Memorias de la XVII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 20, Agosto, 2007, pp. 59–74.

LA TOPOLOGÍA DE LOS CONTINUOS

Raúl Escobedo Conde[1]
Carlos Alberto Robles Corbalá[2]
Enrique Rodríguez Castillo[3]

[1]Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

[2,3]Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Resumen

El objetivo de este trabajo es introducir algunas nociones básicas en esta área de la topología conocida como la Teoría de los Continuos así como ilustrar con muchos ejemplos las clases de continuos más básicos; probar algunos resultados que dan idea de las técnicas típicas de la teoría y tratar varios ejercicios que involucren a estas clases de continuos.

Introducción

Seguramente, uno de los atractivos que tiene la Teoría de Continuos es la simplicidad de los objetos de estudio: espacios métricos compactos y conexos; sin embargo, ésta misma simplicidad nos invita a plantearnos problemas realmente difíciles de tratar (pero relativamente fáciles de entender).

La topología, en ocasiones, se torna demasiado abstracta y es complicado tener una idea geométrica de lo que estamos haciendo; por otro lado, en la Teoría de Continuos tenemos siempre la ayuda de la métrica, que nos invita a imaginar por lo menos la distancia que hay entre los puntos del espacio.

La compacidad es una de las propiedades topológicas más deseables pues nos deslinda de muchas problemáticas comunes en topología general y en análisis; la conexidad, por su parte, mantiene una idea de unidad (en algún sentido) del espacio.

Éste texto intenta dar una invitación a la Teoría de los Continuos, presentando algunos aspectos de interés en el estudio de los continuos como en otras áreas. Los conocimientos requeridos para un mejor entendimiento de éste escrito son conocimientos básicos de Topología y Análisis Matemático, así como familiarización con los métodos que comúnmente se utilizan en éstas áreas; cualquier otro conocimiento es de ayuda.

Se tratará de mantener una idea geométrica en los ejemplos con la ayuda de figuras, sin dejar de lado la descripción algebraica. Así, se espera que el tratamiento de la Teoría de Continuos en éste trabajo sea atractiva para la vista y la mente.

1 Definición y ejemplos

Antes de comenzar nuestra discusión sobre continuos, es oportuno recordar algunas definiciones básicas. Un **espacio métrico** es un conjunto X acompañado de una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$, llamada **métrica**, que satisface las siguientes condiciones para cualesquiera $x, y, z \in X$:

(M1) $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Diremos que un espacio topológico X es **metrizable** si existe una métrica para X de tal forma que la topología en X coincida con la topología inducida por la métrica en X. Un espacio **compacto** es aquel espacio donde a cualquier cubierta por abiertos del espacio le podemos extraer una subcubierta finita, es decir, a la cubierta le podemos quitar a casi todos los abiertos y aún así sigue cubriendo al espacio. Diremos que un espacio es **conexo** si no puede ser expresado como la unión disjunta de dos abiertos no vacíos (o equivalentemente, no se puede expresar como la unión disjunta de dos cerrados no vacíos) del espacio , es decir, viene dado en una sola pieza.

Definición 1.1. *Un **continuo** es un espacio topológico metrizable, compacto, conexo y no vacío.*

La condición "no vacío"se impone para evitar trivialidades. Para el estudio de los continuos, es útil fijarnos en las subestructuras de un continuo así que a continuación, daremos algunas definiciones de estos objetos. Sea X un continuo y $Y \subseteq X$. Diremos que Y es un **subcontinuo** de X si Y es a su vez un continuo. Diremos que Y es un **subcontinuo propio** de X si Y es un subcontinuo distinto de X. Si X es un continuo que consta de un sólo punto, diremos que es un **continuo degenerado**; de lo contrario, diremos que es **no degenerado**.

Ejemplo 1. El intervalo $[0, 1]$. *Claramente es un espacio métrico y por tanto, metrizable. De los cursos de Análisis Matemático, sabemos que los conexos en $\mathbb{R}$ son los intervalos y por el Teorema de Heine-Borel, los compactos son los cerrados y acotados por lo que* $[0, 1]$ *es compacto. Así,* $[0, 1]$ *es un continuo.*

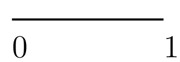

Figura 1: El intervalo $[0, 1]$.

