar división sintética, evaluar polinomios, dividir polinomios. Relacionar raíces y factores de un polinomio. División, división sintética, derivada de polinomios. Evaluar un polinomio. Sumar los exponentes de los factores de un polinomio. Identificar las raíces reales y sus multiplicidades en la gráfica del polinomio. Identificar las simetrías de $P(x)$ con respecto a los ejes coordenados.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Proposiciones:
Si r y s son números reales, entonces $rs = 0$ si y sólo si $r = 0$ ó $s = 0$.
La fórmula general conduce a la solución de una ecuación cuadrática.
Las fórmulas de Cardano conducen a la solución de una ecuación cúbica.
Si z_0 es una raíz compleja de un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales, entonces su conjugado $\overline{z}_0$ también es raíz de $p(x)$.</td></tr>
</table>

Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos que está definido por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, n \geqslant 1, a_n \neq 0,$$

entonces $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$, con r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ una raíz compleja de $p(x)$.
Teorema del factor. Teorema del residuo. Fórmulas de Vieta.
La regla de Ruffini provee una forma para evaluar polinomios.
Si x_0 es una raíz de multiplicidad $k > 1$ de un polinomio $p(x)$ entonces x_0 es una raíz de multiplicidad $k - 1$ de la derivada de $p(x)$.
Si x_0 es una raíz real del polinomio representado por $p(x)$ entonces, el punto $(x_0, 0)$ es la intersección de la gráfica de $p(x)$ con el eje horizontal (eje x).
Suponer que $p(x)$ tiene un factor $(x-c)^k$ donde c es real y k es un entero positivo. Entonces, para valores de x cercanos a c :

a) si k es impar, la gráfica cruza al eje x;
b) si k es par, la gráfica toca el eje x pero no lo cruza.

Sea $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, $n \geqslant 1$, la representación algebraica de un polinomio de grado n. Entonces:

1) si n es par y $a_n > 0$, el recorrido es el intervalo $[m, \infty)$ donde m es el valor mínimo de $p(x)$.
2) si n es par y $a_n < 0$, el recorrido es el intervalo $(-\infty, M]$, donde M es el valor máximo de $p(x)$.
3) si n es impar, el recorrido es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. En este caso no existe un valor máximo o mínimo.

La gráfica de una ecuación en x y y es:

a) simétrica respecto al eje x si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando y se sustituye por $-y$ en la ecuación.
b) simétrica respecto al eje y si y sólo si se obtiene una ecuación equivalente cuando x se sustituye por $-x$ en la ecuación.

ETAPA 3.- Describir el significado institucional evaluado. Para realizar este análisis, se consideran los reactivos incluidos en el diseño del examen. A manera de ejemplo se muestra la configuración epistémica resultante de uno de ellos (Fig. 1).

Figura 1: Reactivo de la tarea Gráficas y Polinomios, en el Maple T.A.

6 Conclusiones

Como producto de los análisis realizados, se establecieron las configuraciones epistémicas correspondientes a significados institucionales sobre el tema de polinomios y sus raíces. Aunque en este trabajo, se presenta sólo una parte de dicho producto por cuestiones de espacio, se ha observado que algunos temas no se han incluido en las tareas y exámenes en línea debido a las dificultades para la automatización por este medio, más sin embargo las situaciones presentadas son variadas y promueven la emergencia de una buena parte de los objetos que componen el significado institucional de referencia. En particular, el lenguaje utilizado incorpora diferentes formas de representación y su articulación; los procedimientos, los conceptos

Tabla 3: Configuración epistémica de un reactivo de la unidad de análisis: *Gráficas y polinomios.*

Situaciones-problema: Seleccionar la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado graficamente. Determinar el grado del polinomio.	
Lenguaje: Natural, algebraico y gráfico.	*Términos y expresiones:* expresión algebraica, gráfica, polinomio, grado del polinomio.
Definiciones y conceptos: gráfica, polinomio, grado del polinomio.	
Procedimiento: Identificar las raíces reales y sus multiplicidades en la gráfica del polinomio. Mediante la observación, determinar si el grado del polinomio es par o impar. Tomando en cuenta las acciones anteriores seleccionar la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado en la gráfica. Igualar a cero cada uno de los factores del polinomio y resolver la ecuación correspondiente.	
Argumentos: Si x_0 es una raíz real del polinomio representado por $p(x)$ entonces, el punto $(x_0, 0)$ es la intersección de la gráfica de $p(x)$ con el eje horizontal (eje x). Suponer que $p(x)$ tiene un factor $(x-c)^k$ donde c es real y k es un entero positivo. Entonces, para valores de x cercanos a c : si k es impar, la gráfica cruza al eje x. si k es par, la gráfica toca el eje x pero no lo cruza. Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ n \geqslant 1,$ la representación algebraica de un polinomio de grado n, entonces: 1) si n es par y $a_n > 0$, el recorrido es el intervalo $[m, \infty)$ donde m es el valor mínimo de $p(x)$. 2) si n es par y $a_n < 0$, el recorrido es el intervalo $(-\infty, M]$, donde M es el valor máximo de $p(x)$. 3) si n es impar, el recorrido es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. En este caso no existe un valor máximo o mínimo. Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos que está definido por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ n \geqslant 1,\ a_n \neq 0,$ entonces $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$, con r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ una raíz compleja de $p(x)$.	

y sus propiedades se generan a partir de las situaciones planteadas, y se relacionan y conectan entre sí. Las configuraciones epistémicas asociadas a los significados institucionales, también servirán de soporte para determinar y contrastar los significados personales construidos por los estudiantes en el ambiente Maple T.A., así como para la identificación de conflictos semióticos, lo que constituye una línea a seguir del presente trabajo.

Referencias

[1] Godino, J., Batanero, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 14, No. 3. pp. 325-355, 1994.

[2] Godino, J. D. Un Enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, 22 (2-3), 237-284, 2002.

[3] Del Castillo, A.G., Flores, B. Resultados de la implementación de tareas y exámenes en línea para los cursos de Álgebra, utilizando el software Maple T.A. En García Mireles, Ibarra, S. E. (Eds) Memorias de la XIX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Mosaicos Matemáticos No. 32, pp.97-103, Hermosillo, Sonora, México, Universidad de Sonora, 2009.

[4] Del Castillo, A. G., Flores, B. E. Evaluación y Autoevaluación en Línea con Maple T.A.: Un Estudio con Números Complejos. En Ulloa, R. (Ed.), Colección Uso de Tecnología en Educación Matemática, Investigaciones y Propuestas 2012, pp. 170-183, México, AMIUTEM, A.C. 2012.

[5] Godino J., Batanero C., Font V. Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Versión ampliada y revisada el 8/Marzo/2009 del artículo, Godino, J., Batanero, C. y Font, V. 2007.

[6] Soto, J. L. Polinomios y raíces: una representación gráfica. Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, (2003).

[7] Kurosch, A. G. *Curso de Álgebra Superior.* 5ta reimpresión, México, Limusa, 1994.

[8] Uspensky, J.V. *Teoría de Ecuaciones.* 1ra Edición, Limusa, México, 1987.

[9] Fuller, G. *Álgebra Elemental.* 26a reimpresión. México, CECSA, 2004.

[10] Leithold, L. *Álgebra.* Oxford, México, 1992.

[11] Rees, P. K., Sparks, F. W., Rees, C. S. *Álgebra.* 10a Edición, McGraw-Hill, México, 1991.

[12] Demana, F., Waits, B., Foley, G., Kennedy, D., Blitzer, R. *Matemáticas Universitarias Introductorias.* Pearson, México, 2009.

[13] Kaufmann, J. E., Schwitters, K. L. *Álgebra*. 8va Edición, CENGAGE Learning, México, 2010.

[14] Swokowski, E. W., Cole, J. A. *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica.* 13a Edición, CENGAGE Learning, México, 2011.

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Septiembre, 2013, pp. 63–69.

Nivel: Superior

Secuencia de Actividades Didácticas para el Estudio de la Recta en el Área de Ingeniería usando Maple T.A.

María de los Ángeles Mata González **Manuel Alfredo Urrea Bernal**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: angelita_matag@hotmail.com maurr@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Este trabajo es un reporte de tesis en el que se pretende diseñan actividades didácticas para coadyuvar al desarrollo del significado de la Recta en el plano cartesiano, para ello nos apoyamos en el uso del software Maple T.A. como herramienta tecnológica. Los estudiantes a los que está dirigido el trabajo son del área de ingeniería de la Universidad de Sonora, por ello asumimos como un referente importante el modelo curricular de dicha institución, en dicho modelo se resalta el papel activo que debe asumir el estudiante en la construcción de su aprendizaje. Se considera fundamental la formación de sujetos capaces de resolver problemas por sí mismo, críticos, independientes, que sepan trabajar en equipo, utilizar las nuevas tecnología de la información y la comunicación. En particular en este trabajo nos centramos en el estudio del objeto matemático la Recta, el cual forma parte del curso de Geometría Analítica que se imparte en las carreras de ingeniería.

1 Introducción

En la Universidad de Sonora a partir de 2004 se establece un nuevo modelo curricular en el que uno de los aspectos fundamentales es centrar el proceso educativo en el estudiante, y no en el maestro; es decir, se asume la importancia del papel que tiene el estudiante en la construcción de su aprendizaje, para ello se promueve el descubrimiento y la construcción del conocimiento, en oposición a la tendencia predominante de sólo transferir conocimientos por parte del profesor.

En uno de los apartados de los Lineamientos Curriculares Generales de la Institución destaca la importancia de que el estudiante tenga conocimientos de los recursos computacionales y haga buen uso de ellos, por lo cual se imparte la materia de Introducción a las Nuevas Tecnologías de la Comunicación y la Información, la cual debe ser cursada por todos los alumnos que ingresen a la Universidad de Sonora, cuyo propósito es:

"...que el estudiante cuente con las bases que permitan el desarrollo de las habilidades para el uso de estas tecnologías en el resto de la carrera y en su práctica profesional. Se impartirán conceptos y herramientas básicas para el uso de la computadora, de la red Internet y de la tecnología de redes, así como para el manejo de paquetes computacionales, procesadores de palabras y bases de datos, entre otros." [4].

A raiz de esta iniciativa de carácter general, el Departamento de Matemáticas ha tenido varias accciones tendientes a incorporar el uso de los recursos tecnológicos en los cursos que ofrece a los distintos departamentos de la institución, estas acciones están comprendidas en programas y proyectos de diferente naturaleza.

En el Departamento de Matemáticas se llevan a cabo varios proyectos específicos cuyo objetivo principal es diseñar e implementar tareas y exámenes en línea utilizando el software Maple T.A., como apoyo al trabajo docente, en particular se pretende apoyarlos en los procesos de evaluación y autoevaluación de los estudiantes. El uso de este software en la Universidad de Sonora empezó en el año 2006, con 1000 licencias para ser utilizados en los programas educativos de la División de Ciencias Exactas y Naturales (DCEN), División de Ingeniería y de la División de Ciencias Económico Administrativas. Desde 2006 hasta la fecha se han creado proyectos que van desde crear bancos de reactivos, diseñar exámenes, tareas, actividades, entre otros.

Con este software se imparten los siguientes cursos en las siguientes carreras:

Tabla 1

MATERIA	CARRERA
Álgebra	Ingenierías, Física, Matemáticas, Computación, Geología
Álgebra Superior	Física, Matemáticas, Computación, Geología
Álgebra Lineal	Física, Matemáticas, Computación, Geología
Cálculo I y II	Ingenierías, Física, Matemáticas, Computación, Geología
Matemáticas II	Economía, Administración, Contabilidad
Aspectos Cuantitativos	Derecho

Dentro de las caracteristicas de Maple T.A. que han resultado atractivas de dicho sofware tenemos:

El sistema Maple T.A. tiene herramientas matemáticas muy potentes propias del software Maple, para cómputo numérico, simbólico y para generación de gráficas.

Permite realizar reactivos en varios formatos, como de complementar de selección múltiple, opción múltiple, de relacionar preguntas abiertas, entre otros.

Es posible realizar una gran cantidad de reactivos distintos con un estructura común, haciendo uso de valores aleatorios en la estructura de un algoritmo que genera el reactivo, de esta manera al diseñar tareas o actividades para los estudiantes, es posible que cada uno disponga de reactivos diferentes cada vez que quiera realizar la tarea.

Las tareas, ejercicios o exámenes se califican inmediatamente, el estudiante puede ver sus resultados, tanto de respuestas correctas como de incorrectas, lo cual representa una ayuda para retroalimentarse inmediatamente.

2 Problemática de Estudio

La problemática que se estudia en el área de Matemática Educativa es muy amplia, se puede enfocar al proceso de aprendizaje de contenidos matemáticos, al proceso de enseñanza de contenidos matemáticos, a la evaluación respecto al aprendizaje de contenidos matemáticos, al uso de recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y aprendizaje, etc. Tal como se ha señalado en la problemática del aprendizaje de las matemáticas podemos ubicar una serie de problemas que pueden resultar de interés, en particular en este trabajo nos proponemos diseñar actividades didácticas que nos permitan construir el significado de la Recta en estudiantes de ingeniería de la Universidad de Sonora, centrando la atención en la coordinación de los diferentes registros de representación en los que se pueden representar dichos objetos matemáticos, con el apoyo del software Maple T.A.

Como apoyo al aprendizaje del objeto matemático la Recta, se pretende que a través del diseño e implementación de las actividades didácticas, con el apoyo del software mencionado, el estudiante observe las características del objeto matemático en cuestión, así como sus propiedades. Por otro lado, es uno de los primeros temas que se atienden en el curso, así que este trabajo puede servir para iniciar con el diseño del curso completo. La recta es un objeto matemático que se utiliza como herramienta en otros cursos, como lo son Cálculo Diferencial e Integral I, Algebra Superior I, Algebra Lineal I, entre otros.

Algunos trabajos recientes que se han desarrollado utilizando el software Maple T.A. son los siguientes:

- *Diseño e implementación de prácticas y exámenes en línea para el curso de matemáticas II en el área económico-administrativa* [2]. En él se destaca la importancia del uso del software Maple T.A. para el diseño de dichas prácticas y exámenes. Pues este software cuenta *con herramientas potentes para cómputo numérico, simbólico, por lo mismo resulta atractivo para el diseño de los mismos reactivos.* A manera de conclusión sobre este escrito, podemos rescatar que se describe una manera dinámica para el estudiante el de trabajar en Maple T.A., es evaluado constantemente, es decir, auto-evaluación. Y para el profesor resulta interesante implementar reactivos con diferentes campos de respuestas (de opción múltiple, de falso-verdadero, de relación, de llenar espacios, etc.), según las necesidades del tema a tratar.

- *Diseño de bancos de reactivos en línea para matemáticas II usando el Maple T.A.* [5]. El objetivo de este trabajo es *diseñar reactivos para su disponibilidad en el Sistema Maple T.A. que satisfagan los tópicos tratados en el curso de Matemáticas II en la División de Ciencias Económico-Administrativas.* Para atender este objetivo el diseño de estos bancos de reactivos, se deben diseñar clasificándolos por niveles, dificultades, entre otros.

- *Diseño de reactivos en línea para la función cuadrática usando Maple T.A.* [3]. En este trabajo de tesis se diseñaron reactivos sobre el tratamiento de registro gráfico, tabular y algebraico de la función cuadrática, sobre la conversión entre el registro gráfico, tabular y algebraico de la función cuadrática. Se enfatiza *en la importancia y necesidad*

de evaluación significativa por parte de los docentes, aunado con la elaboración de le tareas que contribuyan en la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes.

3 Propuesta

Las actividades que se proponen para el diseño deben contemplar los siguientes aspectos:

- **El objeto matemático a desarrollar.** En nuestro caso se trabaja con el objeto matemático la Recta centrando la atención en sus diferentes registros de representación: analítico, gráfico o tabular; así como las transformaciones que se pueden hacer entre los diferentes registros o dentro de ellos. El propósito es que los estudiantes identifiquen diferentes características del objeto matemático que le permitan ir enriqueciendo su significado, las cuales podrá observar en los diferentes registro de representación: algebraico, numérico, gráfico y verbal, en los términos que lo señala Duval (1998). Por otra parte, se promueven las transformaciones al interior de un mismo registro y transformaciones entre diferentes registros de representación del mismo objeto matemático, a las primeras se llama tratamiento y a las segundas conversión, y a esta último tipo de transformación se le considera fundamental en el proceso de aprendizaje de un objeto matemático.

- **La estrategia de trabajo que se les propondrá a los estudiantes.** Las actividades didácticas están para ser trabajadas en tres momentos, en primera instancia que el alumno trabaje de manera individual para que utilice sus conocimientos previos y con ellos diseñe su propia estrategia para resolver la situación que se le presenta; en un segundo momento se le propone que se reúna en equipo para discutir las estrategias utilizadas , así como los resultados obtenidos con esto se espera que el estudiante tenga la oportunidad de argumentar sus respuestas y estrategias utilizadas, así como escuchar otras estrategias posible para enfrentar la misma situación; y finalmente el profesor promoverá una discusión grupal en la que los equipos podrán presentar sus estrategias o resultados. Los diferentes momentos en los que debe trabajar el estudiante le permiten al profesor identificar posibles dificultades que tienen los estudiantes. Algunas de las actividades se presentan en hojas de trabajo y en todos los casos se apoyan las actividades se apoyan en el uso del software Maple T.A.

- **El uso del software.** Al hacer uso de Maple T.A. se podrán realizar actividades a través de las que se espera que el estudiante vaya enriqueciendo el significado de la Recta, actividades de ejercicio y actividades de evaluación.

A continuación se presenta una hoja de trabajo en la que aparecen tres situaciones que forman parte de la Actividad 1 de la secuencia didáctica, en la hoja de trabajo están las indicaciones de lo que el estudiante debe hacer al ingresar a la página de Maple T.A., en estas hojas queda el registro escrito de los que los estudiantes hacen para resolver el problema que se les presenta.

HOJA DE TRABAJO No. 1

Resuelve individualmente los reactivos que se te presenten, realiza los cálculos que requieras y regístralos en los espacios en blanco que aparecen en esta hoja de trabajo. Una vez que respondas las situaciones que se proponen compara con tus compañeros de equipo tus resultados y estrategias.

Una vez que el estudiante ingresa a la página de Maple T.A. y abre la parte en la que están las actividades, estará en condiciones de ver las actividades que debe resolver. En este trabajo presentamos tres de las actividades que forman parte de la secuencia, en cada una de las actividades tendrá la oportunidad de estudiar diferentes aspectos de la Recta.

Situación 1. *Al abrir la primera actividad aparece una recta representada gráficamente, en el diseño de la actividad se establecen los rangos de los parámetros que aparecen en el registro algebraico de una recta, por ello a cada estudiante se le puede presentar una situación similar pero con parámetros diferentes.*

Situación 2. *A continuación se presenta otro tipo de situación que se le puede presentar al estudiante, en la que se le solicita que encuentre cierto tipo de ecuación de la recta.*

Situación 3. *En este caso debe encontrar o calcular la pendiente de la recta a partir de su representación gráfica.*

Participa en la discusión grupal siguiendo las instrucciones del profesor.

Hasta aquí termina la hoja de trabajo, a continuación se presentan algunos de lo que se espera que hagan los estudiantes de acuerdo al referente teórico en el que se basa el diseño de las actividades.

Comentarios

En el caso de la primera situación que se le presenta al estudiante en la Actividad 1, se tiene la representación gráfica de una recta y lo que se le pide es identificar la ordenada al origen, esto es, deberá identificar a partir de la gráfica el punto donde la recta corta al eje de las ordenadas. En este caso el estudiante para poder identificar el punto que se solicita deberá hacer una conversión del registro gráfico de la recta al registro numérico. En la segunda situación al estudiante se le proporciona la información de la recta en el registro numérico y se le pide que obtenga la representación algebraica, esto es, el estudiante deberá hacer una conversión del registro numérico al algebraico y también deberá hacer tratamientos (porque es común que inicien encontrando la ecuación en la forma punto pendiente) para poder llegar

en el registro algebraico a la ecuación de la forma pendiente ordenada en el origen. En la tercera y última situación que se presenta de nuevo se parte del registro gráfico de la recta y se solicita determinar el valor de la pendiente, este es un parámetro que gráficamente puede ser relacionado con la inclinación de la recta, pero para determinar su valor el estudiante deberá identificar al menos dos puntos por donde pase la recta, ya que con ellos puede establecer que tantas unidades se desplaza verticalmente cuando se desplaza horizontalmente cierto número de unidades.

4 Conclusiones

En lo que respecta al diseño de actividades: en este aspecto hemos superado algunas dificultades técnicas que se tenían con el software, ya que hemos tenido que ir aprendiendo a utilizarlo en el diseño, por ejemplo en el tipo de respuestas que se le piden al estudiante el software no siempre nos permite utilizar el mismo tipo de representación y eso nos ha obligado a buscar nuevas formas de hacer la pregunta o de plantear el tipo de respuesta. Otro elemento que hemos tenido que resolver es el problema de la escala de los ejes de coordenadas, el software no siempre nos proporciona la escala más conveniente. En lo que respecta a la puesta en escena de las actividades: se han implementado (a manera prueba) algunas de las actividades, con estudiantes del área de ingeniería, lo cual nos ha permitido mejorar los diseños tanto en lo que respecta a la redacción, la forma de presentar la respuestas posibles cuando son de opción múltiple o cambiar el tipo de pregunta que se hace. También nos ha permitido identificar dificultades conceptuales en los estudiantes, por ejemplo no identificar las características de la pendiente a partir de la gráfica o al hacer los cálculos para obtener la ecuación de la recta obtener la pendiente dividiendo la diferencia de las abscisas entre la diferencia de las ordenadas. Por último nos ha permitido identificar el tipo de conversiones y/o tratamiento que hacen los estudiantes al resolver las situaciones, y por tanto hacer los ajustes correspondientes.

Referencias

[1] Del Castillo, A. G. Tareas y exámenes en línea para el curso de Álgebra usando el software Maple T.A., 2009-2.

[2] Del Castillo, M. V. Diseño e implementación de prácticas y exámenes en línea para el curso de matemáticas II en el área económico-administrativa, 2010.

[3] Noriega, E. G. Diseño de reactivos en línea para la función cuadrática usando Maple T.A., Hermosillo, Universidad de Sonora, 2012.

[4] Universidad de Sonora. (s.f.). Recuperado el Noviembre de 2012, de `http://www.uson.mx/institucional/marconormativo/reglamentosacademicos/lineamientos_modelo_curricular.htm`

[5] Villalba, M. Diseño de bancos de reactivos en línea para matemáticas II usando Maple T.A., 2010.

[6] (s.f.). Recuperado el 12 de Noviembre de 2012, de http://licfis.fisica.uson.mx/licplan.html

[7] (s.f.). Recuperado el 13 de Noviembre de 2012, de http://licfis.fisica.uson.mx/archivos/docs/ProyPlanEst1.pdf

[8] (17 de Enero de 2013). Obtenido de http://www.mat.uson.mx/sitio/documentos/ding/geometria-analitica.pdf

[9] Armenta, L. D. El uso del software Maple T.A en la enseñanza de conceptos de estadística. Uso de la Tecnología en Educaión Matemática. A.M.I.U.T.E.M, pp. 123-131, 2010.

[10] MatUson. (s.f.). Recuperado el 14 de Diciembre de 2012, de http://www.mat.uson.mx/sitio/maple.php

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2013, pp. 70–76.

Nivel: Medio Superior

Una Secuencia Didáctica para el Desarrollo de Procesos Cognitivos en Geometría mediante el uso de un Geoplano Virtual (en GeoGebra)

Ulises Bladimir García Ortiz **Martha Cristina Villalba Gutiérrez**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: tndores@hotmail.com, mcris@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En este documento se reporta el diseño de una secuencia de actividades para el estudio de polígonos en el nivel bachillerato. Dicha secuencia tiene como soporte la utilización de un geoplano virtual construido mediante las herramientas que proporciona el software de geometría dinámica GeoGebra, proporcionando ejemplos de algunas ventajas del geoplano virtual frente al físico. Se menciona brevemente el fundamento teórico que subyace en la determinación de los objetivos de la secuencia y que a su vez permite darle sentido al diseño de cada una de las actividades que la conforman. Particularmente se destacan las características didácticas que esta herramienta tecnológica proporciona para llevar a cabo las actividades cognitivas propias del pensamiento geométrico.

1 Introducción

Como parte de los contenidos de la geometría del nivel bachillerato se encuentra el estudio de polígonos. En el caso particular de este tema, aunque se cuenta en la actualidad con una reforma curricular que enfatiza el enfoque por competencias en el que se hace explícito que la enseñ anza basada en la retención de información y dominio de algoritmos no constituyen su objetivo central, en los hechos *en la institución CECyTES del estado de Sonora* nos seguimos enfrentando a los problemas ya conocidos y reportados por diversos investigadores acerca del papel preponderante que en las escuelas juega la visión memorística para estudiarlos, quedando así anulada la posibilidad de entrar en contacto con situaciones específicas que permitan habilitar cognitivamente a los estudiantes con herramientas que van más allá de simplemente recordar: herramientas para entender, describir e interactuar con el espacio en el cual vivimos; habilidades y acciones que sí constituyen elementos y características de la competencia matemática que se aspira fomentar en el nuevo enfoque curricular.

Con esta idea de acercar a nuestros estudiantes a situaciones que les permitan evolucionar cognitivamente en y a través de la geometría, hemos propuesto una serie de actividades articuladas para el estudio de los triángulos y los cuadriláteros, las cuales se desarrollan haciendo uso de manipulaciones en el geoplano. Cabe decir que el uso de este apoyo didáctico (geoplano físico) se sugiere con fines constructivos desde el nivel básico de primaria, sin embargo, hemos encontrado algunas propuestas [2] para niveles superiores, y basados en ellas, hemos diseñado variantes para el estudio que nos interesa y hemos construido para tal fin una versión virtual del geoplano con las herramientas del software de geometría dinámica GeoGebra. En este trabajo nos referiremos a dicho *geoplano virtual* con sus siglas GV.