Un continuo es **unicoherente** si la intersección de cualesquiera dos subcontinuos propios es un conjunto conexo. Diremos que un continuo X es **hereditariamente equivalente** si todo subcontinuo no degenerado Y es homeomorfo a X. El intervalo $[0, 1]$ es un continuo que posee estas dos propiedades.

Ejercicio 1. *Encuentre un continuo que sea hereditariamente equivalente pero que no sea homeomorfo al intervalo* $[0, 1]$.

Este ejercicio muestra que con poca teoría, podemos formularnos preguntas como esta, que son algo complicadas de responder pero fáciles de entender.

Definición 1.2. *Diremos que una propiedad P de un espacio topológico X es una **propiedad topológica** si para todo espacio topológico Y homeomorfo a X se tiene que Y también posee la propiedad.*

La conexidad y compacidad son propiedades topológicas; si (X, d_X) es un espacio métrico y Y es un espacio topológico homeomorfo a X, podemos ver que la función

$$d_Y(y_1, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} d_X(h(y_1), h(y_2)),$$

donde $h : Y \to X$ es un homeomorfismo, es una métrica para Y con la cual, la topología en Y coincide con la topología inducida por ésta métrica. Así, el ser un continuo es una propiedad topológica.

Ejemplo 2. Los arcos. *Un arco es cualquier espacio topológico A que sea homeomorfo al intervalo* $[0, 1]$.

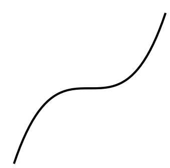

Figura 2: Arcos.

En realidad, un arco no es muy diferente (topológicamente hablando) a un intervalo pues al ser homeomorfo al intervalo, todas las propiedades topológicas (que son las que generalmente interesan en Topología) del intervalo las posee también el arco. Sin embargo, lo consideramos aparte para tener acceso a un objeto más general.

Ejemplo 3. La circunferencia unitaria. *Consideremos el conjunto*

$$\mathbb{S}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1\right\},$$

que gráficamente se ve como se muestra en la figura:

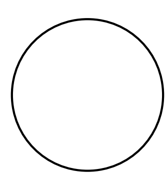

Figura 3: El círculo unitario

Por ser un subconjunto del espacio métrico $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^1$ es un espacio metrizable. Es compacto por el Teorema de Heine-Borel y es conexo por ser imagen continua del intervalo $[0, 2\pi]$ *mediante la función $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Por tanto, $\mathbb{S}^1$ es un continuo.*

Evidentemente, $\mathbb{S}^1$ no es hereditariamente equivalente pues un subcontinuo que no es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ es un arco. Es claro que $\mathbb{S}^1$ no es unicoherente, pues al tomar las semicircunferencias superior e inferior como subcontinuos, su intersección resulta ser $\{(-1,0),(1,0)\}$ que no es un conjunto conexo.

Definición 1.3. *Un continuo X es* ***homogéneo*** *si para cualesquiera dos puntos $x_1, x_2 \in X$ existe un homeomorfismo $h_{x_1,x_2} : X \to X$ tal que $h_{x_1,x_2}(x_1) = x_2$.*

Vemos que $\mathbb{S}^1$ es un continuo homogéneo, pues dados dos puntos p y q es $\mathbb{S}^1$, existe una rotación que lleva a p en q y las rotaciones son homeomorfismos.

Ejercicio 2. *Encuentre otros continuos homogéneos que no sean homeomorfos a $\mathbb{S}^1$.*

Todo espacio topológico homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ se llama **curva cerrada simple**, y como en el caso de los arcos, no es un continuo diferente de $\mathbb{S}^1$ sino es una versión generalizada de él.

Ejemplo 4. El disco unitario. *Definimos el conjunto*

$$\mathbb{D}^1 \overset{\text{def}}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| \leq 1\right\},$$

que se representa geométricamente como sigue:

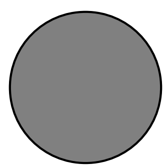

Figura 4: El disco unitario

Nuevamente, por ser un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, es un espacio metrizable y por Heine-Borel, es compacto. Se puede demostrar que el disco es un conjunto ***convexo****, es decir, dados dos puntos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{D}^1$ todos los puntos $(1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}$ están en $\mathbb{D}^1$. Así, se muestra que $\mathbb{D}^1$ es* ***conexo por trayectorias*** *y por tanto, conexo. Así que $\mathbb{D}^1$ es un continuo.*

A diferencia de $\mathbb{S}^1$, el disco si es unicoherente ya que la intersección de dos subcontinuos propios resulta ser un punto, una banda o un anillo, que son conjuntos conexos.

Del mismo modo en que se definen los Ejemplos 3 y 4, podemos definir los conjuntos

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| = 1\}, \quad \mathbb{D}^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\},$$

para $n \geq 2$, los cuales también son continuos.

Ejemplo 5. El toro. *Denotemos por $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ a la imagen del cuadrado $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, que es compacto y conexo, bajo la función*

$$(u,v) \mapsto ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\operatorname{sen} v, r\operatorname{sen} u),$$

la cual es continua por lo que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es compacto y conexo. Por ser un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, es metrizable y por tanto, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es un continuo. Gráficamente, un toro es una superficie muy familiar pues tiene forma de "dona", como se puede ver en la siguiente figura.

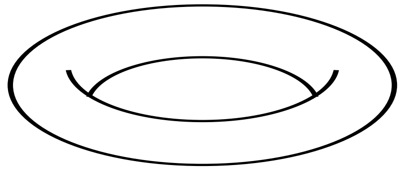

Figura 5: El toro

Se puede ver que el Toro es un continuo homogéneo, sólo hay que dar giros sobre los meridianos y paralelos; no es unicoherente pues al partir verticalmente al Toro por la mitad, tenemos dos subcontinuos que se intersectan en la unión de dos circunferencias ajenas, lo que no es un conjunto conexo; no es hereditariamente equivalente pues $\mathbb{S}^1$ y los arcos son suncontinuos no degenerados del Toro y no son homeomorfos a él.

Definición 1.4. *Un espacio topológico X es **localmente conexo** si para cada punto $x \in X$ existe una vecindad conexa de x.*

Hasta este momento, todos los ejemplos que hemos visto son continuos localmente conexos. Ahora, veremos cuatro ejemplos de continuos que no son localmente conexos.

Ejemplo 6. El abanico armónico. *Considere la sucesión armónica $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ y formemos con ella la siguiente sucesión de puntos en $\mathbb{R}^2$: definamos $\boldsymbol{a}_{-1} = (0,1)$, $\boldsymbol{a}_0 = (0,0)$ y para $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{a}_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$. Ahora, para $n \geq 1$, unamos cada uno de los puntos $\boldsymbol{a}_{n-1}$ con el punto $\boldsymbol{a}_{-1}$ por el segmento de línea $(1-t)\boldsymbol{a}_{n-1} + t\boldsymbol{a}_{-1}$. Gráficamente, tenemos*

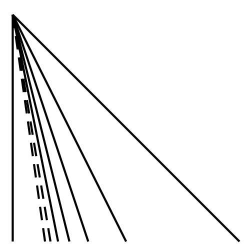

Figura 6: El abanico armónico.

Es claro que es un espacio metrizable; es compacto por el Teorema de Heine-Borel y es conexo por ser union de conexos que coinciden en un punto.

Éste es un continuo que no es localmente conexo, pues para cada punto $(0,x)$, con $0 \leq x < 1$, existe una vecindad no conexa.

Ejemplo 7. El continuo $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$. *Considere la gráfica de la siguiente función $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, es decir, el conjunto*

$$\operatorname{Graf}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1] \right\}.$$

Éste conjunto es conexo por ser la gráfica de una función continua definida en un conexo. Además, $\mathrm{Graf}(f)$ *es un conjunto acotado, pues* $0 < x \leq 1$ *y* $-1 \leq \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq 1$*; sin embargo, no es cerrado. Tomando la cerradura de* $\mathrm{Graf}(f)$ *se tiene un continuo, pues la cerradura de un conexo es conexo. La figura siguiente, muestra como se ve éste continuo gráficamente:*

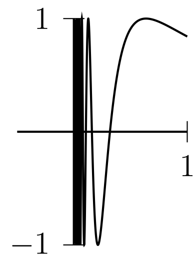

Figura 7: El continuo $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$

Nuevamente, los puntos de la forma $(0, x)$, con $-1 \leq x \leq 1$, poseen vecindades no conexas en $\overline{\mathrm{Graf}(f)}$, por lo que éste continuo no es localmente conexo. También podemos ver que éste continuo no es conexo por trayectorias ya que el punto $(1, \operatorname{sen} 1)$ no lo podemos conectar con ningún punto de la forma $(0, x)$ por una trayectoria en $\overline{\mathrm{Graf}(f)}$.