Consideramos que es justamente esta versión virtual la que potencia el desarrollo cognitivo puesto en juego, pues las posibilidades de construir los objetos que nos interesan y visualizar en ellos características y relaciones, se multiplican en este ambiente. Aunque en un inicio se presentó a los estudiantes la versión física del geoplano y se les propusieron actividades elementales en él, pronto se hicieron notar las limitaciones que tiene para visualizar elementos constituyentes de las figuras propuestas. Para ejemplificar lo dicho se muestra la Figura 1, en la cual se contrasta la distorsión que sufre "un segmento" (aislado o como parte de una figura geométrica) que se pretende manipular con ligas en el geoplano físico, frente a la fidelidad visual que mantiene la representación del segmento mediante las "ligas virtuales" del geoplano virtual (GV):

Figura 1: Contrastación de representaciones en los Geoplano físico y virtual

Resaltar este contraste resulta muy importante dado que toda la secuencia de actividades está diseñada sobre el soporte que brinda la visión teórica de Raymond Duval [1] en la cual establece que el desarrollo cognitivo de la geometría se debe a los procesos articulados de visualización, construcción y argumentación que el estudiante logre llevar a cabo. De ahí que disponer de la nitidez de trazos que brinda el GV, resulta en un apoyo imprescindible para llevar a cabo esos procesos en el estudio de la geometría para el nivel de bachillerato, en donde justamente se requiere precisar las componentes de las figuras que se perciben inicialmente de manera global, relacionar esos componentes, conjeturar propiedades, hacer verificaciones, etc.

2 Marco Teórico

Como ya se mencionó en el párrafo anterior, la secuencia de actividades estuvo diseñada tomando como guía teórica principal el papel que juegan en el desarrollo cognitivo de la geometría los procesos de visualización, construcción y razonamiento que expone Raymond Duval en un documento de discusión para la publicación *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century* [1] del ICMI (siglas en inglés de *International Commission on Mathematical Instruction*) de ese año. A continuación se describe lo que entendemos, de acuerdo al autor, por cada uno de ellos:

- El proceso de *visualización* hace referencia a las *representaciones espaciales* para la ilustración de proposiciones, para la exploración heurística de una situación compleja, para dar un vistazo sinóptico sobre ella, o para una verificación subjetiva.

- El proceso de construcción mediante herramientas, es la construcción de configuraciones que pueden servir como un modelo en el que la acción sobre los representantes y los resultados observados están relacionados con los objetos matemáticos que éstos representan.

- El proceso de *razonamiento* es aquel que se manifiesta en su relación con los *procesos discursivos*, que en niveles informales o formales, se llevan a cabo para la extensión del conocimiento, para la demostración y para la explicación.

En la Figura 2 se expone el diagrama propuesto por Duval [1] en el documento mencionado y enseguida la explicación que él mismo proporciona:

Figura 2: Esquema de los procesos cognitivos en Geometría según Duval

> "*... cada flecha representa la forma en la que una clase de proceso cognitivo puede apoyar a otra clase en cualquier tarea. La flecha 2 está punteada porque la visualización no siempre ayuda al razonamiento. La flecha 5(B) enfatiza que el razonamiento B puede desarrollarse de una manera independiente. En muchos casos podemos tener un circuito más largo. Por ejemplo 2–5(B)–3 puede representar la forma de encontrar el orden de construcción para una figura dada; 4–2–5(A) o 5(B) puede representar formas de describir un orden de construcción.*"

Es importante mencionar que el autor establece que estos procesos cognitivos, a pesar de ser independientes, están conectados, y su articulación es necesaria para potenciar el desarrollo del pensamiento geométrico. Por otra parte, también establece que una figura, para que represente un objeto matemático, debe de ser una configuración, es decir, una conjunción o una fuente de elementos constituyentes relacionados entre ellos que caracteri-cen la configuración. Además, una figura debe de estar anclada a una proposición que fije algunas propiedades representadas por los elementos constituyentes, esta ancla discursiva proporciona un acercamiento a la configuración del objeto. Con lo anterior se puede decir que existe una aprehensión perceptual (solamente visual) y una aprehensión discursiva (asociación de los elementos constituyentes y proporciones de determinan el objeto representado) de una figura geométrica.

3 Descripción de la Secuencia de Actividades

En la secuencia didáctica propuesta para el estudio de las figuras planas, se estableció el propósito de que se generaran y articularan estos tres procesos cognitivos, fomentando en la mayoría de los casos el razonamiento en un nivel A y relacionando de manera muy marcada los procesos de visualización y construcción. A los estudiantes se les proporcionó la guía de actividades a realizar en un formato de texto a manera de hojas de trabajo en las que se plantearon las tareas a realizar con sus correspondientes indicaciones de organización para trabajarlas; es decir, si su desarrollo se planteaba para desarrollarse en forma individual, en equipo o ante todo el grupo; igualmente si se usaba o no el recurso del GV. Así mismo se incluyó una especie de descripción de cada actividad en términos de los procesos cognitivos por promover. La secuencia engloba tres actividades y cada una de ellas consta de un promedio de veinte tareas que a su vez incluyen cuestionamientos diversos. Las actividades son las siguientes:

- *Figuras en un geoplano.* Cuadriláteros, Triángulos y Polígonos
- *Medición en un geoplano.* Áreas y Perímetros

- *Medición en el geoplano.* Longitud de segmentos de rectas, Ángulos rectos

En general, el proceso de diseño de la secuencia inició con una revisión documental sobre resultados de investigaciones y artículos que tratan el tema o el uso de tecnología, en los planes de estudios y programas educativos para la geometría del nivel medio y algunos textos. Con esta información se esquematizó la secuencia de actividades de acuerdo a la evolución de los procesos cognitivos referidos en la visión teórica. Finalmente, se elaboraron las actividades con su respectiva argumentación para cada una de las tareas y su relación con los procesos cognitivos.

El tema que se seleccionó fue el de los polígonos. Se consideró su viabilidad para usar el recurso del GV en las actividades propuestas para hacer geometría, es decir, explorar sus características, conjeturar sus propiedades y verificarlas de una manera natural, sin uso de formulas, ni uso excesivo del álgebra, sino sólo mediante la construcción dentro del marco de trabajo del propio geoplano y las reglas que regulan las propiedades de las configuraciones que es posible construir en él. Estas caractería sticas de trabajo constituyen el núcleo de esta propuesta, pues se considera que aun teniendo el recurso de manipulación, el rigor de seguir "las reglas" para construir, caracterizar y para medir, tanto en unidades lineales como cuadradas, genera un símil concreto de la manera de razonar con sólo enunciados o proposiciones ante distintas tareas geométricas. En las Figuras 3, 4 y 5 se muestran extractos de las hojas de trabajo proporcionadas a los estudiantes:

Figura 3: Hoja de trabajo: Problema 2

Figura 4: Hoja de trabajo: Ejercicio 2.2 B

Figura 5: Hoja de trabajo: Caso C

Como se aprecia en la Figura 5, la "plantilla" del GV incluye la pregunta central para el caso C; de manera similar, para cada una de los casos se colocó una tecla que activa el que corresponda.

El funcionamiento de las teclas que se requería se logró tras sucesivos refinamientos de la programación inicial hecha en el GeoGebra, pues en un principio se tuvieron dificultades al permitir manipulaciones que anulaban la posibilidad de al menos "ver" la configuración de interés; un ejemplo de esto se muestra en la Figura 6:

Cabe aclarar que los autores no tenemos un entrenamiento previo en el uso del GeoGebra; fue con base en las guías y ejemplos de construcciones ya hechas y disponibles en el propio sitio donde se descarga gratuitamente el software, que pudimos apoyar este desarrollo del GV, que como antes se mencionó, para lograrlo a un nivel de funcionalidad satisfactoria, se tuvieron previamente resultados burdos que poco a poco se fueron refinando hasta lograr lo requerido.

4 Conclusiones

Consideramos que el apartado anterior en el que tratamos de dar una muestra descriptiva de la secuencia propuesta no es suficiente para comunicar la gran variedad de situaciones

Figura 6: Hoja de trabajo

que fue posible plantear a los estudiantes haciendo uso del GV. Por otra parte, una vez que se logró tener su funcionalidad al nivel requerido para llevar a cabo las tareas programadas, se aplicó la secuencia completa a 15 estudiantes integrantes de un curso de verano. En esta experiencia se tuvo oportunidad de probar la eficacia del GV como apoyo para la construcción y visualización que el discurso geométrico requiere para estudiantes del nivel de bachillerato.

A manera de reflexión final queremos expresar que consideramos que los cambios en la enseñanza de la geometría son impuestos no sólo por las nuevas concepciones en los fundamentos de la propia geometría y los enfoques en su manera de enseñarla y aprenderla, sino por el papel central que está tomando el uso de la tecnología en esta actividad; por ello vemos con entusiasmo que cada vez tenemos a nuestro alcance mayores posibilidades de hacer de las herramientas tecnológicas apoyos adecuados a las particularidades de nuestras intenciones didácticas. El software de geometría dinámica gratuito nos abre un mundo de posibilidades para mejorar nuestra práctica docente.

Referencias

[1] Duval, R. La geometría desde un punto de vista cognitivo. En ICMI Study: *Perspectives on the teaching of geometry for the 21th century*. Kluwer Academic Publishers, 1998.

[2] Golos, E. B. *Patterns in mathematics*. Ohio University, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Massachusetts, 1981.

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2013, pp. 77–82.

Nivel: Superior

Estrategia Didáctica para el Análisis e Interpretación de un Diagrama de Caja mediante Simulación en MATLAB

Gudelia Figueroa Preciado, Irma Nancy Larios Rodríguez, María Elena Parra Ramos

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: gfiguero@gauss.mat.uson.mx, nancy@gauss.mat.uson.mx, meparra@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Se presenta una estrategia didáctica que facilita la construcción, comprensión, análisis e interpretación del gráfico "diagrama de caja y bigotes", y en la cual se utilizan técnicas de simulación en el software MATLAB. El objetivo es que mediante este gráfico, el estudiante pueda describir adecuadamente las principales características de una muestra y corroborar, de manera gráfica, la posibilidad de que ésta provenga de una población distribuida normalmente.

1 Introducción

El presente trabajo tiene como base el uso del software MATLAB, el cual coadyuvará en la construcción, comprensión, análisis y posterior interpretación del gráfico "diagrama de caja y bigotes"; esto con el objetivo de no dirigir esfuerzos solamente a la obtención de resultados, sino también en la conceptualización y análisis de la información. En este análisis se incluye, adicionalmente a la interpretación básica de un diagrama de caja, el utilizarlo para verificar la posibilidad de que la muestra en estudio provenga de una población distribuida normalmente. Aunque esta idea la sugiere Tukey (1977) [1] al proponer el gráfico en mención, el corroborarla no resulta sencillo para un estudiante.

De acuerdo a nuestra experiencia docente hemos observado que a los estudiantes se les dificulta la interpretación correcta de ciertas características de un diagrama de caja. Les resulta sencillo efectuar interpretaciones relacionadas con la localización y variabilidad de los datos observados, así como con la simetría o forma de la distribución de éstos. Sin embargo, les es difícil interpretar la ocurrencia de datos extremos, que en ocasiones pueden ser evidencia de que la población de la cual se tomó la muestra no se distribuye normalmente; aunque estos datos también pudieran ocurrir en muestras tomadas de poblaciones normalmente distribuidas. Es por ello que en el presente trabajo se analiza, por medio de procedimientos de simulación, la posibilidad de ocurrencia de datos extremos cuando se muestrea de poblaciones distribuidas normalmente. Para ello se simulan muestras de diferentes tamaños, provenientes de una población normal con media y desviación estándar fijas. El análisis de los resultados de estas simulaciones permite que el estudiante pueda cuantificar la probabilidad de que ocurran datos extremos en estas muestras y de esta manera se le proporcionan elementos suficientes para decidir si una muestra en estudio podría o no considerarse proveniente de una población normalmente distribuida.

2 Marco Teórico

Minnaard, Rabino , García, Moro & Minnaard (2002) [2] indican que un gráfico es una de las herramientas más útiles en el estudio de la mayoría de las disciplinas, ya que permite una visión global del fenómeno sometido a investigación. Con ello, varios aspectos son más rápidamente perceptibles que la observación directa de los datos numéricos.

El diagrama de caja y bigotes propuesto por Tukey (1977) utiliza en su construcción, medidas descriptivas como son la mediana, primer y tercer cuartil, rango intercuartílico, así como el cálculo de ciertas barreras o bardas. La función de éstas últimas no es simplemente el declarar si un dato puede considerarse atípico o no, sino identificar observaciones que requieren mayor atención (Frigge, Hoaglin, & Iglewicz, 1989) [3]. De esta manera y utilizando tan sólo las medidas descritas, el diagrama de caja permite interpretar de manera muy sencilla la información contenida en una muestra.

Choonpradub, Hubert & Vandervieren (2008) [4] recomiendan la construcción de diagramas de cajas cuando se tienen distribuciones continuas y unimodales y proponen utilizarlos para verificar, de manera gráfica, supuestos de normalidad en la población de donde se extrajo la muestra. Choonpradub y McNeil (2005) [5] exponen que este gráfico también permite identificar la presencia de bimodalidad en los datos, cuestión que generalmente no se menciona en los libros de texto y que ellos exponen de una manera muy sencilla. Por ejemplo, muestras bimodales pueden identificarse por medio de un diagrama de caja cuando en éste se presentan bigotes muy cortos, pues ello indica la posibilidad de que ahí se alcanza otra moda. Esta situación se ha explorado en actividades suplementarias donde también se utiliza el apoyo del software MATLAB, pero por cuestiones de espacio no se incluyen en el presente trabajo.

3 Metodología

La actividad de simulación que se propone, se efect'ua en un laboratorio de cómputo donde se dispone del software MATLAB y se lleva a cabo en equipos formados por seis estudiantes. Esta actividad se ha llevado a cabo con estudiantes del área de ingeniería y/o ciencias exactas. Antes de iniciar la actividad de simulación, se expone el procedimiento de construcción de un diagrama de caja y la idea que llevó a Tukey (1977) a proponerlo como una técnica exploratoria que permitiera estudiar la localización, variabilidad y posible forma de la distribución de la cual provienen los datos, así como el contar con un medio para verificar gráficamente el supuesto de la normalidad de la población en estudio.

Después de explicar la construcción de un diagrama de caja, se procede a calcular, manualmente, las medidas descriptivas necesarias para construir los diagramas de caja de tres conjuntos de datos con diferentes tamaños de muestra. Se solicita a los estudiantes una descripción de éstos y se les pide argumentar si éstos pudieran considerarse provenientes de una distribución normal. La práctica ha mostrado que es recomendable que al menos uno de estos conjuntos origine un diagrama de caja con un dato extremo; ello con el fin que el estudiante decida, previo a las simulaciones que realizarán, si la muestra que origina tal diagrama pudiera considerarse provienente de una distribución normal.

Una vez realizado lo anterior, se proporciona a los estudiantes las instrucciones de MATLAB que les permitirán simular muestras de diferentes tamaños, provenientes de una distribución normal y calcular en cada una de ellas sus cuartiles, rango intercuartílico, dato mayor, dato menor, así como sus correspondientes barreras interiores y exteriores. Los tamaños de muestra que se consideraron para ésta actividad fueron de 23, 67, 127, 443 y 999. Los estudiantes, deben contar el número de muestras que tienen al menos un dato atípico suave (aquellos que están por fuera de las barreras interiores, pero no cruzan las barreras exteriores) o bien un dato aberrante (los que están por fuera de las barreras exteriores). Tres estudiantes, de cada uno de los equipos, simulan mil muestras de cierto tamaño asignado, por ejemplo 23, y los otros tres estudiantes del equipo, simulan diez mil muestras de ese mismo tamaño. En todas ellas se calculan las medidas anterioremente señaladas. La idea de esto es que el estudiante observe que al simular más muestras y al aumentar después el tamaño de éstas, las barreras tanto interiores como exteriores, tienden a los valores teóricos que se calculan cuando se presenta la construcción de un diagrama de caja.

4 Propuesta

El utilizar software en el salón de clases, permite cambiar el enfoque didáctico tradicional; es posible poner menos énfasis en manipulaciones mecánicas, pero es muy importante no perder de vista el rigor analítico. Esto es, no debe caerse en el error de utilizar software tan sólo para evitar cálculos tediosos sin analizar los resultados que éste proporciona.

Es importante señalar que para una persona con experiencia en análisis exploratorio de datos, puede resultar sencillo interpretar un diagrama de caja de una manera adecuada. Sin embargo, un estudiante que toma un curso de estadística a nivel licenciatura, necesita comprender los usos y limitaciones de un diagrama de caja. Así pues, se pretende que el estudiante pueda, con base en esta t'ecnica gráfica, no sólo describir ciertas características descriptivas de la muestra sino poder inferir si los datos pueden considerarse provenientes de una población distribuida normalmente. En este sentido, la situación más difícil para un estudiante, es decidir cuándo un dato puede considerarse un valor atípico, bajo un supuesto de normalidad.

Figura 1: Cuartiles y barreras interiores en una distribución normal con $\mu = 0$

La estrategia que se propone para implementar la actividad diseada es la siguiente:

- En salón de clase se muestra que para una variable aleatoria X distribuida normalmente con media $\mu = 0$ y desviación estándar σ, como la mostrada en la Figura 1, se tienen las siguientes probabilidades:
  - $P(-0.6745\sigma X \leq 0.674\sigma) = 0.5$;
  - $P(X \leq 0.674\sigma) = 0.75$;
  - $P(X \leq -0.674\sigma) = 0.25$.

Esto es, 0.6745σ y -0.6745σ son los cuartiles teóricos para esta distribución normal. Considerando éstos, pueden calcularse las barreras interiores y las exteriores y con ellas conocer la probabilidad de ocurrencia de valores extremos. Estos cálculos muestran al estudiante que la probabilidad de que una observación se encuentre fuera de las barreras interiores, en esta distribución normal con media $\mu = 0$ y desviación σ, es:

$$P(X \leq -2.698\sigma) = P(X \geq 2.698\sigma) = 0.0035.$$

- Por otra parte, se calcula también la probabilidad de que en esa misma distribución normal, una observación tome valores por fuera de las barreras exteriores, lo cual resulta:
$$P(X \leq -4.721\sigma) = P(X \geq 4.721\sigma) \approx 0.$$

- Después se muestra que en una distribución normal estándar, esto es, donde $\sigma = 1$, tendremos que el primer y tercer cuartil de la distribución están dados por $Q_1 = -0.6745$ y $Q_3 = 0.6745$, el rango intercuartílico es $RI = Q_3 - Q_1 = 1.349$ y las bardas o barreras interiores son $f_1 = Q_1 - 1.5RI = -2.698$ y $f_3 = Q_3 + 1.5RI = 2.698$. También se calculan las barreras exteriores que resultan $F_1 = Q_1 - 3RI = -4.7215$ y $F_3 = Q_3 + 3RI = 4.7215$.

Todo lo anteriormente expuesto se calcula ante los estudiantes y se explica porqué propuso Tukey (1977) el definir las barreras interiores y exteriores de esa manera. Se plantea entonces, utilizar esta herramienta para decidir si cierto conjunto de datos se puede considerar como una muestra tomada de una población normalmente distribuida; esto es, se pretende contar con una herramienta gráfica que permita, de cierta manera, verificar el supuesto de normalidad en los datos.

Cabe señalar que, aunque generalmente se explican detalladamente todos estos cálculos, el estudiante tiende a suponer que en muestras tomadas de una población que se distribuye normalmente, no es posible que ocurran datos por fuera de las bardas interiores y mucho menos fuera de las exteriores. Es por ello que consideramos importante la propuesta de simular muestras de diferentes tamaños, y provenientes de una distribución normal y en éstas contabilizar el número de ocasiones que algún elemento de la muestra se encuentre fuera de las barreras interiores y de las exteriores.

5 Resultados

La tabla que se muestra a continuación, resume los resultados obtenidos por un grupo de 38 estudiantes del área de ciencias exactas, en el que se formaron seis equipos de trabajo. En esta tabla $x_{(1)}$ y $x_{(n)}$ representan, respectivamente, el dato más pequeño y el más grande de todas las muestras que se simularon para un tamaño específico. En las columnas cuyo encabezado es $\bar{f}_1$, $\bar{f}_3$, $\bar{F}_1$ y $\bar{F}_3$ se presenta el valor que se obtiene al promediar las barreras interiores y las exteriores, para el total de muestras simuladas, en cada uno de los tamaños de muestras establecidos. Finalmente, en las últimas cuatro columnas se contabiliza el número de muestras que contienen al menos un dato atípico suave y/o aberrante.

Tabla 1: Resultados de las simulaciones efectuadas

Algunos de los aspectos que los estudiantes observan cuando se resumen los resultados de las simulaciones realizadas por todo el grupo, en una tabla como la mostrada en Tabla 1, son:

a) Es posible observar datos atípicos suaves y en ocasiones datos aberrantes, aún cuando la muestra se haya generado a partir de una distribución normal.

b) La existencia de un dato atípico suave no puede tomarse por si misma como una evidencia de no-normalidad de la población de donde se extrajo la muestra.

c) Conforme el tamaño de muestra aumenta es más probable poder observar las colas de la distribución, ya que $x_{(1)}$ y $x_{(n)}$ aumentan en magnitud.

d) Cuando el tamaño de muestra aumenta, tanto los cuartiles como las barreras interiores y exteriores tienden a los valores teóricos calculados previamente para el caso de la normal estándar.

e) Conforme es más grande el tamaño de muestra es más probable observar datos atípicos suaves y quizá algún dato aberrante.

Es importante señalar que las simulaciones se efectuaron en el software MATLAB por la disponibilidad de éste en nuestros laboratorios de cómputo. Sin embargo, una actividad similar puede llevarse a cabo utilizando software libre como R o bien algún software estadístico que permita simulación de datos.

6 Conclusiones

Las simulaciones efectuadas en MATLAB permiten que el estudiante pueda decidir de una manera más adecuada, cuándo la muestra en estudio puede considerarse proveniente de una distribución normal, así como también el interpretar correctamente ciertas características descriptivas como son su localización, dispersión y la forma de la distribución de la población muestreada. Por otra parte, aún cuando son muy pequeñas las probabilidades teóricas de que ocurran datos atípicos suaves o bien datos aberrantes al muestrear de una población normal, el estudiante observa que la ocurrencia de estos datos depende en gran medida del tamaño de muestra que se esté utilizando.

En resumen, la experiencia obtenida al utilizar esta actividad ha mostrado que la realización del proceso de simulación, el análisis de los resultados obtenidos, aunado al aspecto teórico que se cubre generalmente en clase, proporcionan al estudiante herramientas suficientes para decidir de una manera más correcta si una muestra en particular proviene de una distribución que pueda considerarse normalmente distribuida, resultado que no se alcanza cuando solamente se imparte el aspecto teórico de la construcción del diagrama de caja y se resuelve un par de ejercicios en el salón de clase.

Referencias

[1] Tukey, J. W. *Exploratory data analysis.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1977.

[2] Minnaard, V., Minnaard, C. , Rabino, C., García, M. & Moro, L. El uso de las gráficas en la escuela: otro lenguaje de las ciencias. Revista Iberoamericana de Educación, 2002. Recuperado el 1 de noviembre del 2011 de `http://www.rieoei.org/experiencias34.htm`.

[3] Frigge, M., Hoaglin, D. C., & Iglewicz, B. Some implementations of the boxplot. The American Statistican, Vol. 43, No. 1, pp. 50–54, 1989.

[4] Hubert, M., & Vandervieren, E. An adjusted boxplot for skewed distributions. Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 52, pp. 5186–5201, 2008.

[5] Choonpradub, C., & McNeil, D. Can the boxplot be improved? Songklanakarin J. Sci. Technol., Vol. 27, No. 3, pp. 649–657, 2005.

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2013, pp. 83–88.

Nivel: Básico

El "Descubrimiento" de las Tablas de Multiplicar y sus Efectos

Nohemí Baca Chávez **Oscar Jesús San Martín Sicre**

Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Pedagógica Nacional–IFODES
e-mail: noe_baca@hotmail.com, osicre@hotmail.com

Resumen

Se presenta un reporte de tesis en el que se plantea un estudio de caso con alumnos de segundo grado de primaria, al que se aplicó una situacin didáctica a la manera postulada por Guy Brousseau, combinada con una situación didáctica de aprendizaje por descubrimiento. El propósito único era el aprendizaje significativo de las tablas de multiplicar, sin embargo, se agregó un propósito más: su memorización. Con el fin de comprobar la eficacia de la estrategia, se realizaron pilotajes previos a la investigación, con grupos diferentes al del estudio, así como pilotajes posteriores con alumnos de grados diferentes, con el fin de explorar más a fondo los resultados. El marco teórico se conforma por los aportes de G. Brousseau, D.P. Ausubel, J. Piaget.

1 Introducción

A partir de los Planes y Programas de Estudio de 1993 de la Secretaría de Educación Pública (SEP) se promueven las habilidades para el aprendizaje en base a ejercicios intelectuales y reflexivos; al iniciar el ciclo escolar 2008–2009 y como parte de una nueva reforma aparece el *Enfoque por Competencias* en Educación Básica.

En el curso básico de formación continua para maestros en servicio (SEP, 2009) se hace alusión a la lectura de las *sociedades de la información* a las *sociedades del conocimiento* (UNESCO, 2005) en la que se mencionan cuatro dimensiones que deben favorecerse en educación, la primera y que atañe a este trabajo es la establece que deben promoverse habilidades lectoras, matemáticas, científicas y tecnológicas superiores que permitan al alumno pasar del conocimiento simple al complejo para poder comprender y resolver situaciones y/o problemas interrelacionados y sistémicos en un contexto incierto y cambiante. Sin embargo, y a pesar de todas estas propuestas, los exámenes del *Programa Internacional de Evaluación* (PISA) y *Evaluación Nacional de Logro Académico* (ENLACE) revelan que México debe enfrentar diferentes retos para poder elevar la calidad educativa, considerando los pobres resultados en Español y Matemáticas.

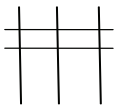
2 Problema

En la enseñanza-aprendizaje de las tablas de multiplicar se tiene que si no se logra un aprendizaje significativo, entonces tampoco se logrará un efectivo aprendizaje del algoritmo de la multiplicación, por lo tanto no se podrán resolver los problemas que incluyan este tipo de operación. Podemos también agregar que las tablas de multiplicar es un prerrequisito para aprender el algoritmo de la división.

La situación anterior se agrava aparentemente si se toma en cuenta que las tablas de multiplicar deben ser memorizadas, en contraposición al aprendizaje significativo.

3 Metodología

Se diseñó una estrategia que combina una situación didáctica a la forma que plantea G. Brousseau, con una situación didáctica de aprendizaje por descubrimiento, tomando como referencia algunos aspectos del uso de varitas de la multiplicación china.



3×2 (el resultado se obtiene al contar los puntos de intersección)

Se aplicó en el grupo de la manera siguiente:

Devolución del problema: la incógnita a resolver era el número de clavos a utilizar para reconstruir una cerca que se había derrumbado.

Fase a- didáctica de acción: se les entregó material a los alumnos para reproducir la cerca y realizar el conteo de los puntos de intersección de las rectas.

Fase a- didáctica de formulación: el niño, en base a la manipulación de los materiales y a la interacción con sus compañeros, explicó con sus propias palabras los resultados a los que llegó.

Fase a- didáctica de validación: los niños argumentaron sus respuestas basándose en los resultados arrojados por sus producciones.

Fase a- didáctica de institucionalización: el maestro informó a los alumnos la forma convencional de las tablas de multiplicar y su uso.

4 Teoría

Para el desarrollo de este trabajo se combinó o adecuó una situación didáctica de aprendizaje por descubrimiento con situaciones didácticas constructivistas, como las plantea Guy Brousseau (1997), se asume entonces que un estudiante aprende por descubrimiento en un contexto constructivista un contenido cuando se cumplen las condiciones siguientes.

El alumno, a partir de un problema diseñado por el docente y una actividad didáctica de aprendizaje por descubrimiento, obtiene una formulación equivalente del mismo contenido escolar, sin que este haya sido directamente transmitido por el docente mismo.

5 Resultados Obtenidos

1) Los alumnos construyeron las tablas de multiplicar y las memorizaron apoyándose en una versión del juego llamado “memorama” diseñada para para este propósito.

2) Descubrieron dos dignificados de la multiplicación: Conteo abreviado y suma abreviada.

3) Los padres de familia reconsideraron los efectos del juego en el proceso enseñanza-aprendizaje.

4) Mejoraron su desempeño en la resolución de problemas de multiplicación.

5) Descubrieron la propiedad de la conmutatividad mediante los giros a la retícula.

6) Al comparar resultados de tablas diferentes descubrieron que hay resultados iguales con multiplicadores diferentes, por ejemplo $3 \times 4 = 2 \times 6$.

7) Avanzaron rápidamente en ejercicios y problemas de mayor complejidad en el libro de texto.

8) Al llegar al último bloque del libro de texto, encontraron los arreglos rectangulares y la similitud con el esquema de la retícula.

9) Sus procedimientos propios y descubrimientos continúan y los expresan a sus compañeros: “no necesitas aprenderte toda la tabla, te aprendes uno sí, porque le sumas al que te aprendiste” $3 \times 4 = (3 \times 3)$ más (3×1). Factorización.

10) Después de memorizar una tabla, tenía que pasarse a otra pues se perdía el interés y no podía continuarse jugando.

11) La estrategia motivó a los alumnos canalizados a educación especial, y con esto se logró que ellos memorizaran al igual que los demás las tablas hasta el 9, en un tiempo aproximado de una semana.

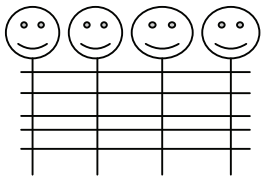
12) Al organizarse en equipos, las niñas propusieron se formaran por separado niños y niñas por la razón de que los alumnos eran demasiado lentos (en los videos se aprecia que todos los equipos de niñas terminan antes que los de niños).

13) Por decisión propia los niños comenzaron a buscar en Internet información acerca del invento de las tablas, quién las “inventó”, de dónde “salieron” y comunicando sus hallazgos a sus compañeros en su propio lenguaje, expresando sus dudas al encontrar información que se contraponía y elaborando sus propias conjeturas sobre lo encontrado.

14) A partir del desarrollo de la actividad, los alumnos se resistieron a las actividades tradicionales propuestas por el docente y ellos mismos proponían otras formas de abordar los conocimientos, y otras veces solicitaban usar sus propios procedimientos.

15) Se aprovecharon los buenos resultados de la estrategia aplicada para el desarrollo de unos de los últimos temas a tratar en segundo grado, el de la repartición, entendiendo que si la división es la operación inversa a la multiplicación, podría usarse el mismo esquema para que los niños pudieran formarse una representación gráfica que recuperara la idea de la retícula, inicialmente, como se muestra a continuación.

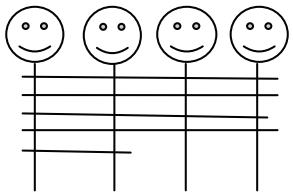
Problema: se repartirán veinte lápices entre cuatro niños (división exacta).



Los niños encontraron fácilmente el resultado de la división sin conocer la mecánica ni el algoritmo de la misma.

Para esquematizar un problema donde quedara residuo, se realizó la forma siguiente.

Se repartirán veintidós lápices entre cuatro niños.



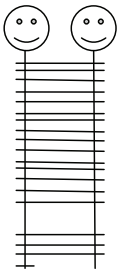
Los niños consideraban que los dos últimos no podían repartirse igual para todos y los dejaban como sobrantes.

Por petición de una docente de tercer grado se aplicó la estrategia a su grupo, el cual tenía dificultad para lograr un conocimiento eficaz de la división, y con el fin de explorar el posible resultado de la aplicación de la estrategia, este grupo de tercer grado fue uno de los que participó en el primer pilotaje, por lo que se retomó la actividad, hasta avanzar al problema siguiente:

$$\begin{array}{r} 17 \\ 2\,\overline{)\,35} \\ 15 \\ 1 \end{array}$$

Al presentarles otro ejercicio para su resolución, una de las alumnas que terminó en un tiempo mucho menor que sus compañeros aclaró que ocupó menos tiempo pues en vez de tomar una cifra, dividió las dos de una sola vez, y su operación la presentó de la siguiente manera:

```
   18
2 | 37
    1
```

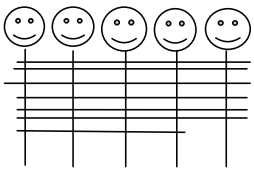


Se felicitó a la alumna, al mismo tiempo que se analizó en el grupo lo que pasaría si el dividendo fuera más grande, la situación reveló que el esquema sería entonces más largo y se convertiría en un proceso muy tardado, los alumnos argumentaron que era aún más tardado cuando dividían haciendo restas. Se planteó el siguiente problema a la niña ¿Qué harías para dividir 345/5? La niña hizo lo siguiente:

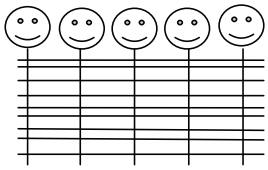
1er. Esquema

```
   69
5 | 345
    45
     0
```

2do. Esquema



3er. Esquema



Los alumnos en ejercicios posteriores realizaron de manera fácil las divisiones, se analizaron los argumentos de los mismos, comparando las 2 formas (corta y larga) que usualmente se utiliza para el desarrollo de la división en tercer grado, con la que llevaron a cabo en esta situación.

Procedimiento de 3er.grado

```
    1139
4 | 4 5 5 8
  -4
   05
  -4
    15
  -12
     38
   -36
      2
```

Procedimiento abreviado

```
    1139
4 | 4 5 5 8
     05
       15
        38
         2
```

Procedimiento encontrado

```
    1139
4 | 4 5 5 8
      1 5
        3 8
          2
```

Para concluir este trabajo mencionamos que los alumnos de los dos grupos, al finalizar el ciclo escolar, fueron capaces de resolver problemas de reparto con su explicación pertinente y con la correspondiente comprobación del algoritmo.

Referencias

[1] Brousseau, G. *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathematics 1970–1990*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1997.

[2] PISA en español, OECD, 2006. Recuperado de `http://www.oecd.org/pisa/`

[3] Planes y programas de estudio 1993. Educación Básica. Primaria, Secretaría de Educción Pública (SEP), México, D.F., 1993.

[4] Prioridades y retos de la educación básica. Curso básico de formación continua. Ciclo escolar 2008–2009, Secretaría de Educación Pública (SEP), Gobierno Federal, SNTE, SEP, SHCP, SEDESOL, SALUD, Subsecretaría de Educación Básica, Mxico, D.F., 2008.

[5] Resultados ENLACE 2008, 2009. Secretaría de Educación Pública (SEP). Recuperado el día 4 de mayo del 2010 de la dirección electrónica: `http://201.175.42.249/ENLACE/Resultados2009/Basica2009/r09CCT`

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2013, pp. 89–96.

Nivel: Medio Superior y Superior

El Diseño de Actividades Didácticas para el Tema de Medidas Descriptivas del Curso de Bioestadística

Alejandrina Bautista Jacobo

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: ale@gauss.mat.uson.mx

Resumen

El objetivo de este trabajo es presentar una actividad didáctica de una secuencia de actividades que se han diseñado para el curso de bioestadística que se imparte en la escuela de medicina y nutrición. Dicha actividad lleva como objetivo el que los estudiantes puedan transitar de una gráfica a otra y analizar la variación y la distribución de los datos a partir de las medidas descriptivas.

1 Introducción

Sabemos que la estadística es una disciplina práctica que nos proporciona las herramientas matemáticas para organizar, presentar y analizar información real y poder llegar a generalizar las conclusiones obtenidas de una muestra hacia la población muestreada. Es sin duda una materia cuyo estudio nos permite entender e interpretar de manera correcta los diferentes fenómenos reales que acontecen en nuestro entorno y desarrollar un pensamiento crítico el cual nos lleve a evaluar adecuadamente los datos disponibles para la toma de decisiones [1]. Lamentablemente, nos encontramos en esta materia con un alto índice de reprobación en comparación con las otras materias que cursan los estudiantes. Algunos de los factores que se observa que influyen en este índice de reprobación son las escasas herramientas matemáticas con las que llegan a la universidad. Son muchos los tipos de errores o los diferentes obstáculos que nos encontramos en el aprendizaje de la estadística. En cuanto a la representación gráfica y tabulación de datos, Batanero y colaboradores [2] mencionan que: *"La destreza en la lectura crítica de datos es un componente de la alfabetización cuantitativa y una necesidad en nuestra sociedad tecnológica"*.

Por su parte Curcio (1989), citado por Batanero [2], ha exhibido cuatro niveles distintos para la lectura de tablas y gráficas que pueden aplicarse en el aula:

(a) *"Leer los datos": este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo.*

(b) *"Leer dentro de los datos": incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas.*

(c) *"Leer más allá de los datos": requiere que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico.*

Regularmente los estudiantes encuentran dificultades para *"leer dentro de los datos"* y *"leer más allá de los datos"*.

En cuanto a los conceptos de la media y la mediana, la mayoría de los estudiantes no tiene un conocimiento funcional o significativo, no le dan una interpretación práctica a estos conceptos. Algunos no pueden identificar cual sería la medida descriptiva más indicada para representar a un conjunto de datos dependiendo de la distribución de los mismos. No pueden relacionar estas medidas en una gráfica ni detectar por ejemplo, los efectos que pudieran tener sobre ellas algunos valores atípicos. Por otro parte, Wild y Pfannkuch (1999) citado por Batanero [3] menciona que el razonamiento estadístico es una componente esencial del aprendizaje que incluye cinco componentes fundamentales:

1) Reconocer la necesidad de los datos: la base de la investigación estadística es la hipótesis de que muchas situaciones de la vida real sólo pueden ser comprendidas a partir del análisis de datos que han sido recogidos en forma adecuada. La experiencia personal o la evidencia de tipo anecdótico no es fiable y puede llevar a confusión en los juicioso toma de decisiones.

2) Transnumeración: los autores usan esta palabra para indicar la comprensión que puede surgir al cambiar la representación de los datos. Al contemplar un sistema real desde la perspectiva de modelización, puede haber tres tipos de transnumeración: (1) a partir de la medida que "captura" las cualidades o características del mundo real, (2) al pasar de los datos brutos a una representación tabular o gráfica que permita extraer sentido de los mismos; (3) al comunicar este significado que surge de los datos, en forma que sea comprensible a otros.

3) Percepción de la variación: la recogida adecuada de datos y los juicios correctos a partir de los mismos requieren la comprensión de la variación que hay y se transmite en los datos, así como de la incertidumbre originada por la variación no explicada. La estadística permite hacer predicciones, buscar explicaciones y causas de la variación y aprender del contexto.

4) Razonamiento con modelos estadísticos: cualquier útil estadístico, incluso un gráfico simple, una línea de regresión o un resumen puede contemplarse como modelo, puesto que es una forma de representar la realidad. Lo importante es diferenciar el modelo de los datos y al mismo tiempo relacionar el modelo con los datos.

5) Integración de la estadística y el contexto: es también un componente esencial del razonamiento estadístico.

Lo expuesto anteriormente nos ha llevado al diseño de una serie de actividades de aprendizaje tomando en cuentas los puntos señaladas anteriormente y algunas consideraciones metodológicas las cuales se exponen en el siguiente apartado.

2 Algunas Recomendaciones Metodológicas

➢ *La resolución de problemas como medio para el aprendizaje.*

La importancia de incorporar la resolución de problemas en la enseñanza en diferentes niveles educativos es ampliamente difundida por muchos investigadores, como dice E. Dual en [4]):

> *"La enseñanza de las matemáticas por medio de la resolución de problemas es la mejor manera de preparar a los estudiantes para enfrentar los problemas que se les presentarán en sus estudios y, a veces, también en la vida. Las habilidades adquiridas en la resolución de problemas son flexibles y muy adecuadas para aplicarse en nuevas situaciones".*

➢ *El aprendizaje basado en proyecto y trabajo colaborativo.*

Una de las sugerencias que se hacen para lograr la motivación por parte del alumno, es involucrarlo al inicio del curso en proyectos de investigación en donde puedan aplicar los conocimientos de la estadística y poder desarrollar un pensamiento estadístico. Particularmente en los cursos de bioestadística que se imparten en el área de las ciencias biológicas y de la salud, el alumno debe jugar el papel de investigador proponiendo un tema a investigar relacionado con su área, mismo que lo llevarán a recolectar datos, a plantear preguntas de investigación, a diseñar la estrategia de muestreo, a plantear las hipótesis y sobre todos a detectar el método estadístico adecuado para su investigación. La estrategia didáctica de involucrar a los estudiantes al inicio del curso de estadística en proyectos de investigación ha sido sugerida por muchos investigadores y educadores en la materia. Al respecto Kuiper [5] declara que esta estrategia ayuda al estudiante a entender las condiciones bajo las cuales se debe de realizar un estudio y le da el conocimiento para discernir las técnicas apropiadas que se deben de utilizar.

Además de lo anterior, es importante impulsar el trabajo colaborativo entre los estudiantes. Este permite crear en el aula un ambiente de aprendizaje significativo para el alumno. Proporciona oportunidades a los estudiantes a participar en una dinámica de grupo en donde aprende a interactuar, explicar y defender sus propias ideas (Hamada y Scott [6]). Al respecto Cenich y Santo [7] enuncian que impulsar el trabajo colaborativo entre los estudiantes se crean situaciones en las cuales se generan interacciones productivas entre los alumnos, las cuales los llevan a poner en juego estrategias y procesos cognitivos superiores, ya que deben evaluar situaciones contextualizadas, tomar decisiones, proponer soluciones y negociar ideas con base en argumentos referenciados en conocimiento.

➢ *El diseño de situaciones de aprendizaje incorporando la tecnología.*

La incorporación de software estadístico en las actividades lleva como objetivo facilitarle al alumno los tediosos c"alculos y centrar más su atención a los significados e interpretación de los conceptos matemáticos. La facilidad con la que se transita de una representación a otra y el poder manipular una gran cantidad de datos puede ayudar a identificar rápidamente el comportamiento de la distribución o a explorar la información con más detalles.

3 Objetivos de la Actividad

- ➢ Que los estudiantes puedan transitar de una gráfica a otra con el objeto de analizar la variación y la distribución de los datos.
- ➢ Localizar gráficamente algunas medidas descriptivas a partir de su distribución.
- ➢ Analizar el efecto que puede tener los valores atípicos en las medidas de centralización como la media y la mediana.
- ➢ Detectar bajo qué circunstancias es recomendable utilizar una medida de centralización para que represente mejor al conjunto de datos.
- ➢ Que pueda integrar los conceptos vistos anteriormente con los que se están abordando.

4 Estructura de la Actividad

En esta sección presentaremos a manera de ejemplo una actividad de una serie que fueron diseñadas para el curso de bioestadística. En todas las actividades se presentan datos reales que fueron obtenidas por los alumnos.

La estrategia didáctica:

Una de las estrategias didácticas es el que los estudiantes trabajen con datos reales obtenidos por ellos mismo y la otra el trabajo colaborativo. Algunas de las actividades son diseñadas una vez que los estudiantes participan en equipo en un proyecto de investigación en donde ellos eligen un tema y recaban sus propios datos. Otras son diseñadas a partir de la obtención de algunas medidas antropométricas (peso, estatura, medida de la cintura, etc.) entre los propios estudiantes.

Para trabajar cada actividad, éstos se deben de agrupar en equipo de no más de 5 estudiantes. Se solicita a cada equipo que analicen y discutan la información entre ello con base a las preguntas que se plantean en la actividad. Posteriormente, cada equipo expone las respuestas ante todo el grupo para discutir y analizar las respuestas de manera grupal.

Actividad: Parte 1)

Se tomaron los registros de niveles de glucosa de un grupo de pacientes atendidos en una sala de urgencia. La distribución de estos niveles se muestra en la Figura 1.

a) ¿Qué tipo de variables se analizan? _____

b) ¿Qué medidas de resumen se pueden calcular con cada una de estas variables? _____

c) ¿Los resultados obtenidos se tratan de estadsticos o parámetro? _____

d) ¿Consideras que se trata de una muestra o de una población? _____

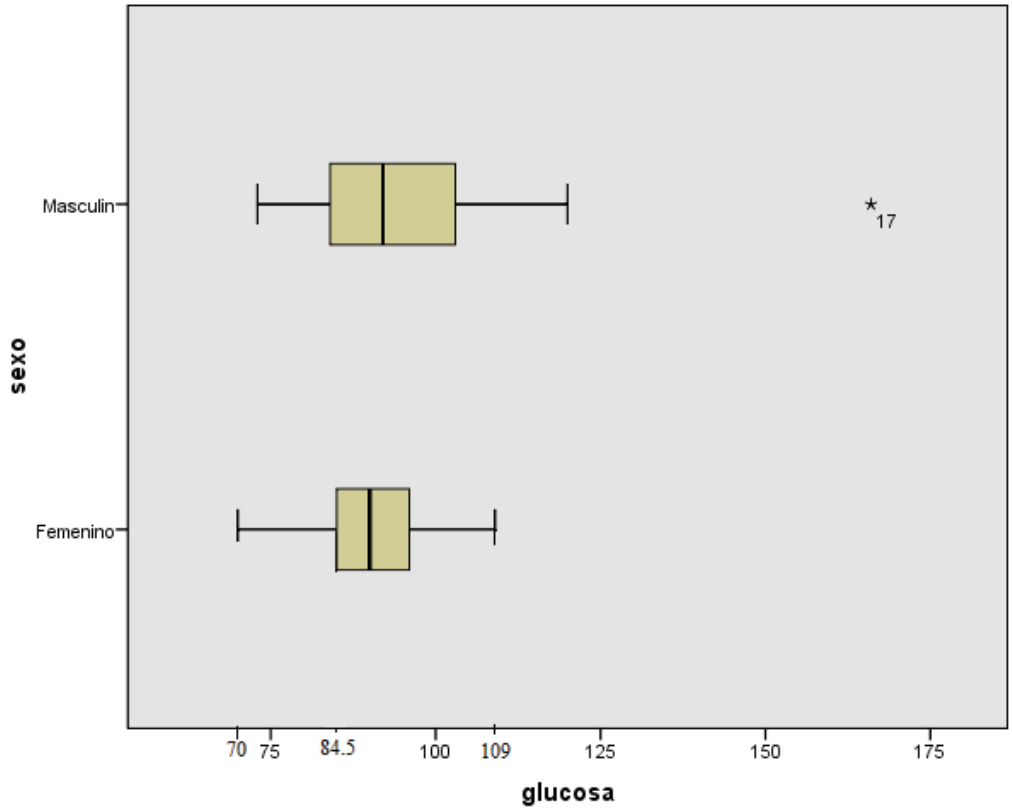


Figura 1: La distribución de niveles de glucosa de un grupo de pacientes

e) ¿En cuál de los dos grupos se encuentran mayor porcentaje de personas con niveles de glucosa por arriba de 100 mg/dl? _____

f) ¿Qué porcentaje de mujeres presenta niveles por debajo de 84.5? _____

g) ¿Crees que es igual, mayor o menor al porcentaje de los hombres? _____

h) ¿En cuál de los dos grupos es mayor el valor de la mediana? _____

i) Tomando en cuenta la distribución de niveles de glucosa de las mujeres y a partir de la mediana ¿La distribución se ve más dispersa a la izquierda de este valor, ¿a la derecha? o es igual? _____

j) Tomando en cuenta la distribución de niveles de glucosa de los hombres y a partir de la mediana ¿La distribucin se ve más dispersa a la izquierda de este valor, ¿a la derecha? o es igual? _____

k) ¿En cuál de los dos grupos crees que se presenta mayor variabilidad en los niveles de glucosa? _____

l) ¿Qué tipo de sesgo se presenta en los niveles de glucosa de los hombres? _____

m) ¿Cómo relacionas la respuesta del inciso j) con la del l)? _____

n) ¿Qué tipo de sesgo se presenta en los niveles de glucosa de las mujeres? _____

o) ¿Cómo relacionas la respuesta del inciso i) con la del n)? _____

p) ¿Qué significa que haya un sesgo positivo? _____

q) ¿Qué distribución consideras que es simétrica? _____ Justifica _____

r) ¿Cómo puedes interpretar el nivel de glucosa que presenta el paciente registrado con el número 17? _____

s) ¿A qué medida de resumen afecta este valor? _____

t) ¿En cuál de los dos grupos crees que es mayor el valor de la media? _____

u) ¿Qué medida de centralización crees que representa mejor a los niveles de glucosa de las mujeres? _____ Justifica tu respuesta _____

v) ¿Qué medida de centralización crees que representa mejor a los niveles de glucosa de los hombres? _____ Justifica tu respuesta _____

Parte 2)

Los histogramas de la Figura 2 corresponden a los mismos niveles de glucosa de hombres y de mujeres reportado en la Parte 1):

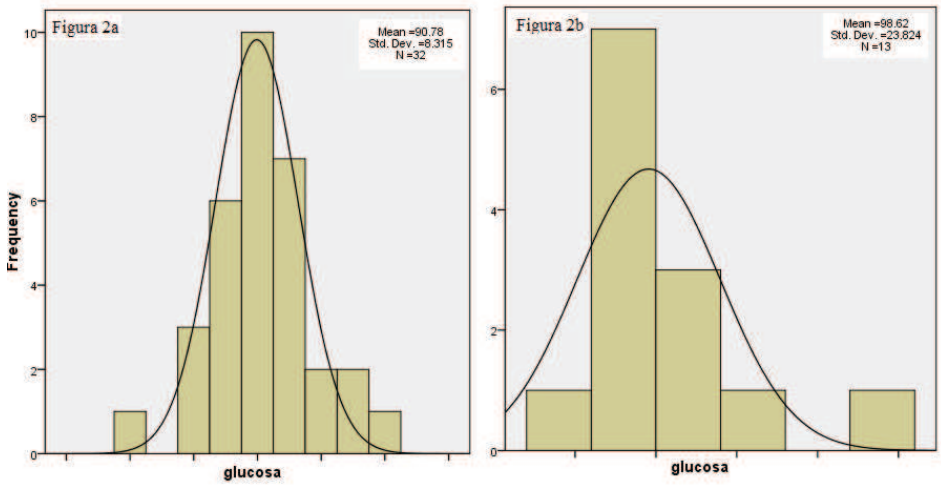


Figura 2: Los histogramas de niveles de glucosa de hombres y de mujeres

a) ¿Cuál corresponde al de los hombres? _____ Cuál al de las mujeres? _____

b) ¿En qué características te basas para dar tu afirmación? _____

Parte 3)

Los histogramas de la Figura 3 corresponden a los mismos niveles de glucosa de hombres y al de las mujeres:

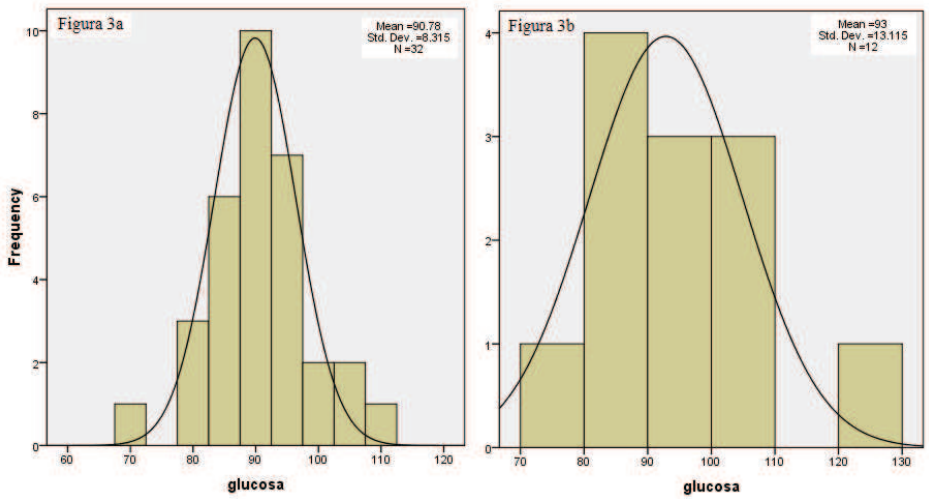


Figura 3: Los histogramas de niveles de glucosa de hombres y de mujeres

Observa bien las gráficas.

a) ¿Cuál corresponde al de los hombres? _____ ¿Cuál al de las mujeres? _____

b) Menciona ¿Que cambios se pudieron haber hechos? _____

c) ¿A qué medidas descriptivas pudieron haber afectado y porque? _____

5 Consideraciones Finales

Como se mencionó anteriormente, esta actividad forma parte de una serie que se han diseñado para el curso de bioestadística que se imparte en la escuela de medicina y nutrición. Particularmente, esta actividad se trabajó en el semestre 2012-2 y el tiempo requerido para contestar la actividad es de aproximadamente media hora y con análisis y discusión grupal de una hora. Se puede decir que se han logrado en su mayora los objetivos de la actividad. La pregunta c) en donde se les preguntaba si los resultados obtenidos se trataban de estadísticos o parámetros fue la que presentó mayor número de errores, y poco menos en la pregunta b) donde tenían que exponer las medidas de resumen para cada una de las variables. La mayoría mencionaba únicamente las medidas descriptivas para la variable numérica, no relacionaban

la moda para la variable cualitativa sexo. El de trabajar con una situación que maneja datos que están relacionados con su área permite crear un ambiente de motivación y de aprendizaje sobre temas propios de su carrera, de esta manera, el estudiante toma conciencias de lo importante que es la estadística en su campo de estudio. En el caso de la pregunta del inciso r) donde se le preguntas sobre el dato atípico que se muestra en el diagrama de caja, la mayoría contestó que representaba un dato atípico, sin embargo, hubo estudiantes que sus respuestas fueron más allá de lo estadístico, argumentando que probablemente sea de un paciente con problemas de diabetes o que acababa de desayunar.