Considere el **conjunto de Cantor**, denotado por $\mathcal{C}$, que se obtiene mediante un proceso de intersección de subconjuntos cerrados anidados de $\mathbb{R}$. La construcción es como sigue:

Comenzamos con $C_1 = [0, 1]$ y definimos el conjunto $C_2 \subset [0, 1]$ al dividir al intervalo en tres partes iguales y sustrayendo el tercio medio, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; el conjunto $C_3 \subset C_2$ se obtiene repitiendo la división en tercios de los dos intervalos cerrados de C_2 y sustrayendo el tercio medio de cada uno de ellos. Inductivamente definimos C_n como el conjunto que se obtiene de remover los tercios abiertos medios de cada subintervalo cerrado de C_{n-1} y finalmente, $\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Éste conjunto no es conexo; de hecho es **totalmente disconexo**, es decir, los únicos conexos en $\mathcal{C}$ son los subconjuntos de un sólo punto. Así, el conjunto de Cantor no es un continuo. Sin embargo, con él se pueden construir algunos continuos interesantes como lo veremos a continuación.

Ejemplo 8. El abanico sobre el conjunto de Cantor. *La construcción que haremos ahora es similar a la realizada en el ejemplo 6. Considere el conjunto de puntos en* $\mathbb{R}^2$, $(c, 0)$ *con* $c \in \mathcal{C}$, *y unamos a cada punto de éstos con el punto* $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *con los segmentos* $(1-t)(c, 0) + t\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. *Por argumentos similares a los dados en el ejemplo 6, éste es un continuo. Gráficamente, tenemos*

Éste continuo tiene la propiedad de que es localmente conexo en sólo un punto, a saber, el punto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Ahora, veremos un caso más extremo en cuanto a conexidad local se refiere.

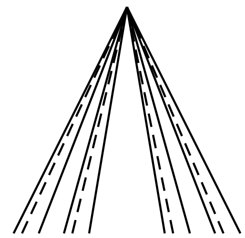

Figura 8: Abanico sobre el conjunto de Cantor.

Ejemplo 9. El arcoiris de Knaster. *A partir del conjunto de Cantor (como subconjunto de $\mathbb{R}^2$), construiremos otro continuo como sigue:*

Uniremos a los puntos del conjunto de Cantor $(c, 0)$ *que equidisten del punto* $\boldsymbol{p}_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ *con semicircunferencias superiores centradas en* $\boldsymbol{p}_1$ *y de radio c. Después, uniremos a los puntos del conjunto de Cantor que equidisten del punto* $\boldsymbol{p}_2 = \left(\frac{5}{3\cdot 2}, 0\right)$ *con semicircunferencias inferiores con centro en* $\boldsymbol{p}_2$ *y radio c. Inductivamente, se unen los puntos del conjunto de Cantor que equidisten del punto* $\boldsymbol{p}_n = \left(\frac{5}{3^{n-1}\cdot 2}, 0\right)$ *con semicircunferencias inferiores de centro* $\boldsymbol{p}_n$ *y de radio c. En la figura siguiente se muestra una parte del arcoiris de Knaster.*

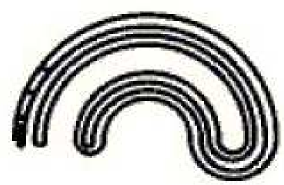

Figura 9: El arcoiris de Knaster

El arcoiris de Knaster es un continuo que no es localmente conexo en ningún punto, pues cualquier vecindad de cualquier punto es union de arcos disjuntos.

Ejercicio 3. *¿Existirá algún continuo que no sea localmente conexo en un sólo punto?.*

Ahora, presentaremos una herramienta para construir continuos a partir de continuos ya conocidos, pero antes prepararemos el camino con dos resultados previos.