Se tiene la intención de modificar el formato de la actividad y replantear algunas preguntas relacionadas con la variabilidad.

Referencias

[1] Cantú, M., Gómez, G. El valor de la estadística para la salud pública. Revista Salud Pública y Nutrición, 2003. Recuperado el 30 de enero del 2013 de `http://www.respyn.uanl.mx/iv/1/ensayos/bioestadistica.html`

[2] Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P., Vallecillos, A. Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales, 2001. Recuperado el 1 de febrero del 2013 de `http://www.ugr.es/ batanero/ARTICULOS/erroresestadis.doc`

[3] Batanero, C. Los retos de la cultura estadística, 2001. Recuperado el 1 de febrero del 2013 de `http://www.docentes.unal.co/pnpachecod/docs/losretos.pdf`

[4] Dual, E. The Problem-Solving Approach to Mathematics. Teaching Mathematics and its Application, Vol. 2, 1988.

[5] Kuiper, S. Incorporating a research experience into an early undergraduate statistics course, 2010. Recuperado el 18 de enero del 2013 de `http://www.stat.auckland.ac.nz/ĩase/publications/icots8/ICOTS8_4G1_KUIPER.pdf`

[6] Hamada, T., Scout, K. Anthropology and international education via the Internet: a collaborative learning model. The Journal of Electronic Publishing, Vol. 6, No. 1. Recuperado el 18 de enero del 2013 de `http://www.press.umich.edu/jep/06-01/hamada.html`

[7] Cenich, G., Santos, G. Propuesta de aprendizaje basado en proyecto y trabajo colaborativo: experiencia de un curso en línea. Revista Electrónica de Investigación Educativa. Recuperado el 19 de enero del 2013 de `http://redie.uabc.mx/vol7no2/contenido-cenich.html`

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2013, pp. 97–103.

Nivel: Superior

El Contexto del Teorema de Ptolomeo: La Tabla de Cuerdas

José Luis Soto Munguía

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: jlsoto@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Se hace aquí una revisión de los resultados geométricos usados y demostrados por Ptolomeo en la sección de El Almagesto titulada sobre el tamaño de las cuerdas en un círculo. El propósito es comparar los objetivos y motivaciones que revela Ptolomeo en su obra, con las presentaciones de los libros de texto en uso, sobre el teorema conocido actualmente como Teorema de Ptolomeo.

1 Introducción

Posiblemente con sus convicciones filosóficas por delante, Ptolomeo decidió que su obra astronómica cumbre debía llamarse La Composición Matemática, pero rápidamente la obra se popularizó bajo el título de La Gran Composición y posteriormente, el prestigio adquirido entre los árabes hizo que intitularan la traducción del Griego al Árabe como Al Magisti, que significa El mejor y que terminó traducido al Latín como Al Magest, y que ahora conocemos en Español como El Almagesto. En este texto, de nombre tan cambiante, Ptolomeo publicó la demostración del teorema que a la postre llevaría su nombre. En lo que sigue pondremos en evidencia que este teorema, presentado actualmente en los libros de Geometría, ver por ejemplo, [1, p. 26], [2, pp. 154-155], como un teorema de geometría pura, surgió como una herramienta necesaria para resolver un problema práctico y expondremos con detalle la manera como Ptolomeo usa esta herramienta.

2 El problema general planteado por Ptolomeo

En la Sección 10 del Primer Libro del Almagesto, Ptolomeo se propone construir una tabla que registre los tamaños de las cuerdas que subtienden arcos de 0° a 180° con incrementos de medio grado. En un modelo astronómico que supone a la tierra como el centro del universo y al resto de los cuerpos celestes girando alrededor de ella, en órbitas circulares o que resultan de combinar trayectorias circulares, una tabla como ésta resulta indispensable para la medición y el cálculo astronómico. Al más puro estilo griego, Ptolomeo se ve obligado a demostrar cada uno de los resultados matemáticos que utilizará en los cálculos. Demuestra así seis teoremas de naturaleza geométrica en los que basará sus cálculos. Para referirnos a ellos nos hemos tomado aquí la libertad de numerarlos, aunque en el texto original esta numeración no aparece. El segundo de esos teoremas ahora se conoce como el Teorema de Ptolomeo. Por razones que no están claras, pero parecieran relacionadas con el sistema sexagesimal, el autor divide la circunferencia en 360 arcos, que llamará grados y el diámetro del círculo que utilizará como base del cálculo en 120 partes, que llamará simplemente partes del diámetro.

3 El primer teorema

Las cuerdas más fáciles de calcular son aquellas que se pueden construir inscribiendo en un círculo ciertos polígonos regulares, es así que en este teorema, construye el pentágono y el decágono, que se ilustra en la Figura 1 y que enuncia en los siguientes términos [3, pp. 14-16]:

> *... sea el semicírculo ABC sobre el diámetro ADC y centrado alrededor de D y sea la recta DB trazada sobre AC en ángulo recto. Sea DC bisecada en E, y trácese EB; y sea EF trazada igual a EB, y trácese FB. Digo que el segmento FD es el lado de un decágono regular inscrito, y BF aquél de un pentágono*

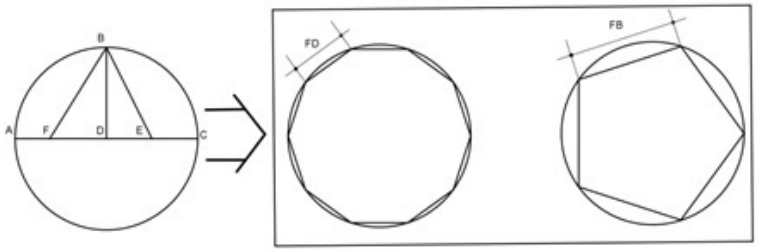


Figura 1

Al igual que en el resto de los teoremas, Ptolomeo no se limita a construir los lados de estos dos polígonos regulares y demostrar que están bien construidos; antes de pasar al teorema siguiente hace un cálculo de las cuerdas que le interesan y un recuento de las cuerdas que ya puede calcular. Así, obviando la construcción del cuadrado y del hexágono, ya tiene hasta aquí la longitud de las cuerdas que subtienden arcos de 90°, 60°, 72° y 36°, además de las correspondientes a los suplementos de estos ángulos, que puede calcular usando directamente el Teorema de Pitágoras.

4 El segundo teorema (de Ptolomeo)

A este teorema está dedicado el presente artículo. La demostración es escencialmente la misma que puede consultarse todavía en algunos libros de Geometría, ver por ejemplo [1, p. 26]. En otros textos de Geometría, ver por ejemplo [2, p. 154], [4, p. 237] el teorema es demostrado utilizando una transformación por inversión, una herramienta desarrollada muchos siglos después de la escritura del Almagesto y ajena por supuesto a la geometría griega. Ptolomeo enuncia su famoso teorema, en los siguientes términos [3, p. 16]:

> *Y mostraremos ahora, exponiendo un lema muy útil para esta presente empresa, cómo el resto de las cuerdas pueden derivarse exitosamente a partir de aquellas que ya tenemos. Para ello, sea un círculo con cualquier tipo de cuadrilátero inscrito ABCD, y trácense AC y BD. Se quiere demostrar que*

$$\text{rect.}AC, BD = \text{rect.}AB, DC + \text{rect.}AD, BC.$$

En notación moderna la tesis del teorema diría $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$, lo cual es interpretado ahora como una igualdad aritmética, pero para los griegos significaba que el rectángulo contenido por los segmentos AC y BD era equivalente (en contenido, en área) a los rectángulos contenidos por los segmentos AB y DC junto con el rectángulo contenido por los segmentos AD y BC.

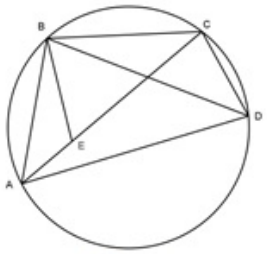


Figura 2

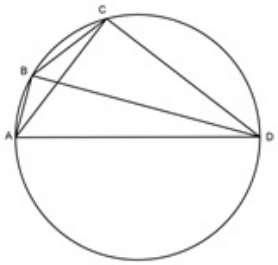


Figura 3

Para la demostración se traza el segmento BE de tal modo que $\angle ABE = \angle DBC$ (ver Figura 2); de aquí se desprende la semejanza de los triángulos AEB y DCB por un lado, y la semejanza de los triángulos ABD y EBC por otro. Las relaciones entre segmentos correspondientes que se desprenden de estas semejanzas, conducen a la relación entre segmentos establecida en el teorema. Pero independientemente de la demostración, el interés de Ptolomeo, como se verá posteriormente, pareciera centrado en la relación aritmética entre las seis cuerdas que relaciona el teorema:

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC,$$

porque conociendo cinco de ellas puede calcular la restante. Ciertamente que el teorema tiene relación con otros temas geométricos, como lo ilustran los libros modernos: el Teorema de Pitágoras, el seno de la suma de dos ángulos y la razón áurea, pero estos temas se relacionaron con el tiempo a este resultado y ninguno de ellos está presente en los trabajos de Ptolomeo.

5 El tercer teorema

La intención de Ptolomeo [3, p. 17] queda más clara en el presente resultado, en donde su teorema es usado por primera vez:

> *Ahora que esto ha sido expuesto, sea el semicírculo ABCD sobre el diámetro AD, y desde el punto A trácense los dos segmentos AB y AC, y sea dada la longitud de cada uno de ellos en términos de las 120 partes del diámetro; y sea BC trazada. Digo que BC está también dado.*

La Figura 3 ilustra este resultado: Ptolomeo divide la circunferencia con la que está trabajando en 360 arcos iguales y su diámetro en 120 partes iguales. Para distinguir unas unidades

de otras, usaremos dos notaciones diferentes; cuando queramos referirnos a las partes de la circunferencia, usaremos la notación común usada para denotar grados y cuando hagamos referencia a las partes del diámetro usaremos una p en lugar de °. Por ejemplo, $1^p\ 34'\ 15''$ significará $1+\frac{34}{60}+\frac{15}{3600}$ partes como las 120 en las que se ha dividido el diámetro. Aunque no expone con detalle las razones de estas subdivisiones, es claro que subdividiendo el círculo y el diámetro de esta manera, se facilitan los cálculos en el sistema sexagesimal que usa. Es posible también que haya pensado en la subdivisión del diámetro en 120 partes, para que la medida de las cuerdas que subtienden ángulos de un grado resulten próximos a la unidad tomada sobre el diámetro. En la demostración, la igualdad $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$ es aprovechada directamente para establecer que BC puede ser calculada. Puesto que $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito, y como AB, AC y el diámetro AD están dados y las cuerdas BD y CD pueden calcularse usando el Teorema de Pitágoras, entonces BC es la única incógnita y puede ser despejada. Este resultado es básico porque al conjunto de cuerdas conocidas, obtenidas de la construcción de polígonos regulares, ahora se pueden agregar las que subtienden diferencias de arcos. Por ejemplo: conocidas las longitudes de las cuerdas que subtienden los ángulos de 72° y 60°, puede saberse cuánto mide la cuerda que subtiende un ángulo de 12°.

6 El cuarto teorema

El siguiente resultado expuesto por Ptolomeo no usa su teorema, pero lo enunciamos aquí porque es importante para entender los preparativos del cálculo de cuerdas, Ptolomeo (ibid, p. 17) afirma:

> *De nuevo, dada cualquier cuerda en un círculo, propóngase encontrar la cuerda de la mitad del arco de la cuerda dada. Y sea el semicírculo ABC sobre el diámetro AC, y sea CB la cuerda dada. Y sea el arco bisecado en D, y trácense AB, AD, BD, y DC, y sea DF perpendicular a AC trazado desde D. Digo que*
>
> $$CF = \text{mitad}(AC - AB)$$
>
> *... Pero cuando la perpendicular DF se traza en el triángulo rectángulo ACD, como consecuencia los triángulos rectángulos ACD y DCF tendrán sus ángulos respectivamente iguales [Euclides, VI, 8], y*
>
> $$AC : CD :: CD : CF.$$

Ptolomeo no utiliza aquí el teorema anterior para calcular AB, porque puede hacer el cálculo directamente del Teorema de Pitágoras, aprovechando que la cuerda AC es un diámetro. El resultado está basado en la construcción de los triángulos congruentes ABD y AED y de los triángulos semejantes ADC y DFC, que lo conduce a la igualdad $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{CF}$ y de aquí a la ecuación, que en la notación actual escribiríamos como $CD^2 = AC \cdot CF$. Y como AC está dado y CF ha sido calculado, entonces CD puede ser calculada. El resultado está ilustrado en la Figura 4. Hasta aquí, puesto que ya se ha calculado por ejemplo, la cuerda que subtiende un ángulo de 12°, entonces puede aplicarse repetidas veces este último resultado para calcular aquellas que subtienden arcos de 6°, 3°, $\left(1\frac{1}{2}\right)^\circ$ y $\left(\frac{3}{4}\right)^\circ$.

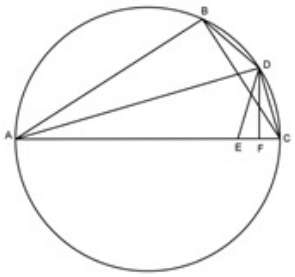


Figura 4

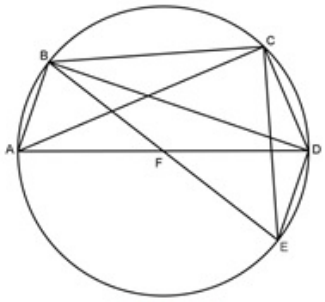


Figura 5

7 El quinto teorema

Aquí, el Teorema vuelve a usarse para demostrar que si se tiene un arco subdividido en dos partes y se conocen las cuerdas que subtienden estas partes, entonces puede calcularse la cuerda que subtiende el todo. Ptolomeo [3, p. 18] establece este resultado en los siguientes términos:

> *De nuevo sea el círculo ABCD sobre un diámetro AD con centro en F. Y a partir de A córtense dos arcos consecutivos, AB y BC; y sean trazadas las cuerdas dadas AB y BC que los subtienden. Digo que si trazamos AC, entonces AC será también dado.*

La Figura 5 ilustra la construcción que se requiere para demostrar el teorema. Como puede verse en esta figura, si podemos calcular la cuerda CD, entonces el lema estaría prácticamente demostrado, porque AC resultaría de aplicar el Teorema de Pitágoras al triángulo ACD, puesto que AD es un diámetro. En el cálculo de CD se aplica el Teorema de Ptolomeo al cuadrilátero inscrito $BCDE$. En este cuadrilátero, están dados: la cuerda BC por hipótesis y BE por ser un diámetro, mientras que pueden calcularse usando el Teorema de Pitágoras: BD, DE y CE. Por lo tanto en la igualdad

$$CE \cdot BD = BC \cdot DE + BE \cdot CD,$$

la única medida desconocida es CD y por lo tanto puede ser calculada.

8 El sexto teorema

A pesar de toda la herramienta acumulada hasta aquí, todavía los resultados obtenidos son insuficientes para calcular cuerdas que subtiendan arcos de ((1/2)), porque cualquier intento enfrentaría el problema de la trisección, que Ptolomeo reconoce como irresoluble por lo menos hasta ese momento. Por ello establece un último lema, que lo conducirá a calcular una aproximación de la cuerda que subtiende un arco de un grado. Bosquejamos aquí este lema y la manera como lo usó. El resultado está establecido en los siguientes términos [3, p. 19]:

Digo que si dos cuerdas desiguales son inscritas en un círculo, la más grande guarda con la menor una razón menor que la que el arco sobre la más grande, guarda sobre el arco de la menor. Sea el círculo ABCD; y sean inscritas en él cuerdas desiguales, AB la menor y BC la mayor. Digo que

$$\text{cuerda}\, BC : \text{cuerda}\, AB < \text{arco}\, BC : \text{arco}\, AB$$

Escrito en nuestro lenguaje, este lema dice que si tenemos dos arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$, y sus respectivas cuerdas AB y BC (ver Figura 6), donde $AB < BC$, entonces

$$\frac{BC}{AB} < \frac{\widehat{BC}}{\widehat{AB}}.$$

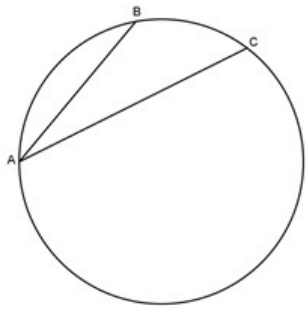


Figura 6

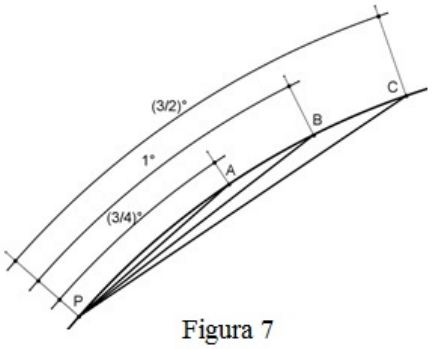


Figura 7

Establecida esta desigualdad, se puede acotar la cuerda PB superiormente de la manera siguiente (ver Figura 7):

$$1\frac{1}{3} = \frac{\widehat{PB}}{\widehat{PA}} > \frac{PB}{PA},$$

O bien,

$$PB < 1\frac{1}{3}(PA).$$

Similarmente se puede acotar la cuerda PB inferiormente:

$$1\frac{1}{2} = \frac{\widehat{PC}}{\widehat{PB}} > \frac{PC}{PB}.$$

Que puede también escribirse como,

$$PB > \frac{2}{3}(PC).$$

Pero Ptolomeo ha calculado ya las cuerdas de $\left(\frac{3}{4}\right)^\circ$ y $\left(1\frac{1}{2}\right)^\circ$, obteniendo $PA = 0^p\ 47'\ 8''$ y $PC = 1^p\ 34'\ 15''$, por lo que, entonces,

$$1^p\ 2'\ 50'' \approx \frac{2}{3}(PC) < PB < 1\frac{1}{3}(PA) \approx 1^p\ 2'\ 50''.$$

Y concluye de aquí, que una buena aproximación para la cuerda de un grado es

$$PB \approx 1^p\ 2'\ 50''.$$

Y es así como puede la tabla, no sin antes precisar que si hubiera algún error de impresión en la tabla, el lector podrá corregirla, puesto que tiene ya todos los elementos con los que se ha construido.

9 Conclusiones

El recuento del texto de Ptolomeo revela que su famoso teorema fue propuesto en un contexto completamente distinto al que reflejan los libros de texto actuales de Geometría. Ciertamente que el cálculo de cuerdas es un tema que ya no está vigente en lo que se refiere a sus aplicaciones, pero mostrar el Teorema de Ptolomeo como un resultado sin más contexto que el de su consistencia geométrica, tiene sus propias repercusiones en la enseñanza de la Geometría, sobre todo en las escuelas de ciencias, donde se supone que estamos formando cuadros científicos para que puedan generar resultados científicos. Nada pareciera más lejano a la matemática como actividad humana, que la presentación de resultados, cuya validación depende de una idea genial, casi siempre muy lejana al pensamiento matemático de nuestros estudiantes. En [5] se llama transposición didáctica al proceso de transformación de los saberes sabios en saberes a enseñar y en este caso, como en pocos, este proceso de transformación es radical. ¿Cuál debiera ser la relación entre la forma que adquiere el saber sabio y la forma que presenta el saber a enseñar? El mismo Chevalard reconoce la complejidad de esta pregunta y el Teorema de Ptolomeo seguramente no alcanza para responderla. Repensar esta transposición es a mi juicio parte del trabajo docente.

Referencias

[1] Shively, L., (1982). Introducción a la Geometría Moderna. CECSA: México, México.

[2] Eves, H., (1969). Estudio de las Geometrías (Tomo I). Editorial Hispano-Americana: México, México.

[3] Ptolemy, C., (1952). The Almagest. Translated by R. Catesby Taliaferro. In Ptolemy, Copernicus, Kepler. Vol. 16. Of the Great Books of the Western World. Chicago: Encyclopaedia Britannica.

[4] Hadamard, J., (2009). Lessons in Geometry: I. Plane Geometry. AMS-EDC: Rhode Island, USA.

[5] Chevalard, Y., (2000). La Transposición didáctica: del Saber Sabio al Saber Enseñado. AIQUE: Buenos Aires, Arg.

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Septiembre, 2013, pp. 104–109.

Nivel: Medio superior y superior

La Modelación como Estrategia de Aprendizaje del Cálculo

José Luis Díaz Gómez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: jdiaz@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En este documento se describe una estrategia didáctica que se ha implementado con el propósito de propiciar la utilización de modelos matemáticos en situaciones prácticas del área de Químico Biológicas, como vía para contribuir al desarrollo de las habilidades de los estudiantes en la solución de problemas en la vida fuera del aula.

1 Introducción

Hace tiempo que los programas de enseñanza de las matemáticas universitarias, hacen énfasis en la importancia de la modelación y la resolución de problemas en el aprendizaje. Por ejemplo, en el programa de la materia *Introducción al Cálculo diferencial e Integral* de Químico Biólogo el objetivo general del curso plantea: "El alumno será capaz de emplear las funciones para modelar fenómenos de Química, Biología, Física y otros relacionados con su carrera...".

Este objetivo es un común denominador en casi todos los programas de las materias de matemáticas. Por otro lado en los *Lineamientos generales para un marco curricular de la Universidad de Sonora,* en la sección 8, del *Eje de Integración* se menciona que se contempla el cumplimiento del siguiente objetivo: "...Aplicar los conocimientos adquiridos en etapas previas en la resolución de problemas propios de la disciplina o la profesión desde una perspectiva interdisciplinaria,... Para lograr estos propósitos es necesario que las diferentes modalidades consideradas contemplen el estudio de problemas abordados desde la perspectiva de diferentes áreas y disciplinas".

Sin embargo, esta preocupación ha tardado en llegar a los ámbitos universitarios, pues es en éstos en donde la enseñanza de las matemáticas es más tradicional: las clases se imparten casi siempre en forma de conferencia, introduciendo definiciones y teoremas de manera más o menos lineal y dejando el trabajo de los alumnos únicamente para la solución de problemas como tarea en casa. Ello sin importar que dicha enseñanza se dirija a alumnos cuyo interés primordial es justamente la aplicación de las matemáticas y no la matemática en sí misma.

Para dar una respuesta a la problemática planteada Trigueros [9] plantea que: "Una forma de lograr la contextualización del conocimiento es la presentación de situaciones problemáticas reales que sean factibles de representarse mediante modelos matemáticos."

2 La Modelación como Método de Enseñanza

Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. El

modelo permite no sólo obtener una solución particular, sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías. La modelación matemática, originalmente, como metodología de enseñanza, parte de un tema y sobre él desarrolla cuestiones o preguntas que quiere comprender, resolver o inferir. Esas preguntas deberán ser respondidas mediante el uso del conjunto de herramientas matemáticas y de la investigación sobre el tema. La idea de muchos defensores de la modelación en la enseñanza es la de que cada alumno pueda elegir un tema de algún área de su interés, hacer una investigación al respecto, proponer cuestiones y, bajo la orientación del profesor, elaborar un modelo matemático. En estos términos, el alumno pasa a ser corresponsable de su aprendizaje y el profesor, un orientador. Tales defensores creen que el aprendizaje se vuelve más rico, considerando que el alumno no sólo aprende matemática inserta en el contexto de otra área del conocimiento, sino que también despierta su sentido crítico y creativo [7].

Con la aplicación de la modelación matemática, se espera propiciar en el alumno:

- Conexiones entre lo académico, la vida y las competencias laborales;
- Oportunidades para la reflexión y la auto evaluación por parte del estudiante;
- Oportunidades de retroalimentación y evaluación por parte de expertos;
- Integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento;
- Mejoría de la aprehensión de los conceptos matemáticos;
- Capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problema;
- Estimular la creatividad en la formulación y resolución de problemas;
- Capacidad para actuar en grupo;
- Capacidad para la redacción de esa investigación.

Sin embargo, en la enseñanza formal, algunos factores como el currículo, horario de clases, número de alumnos por curso, disponibilidad de tiempo para que el profesor efectúe un acompañamiento simultáneo de los trabajos de los alumnos, conducen a efectuar algunas adaptaciones en el proceso de la modelación como método de enseñanza.

3 Modelo Docente Propuesto

El proceso educativo actual exige de un profesional preparado, capaz y presto para aplicar conocimientos y construirlos para dar solución a problemas nuevos. La formación del profesional debe estar ligada a las exigencias del desarrollo de la profesión. El modelo docente que se describe tiene estos fines. En este documento se describe una propuesta didáctica que se ha implementado con el propósito de propiciar la utilización de modelos matemáticos en situaciones prácticas del área de Químico Biológicas como vía para contribuir al desarrollo

de las habilidades de los estudiantes en la solución de problemas en la vida fuera del aula. El trabajo lo realizan exclusivamente los estudiantes, el papel del profesor es el de asesor, revisor y proveedor de los proyectos que consisten en artículos de investigación en el idioma Inglés en los cuáles se utiliza la matemática para modelar un problema del área relacionada con la carrera de Químico Biólogo. El trabajo se realiza durante un semestre en seis etapas, que a continuación se describen.

3.1 Primera Etapa

Se lleva a cabo al inicio del semestre. En esta etapa los estudiantes seleccionan un artículo sobre un tema relacionado con la carrera; Química, Biología, Medicina, etc. Los artículos y un resumen sobre lo que trata se colocan en la página Web del profesor y tienen una semana para seleccionarlo. En la misma página Web se descarga el documento donde se especifican las condiciones, la evaluación, fechas de reportes y formato de entrega del documento final.

3.2 Segunda etapa

Los estudiantes entregan una traducción del artículo.

3.3 Tercera etapa

En esta etapa el estudiante entrega un reporte que consiste en la escritura de un ensayo sobre el tema sobre el cual trata el artículo, en el que se aprecie que conoce el tema. Para lograr la comprensión del tema debe de haber realizado al menos dos entrevistas con especialistas y o profesores en el campo sobre el cual trata el artículo y haber revisado bibliografía sobre el mismo. Entre 3 y cinco páginas.

3.4 Cuarta etapa

En esta etapa el estudiante entrega un reporte que consiste en la escritura de un ensayo sobre el tema o temas de matemáticas sobre el cual trata el artículo, en el que se aprecie que conoce el tema. Para lograr la comprensión del tema de matemáticas también debe de realizar al menos dos entrevistas con especialistas y o profesores en el campo sobre el cual trata el artículo y haber revisado bibliografía sobre el mismo. Entre 3 y cinco páginas

3.5 Quinta etapa

Entrega de un ensayo final donde se aprecie cualitativamente que se comprende el tema sobre el cual trata el trabajo de investigación del artículo, así como la solución matemática del mismo.

3.6 Sexta etapa

Entrega de una presentación del trabajo en Power Point y una presentación oral de 15 minutos ante el grupo y con una sesión de 5 minutos de preguntas.

4 Ejemplos de modelos

A continuación se describen algunos de los trabajos que se han trabajado con los estudiantes.

El alcohol y el cuerpo humano. [2]. El cuerpo humano trata los productos químicos en la corriente sanguínea primordialmente de dos formas: La eliminación por los riñones, y la descomposición de los productos químicos por enzimas del hígado. El hígado elimina los

productos químicos descomponiéndolos con enzimas. En este proyecto se presenta un modelo matemático de cómo se elimina el alcohol del cuerpo humano. Los estudiantes en este tema deben de conocer (1) Las funciones racionales y su representación algebraica, geométrica y numérica (2) la representación algebraica, geométrica y numérica de las asíntotas verticales y horizontales. Propagación de una enfermedad infecciosa. [4]. El último invierno fue el SARS. Este verano la gripe. En la primavera otra vez el SARS y la gripe aviar. La propagación del SIDA ha salido en los periódicos en los últimos 15 años. El modelo para la propagación de enfermedades infecciosas se conoce como un modelo de compartimentos, ya que se considera que las personas que se desplazan de un compartimento a otro. Suponemos que tenemos una población fija de N individuos a través del cual se mueve una enfermedad infecciosa. En este proyecto se utiliza primordialmente el cálculo diferencial, ecuaciones iterativas y diferenciales de primer orden de variables separables para modelar la propagación de una enfermedad infecciosa.

Salvando a una víctima de envenenamiento. [8]. Usted es un médico en una sala de emergencias del hospital. Un niño acaba de ser llevado a la sala de emergencia por un frenético padre. El padre toma el medicamento teofilina en forma de tabletas para el asma. Dos horas antes de llegar al hospital, el niño ingirió 100 mg de teofilina en tabletas. Como la mayoría de los fármacos orales, la teofilina se absorbe en el torrente sanguíneo a una tasa proporcional a la cantidad presente en el tracto gastrointestinal (estómago e intestinos) y se elimina del flujo sanguíneo a una tasa proporcional a la cantidad presente en el torrente sanguíneo. Su tarea es determinar si el niño está en peligro, y si es así, salvar su vida. Los requisitos matemáticos son: cálculo diferencial, y ecuaciones diferenciales de variables separables.

Peligro con los metales pesados. [3]. La sociedad humana con su deseo de avance tecnológico y su persistente falta de preocupación por las consecuencias ha producido muchos tipos de riesgos ambientales. Los productos químicos tóxicos en los hogares y los barrios son un riesgo, a menudo invisibles, que nuestra sociedad debe aprender a conocer y prevenir. Tenemos que limpiarlos, y en donde no se haya hecho aún, necesitamos proteger a las personas de la exposición a ellos. El Plomo, el mercurio, y el cadmio son los tres metales pesados más peligrosos y contaminantes en nuestro medio. El proyecto requiere conocimientos de álgebra, las funciones y sus gráficas, en particular las funciones exponenciales, el cálculo y el concepto de vida media.

Midiendo el gasto cardíaco. [6]. Se define el gasto cardiaco como: el volumen de sangre impulsado cada minuto por el ventrículo izquierdo hacia la aorta, es decir el volumen de sangre que sale del corazón por minuto. Este proyecto desarrolla una fórmula para calcular el gasto cardiaco a partir de observaciones obtenidas por dilución de colorantes. El desarrollo es una ilustración elemental de las sumas Riemann, y la integral definida. De hecho es un excelente ejemplo para introducir la integral definida.

El problema del mosquito. [1]. En 1981 los biólogos WL Grogan y Wirth WW descubrieron dos nuevas variedades de diminutos mosquitos en las selvas de Brasil. A uno lo llamaron mosquito APF y el otro mosquito Af. Los biólogos descubrieron que el mosquito APF es portador de una enfermedad debilitante que causa inflamación del cerebro cuando

una persona es picada por un mosquito infectado. El otro mosquito el Af, es bastante inofensivo y un polinizador valioso. En un esfuerzo por distinguir las dos variedades, los biólogos tomaron medidas de los mosquitos que atraparon. ¿Será posible distinguir un mosquito Af de un mosquito APF con las medidas de las longitudes del ala y de la antena? Los requisitos matemáticos requeridos para trabajar este modelo son: funciones y sus gráficas, técnicas de análisis de datos, ajuste de datos a una recta, y probabilidad.

El problema de la prueba de sangre. [5]. Supongamos que usted tiene una gran población en la que desea examinar ciertas características en la sangre o la orina (por ejemplo, hacerle pruebas de uso de esteroides a todos los jugadores de los equipos de fútbol o hacer una prueba de una enfermedad a todo el Personal de un campo militar). Cada prueba será o bien positiva o negativa. En este problema, estamos suponiendo que no existen pruebas positivas o negativas falsas. Puesto que el número de personas a ser examinadas es bastante grande, podemos esperar que el costo de las pruebas también sea grande. ¿Cómo podemos reducir el número de pruebas de necesarias y así reducir los costos? Para trabajar este problema se requiere: álgebra, cálculo y probabilidad.

5 Conclusiones

Entendemos que el objetivo de la enseñanza, en los diferentes niveles, debe ser el de propiciar en el alumno la adquisición de conocimientos y el desarrollo de actitudes y habilidades que favorezcan una plena interacción con la sociedad. Es por eso que este trabajo aspira a formar profesionales con una independencia cognoscitiva tal que les permita un mejor dominio de su profesión al dar respuesta a problemas en su radio de acción. Hacia este objetivo debe dirigirse la acción de desarrollar en los futuros profesionistas las habilidades para resolver problemas, lo cual se puede lograr a través de la realización de problemas docentes basados en situaciones reales. Esta propuesta didáctica se ha implementado durante cuatro semestres y aun cuando no se ha efectuado una evaluación formal sobre el cambio cognitivo que produce en los estudiantes, se ha observado entre otras cosas que: Este método estimula que los alumnos se involucren más en el aprendizaje debido a que sienten que tienen la posibilidad de interactuar con la realidad y observar los resultados de dicha interacción. La dinámica del proceso de enfrentarse a los problemas lleva a los alumnos hacia un pensamiento crítico y creativo. El proceso conduce a los alumnos al aprendizaje de los contenidos del curso de manera similar a la que utilizarán en situaciones futuras, fomentando que lo aprendido se comprenda y no sólo se memorice. Los estudiantes se dan cuenta que el conocimiento de diferentes disciplinas se integra para dar solución a un problema sobre el cual se está trabajando, de tal modo que el aprendizaje no se da sólo en fracciones sino de una manera integral y dinámica. Con el uso de problemas de la vida real, se ha observado que se han incrementado los niveles de comprensión, permitiendo utilizar su conocimiento y habilidades.

Referencias

[1] Compton, Helen & Teague, Daniel; *The midge problem,* Consortium 18, 2007, pp. 18-23.

[2] Dance, R., Sandefur, J. Alcohol and your body. Consortium 66, 1998, pp. 1-12.

[3] Dance R., Sandefur, J. Hazards of heavy metal. Consortium 74, 2000, pp.1-7.

[4] Dan T., Dot D. Spread of an infectious disease. Consortium 2004, pp. 19-25.

[5] Dot D., Dan T. Blood testing problem. Consortium 22, 2004, pp. 22-28.

[6] Horelick, B. Koont, S. Measuring cardiac ouput. UMAP, Module 71, 1979, pp. 1-15.

[7] Salett B., María y Nelson Hein. Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. Educación Matemática, Vol. 16, No. 002, pp. 105-125. México, 2004.

[8] Selco, J. Beery, J. Saving a drug poisoning victim. ILAP Modules, Tools for Teaching, pp. 31-46, 2000.

[9] Trigueros Gaisman, M. El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. Innovación Educativa. Vol. 9, núm. 46, pp. 75-87; Instituto Politécnico Nacional, México, 2009.

[10] Marco Normativo. Recuperado el 28 de enero del 2013 de: `http://www.uson.mx/institucional/marconormativo/reglamentosacademicos/lineamientos_modelo_curricular.htm`

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Septiembre, 2013, pp. 110–113.

Nivel: Medio superior y superior

Uso de la Geometría Dinámica para la Modelación de Funciones en Trozo a Través de un Problema Geométrico

José María Bravo Tapia **Agustín Grijalva Monteverde**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: jmbravo@gauss.mat.uson.mx guty@gauss.mat.uson.mx

Resumen

El cálculo puede caracterizarse como el estudio de la variación, y uno de los principales problemas para su enseñanza es que, tanto en los textos como en el pizarrón sólo se pueden mostrar, en general, situaciones estáticas de los fenómenos. Una de las posibilidades que se tienen en la actualidad para superar estas dificultades la encontramos en el uso de software de geometría dinámica, con los cuales se pueden simular fenómenos de variación e incorporar representaciones numéricas, gráficas y analíticas que modelen tales fenómenos. En este artículo se presenta una situación geométrica de variación tratada dinámicamente con GeoGebra, que ilustra las posibilidades didácticas de la computadora para la enseñanza de los fenómenos de variación.

1 Introducción

A pesar de los avances tecnológicos y la proliferación de equipos de cómputo en el mundo actual, su uso aún es relativamente escaso en las labores docentes de los profesores. Sin embargo, ya sea por las exigencias curriculares o por la propia convicción de los profesores paulatinamente el uso de las nuevas tecnologías se ha venido incrementando en las clases de matemáticas. Las reflexiones y los resultados de investigación sobre el uso de calculadoras y computadoras en la enseñanza de las matemáticas, tanto dentro como fuera del aula ha permitido el mejoramiento de software específico para la enseñanza de diferentes áreas de la matemática, como Probabilidad y Estadística, Cálculo, Geometría, Álgebra, etc. En el caso del cálculo, una de las principales dificultades que enfrentan los estudiantes de ingeniería, es la interpretación de los problemas de "aplicación", que los involucra en un proceso de modelación que parte de la situación real tratada a fin de detectar los elementos matemáticos y las relaciones entre ellos. Actualmente, existe una fuerte tendencia hacia el uso de la geometría dinámica para presentar, de manera virtual, la construcción de objetos y/o situaciones reales, permitiendo a los estudiantes visualizar, definir y caracterizar los objetos matemáticos [2] que intervienen, ayudándoles a relacionarlos hasta conseguir la construcción del modelo matemático inmerso en el problema.

En este trabajo presentamos un problema de contexto intramatemático para ilustrar cómo concebimos el uso de la geometría dinámica para apoyar al estudiante en el sentido descrito. En el planteamiento de la actividad recurrimos al software GeoGebra [3] tanto por las facilidades que ofrece como por considerarlo un ejemplo representativo de sus posibilidades.

2 Objetivo

El objetivo es mostrar el potencial de GeoGebra para apoyar didácticamente el proceso de modelación en un problema que involucra funciones definidas a trozos.

3 Planteamiento del Problema

Defina la función que determina el área de un triángulo isósceles, inscrito en un cuadrado de manera que el vértice formado por los lados iguales del triángulo coincide con uno de los vértices del cuadrado. Ver Figura 1.

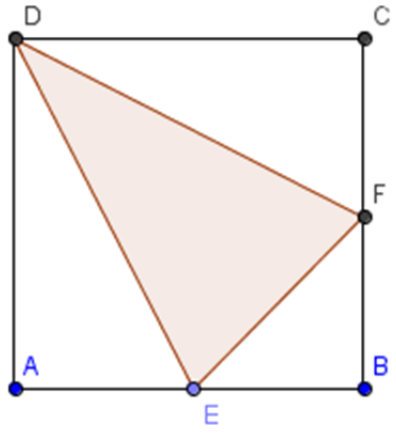


Figura 1: Triángulo inscrito en un cuadrado

El primer problema al que nos enfrentamos los profesores al plantear una situación problémica de esta naturaleza, a pesar de la representación "gráfica" (Figura 1), consiste en que se muestra de manera estática, y no es inmediato que el estudiante lo identifique como un problema de variación.

4 Análisis del Problema

En la Figura 2 se muestra una secuencia de triángulos inscritos en el cuadrado, que con el uso de GeoGebra basta "arrastrar" el punto H para obtenerlos y con ello poner en juego las variantes y las posibles relaciones entre ellas.

En la Figura 3 mostramos una lámina hecha en GeoGebra, con el propósito de usar la geometría dinámica para apoyar efectivamente que el alumno reconozca esta situación como un problema de variación.

Algunas de las ventajas que ofrece GeoGebra a través de la geometría dinámica al realizar el análisis de esta situación, consiste en las posibilidades de mostrar varias ventanas con la representación del mismo objeto en sus diferentes representaciones [4]: verbal, gráfica, numérica y algebraica, potencializando la conexión entre ellas; los registros pueden interconectarse de tal forma que los cambios realizados en una ventana repercuten en las otras.

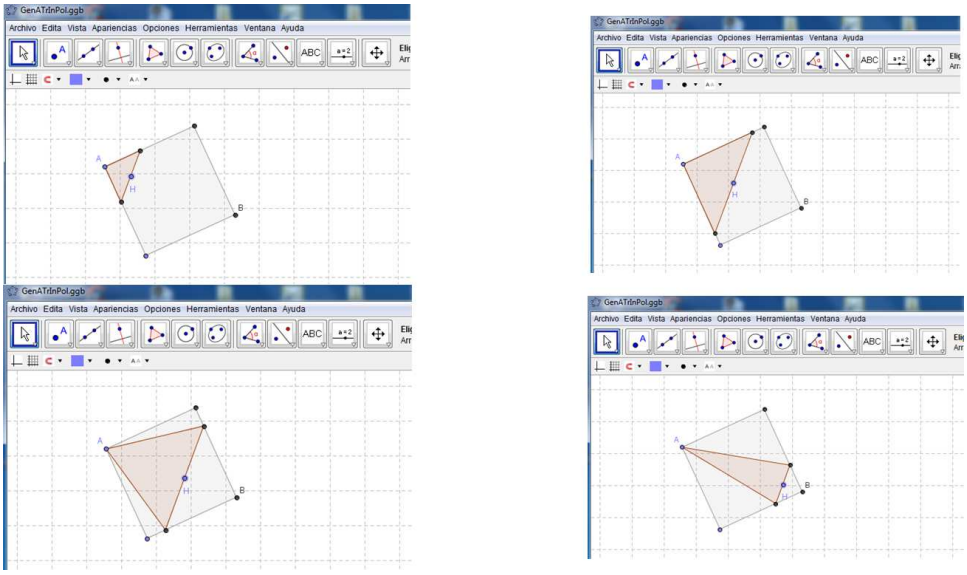


Figura 2: Secuencia de triángulos inscritos

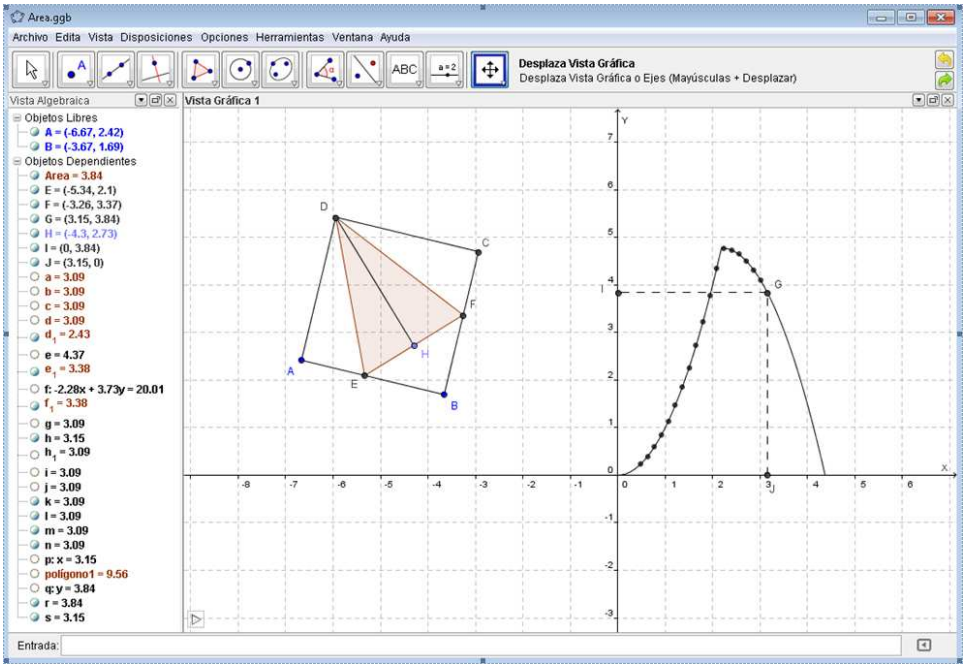


Figura 3: Distintas representaciones del problema

5 Conclusiones

Adicionalmente, como sucede con algunas situaciones, el problema lleva a otros problemas que se derivan de éste, entre ellos la generación de funciones a trozos y la diferenciabilidad en los extremos, cuyo tratamiento es cognitivamente rico y resultaría complementario al originalmente planteado.

Referencias

[1] Dávila Araiza, M.T. La Derivada a Partir de Problemas de Optimización en Ambientes Dinámicos Creados con GeoGebra. Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, 2010.

[2] Ibarra Olmos, S.E, Bravo Tapia, J.M. y Grijalva Monteverde, A. El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del Cálculo Diferencial. Memorias de la XII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Hermosillo, 2002.

[3] Hohenwater, M. GeoGebra en línea. Versión 4.2. 2009. `\http://www.geogebra.org/`

[4] Duval, R. Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. Traducción del Departamento de Matemática Educativa del INVESTAV-IPN, México, 1988.

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Septiembre, 2013, pp. 114–119.

Nivel: Medio superior

Uso de la Modelación para la Construcción del Concepto de Función a través de una Secuencia Didáctica

Ana Méndez Zazueta **José Luis Díaz Gómez**

Departamento de Ciencias Básicas, Instituto Tecnológico de Guaymas
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: ana.pmme@gmail.com; jdiaz@gauss.mat.uson.mx

Resumen

El presente trabajo es un reporte de tesis de maestría en Matemática Educativa que trata sobre la importancia de considerar la modelación, más que como una estrategia didáctica, como un proceso que soporta y apoya a la construcción de un concepto matemático, en este caso, el de Función; ya que se adecúa a situaciones reales sensibles a matematizarse. Se muestra un ejemplo del tipo de actividades que conforman la Secuencia Didáctica, la cual se fundamenta en el Análisis Didáctico de Pedro Gómez no solo como elemento teórico preponderante, sino que también, como elemento metodológico.

1 Introducción

El concepto de función es sumamente complejo y uno de los que mayores dificultades conllevan para lograr ser aprendido y comprendido por parte de los estudiantes (Thomas, 1968; Orton, 1970; Marnyanski, 1975, citado en Díaz [2]); esto es por la variedad de representaciones que el concepto posee y por la utilidad que se le proporciona en diferentes áreas y disciplinas.

Este problema se encuentra a nivel global; Díaz [2] cita en su trabajo "El concepto de función: Investigaciones y Enseñanza" que de las diversas investigaciones que tienen como punto central las componentes y representaciones de la noción de función (Marnyanski, Thomas, Bell, y Janvier, Markovits et. al, Eisenberg), en general concluyen que: "Los estudiantes, hasta los de más alto nivel intelectual, se quedan en los niveles más bajos de comprensión de la noción de función", [6].

Esta problemática se observa también en el nivel Medio Superior en la asignatura de Cálculo I. Una de las características de este problema es que los estudiantes no son capaces de acudir a la diversas representaciones matemáticas que el concepto tiene, es decir, no logran hacer la traducción entre una representación y otra. Por otro lado se observa también que los estudiantes no son capaces de utilizar las funciones para modelar problemas sencillos de su ámbito de estudio.

2 Modelación en la Clase de Matemáticas

En la educación matemática pareciera de mayor dificultad la selección de actividades que promuevan tal contextualización por los contenidos mayormente abstractos que ésta conlleva

(en relación con otras ciencias). Sin embargo, una manera en las que la contextualización devenga como parte intrínseca del aprendizaje en matemáticas y no se vea como una situación forzada y un intento desesperado por lograr tal contextualización, por parte del docente, es el uso de la modelación.

Se elige el modelado de situaciones reales basándose en el debate actual acerca de los paradigmas existentes en modelación, De Lange [5] menciona que " ejemplos del mundo real y sus interrelaciones con la matemática llegan a ser un elemento central para la estructuración de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática".

De igual manera, el modelado de situaciones reales favorece la construcción de conocimiento, ya que Bruner [1] plantea "Se construye a través de acciones sobre la realidad". Gómez [3], por su parte, sostiene que "La potencia de la modelación surge de la capacidad que nos da el modelo matemático (y las propiedades de la estructura matemática en la que se representa) para resolver problemas relacionados con el fenómeno, que no se podrían resolver en el contexto no matemático del fenómeno".

Hitt [4] menciona: "... que el conocimiento de un concepto es estable en el alumno, si éste es capaz de articular sin contradicciones diferentes representacioness del mismo, así como recurrir a ellas en forma espontánea durante la resolución de problemas". Por otra parte, se considera la modelación como un buen elemento que ayudaa a la construcción del concepto, sin ser la propia modelación el objeto central de estudio.

Por lo anterior y para diseñar la secuencia, será necesario el ubicar situaciones reales sensibles a la modelización para dar una respuesta, o bien, para predecir el comportamiento futuro de la misma. Para lograr llevar a cabo la secuencia, se contempla la utilización de los espacios proporcionados por la institución, así como las instalaciones y aditamentos en ella existentes.

3 El Análisis Didáctico y la Secuencia Propuesta

El Análisis Didáctico de Pedro Gómez [3], trata de la planificación del currículo que es necesario realizarse para abordar un concepto, esto mediante cuatro tipos de análisis: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción, análisis de actuación. El análisis de contenido es un análisis de las matemáticas escolares. Su propósito es la descripción de la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula. En este análisis se busca identificar y describir estructuradamente los diversos significados matemáticos de la estructura matemática.

En el análisis cognitivo se describen las hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje. Es decir, es un análisis a priori de las actividades, el cual ayudará a prever las actuaciones de los estudiantes. El análisis cognitivo de una estructura matemática es la identificación, descripción y caracterización sistemática, detallada y fundamentada de las tareas que los escolares pueden responder en ese momento y de las que deberían de responder en sesiones posteriores.

En el análisis de instrucción es donde se debe realizar la identificación y descripción de las tareas a utilizar en el diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje. La selección de tareas y la planificación de la gestión de éstas en el aula dependen también de la visión que se tenga de las matemáticas en el contexto escolar, su aprendizaje y enseñanza. El análisis de actuación es la descripción sistemática de la comprensión de los escolares con el propósito de proporcionar información que sea útil para el inicio de un nuevo ciclo de análisis didáctico.

Es esta la teoría que soporta el trabajo de tesis, de igual manera, indica la metodología a seguir para diseñar la secuencia didáctica, siendo cada uno de los cuatro análisis, una fase compleja e interdependiente al resto de los análisis pero con características propias y claramente delimitadas. Cabe resaltar que en el diseño de la secuencia pesa la trayectoria hipotética de quienes diseñan las actividades, es decir, de lo que se cree que es la manera en la cual los estudiantes van a aprender mejor. La trayectoria hipotética se define con base en la experiencia de la persona que va a diseñar, empezando por los objetivos.

La secuencia estará conformada por tres secciones: Actividades de inducción al concepto, Actividades de transición a la formalización del concepto y Actividades de Formalización del Concepto.

4 Ejemplo de una Actividad de Inducción al Concepto de Función

Dime cuanto comes y te diré que hacer.

La Secretaría de Salud, en conjunto con instituciones particulares, promueve campañas contra la obesidad y el sobrepeso y el riesgo que éstos implican a la salud. Una dieta saludable consta de un régimen alimenticio equilibrado con un consumo de calorías que depende del peso promedio de cada individuo, como sigue:

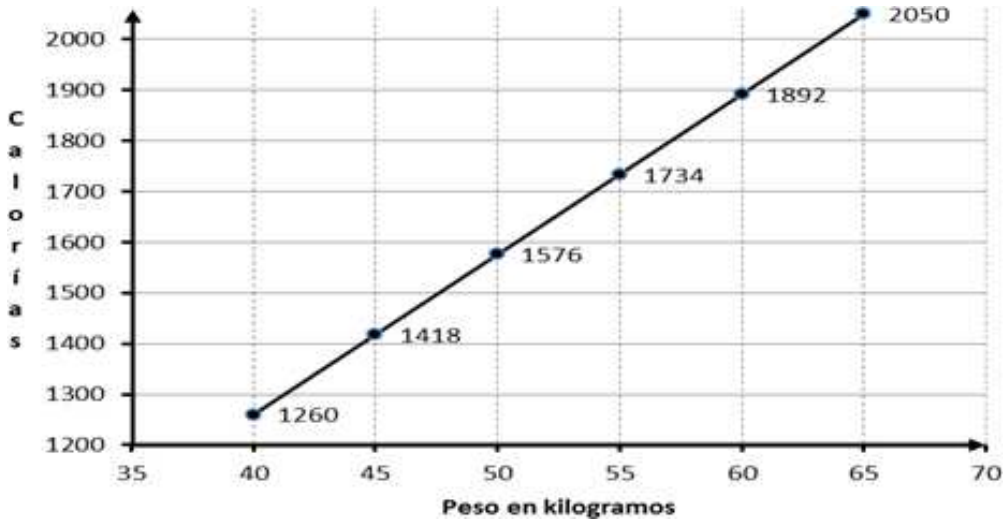


Figura 1: Consumo calórico

I. Según la gráfica,

a) ¿Cuantas calorías deberá ingerir una persona cuyo peso es de 50 Kg?

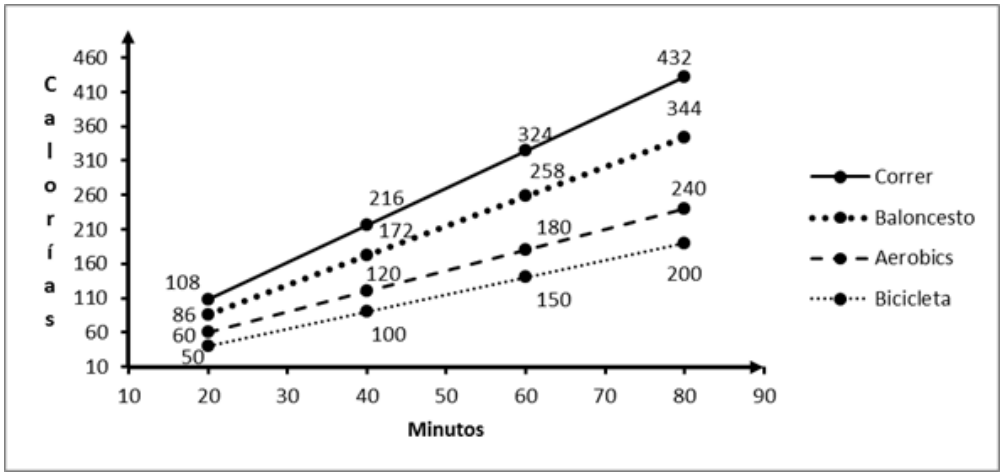
b) ¿Cuál debe ser la ingesta calórica de una persona cuyo peso es de 64 Kg?

c) Si una persona ingiere 1734 calorías ¿Cuál será su peso?

d) Si una persona ingiere 1800 calorías ¿Cuál sería su peso aproximado?

e) ¿Cuántas calorías debe eliminar una persona de 45 Kg que ha ingerido 2500 calorías?

II. En la siguiente gráfica se muestran algunas actividades y la pérdida calórica que implica su realización.



a) ¿Cuántas calorías quema una persona que corre durante 20 min y hace bicicleta durante otros 20 min?

b) ¿Cuántas calorías quema una persona que juega baloncesto durante 50 minutos?

c) Si una persona ingiere 260 calorías extra, ¿qué tipo de actividades deberá realizar para quemarlas y durante cuánto tiempo?

III. En equipo resuelvan lo siguiente: Un ser humano necesita disminuir su ingesta calórica normal, en 500 por día para lograr reducir su peso en 0.5 kg por semana.

a) ¿Cuántas horas de actividad necesita realizar una persona que pesa 75 Kg y desea disminuir un total de 8 Kg en ocho semanas?, ¿qué tipo de actividad deberá realizar?

b) ¿Cuántas calorías deberá consumir en total por día una persona que pesa 68.5 Kg y que desea bajar 3 Kg en 3 semanas?, ¿será esta pérdida de peso factible?

5 Conclusiones

El análisis de contenido incluye las nociones de sistema de representación, estructura conceptual y fenomenología, que corresponden a las tres dimensiones del significado de un concepto en el contexto de las matemáticas escolares, en este caso del concepto de función. [3]

Por otro lado, según Díaz [2] en la literatura sobre el concepto de función existe un consenso general en relación sobre qué aspectos son cruciales para una profunda comprensión del concepto de función. Las áreas identificadas incluyen:

(a) Interpretación de funciones representadas por gráficas; (b) Descripción de situaciones, fórmulas y tablas; (c) Modelación de situaciones del mundo real; (d) Transferencia entre las múltiples representaciones de las funciones; (e) Análisis de los efectos de cambio en los parámetros de las gráficas de las funciones; y (f) Aplicación de la tecnología para representar las funciones.

Así, la intencionalidad de la secuencia didáctica que se muestra es la de poner de manifiesto los tres aspectos del análisis de contenido mencionados. Para la noción de los sistemas de representación se consideró la relación entre la representación verbal, la numérica y la gráfica, en la estructura conceptual, se considera la relación entre la variable dependiente y la independiente, así como operaciones entre estas variable, con el propósito de inducir los conceptos de dominio y rango. Adicionalmente, el concepto función lineal forma parte, por ejemplo, de la estructura matemática correspondiente al concepto función. En cuanto a la fenomenología el ejemplo es un problema en contexto que le da sentido al concepto de función, donde se relacionan dos propiedades de un objeto (peso, calorías), (tiempo, calorías).

En relación a los aspectos cruciales para la comprensión del concepto de función en la secuencia que se muestra se observan varios de ellos, por ejemplo, un problema en el que se busca obtener información numérica a través de la interpretación de una función representada por gráficas, para obtener una tabla de datos, (peso, calorías), (tiempo, calorías), la modelación de una situación real, etc.

En lo concerniente a la tesis, las acciones que restan por efectuar son, primero, poner en escena la secuencia diseñada, esto dado que la asignatura que contiene al concepto de función es Cálculo y éste se imparte únicamente en el cuarto semestre del nivel Medio Superior.

Posterior a la puesta en escena se realizará el análisis detallado de las intervenciones de los estudiantes al resolver cada una de las actividades de la secuencia. Una vez hecho lo anterior, se realizarán las conclusiones correspondientes, se intentará plantear un rediseño de las actividades, si el tiempo lo permitiere y, se delimitarán futuras líneas de investigación.

Referencias

[1] Bruner, J.S. *The process of education.* Harvard University Press, Cambridge, MA, 1960.

[2] Díaz Gómez, J.L. El concepto de función. Investigaciones y Enseñanza. Memorias de la XVIII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Mosaicos Matemáticos 27, pp. 35-40, 2008.

[3] Gómez, P. Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. Revista EMA., Vol. 7, 2002.

[4] Hitt, F. Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. Educación matemática, Vol. 10, No. 2, Iberoamérica, México, pp. 23-45, 1998.

[5] De Lange, J. *Mathematics insight and meaning.* OW&OC. University of Utrecht, Freudenthal Institute, Utrecht, Netherlands, 1987.

[6] Ruiz, L. Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Tesis doctoral inédita, Universidad de Granada, 1994.

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Septiembre, 2013, pp. 120–126.

Nivel: Básico

Identificación de Niños Matemáticamente Talentosos

Zeidy Margarita Barraza García **José Luis Soto Munguía**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: zeidy.barraza@gmail.com

Resumen

En este trabajo se muestran los avances en la elaboración de un método de diagnóstico que permita identificar alumnos de educación básica con talento matemático. Nuestro interés más general es formular un programa de intervención para estos niños, enmarcado en un proyecto de colaboración entre la Secretaría de Educación y Cultura del Estado de Sonora (SEC-Sonora) y la Universidad de Sonora. El método está basado en los estudios realizados por Krutetskii sobre habilidades matemáticas y consiste en observar a los candidatos durante el proceso de resolución de problemas. Tratamos de refinar el proceso mediante un cuestionario y una entrevista donde se identifiquen los diferentes niveles de desarrollo de las habilidades.

1 Introducción

Conforme nuestro país se ha ido incorporando a un concierto general de naciones cada vez más globalizado en todos los aspectos, más claras han sido las evidencias de nuestras limitaciones y deficiencias en diferentes campos; el científico es uno de ellos. Al igual que otros países, aspiramos a construir la sociedad del conocimiento, pero presentamos un atraso crónico en la formación de científicos y tecnólogos. Según la OCDE (cifras de 2009), tenemos un científico por cada mil habitantes económicamente activos, contra los 16 de Finlandia, los 11 de Japón o los dos de Argentina.

En la mayoría de los países desarrollados, el tema de niños "especiales" ha sido desde las últimas décadas una prioridad para las autoridades educativas, dando oportunidades a los dos casos especiales: niños con deficiencias y niños sobresalientes. Siendo estos últimos parte fundamental del crecimiento científico, tecnológico y económico de cualquier país.

Así mismo, con un interés creciente en el tema de niños especiales la UNESCO (2004) ha presentado un libro sobre "La educación de niños con talento en Iberoamérica" en donde se establece que:

"Toda persona tiene derecho a recibir una educación que desarrolle al máximo sus capacidades y le permita su proyecto de vida. Hacer efectivo ese derecho implica asegurar el principio de igualdad de oportunidades, es decir proporcionar a cada uno las ayudas y recursos que requiere, en función de sus características y necesidades individuales." [3].

Mejorar las condiciones en las que competimos con otras naciones, nos exige aumentar drásticamente la calidad y cantidad de nuestros cuadros técnicos y científicos, pero cumplir esta exigencia pasa por identificar y vencer las dificultades que enfrenta actualmente la formación de nuestros futuros científicos.

Los organismos responsables de promover el desarrollo de la ciencia en México, han emprendido diversas estrategias para aumentar la cantidad y mejorar la calidad de nuestros científicos, pero dichas estrategias están orientadas principalmente a los estudiantes de licenciatura o posgrado, es decir, de estudiantes que ya han decidido dedicarse a la ciencia. Para nosotros el problema principal es que el número de estudiantes que decide tomar el camino científico, es muy reducido. En la Universidad de Sonora, por ejemplo los estudiantes inscritos en la División de Ciencias y Naturales no llegan al 5% del total y estudian la Licenciatura en Matemáticas apenas 95 estudiantes de una población estudiantil de 25000 (Universidad de Sonora, 2011).

En lo que se refiere a la matemática, nosotros vemos como una estrategia factible, para aumentar el número de candidatos a cursar una carrera científica o técnica, la identificación de talentos matemáticos en edad temprana y la implementación de programas de intervención.

En este orden de ideas, se presentan aquí los avances de un proyecto de investigación relacionados con la caracterización e identificación de niños matemáticamente talentosos (MT) y con la posible intervención a través de un programa que promueva el desarrollo de sus habilidades matemáticas.

2 Caracterización de un Niño MT

Las investigaciones relacionadas con el talento matemático tienen un desarrollo relativamente reciente, uno de los pioneros en el tema es el psicólogo ruso V.A. Krutetskii (1976) quien en su libro "La Psicología de las Habilidades Matemáticas de los Niños" (*The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*) define al talento, no como una característica única, sino más bien como una combinación cualitativa de diferentes habilidades únicas para cada persona.

En este sentido, es importante resaltar el término habilidad, que Krutetskii define como: "un rasgo personal que permite a uno realizar una tarea dada rápida y correctamente, en contraste con un hábito o destreza, que es característico de la propia actividad". Es substancial hacer una diferenciación clara entre habilidad y destreza, ya que en el lenguaje coloquial suelen tomarse como sinónimos, pero en nuestro trabajo no será así, la destreza se verá reflejada en la repetición de la actividad misma.

Teniendo en cuenta lo anterior, hemos seleccionado algunas de las habilidades matemáticas estudiadas por Krutetskii en niños pequeños (entre 8 y 12 años de edad), cuyo nivel de desarrollo tendríamos interés en conocer y usarlas como base para la identificación de talentos:

1. Habilidad para generalizar.
2. Habilidad para razonar lógicamente.
3. Habilidad para la abstracción.
4. Flexibilidad en el pensamiento.
5. Habilidad para interpretar visualmente relaciones matemáticas.
6. Habilidad para cambiar del razonamiento directo al razonamiento "hacia atrás".

Una vez seleccionadas las habilidades se ha realizado un estudio exploratorio con el fin de familiarizarnos con los métodos usados por Krutetskii e identificar las posibles dificultades que pudieran presentarse durante su aplicación. Para este estudio se han escogido ocho problemas matemáticos, algunos de ellos son simples adaptaciones de los que Krutetskii ha usado en sus estudios, y se han propuesto a un alumno considerado como Matemáticamente Talentoso por sus profesores y por sus padres. El alumno, llamado aquí Arturo, fue observado y video grabado mientras resolvía los problemas.

Arturo es un niño de 11 años que cursaba el quinto grado de primaria y había tenido una participación exitosa en la edición 2012 del concurso Competencia Cotorra de Matemáticas.

Arturo resolvió los ocho problemas seleccionados, durante una sesión que duró aproximadamente una hora, en hojas de rotafolio colocadas sobre una mesa. Una cámara de video fue colocada a una distancia de un metro por encima de la mesa previendo que durante la resolución de los problemas Arturo pudiera no registrar por escrito algunos pasos de sus procedimientos. Previamente se le especificó a Arturo que intentara pensar en voz alta y cada vez que Arturo resolvía un problema de manera directa, la maestra lo cuestionaba para que pusiera en evidencia las estrategias y habilidades que estaba utilizando.

Ilustraremos lo que ha sucedido en esta sesión, con uno de los problemas, a saber el problema número cinco de la lista:

Problema 5. En una fiesta todas las mesas tienen 5 sillas, pero las 4 últimas personas que llegaron a la fiesta no alcanzaron silla. La encargada pone ahora 6 sillas en cada mesa, pero se da cuenta que ahora hay 2 sillas vacías. ¿Cuántas personas y cuantas mesas hay en la fiesta?

Arturo estuvo pensando dos minutos el problema y luego propuso la siguiente solución "*Ya sé qué poner, podemos decir que había... digamos 6 mesas, de esas 6 mesas cada una tenía 5 sillas, que era equivalente a 30 personas, entonces se agregaron 6 sillas [sic] a cada una, entonces en cada mesa iba a sobrar una, iban a sobrar 6 lugares pero de esos seis lugares tomaron 4, y ahí sobraron 2. Entonces había 34 personas en la fiesta y 6 mesas*".

Durante el proceso de resolución, Arturo no escribió absolutamente nada, fue a petición de la maestra que intentó explicitar su razonamiento. La primera respuesta del alumno a la petición de la maestra, fue que no sabía cómo le había hecho, pero después de unos segundos, y con algunas dificultades para escribir el procedimiento que había utilizado, anotó lo que se muestra en la Figura 1.

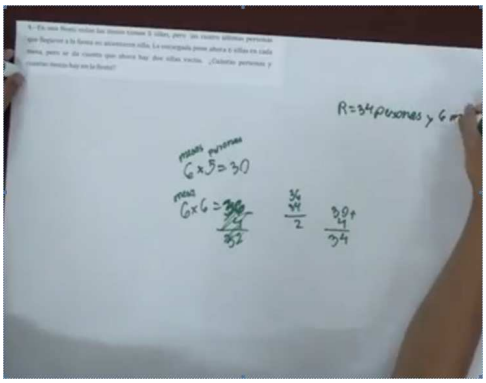


Figura 1: Resolución del Problema 5

Lo que ilustra la Figura 1, es que el niño no intenta describir el procedimiento que lo ha llevado a la solución, sino más bien se propone verificar que el resultado obtenido es correcto.

La solución ofrecida por Arturo denota un alto desarrollo de la habilidad para traducir las expresiones verbales a relaciones numéricas, aunque no puede explicitarlas de inmediato, también muestra una gran destreza para analizar numéricamente los casos que pudieran resultar una solución para el problema. Muestra un buen desarrollo de su habilidad para la abstracción, reduciendo rápidamente el problema al análisis del comportamiento numérico de los casos considerados. Estas habilidades y las mostradas en los otros siete problemas, parecen confirmar que, Arturo es un niño matemáticamente talentoso. Durante la sesión pudimos observar que el razonamiento de los niños matemáticamente talentosos es tan fulminante que observarlo es complicado, con la ayuda de la cámara de video esto resultó más sencillo, ya que pudimos estudiar detenidamente y en repetidas ocasiones este proceso.

3 Identificación de Niños MT

Distinguir los estudiantes considerados sobresalientes por su institución, de los alumnos matemáticamente talentosos, no es una tarea sencilla. La identificación de niños con talento matemático en nuestro país se hace de manera bastante empírica, por lo general con el propósito de "entrenarlos" para los diversos concursos matemáticos infantiles, como la Competencia Cotorra o el Concurso Canguro Matemático.

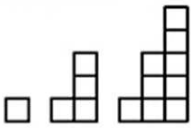
Nosotros nos hemos propuesto aplicar un método de selección basado en la identificación de las habilidades matemáticas más desarrolladas por los aspirantes. Este método tendría la ventaja de evaluar con mayor precisión el nivel de desarrollo de estas habilidades, pero además nos permitirá saber más sobre aquellas habilidades que pudieran desarrollarse en un posible Programa de intervención. Este método está basado en las contribuciones teóricas y en las herramientas metodológicas desarrolladas por Krutetskii (1976), en particular en los trabajos que se refieren a niños matemáticamente talentosos.

El método se divide en dos etapas, la aplicación de un Cuestionario y la aplicación de una Entrevista. Todos los niños que cumplan con el requisito de pertenecer a los grados de 5to y 6to grado de primaria podrán participar en la aplicación del Cuestionario, de ellos se elegirán a quienes resulten mejor evaluados para después participar en una entrevista donde se conocerá más sobre el nivel de desarrollo personal y el nivel de desarrollo próximo del participante. A continuación se hará una descripción breve del diseño y puesta en escena del Cuestionario y la Entrevista.

Etapa 1: Cuestionario.

El cuestionario consta de seis problemas los cuales se aplicaron a 120 niños de 5to y 6to grado de primaria en una escuela privada del Estado de Sonora a finales de septiembre del año 2012. Con fines de ponderar los procesos de resolución, se elaboró un baremo para cada problema, donde en términos generales se le asignó al estudiante: 1 punto si entendió el problema, 2 puntos si muestra alguna estrategia útil, 3 puntos si la respuesta es correcta y un punto extra si el estudiante mostró alguna "idea brillante". Para ejemplificar se muestra el siguiente problema, el cual forma parte del Cuestionario:

1.- Observa las siguientes figuras. ¿Cuántos cuadrados serán necesarios para construir la figura que ocupa el lugar 15?



Este problema fue resuelto por el 22.5% de los estudiantes, a saber, el segundo problema más complicado para los estudiantes.

Etapa 2: Entrevista

En la entrevista se diseñaron preguntas asociadas a las habilidades mostradas en el Cuestionario. Se seleccionaron a tres estudiantes que obtuvieron la máxima calificación, 17 de 18 aciertos, para ser video grabadas en una sesión de aproximadamente 45 minutos para cada una. Los objetivos de la entrevista fueron los siguientes:

- Validar el cuestionario diseñado y descubrir si realmente los niños que obtuvieron las mejores puntuaciones pueden considerarse matemáticamente talentosos.
- Indagar más acerca de las habilidades que tienen más desarrolladas los niños entrevistados y observar hasta qué nivel de desarrollo pueden llegar con la ayuda del entrevistador.
- Identificar cuáles habilidades tienen los alumnos en un nivel de desarrollo bajo para después, dentro del Programa de intervención, agruparlos de acuerdo a sus necesidades. Por ejemplo, los niños que presenten deficiencias en la percepción espacial serán agrupados para poder recibir la atención necesaria en esa área en específico.
- Identificar si los niños son matemáticamente talentosos.

La entrevista tiene un diseño individual, puesto que en cada caso las preguntas de la entrevista dependen de las soluciones que el estudiante ha escrito en el Cuestionario. En cada uno de los problemas, estas preguntas podrían incluir variantes del mismo o incluso problemas nuevos. La primera de estas entrevistas ya ha sido aplicada a una niña de quinto grado. Si la estudiante resolvió el problema correctamente entonces durante la entrevista se le hicieron una serie de preguntas para profundizar acerca de las habilidades utilizadas para resolver el problema y para responder algunas dudas que se tuvieron sobre las estrategias planteadas durante la revisión de su Cuestionario. Se le propuso además un problema más complejo dónde pudiera poner a prueba la habilidad para generalizar, o un problema que mejore la percepción que tenemos de la estudiante sobre la habilidad o habilidades mostradas en el problema.

Asimismo, si la estudiante no resolvió correctamente un problema se le plantearon una serie de variantes, donde muestre en qué nivel de desarrollo se encuentra su habilidad y a cuál logró llegar con la ayuda del entrevistador, es decir el objetivo aquí es ir acotando su

nivel de desarrollo y por otra parte tratar de profundizar en lo que la llevó a una conclusión incorrecta. Además, se le diseñó un problema semejante donde mostrara si puede generalizar y llegar a la resolución correcta con la misma habilidad mostrada anteriormente.

La entrevista es semi estructurada, es decir, se les fueron adecuando preguntas conforme las estudiantes iban proporcionando sus respuestas. Pasaremos entonces, a mostrar parte del análisis de la Entrevista y el Cuestionario de la primera alumna de 5to grado, a la que llamaremos Bianca:

Bianca identifica con facilidad las relaciones internas de los problemas matemáticos y además, tiene un pensamiento lógico, sistemático y secuencial. La habilidad para generalizar se encuentra altamente desarrollada en ella, al igual que la percepción visual. Muestra en desarrollo la habilidad para cambiar del razonamiento directo al razonamiento "hacia atrás", así como la habilidad de abstracción. Bianca pone en manifiesto algunos síntomas que nos llevan a concluir que las habilidades aritméticas y de conteo se encuentran en un nivel de desarrollo bajo. En conclusión, Bianca es una niña matemáticamente talentosa con algunas deficiencias en el cálculo aritmético y mental.

4 Intervención de Niños MT

A partir de los resultados que nos ha arrojado esta investigación, uno de los objetivos principales del estudio será el bosquejo de un Programa para la atención de niños MT, en donde en colaboración con la Secretaría de Educación y Cultura del Estado de Sonora (SEC-Sonora) y la Universidad de Sonora se formen grupos de atención donde los estudiantes tendrán la oportunidad de aprovechar al máximo su potencial matemático, estos grupos estarán divididos de acuerdo a las habilidades mostradas por los estudiantes en los procesos de identificación.

El Programa tendrá como finalidad potencializar las habilidades presentadas en los niños participantes y nivelar las deficiencias. Se agruparán a los estudiantes que tengan similitudes en sus habilidades, es decir, los estudiantes con deficiencias en la parte del cálculo aritmético formarán un grupo, en donde se tratarán todos los temas pero el énfasis se pondrá en los problemas de carácter aritmético.

Dentro del bosquejo se presentará un banco de problemas separados en tres ramas de estudio: geometría, teoría de números y combinatoria, y una adicional llamada miscelánea. Los alumnos que participen resolverán problemas relacionados con estas áreas, de forma individual, en equipo y grupal. Se diseñarán estrategias de resolución para cierto tipo de problemas, esto para ayuda del profesor que estará a cargo del grupo.

5 Conclusiones

A partir de la aplicación de los problemas seleccionados podemos concluir que es difícil aplicar la metodología de Krutetskii, pero con ayuda de la tecnología, como es el caso de la videograbadora, esto es mucho más factible. Capturar las ideas verbalizadas y el razonamiento de los niños en video nos permite observar en repetidas ocasiones el registro escrito y verbal que va dejando el estudiante en el transcurso de la resolución de los problemas.

En cuanto a los avances ya se tiene una primera versión de lo que sería un criterio de identificación de niños MT, falta refinarlo y ponerlo en el campo nuevamente, en las próximas semanas se pretende llevarlo a cabo a una escuela primaria pública del Estado de Sonora.

Por otra parte, conforme se ha ido precisando el diseño, tanto del Cuestionario como de la Entrevista, se ha visto la conveniencia de escribir un instructivo sobre su utilización, ya que se pretende que el método de identificación sea autosuficiente y pueda ser aplicado por otros, esto requiere de más especificaciones, en las cuales se está trabajando como es el caso del Baremo. Sabemos que la identificación de niños MT mediante cuestionarios de opción múltiple sería un método más fácilmente aplicable, pero al momento de ganar cobertura se perdería la detección fina, ya que cualquier criterio que requiera del desarrollo de las habilidades se tiene que tomar con mucho cuidado. Entre más sofisticado es el criterio es menos masivo, por lo tanto, es para nosotros primordial encontrar un punto medio entre estos dos parámetros.

Referencias

[1] Krutetskii, V. A., *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren* [La Psicología de las Habilidades Matemáticas en Niños con Edad Escolar], (trad. Teller J.), Chicago, EEUU, The University of Chicago Press, 1976. (Original en ruso, 1968)

[2] Universidad de Sonora [base de datos], Hermosillo, Sonora: Dirección de Servicios Escolares 2011. Recuperado el 20 de Junio de 2012 de `http://www.planeacion.uson.mx/sie/alumnos/res_poblacion_his.php`

[3] Machado, A. L., *La educación de niños con talento en Iberoamérica,* M. Benavides, A. Maz, C. Enrique, & R. Blanco, Eds. 9, 2004.

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2013, pp. 127–134.

Nivel: Medio Superior

Estrategia de Análisis para Reactivos de Geometría Analítica de la Prueba ENLACE 2012

Luis Enríquez Chapa **Manuel Alfredo Urrea Bernal**

Centro de Estudios Tecnológicos del Mar 03,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: luisenriquezchapa@yahoo.com.mx, maurr@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Del trabajo de investigación en la elaboración de Tesis, para obtener el grado de Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora, "Análisis de reactivos de la prueba ENLACE desde la perspectiva del Programa de Estudios del Bachillerato Tecnológico", presentamos la estrategia de análisis de un reactivo que se realiza utilizando elementos del modelo teórico "Un Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática" de Juan D. Godino y colaboradores.

1 Introducción

Consideramos que la evaluación de los aprendizajes es uno de los temas más complejos del quehacer educativo, y al ser ENLACE una evaluación estandarizada que contiene reactivos de matemáticas, declarados como problemas provenientes de actividades de la vida cotidiana del ser humano; en este estudio pretendemos conocer el grado de confiabilidad de los resultados publicados por dicha institución, analizando la estructura de los reactivos (situación de un problema, opciones de respuesta y debilidades que presentan quienes no responden correctamente), revisando en qué medida ENLACE evalúa lo que dice que evalúa.

Se presenta el análisis de un reactivo de Geometría Analítica de la prueba ENLACE 2012, por lo que consideramos los contenidos conceptuales de la materia e incluimos un aspecto que está relacionado con la correspondencia entre la "debilidad" (de los estudiantes que no responden correctamente) y las estrategias y contenido matemático que utilizan los estudiantes que resuelven correctamente el reactivo. Es importante conocer el sistema de prácticas como estrategia de solución y si el objeto matemático que se pretende evaluar es el que los estudiantes visualizan y operan cuando resuelven el reactivo. Para tener un acercamiento a ésta práctica, se aplicó el reactivo a estudiantes del *Centro de Estudios Tecnológicos del Mar 03* de Guaymas, Sonora, dejando evidencia escrita de la forma en cómo lo hacen, encontramos como objetos matemáticos intervinientes el lenguaje simbólico, procedimientos y argumentos.

Los elementos teóricos del *Enfoque Ontosemiótico* [1], que intervienen en el análisis de reactivos, son: práctica, objeto matemático, objeto institucional, objeto personal, significado institucional; de referencia y evaluado, y significado personal de los objetos matemáticos. Utilizamos los seis tipos de objetos matemáticos primarios; elementos lingüísticos, situaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, para revisar lo que se declara

en ambas instituciones, *ENLACE* y el *Programa de Estudios*, que está relacionado con las competencias y habilidades matemáticas que debe desarrollar el estudiante de bachillerato de acuerdo a lo que marca la *Reforma Integral de la Educación Media Superior* [3].

2 Propuesta de Estrategia para el Análisis del Reactivo Número 84 de la Prueba ENLACE 2012

Para el análisis del reactivo nos centramos en los siguientes aspectos:

a) Elementos de significado de los reactivos.

b) Pertinencia de los distractores.

c) Contenidos y procesos que utiliza la prueba.

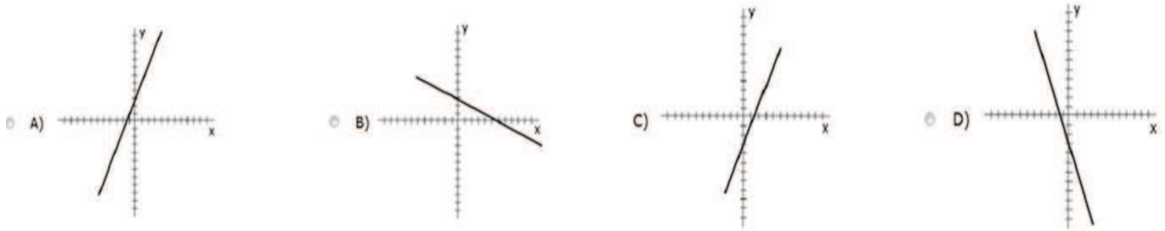
d) Lo que evalúa el reactivo y lo que se establece en el Programa de Estudios.

e) Consistencia acerca de la debilidad marcada por ENLACE.

f) Argumentos que presentan estudiantes que resuelven los reactivos y dejan evidencia escrita de la forma en cómo lo hacen.

El reactivo:

84 ¿Cuál gráfica representa la perpendicular de la recta de la ecuación 2x - y + 3 = 0 y ordenada al origen 3?



Consideramos los resultados publicados por ENLACE que son:

La respuesta correcta a esta pregunta es la opción: **B**
El porcentaje de alumnos en el grupo que contestó incorrectamente esta pregunta es: **76%**

Debilidad: El alumno no logra IDENTIFICAR LA GRÁFICA DE LA RECTA PERPENDICULAR O PARALELA QUE PASA POR UNA ORDENADA AL ORIGEN DE UNA ECUACIÓN LINEAL

a) Elementos de significado del reactivo.

Elementos lingüísticos: El reactivo nos plantea la interrogante: ¿Qué gráfica representa la perpendicular de la recta de la ecuación $2x - y + 3 = 0$ y ordenada al origen 3? En la constitución de esta pregunta están incluidas 15 palabras y de ellas tenemos las palabras: *gráfica*, *perpendicular*, *recta*, *ecuación*, *ordenada al origen*, que son términos relacionados con objetos matemáticos, que deben ser relacionadas para dar una idea concreta de un problema que está relacionado con algún objeto matemático en particular.

El enunciado del reactivo menciona que $2x - y + 3 = 0$ es la ecuación de una recta, es decir la ecuación es una representación de un objeto matemático del cual el estudiante que resuelve el reactivo debe hacer uso de su sistema de prácticas para determinar algunos de sus elementos y encontrar en las opciones de repuesta una recta perpendicular que tenga ordenada al origen 3. Y como elementos lingüísticos para las opciones de repuesta se visualizan cuatro gráficas de rectas representadas en los ejes de coordenadas.

Situaciones: Revisando los elementos primarios situacionales, se solicita al estudiante la gráfica que representa la recta perpendicular a la ecuación $2x-y+3 = 0$, con la característica de que su ordenada al origen sea 3, para encontrarla, se pueden manejar diferentes registros de representación de este objeto matemático con procedimientos de solución diferentes, los que dependerán de su sistema de prácticas, como objeto matemático primario situacional se puede considerar el tránsito de una representación lingüística; la representación algebraica de una recta, a una representación gráfica de otra recta que debe ser perpendicular a la primera, y cumplir la condición de que la ordenada al origen sea 3.

Conceptos: En el reactivo no se maneja en forma directa algún concepto referido a los objetos matemáticos, se tienen además de la representación algebraica de una recta, a palabras como gráfica y recta, que por sí mismas no los representan, es necesario conocer la estructura de toda la oración para tener un constructo y poder clarificar lo que se pide, entender el problema. En el desarrollo de la solución se ha de conocer el concepto de recta perpendicular y los elementos necesarios para determinarla a partir de la ecuación de la recta dada $2x-y+3 = 0$, y que cumpla la condición de ordenada en el origen 3.

Algunos de los elementos que pueden intervenir para determinar la solución del problema y que dependerán del sistema de prácticas del estudiante, son la ecuación $2x-y+3 = 0$ y su representación gráfica, teniendo relevancia los datos que se producen al operar esta ecuación, como los puntos en los que la recta cruza a los ejes de coordenadas, la pendiente de la recta y la representación gráfica de la recta. Con esta información se puede obtener una recta, que sea perpendicular a la primera y que tenga ordenada al origen con valor de tres, suponemos de inicio que una de las cuatro opciones de respuesta del reactivo. Podemos indicar que los conceptos matemáticos intervinientes del reactivo son:

- *Recta*; como objeto matemático del cual se pretende evaluar en el estudiante la capacidad para interpretar la información que se puede obtener de su ecuación para posteriormente determinar una recta perpendicular que cumpla una condición de ordenada al origen en tres.

- *Recta perpendicular*; como objeto matemático emergente de la ecuación original cuya representación gráfica es coincide con una de las opciones de respuesta.

- El concepto de *ordenada al origen*; como dato fundamental para que el estudiante determine cuál es la recta que es perpendicular en el punto dado, a la recta que está representada como ecuación en el reactivo.

Proposiciones: No hay proposiciones en el reactivo aunque es necesario conocer cuáles son las condiciones para determinar la representación gráfica de una recta dada su ecuación, la pendiente de la recta o los datos que el estudiante utilice en su sistema de prácticas, primeramente para visualizar la ecuación que se da en el reactivo y posteriormente construir y representar gráficamente una recta perpendicular con ordenada en el origen de valor tres.

Se puede considerar la existencia de proposiciones implícitas que ayudan al estudiante a identificar $2x - y + 3 = 0$ como ecuación de una recta, en la que se puede visualizar que el valor que toma la variable y es el doble del valor que toma la variable x, otro dato que se puede derivar de esta ecuación, es por ejemplo, si se le da a x el valor de 0, la y toma el valor de 3, el punto correspondiente es $(0, 3)$; si a y se le da el valor de 0, la x toma el valor de $-3/2$, el punto correspondiente es $(0, -3/2)$, y con estos datos es posible representar gráficamente la recta. Se puede obtener como parte interesante de las características de la recta, su pendiente, que en este caso es de $2/3$, y como emergente, la pendiente de la recta que es perpendicular a la recta dada.

Procedimientos: Por la estructura de la prueba, en la que se presenta el reactivo y las cuatro opciones de respuesta, no es posible conocer el procedimiento que utiliza el estudiante al presentar su respuesta. Para resolver el reactivo pueden seguirse diferentes prácticas, que constituyen los procesos mentales en el tratamiento de los objetos matemáticos que constituyen el significado personal del estudiante.

Argumentos: No se requiere argumentos al presentar la opción de respuesta seleccionada. Por lo que no podemos conocer qué elementos son los que utilizó el estudiante en su sistema de prácticas al determinar la solución del problema.

b) Pertinencia de los distractores

Mencionaremos la forma en que están presentados los distractores y la respuesta correcta en las cuatro opciones de respuesta que se proporcionan al estudiante: las opciones presentan dos rectas con pendiente positiva y dos con pendiente negativa.

La opción A es la representación de una recta con pendiente positiva, que cruza al eje x en $(-1.5, 0)$ y al eje y en $(0, 3)$, esta opción como distractor puede ser descartada cuando el estudiante identifica que la recta presentada es la recta que corresponde a la ecuación dada.

La opción B representa a una recta con intersección en el eje x en $6, 0)$ y con el eje y en $(0, 3)$, es decir, la ordenada al origen es 3, esta gráfica corresponde a la respuesta correcta.

Las opciones C y D no presentan la ordenada al origen en 3, por lo que el estudiante que opera correctamente el elemento correspondiente a ordenada al origen no las considera, estas dos opciones no juegan un papel adecuado de distractores.

c) Contenidos y procesos que utiliza la prueba

El contenido matemático que se evalúa en este reactivo, de acuerdo a lo que declara ENLACE es de "espacio y forma" y el proceso a evaluar es de "conexión", considerando el cambio de representación del objeto matemático, de su expresión algebraica a la representación gráfica de una recta que es perpendicular a la inicialmente presentada.

d) Lo que evalúa el reactivo y lo que se establece en el Programa de Estudios

Para conocer lo que se pretende evaluar en el reactivo, se toma como referencia la "debilidad" del estudiante que no lo resuelve correctamente y que declara ENLACE en sus resultados; para el presente reactivo es: "identificar la gráfica de la recta perpendicular o paralela que pasa por una ordenada al origen de una ecuación lineal".

El Programa de Estudios contiene la estructura de contenidos procedimentales para la materia de Geometría Analítica, la práctica que el estudiante realiza para resolver el problema presentado en el reactivo debe estar relacionada con las capacidades y habilidades matemáticas. Se presentan en la Tabla 1 algunas de las capacidades y habilidades manifestadas en el Programa de Estudios [3] y que pueden formar parte del sistema de prácticas del estudiante al resolver el reactivo:

Tabla 1: Capacidades y habilidades declaradas en el Programa de Estudios

CAPACIDADES – HABILIDADES			
RAZONAMIENTO MATEMATICO	RESOLUCION DE PROBLEMAS	ORIENTACION ESPACIAL	EXPRESION ORAL Y ESCRITA
Analizar	Comprender	Relacionar	Expresar gráficamente
Realizar inferencias y deducciones	Elaborar estrategias de solución	Representar mentalmente	Utilizar terminología y notación matemática
Evaluar	Identificar	Representar gráficamente	
	Representar		

Se observa que los procesos que pueden intervenir en la resolución del reactivo deben corresponder a acciones realizadas al desarrollar las capacidades y habilidades mencionadas en el programa de estudios y en el aspecto de los contenidos temáticos del programa de estudios, se incluye los lugares geométricos, en los que está considerada la línea recta, su ecuación y representación gráfica. Por lo que los contenidos matemáticos que se pretenden evaluar en el reactivo sí están planteados en el programa de estudios.

Se muestra en la Tabla 2 algunas de las prácticas que pueden desarrollar los estudiantes con los objetos matemáticos identificados en el reactivo relacionando las capacidades y habilidades que indica el Programa de Estudios, con el contenido matemático "espacio y forma" declarado en ENLACE[2]:

Tabla 2: Práctica que puede desarrollar el estudiante al operar los elementos del objeto matemático

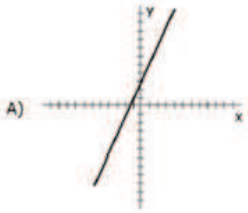
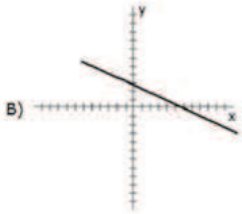
PROGRAMA DE ESTUDIOS: CAPACIDADES Y HABILIDADES	CONTENIDOS MATEMÁTICOS DE LA PRUEBA ESPACIO Y FORMA
RAZONAMIENTO MATEMATICO	El manejo de la ecuación dada; como dato inicial de la situación problema. Analizar la ecuación de la recta del problema y realizar deducciones. Manejo de dos representaciones del objeto matemático, algebraica y gráfica. El estudiante pudiera utilizar una representación diferente al resolverlo.
RESOLUCION DE PROBLEMAS	Comprender y contextualizar la situación problema. El objeto personal como recurso para elaborar estrategias de solución. En el sistema de prácticas para resolver el reactivo utilizando como recurso uno o más de las representaciones del objeto matemático. Del conocimiento previo del estudiante puede hacer uso del significado personal del objeto matemático que corresponda al problema.
ORIENTACION ESPACIAL	Manejo de las representaciones del objeto matemático para visualizar la solución del problema. Emerge el objeto personal derivado del manejo de los elementos visuales. Identificar la representación gráfica del objeto matemático; la línea recta perpendicular (gráfica) a la inicial (dada como representación algebraica). Interpretación de la representación algebraica.
EXPRESION ORAL Y ESCRITA	Lectura y comprensión del enunciado del reactivo Uso de terminología y notación matemática, para los objetos institucionales línea recta, línea perpendicular, ordenada al origen. Interpretación y comprensión de elementos lingüísticos del reactivo. Identificación del problema. Como elemento primario situacional el manejo de la representación gráfica del a recta perpendicular a la que corresponde la expresión algebraica. Emergencia del objeto matemático personal al razonar la del enunciado, la opción correcta y los distractores.

e) Consistencia acerca de la debilidad marcada por ENLACE

La debilidad para el estudiante que no resuelve satisfactoriamente el reactivo es declarada por ENLACE en la publicación de resultados; dice: *"el alumno no logra identificar la gráfica de la recta perpendicular o paralela que pasa por una ordenada al origen de una ecuación lineal"* [2]. El análisis de estos elementos lingüísticos nos permite separar la acción solicitada; la de identificar, misma que para lograrse necesariamente involucra acciones implícitas que dependerán del sistema de prácticas del estudiante, éstas pueden ser emergentes de acuerdo al procedimiento de solución que dé el estudiante. Acciones implícitas pueden ser: analizar el texto del reactivo, comprenderlo, relacionar, representar gráficamente por mencionar algunas.

En la parte de la debilidad que se lee "la recta perpendicular o paralela", pareciera no estar precisamente relacionada al reactivo, pues en su redacción se menciona "perpendicu-

lar", y no paralela, no se opera la situación buscando una recta paralela. Considerando que una recta puede ser representada en forma gráfica y algebraica, la recta no "pasa por una ordenada al origen de una ecuación lineal", esto puede expresarse de forma adecuada y consistente a lo que al parecer se pretende evaluar: *"identificar la representación gráfica de la recta perpendicular a otra, teniendo como dato la ordenada al origen de dicha recta perpendicular"*. Para resolver el reactivo puede ser necesario el manejo de las diferentes representaciones de un objeto matemático como una competencia matemática que desarrolla el estudiante; se tiene la representación algebraica de una recta, y puede intervenir la representación gráfica de la misma; para determinar la representación gráfica de una recta que le sea perpendicular e identificar la representación gráfica de dicha recta perpendicular entre las opciones de respuesta del reactivo. El tránsito de estas representaciones puede darse como se muestra:

Representación algebraica	Representación gráfica de 2x-y+3=0	Representación gráfica de la recta perpendicular a 2x-y+3=0 con ordenada al origen 3
2x-y+3=0		

La redacción del reactivo debe ser concreta y clara, ya que es factible que se genere confusión en el estudiante y el error reflejado en su respuesta ser producto de no entender el problema y sin relación con la debilidad declarada.

Pretendiendo el uso adecuado de los elementos del objeto matemático la redacción del reactivo mejora en forma significativa si se presenta: *"¿Qué gráfica representa la recta perpendicular a la recta que se obtiene de la ecuación* $2x - y + 3 = 0$ *teniendo la recta perpendicular ordenada al origen 3?*

f) Argumentos que presentan estudiantes que resuelven los reactivos y dejan evidencia escrita de la forma en cómo lo hacen

La intención de tener las respuestas a los reactivos en las hojas de trabajo de estudiantes al resolverlo, es para conocer los argumentos que declaran, y a partir de los cuales conocemos por qué seleccionó la opción que consideró correcta, así como conocer qué elementos del objeto matemático operó. Como parte de la práctica que realizan los estudiantes observamos la representación de los objetos matemáticos en forma escrita, pudiéndose valer de texto, gráficas, tablas o combinaciones entre ellas, que nos sirven por ejemplo, para conocer la funcionalidad de los distractores. Los estudiantes presentan argumentos como: *"La gráfica B la representa porque la ordenada al origen es donde la recta atraviesa la coordenada dada"*.

3 Comentarios Acerca del Análisis del Reactivo

- Los elementos de significado en el reactivo no están indicados en forma precisa por lo que si no existe entendimiento del problema por parte del estudiante es poco probable que se obtenga la respuesta correcta. Por ejemplo, puede confundirse a qué gráfica corresponde el dato que se proporciona de ordenada al origen 3.

- El manejo de los elementos del objeto matemático debe llevar de la representación algebraica de una recta a la representación gráfica de una recta perpendicular a ésta. En este transito se involucran conceptos y proposiciones implícitas que caracterizan al objeto matemático recta y recta perpendicular.

- En los resultados publicados por ENLACE no se conoce el sistema de prácticas que opera el estudiante, procedimientos y argumentos de solución al problema.

- Si el estudiante decide resolver el reactivo utilizando el dato que se tiene para la ordenada al origen, se descartarían las opciones C y D, considerándose no adecuadas como distractores.

- Las gráficas de las opciones de respuesta deben tener la escala indicada, ya que en el caso de este reactivo, se involucran valores que no son un número entero.

- Los contenidos y procesos que se pretenden evaluar en el reactivo, son "espacio y forma" y "conexión" respectivamente. Los procesos que se declaran en ENLACE sí pueden intervenir en la resolución del reactivo y corresponder a las acciones realizadas al desarrollar las capacidades y habilidades mencionadas en el Pograma de Estudios.

- Los contenidos matemáticos que se pretenden evaluar en el reactivo sí están planteados en el Programa de Estudios.

Referencias

[1] Godino, J.D. *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Servicio de reprografía de la Facultad de Ciencias, Granada, Espaa, 2003.

[2] Evaluación nacional del logro académico en centros educativos. Secretaría de Educación Pública (SEP), 2011. Recuperado el 2 de diciembre del 2011 de `http://www.enlace.sep.gob.mx/`

[3] Programa de estudios de matemáticas. Secretaría de Educación Pública (SEP), SEMS, México, D.F.

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2013, pp. 135–139.

Nivel: Superior

La Matemática como Herramienta de Modelización para dar Respuesta a Situaciones Problema

Isabel Dorado Auz **José Luis Díaz Gómez**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: auz3@correom.uson.mx, jdiaz@gauss.mat.uson.mx

Resumen

El presente trabajo es una revisión de artículos de investigación relacionados con la modelización matemática. Se aborda este tema con la intención de analizar las diferentes propuestas e investigaciones que se han hecho por diversos investigadores en matemática educativa con la finalidad de iniciar el desarrollo de un trabajo de tesis. Se hace referencia a como se ha propuesto modificar los procesos de enseñanza-aprendizaje desde la perspectiva de la resolución de situaciones problema. Se esboza una definición de modelización y se describen las componentes del proceso de modelización. Se plantea lo útil que puede ser la modelización en los programas de ciencias e ingeniería y se precisa la importancia de contar con la Teoría Antropológica de lo Didáctico como el marco teórico de referencia. Finalmente, se resaltan algunas dificultades para la implementación de la modelización en los cursos de educación superior en ciencias e ingeniería, pero al mismo tiempo, se recomienda iniciar la transformación del proceso pedagógico, para darle respuesta a uno de los problemas mayores de la matemática planteado por Freudenthal [6].

1 Introducción

Desde los 1970s se intentó modificar los procesos de enseñanza y aprendizaje retomando la resolución de problemas como herramienta y motivo para enseñar y entender mejor las matemáticas. Esto se hizo por dos vías: la resolución de problemas, donde se ponía atención al uso de estrategias heurísticas para resolver problemas matemáticos puros y la modelación matemática y sus aplicaciones, para resolver un tipo particular de problemas generados en situaciones del mundo real (Voskoglou)[11].

2 La modelización matemática

La modelización matemática consiste en el arte de traducir un fenómeno determinado o problemas de la realidad al lenguaje matemático: el modelo matemático. El modelo permite obtener una solución particular y sirve de soporte para otras aplicaciones y teorías (Hein y Biembengut) [7]. Nos dicen Fonseca et al [5] que esta línea de trabajo es claramente convergente con el tipo de actividades y competencias matemáticas que evalúa la OCDE mediante las dos ediciones del informe PISA (OECD, 2006) y que designa con el término de matematización.

3 Posibles aplicaciones

Barquero et al [2] sugieren que el proceso de la modelización matemática debe enseñarse y practicarse en los primeros cursos de los estudiantes de Ciencias Experimentales (CCEE), aunque reconocen que la modelización matemática se mantiene como una aspiración utópica que rara vez logra implementarse en las aulas. Además, se hacen dos preguntas: ¿Cómo conseguir que los conocimientos matemáticos que se enseñan en los primeros cursos universitarios de CCEE no se reduzcan a un conjunto desarticulado de conceptos y técnicas carentes de sentido, sino que aparezcan de manera funcional como herramientas para dar respuesta a cuestiones problemáticas dentro de las CCEE? Para lo cual, proponen una visión más instrumental de las matemáticas como herramienta de modelización, integrando así en el proceso de estudio la actividad de modelización matemática y las cuestiones extramatemáticas (de CCEE) que la generan. La segunda pregunta es: ¿Cómo conseguir que las matemáticas se enseñen como una herramienta de modelización de situaciones o hechos científicos, de tal forma que la enseñanza globalmente considerada no se organice en función de los contenidos matemáticos sino de los problemas o proyectos que los estudiantes deben realizar? Para responder esta segunda pregunta, dicen, deben tomarse en consideración dimensiones del problema que han sido relativamente ignoradas y que incluyen: la ampliación del planteamiento clásico del problema didáctico en torno a la modelización matemática; la integración de la modelización matemática en un modelo epistemológico general de las matemáticas; la ampliación del espacio institucional tradicionalmente reservado a la didáctica de las matemáticas: la dimensión ecológica del problema; y la formulación del problema didáctico de la enseñanza de la modelización matemática en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

4 El proceso de modelización matemática

Se puede decir que el proceso de modelización matemática abarca cinco estados principales (Voskoglou)[11]: Análisis del problema, comprender los requerimientos del sistema real y sus restricciones. La matematización, que involucra la formulación de la situación real y la construcción del modelo. Solución del modelo, a través de manipulación matemática. Validación del modelo, cuando da una predicción confiable del comportamiento del sistema La implementación del resultado matemático final en el sistema real.

La modelización proporciona al alumno una mejor aprehensión de los conceptos matemáticos y los capacita para leer, interpretar, formular y resolver situaciones problema, así como despertar el sentido crítico y creativo. La dificultad principal que presenta la modelación está centrada en la formación de los profesores y en la falta de vivencia del alumno en un trabajo de esta naturaleza (Hein y Beimbengutt) [7].

5 Otra visión de la modelización

Para Cipriano Cruz [3], la modelización pertenece a un dominio extra matemático, ya que no solo requiere del manejo conceptual y relacional propios de la estructura matemática,

sino que también de procedimientos propios del pensamiento estratégico como son: la visualización en variadas formas de la representación de una información, la apreciación de invariantes y variables y la selección de formas de asociación compatibles. Se trata, nos dice, que frente a los nuevos retos, en cierto sentido, los docentes dejen de lado los roles tradicionales: monopolizador del saber, trasmisor de conocimientos, controlador del trabajo de los estudiantes y único organizador del currículo, y sustituirlos o superponerlos con los de: diagnosticador, especialista en recursos, clarificador de valores, investigador, promotor de la investigación contextualizada y organizador de equipos de producción.

6 Las fallas del método tradicional

Artigue [1], por su parte, menciona que la enseñanza tradicional y específicamente la enseñanza universitaria tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica y se evalúan, en esencia, las competencias adquiridas en este dominio. Esto es, no se recurre al mundo real para generar un mayor interés en los estudiantes. Agrega que se han desarrollado investigaciones didácticas centradas en el campo conceptual del cálculo, por ejemplo, y también se han generado proyectos de innovación de la enseñanza, lo cual incluye el uso de nuevas tecnologías. Sin embargo, ambos esfuerzos han tomado rumbos distintos y están lejos de establecer vínculos estrechos.

7 La modelización como herramienta para el estudio de las matemáticas

Trigueros [9] y [10], nos refiere que son muchos los trabajos en que los alumnos muestran mayor interés por la solución de problemas relacionados con su entorno que con las actividades centradas únicamente en las matemáticas. Se puede, por tal motivo, recurrir a la enseñanza de la modelización con un objetivo claramente pedagógico. Recurrir a la modelización para estructurar y promover el proceso de aprendizaje y contribuir de esta manera a una mejor asimilación de los conceptos matemáticos. Se puede relacionar la matemática con el campo de trabajo de los estudiantes y contribuir al desarrollo de las habilidades de los estudiantes en la solución de problemas de su ámbito profesional. Fonseca [4] nos propone que la modelización se convierta en una herramienta potente para el estudio escolar de las matemáticas, lo cual debe venir acompañado de una renovación general de los instrumentos del trabajo matemático a partir de las nuevas tecnologías de la información y, muy especialmente, de la difusión del uso de las calculadoras.

8 El trabajo experimental

Para llevar a cabo el trabajo experimental, retomaremos los Recorridos de Estudio e Investigación propuestos por Fonseca [4], un dispositivo que permite articular secuencias de enseñanza y aprendizaje que se pueden trasladar al aula. En los recorridos de estudio e investigación, además de primar en todo momento el proceso dinámico, se prioriza el carácter funcional de las matemáticas, situándolo como el corazón de la construcción de la actividad

matemática, y la herramienta informática tiene un importante protagonismo. Este dispositivo consta de los siguientes elementos: Un problema didáctico-matemático al que el sistema de enseñanza tiene que dar respuesta. Una institución concreta en la cual se plantea el problema en cuestión. Una razón de ser de una organización matemática a las cuestiones, inicialmente problemáticas. Una cuestión generatriz fecunda y capaz de generar una actividad matemática de complejidad Creciente y que obligue al alumno a un cierto compromiso personal en su resolución. Una organización matemática local relativamente completa que es un producto de ingeniería matemática, cuyo grado de completitud está articulado alrededor de ocho indicadores. Un nuevo Contrato didáctico. El trabajo que se realizará bajo este marco se sitúa en un primer curso de Cálculo Diferencial de la Carrera de Químico Biológicas (QB). El problema que planteamos se puede formular de la siguiente manera: ¿Cómo diseñar procesos didácticos capaces de situar las cuestiones problemáticas del área de Q B en el punto de partida del estudio, haciendo que estas cuestiones sean las generadoras de los contenidos matemáticos que se enseñan y, en consecuencia, permitan articularlos y mostrar su funcionalidad? El programa actual del primer curso de cálculo se puede dividir en cuatro temas Números Reales, Funciones, Límites y Derivadas y Aplicaciones de la Derivada ¿Cuáles serían en cada ámbito las cuestiones generadoras más apropiadas para motivar la construcción de los diferentes contenidos matemáticos y cuáles son las organizaciones didácticas más adecuadas en cada caso? [8]. Dado que este es un trabajo de tesis de maestría tomaremos una sección de un tema, el de funciones. Las razones que nos conducen a ello es que el objetivo principal del curso de cálculo, tal como consta en el programa vigente, es El alumno será capaz de emplear las funciones para modelar fenómenos de Química, Biología, Física y otros relacionados con su carrera. Pero no basta con saber adaptar y utilizar con precisión los modelos conocidos. Los alumnos deberán ser capaces de analizar una situación problemática en términos de dependencia entre magnitudes variables, destacando la información pertinente para elaborar un modelo matemático de dicha situación. Y deberán saber utilizar los modelos matemáticos propuestos y sintetizar los resultados obtenidos con estos modelos para generar nuevos conocimientos y cuestiones sobre las situaciones problemáticas consideradas.

9 Conclusión

Resulta interesante la serie de aplicaciones que puede tener la modelización matemática, pero resalta, en mi opinión, el hecho de que la modelización da respuesta a uno de los problemas mayores enunciados por Freudenthal [6], ya que crea contextos convenientes para enseñar a matematizar.

Referencias

[1] Artigue, M. 1995. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

[2] Barquero, B., Bosch, M., Gascón, J. (2010). Génesis y desarrollo de un problema didáctico: el papel de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las CCEE. En M.M.Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra, (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 235-244). Lleida: SEIEM.

[3] Cruz, C. 2010. La enseñanza de la modelación matemática en Ingeniería. Revista de la Facultad de Ingeniería U.C.V., Vol. 25, N 3, pp. 3946.

[4] Fonseca, B . C. 2011. Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). Educación Matemática, vol. 23, núm. 1, Agosto-abril, 2011, pp. 97-121.

[5] Fonseca, C.; Casas, J.M.; Bosch, M.; Gascón, J. (2009). Diseño de un recorrido de estudio e investigación en los problemas de modelización. En González, M. J.;González, M. T.; Murillo, J. (Eds.). Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander.

[6] Freudenthal, H. 1981. Problemas mayores de la educación matemática. Conferencia dada en la Sesión Plenaria del ICME 4 en Berkeley. Educational Studies in Mathematics 12:133-150. Versión en español de López Yañez, A.

[7] Hein, N. y Biembengut, M. S. 2006. Modelaje Matemático como Método de Investigación en Clases de Matemática. V Festival Internacional de Matemática.

[8] Serrano, L., Bosch, M, Gascón, J. (2007). Cómo hacer una previsión de ventas: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico.

[9] Trigueros Gaisman, María. 2009. El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. Innovación Educativa, vol. 9, núm. 46, enero-marzo, pp. 75-87. Trigueros, M., A. Okta, y L. Manzanero. 2007. Understanding systems of equations in linear algebra. Papers presented at WG13 in the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Larnaca, Cyprus.

[10] Trigueros, M. 2006. Ideas acerca del movimiento del péndulo. Un estudio desde una perspectiva de modelación. Revista Mexicana de Investigación Educativa, vol. XI, núm. 31, octubre-diciembre, pp. 799-83.

[11] Voskoglou, M.G. and Phil, M. 2011. Mathematical modelling in classroom: the importance of validation of the constructed model. Proceedings of the 11th International Conference, 352-357, Rhodes University, Grahamstown, South Africa.

Memorias de la XXIII Semana de Investigación
y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora,
Marzo, 2013, pp. 140–146.

Nivel: Superior

Actividad Didáctica para Promover los Significados del Coeficiente de Correlación

Benjamín Morán Medina **Irma Nancy Larios Rodríguez**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: master.cetmar@gmail.com, nancy@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En este trabajo se presenta una actividad didáctica, basada en el uso del software (Fathom) para la enseñanza y aprendizaje del coeficiente de correlación, con la intensión de desarrollar una serie de competencias en estudiantes de la especialidad en Técnico en Electrónica (TE) del Centro de Estudios Tecnológicos del Mar 03 Guaymas, así como les resultados encontrados al pilotear la actividad didáctica.

1 Introducción

El presente trabajo forma parte de una secuencia de actividades didácticas diseñadas para promover los significados de los conceptos del tema de Medidas de Correlación lineal (coeficiente de correlación lineal, recta de regresión lineal y error estándar de estimación) del curso de Probabilidad y Estadística de Técnico en Electrónica (CoSDAc, 2009) [1], en el Centro de Estudios Tecnológicos del Mar 03 Guaymas el cual es considerado como un bachillerato tecnológico dentro del Sistema Nacional de Bachillerato (SNB). La secuencia de actividades didácticas también forma parte de un trabajo de tesis de desarrollo docente para obtener el grado en la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, de la Universidad de Sonora. Como antecedente señalaremos que el Bachillerato Tecnológico se encuentra en una transición hacia el SNB, basado en la Reforma Integral del Sistema Medio Superior (RIEMS). Los programas de estudio de los componentes profesionales del TE tienen el propósito de que el egresado posea competencias en el mantenimiento a sistemas electrónicos automatizados (CoSDAc, 2010) [2], competencias que deben estar unidas en un marco de formación integral con las competencias genéricas y disciplinares básicas, para asegurar que los propósitos formativos de la RIEMS se vean reflejados en una mejor sociedad (Vásquez, J. 2008) [3]. Teniendo el trabajo de tesis como uno de sus propósitos el promover el desarrollo de algunas de dichas competencias. Particularmente en este trabajo se presenta una actividad didáctica que tiene como propósito promover el significado de coeficiente de correlación lineal, utilizando diferentes registros de representación.

En la actualidad la investigación en cuanto al razonamiento covariacional se centra en el estudio del razonamiento covariacional sobre variables cuantitativas, dado la poca investigación desarrollada al respecto (Gea, M. M.; Estepa, A., 2012) [4]. Siendo cada vez mayor el número de investigadores educativos que se unen al estudio de los errores y dificultades que desarrollan los estudiantes alrededor de los significados de la correlación y regresión lineal, así como los retos didácticos que se desprenden.

Desde el punto de vista de Gea y Estepa, (2012) la investigación desarrollada hacia la enseñanza de las nociones estadísticas de correlación establece la existencia de teorías o creencias previas que influyen directamente en la emisión de juicios de asociación; La existencia de concepciones erróneas como obstáculos para el aprendizaje y La dificultad de distinguir distribuciones bidimensionales como una clara evidencia de la necesidad de desarrollo de herramientas interpretativas que permitan el acceso al concepto en cuestión. En especifico, Moritz (2004) destaca las siguientes dificultades generales que presenta un adecuado razonamiento covariacional; Considerar las correspondencias de las dos variables implicadas en el estudio de modo conjunto, en lugar de considerar cada una de las variables de modo aislado, así como el hecho de que los estudiantes poseen ideas o creencias previas de muchas de las variables de estudio y del tipo de asociación que podría derivarse de su variación conjunta. Los mismos Gea y Estepa (2012) añaden a estas dificultades algunas otras, de las cuales se rescatan para el presente trabajo las siguientes:

- La estimación del coeficiente de correlación es más precisa a partir del diagrama de dispersión que de otras representaciones, además, depende del tipo de tarea, intensidad de la correlación, tipo de covariación, y tipo de dependencia (Sánchez, Estepa y Batanero, 2000).

- Existe una gran dificultad para el razonamiento covariacional negativo (concepción unidireccional), esto es, los estudiantes perciben la dependencia sólo cuando ésta es positiva, y asignando independencia al caso de asociación inversa (Estepa, 1994; Batanero, Estepa y Godino, 1997; Estepa y Batanero, 1996)

- La concepción determinista de la asociación. Los alumnos sólo consideran la asociación desde un punto de vista funcional (Estepa, 1994; Batanero, Estepa y Godino, 1996; Estepa y Batanero, 1996)

- La concepción local de la asociación. Los alumnos utilizan parte de los datos del estudio y no el conjunto de todos los datos para emitir el juicio de asociación (Estepa, 1994; Batanero, Estepa y Godino, 1996; Estepa y Batanero, 1996)

- Existe una tendencia a establecer relaciones de causalidad en el estudio de la asociación (concepción causal de la asociación). Hay estudiantes que sólo consideran la existencia de asociación si se puede atribuir una relación causal entre las variables de estudio (Estepa, 1994; Batanero, Estepa y Godino, 1997; Estepa y Batanero, 1996).

2 Marco teórico-metodológico

Los elementos teórico metodológicos considerados para el diseño e implementación de la actividad son los siguientes:

2.1. La metodología ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico y autoreflexión) de Fernando Hitt (2009) [5], la cual es una adaptación a un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas, es importante señalar que en esta metodología, el

profesor presenta una situación problemática que provoque la reflexión, no se pretende explicitarle a los estudiantes la matemática que debe ser utilizada, ni dictaminar sobre lo realizado por los mismos en las primeras etapas, salvo al final en el proceso de institucionalización. En las primeras fases, el profesor es un guía y es deber de los estudiantes de argumentar y validar sus producciones, en el proceso de institucionalización es donde el profesor resalta las diferentes representaciones y presenta las representaciones institucionales. A continuación se describen muy brevemente las etapas de la metodología ACODESA.

a) Trabajo individual (producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema).

b) Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales).

c) Debate (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones funcionales).

d) Regreso sobre la situación (trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión).

e) Institucionalización. Proceso de institucionalización y utilización de representaciones institucionales.

Nos parece importante señalar que en la metodología ACODESA, se considera sumamente importante la manipulación de materiales por parte de los estudiantes.

3 Propuesta

3.1. *Objetivos de la actividad didáctica.* Con el fin de generar competencias que ayuden en el desarrollo curricular del técnico en electrónica se establecen los siguientes objetivos específicos de la actividad, que el estudiante: ” Identifique la variación en las observaciones.

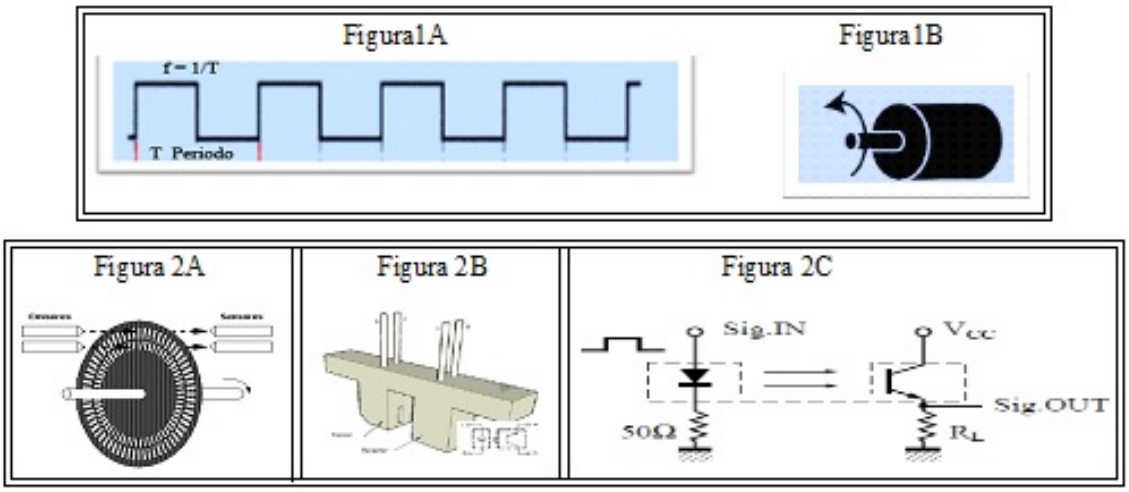
- Identifique asociaciones directas e inversas y las relacione con el coeficiente de correlación.
- Coordine el significado de coeficiente de correlación lineal a través de los registros de representación.
- Participe y colabore de manera efectiva en equipos diversos.
- Maneje tecnología para obtener información y expresar ideas.

Es importante enfatizar que no se pretende que en la actividad el estudiante realice los cálculos complejos que implican el coeficiente de correlación, sino el acercamiento a la comprensión del concepto.

3.2. *Características de la actividad didáctica.* Una característica importante es que el contexto de la actividad está relacionado con la práctica profesional del TE; se contempla el

uso de un manipulable: Motor de corriente directa con retroalimentación por encoder; el uso del software Fathom; el uso de hojas de trabajo con la intención de plantear las diferentes situaciones de la actividad didáctica y así brindar espacios para que los estudiantes registren sus respuestas a los diferentes cuestionamientos. Las hojas de trabajo por cuestiones de espacio no fue posible anexar, en el presente escrito.

3.3. *El contexto de la situación problemática de la actividad.* Una de las posibles necesidades de un sistema de control cerrado para un motor de corriente continua, es que su velocidad se pueda mantener constante, es por esto que en la mayoría de las aplicaciones de servomecanismos la velocidad angular debe ser retroalimentada a un circuito de control en forma de frecuencia (Ver figuras 1A y 1B). Para esto se utiliza comúnmente un disco encoder (Ver Figura 2A). El encoder es un simple emisor/receptor de luz que transmite un rayo continuo de luz frente al receptor, del otro lado del encoder. Los espacios que hay entre las ranuras marcadas en el disco del encoder bloquean la luz y las ranuras permiten que la luz pase a hacía el otro lado (Ver Figuras 2B y 2C). Normalmente pueden ser utilizados para medir velocidad y posición angular, convirtiendo el movimiento de rotación en una frecuencia que se puede medir en la señal de salida.



3.4. *Breve descripción del desarrollo de la actividad didáctica.* Se tiene un motor de corriente directa el cual controla la velocidad angular de la antena de un radar marino, misma que se desea mantener a 60 revoluciones por minuto (RPM), la transmisión del motor a la antena tiene una reducción de 10 a 1 vueltas, por lo cual el motor deberá girar a 600 RPM equivalentes a 760Hz detectados en el encoder de retroalimentación. Para determinar el voltaje con el que se debe excitar el motor para iniciar en esta velocidad angular se propone a los estudiantes medir con el osciloscopio las frecuencias resultantes, en un primer momento se toman las mediciones, registrándolas en las hojas de trabajo. En un segundo momento la información de captura en un archivo del software Fathom, para continuar realizando la actividad, manipulando correlaciones positivas y negativos, observando lo que sucede en los diferentes registros de representación del software, anotando en su hoja de trabajo dichas

observaciones, así como las conclusiones individuales y en equipo. La figura 3, muestra una de las pantallas generadas por el software. En ella se puede observar un diagrama de dispersión con una relación lineal directa entre las variables involucradas, así como un coeficiente de correlación de 0.99, el software permite que los estudiantes puedan modificar el diagrama de dispersión y puedan observar cómo se modifica la información presentada en el registro numérico, así como el coeficiente de correlación lineal, para interpretar así la intensidad de la relación de las variables en cuestión.

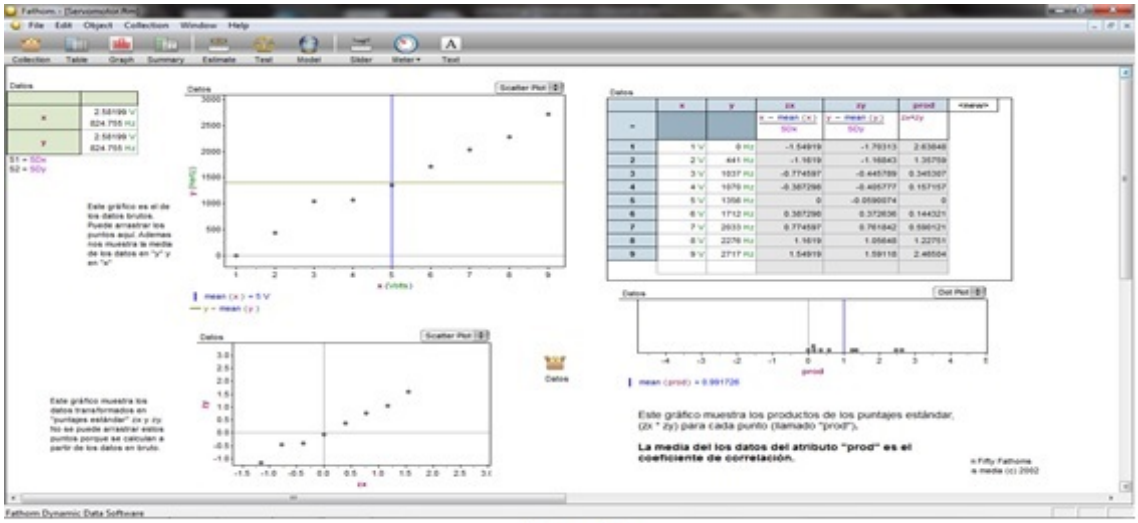


Figura 3

En la Figura 4 se muestra una pantalla de Fathom donde los estudiantes interpretan una correlación negativa entre las variables.

En el desarrollo de la actividad didáctica se fueron realizando las diferentes etapas de la metodología ACODESA.

4 Resultados y conclusiones

La actividad didáctica fue piloteada durante el semestre 2012-1, con una muestra de cuatro estudiantes que ya habían cursado la asignatura de Probabilidad y Estadística, con la intensión de establecer la pertinencia del manipulable, de uso de la metodología ACODESA, del software y las posibles modificaciones a la hoja de trabajo de la actividad. Lo anterior era de vital importancia, para poder realizar la experimentación de toda la secuencia de actividades didácticas durante el semestre 2013-1, con estudiantes de la asignatura de Probabilidad y Estadística. Los resultados más relevantes fueron los siguientes: se encontró que el contexto de la actividad, el recurso tecnológico utilizado y la metodología de implementación fueron altamente motivante para los estudiantes, permitiendo que en general los objetivos disciplinares de la actividad fueran alcanzados. Particularmente en relación a la actividad se encontró que el número de mediciones para cada dato ordenado deberá aumentarse a tres para asegurar la identificación de la variación (Concepción determinista de la asociación); la

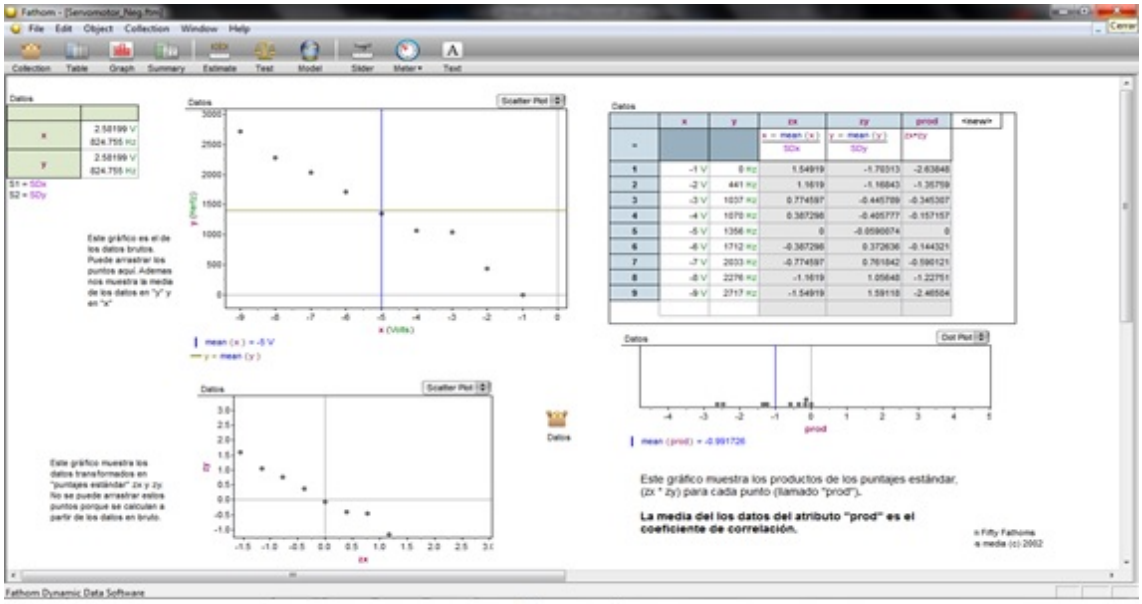


Figura 4

metodología ACODESA requiere de mayor tiempo del planteado inicialmente, para dar oportunidad al discente de debatir y lograr las representaciones deseadas; se detectó la necesidad de modificar la actividad, utilizando como variable independiente el periodo en vez de la frecuencia (Concepción Unidireccional de la asociación).

A manera de conclusiones planteamos que, a pesar de que la actividad didáctica presentada en este trabajo ha sido probada con estudiantes, no se ha realizado aún una experimentación metodológicamente estructurada, puesto que nos encontramos en la etapa de retroalimentación de la secuencia completa de actividades didácticas del trabajo de tesis, en ese sentido somos cautos en establecer conclusiones rigurosas. Sin embargo, nos atrevemos a asegurar que basados en la experiencia el incorporar a los estudiantes en un trabajo con la metodología de ACODESA, permite el desarrollo de algunas de las competencias genéricas que la RIEMS demanda, como son que los estudiantes jueguen un rol activo en el proceso educativo, que expresen y comuniquen sus opiniones al resto de sus compañeros, fomentar el trabajo en equipo, además de incorporar el uso de tecnología en el aprendizaje, entre otras. Por otro lado es importante resaltar que el uso del software Fathom, permite el poder trabajar simultáneamente con diferentes registros de representación semióticas del concepto de coeficiente de correlación lineal, promoviendo la coordinación y/o asociación de estos en la construcción del concepto. Además el uso del software también permite obviar cálculos que son realmente largos y tediosos, y que frecuentemente distraen a los estudiantes sobre el análisis y la interpretación correcta de conceptos que se ponen en juego en las actividades.

Referencias

[1] CoSDAc. (2009). Programas de estudio de Matemáticas. Recuperado el 26 de noviembre 2012 de: http://www.cecyteo.edu.mx/site/Docs/ProgramasBasicas/Matematicas.pdf.

[2] CoSDAc. (2010). Programa de estudios de la carrera de técnico en electrónica. Recuperado el 26 de noviembre 2012, de: http://www.cecyteo.edu.mx/site/Docs/Planes2012/Electronica.pdf.

[3] Vázquez, J. (2008). Acuerdo 444-SNB. SEP. Recuperado el 26 de noviembre de 2012, de: http://www.reforma-iems.sems.gob.mx/wb/riems/acuerdos_secretariales.

[4] Gea, M.; Estepa, A. (2012). "Las nociones de correlación y regresión en la investigación educativa". En Marín Rodríguez, Climent Rodríguez (Eds.) Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM. Ciudad Real, Págs. 107-117.

[5] Hitt, F y Cortez, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. Revista digital Matemática, (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 10.