Proposición 1. *Si* $\mathscr{A}$ *es una colección anidada de subconjuntos cerrados de un espacio compacto* X *y* U *es un abierto en* X *tal que* $\cap\{A : A \in \mathscr{A}\} \subset U$*, entonces existe* $E \in \mathscr{A}$ *tal que* $E \subset U$.

Demostración. Sabemos que $X \backslash U$ es un cerrado de X, que es compacto, por lo que $X \backslash U$ es compacto y

$$X \backslash U \subset X \backslash \left(\cap\{A : A \in \mathscr{A}\}\right) = \bigcup\{X \backslash A : A \in \mathscr{A}\},$$

es decir, $\bigcup\{X\backslash A : A \in \mathscr{A}\}$ es una cubierta abierta de $X\backslash U$, por lo que existe una subfamilia finita $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ tal que $X\backslash U \subset \bigcup\{X\backslash A : A \in \mathscr{F}\}$.

Como la colección $\mathscr{A}$ es anidada y $\mathscr{F}$ es finita, existe en $\mathscr{F}$ un conjunto E tal que $E \subset A$ para todo $A \in \mathscr{F}$. Luego, $X\backslash A \subset X\backslash E$ para todo $A \in \mathscr{F}$ por lo que $X\backslash U \subset X\backslash E$. Se infiere entonces que $E \subset U$. $\square$

Corolario 2. *Si $\mathscr{A}$ es una colección anidada de cerrados no vacíos en un espacio compacto X, entonces $\cap\{A : A \in \mathscr{A}\} \neq \emptyset$.*

Demostración. Suponga que $\cap\{A : A \in \mathscr{A}\} = \emptyset$ y tome $U = \emptyset$ en la Proposición 1 para encontrar un conjunto $E \in \mathscr{A}$ tal que $E \subset \emptyset$, lo que es absurdo. $\square$

Teorema 3. *Si $\mathscr{A}$ es una colección anidada de continuos en un espacio métrico compacto X, entonces $\mathbf{A} = \cap\{A : A \in \mathscr{A}\}$ es un continuo.*

Demostración. Claramente, $\mathbf{A}$ es métrico por ser subconjunto del espacio métrico X; por la misma razón, cada conjunto $A \in \mathscr{A}$ es cerrado y así $\mathbf{A}$ es un cerrado no vacío, por el Corolario 2. Luego, todo cerrado de un compacto es compacto.

Finalmente, para ver que $\mathbf{A}$ es conexo, supongamos que no lo es, entonces existen dos cerrados disjuntos no vacíos, digamos A y B, tales que $\mathbf{A} = A \cup B$. Como $\mathbf{A}$ es un espacio métrico , existen abiertos disjuntos no vacíos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$; se concluye fácilmente que $\mathbf{A} \subset U \cup V$, con $U \cup V$ abierto en X. Por la Proposición 1, existe $E \in \mathscr{A}$ tal que $E \subset U \cup V$. Observe que $\mathbf{A} = A \cup B \subset E$ y así $\emptyset \neq A \subset E \cap U$ y $\emptyset \neq B \subset E \cap V$, lo que contradice la conexidad de E. $\square$

En general, la intersección anidada de conexos no es necesariamente conexo.

Ejercicio 4. *Encuentre una colección anidada de conjuntos conexos cuya intersección no sea un conjunto conexo.*

A continuación, veremos tres ejemplos importantes de continuos construidos mediante intersecciones anidadas.

Ejemplo 10. La carpeta de Sierpiński. *Éste continuo es una versión bidimensional del conjunto de Cantor. La construcción es como sigue:*

Sea $S_1 = [0,1] \times [0,1]$; $S_2 \subset S_1$ el conjunto que se obtiene sustrayendo el cuadrado abierto central al dividir S_1 en 9 subcuadrados de igual área; $S_3 \subset S_2$ se define análogamente, al dividir cada uno de los $8 = 2^3$ cuadrados de S_2 en nueve cuadrados de igual área y sustrayendo el cuadrado abierto del centro. Inductivamente, definimos $S_n \subset S_{n-1}$ como el conjunto que queda al remover el cuadrado abierto central de cada uno de los 2^n cuadrados que conforman a S_{n-1} después de dividirlos en 9 cuadrados de igual área. Finalmente, se define $\mathcal{S} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$. Se puede ver que para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto S_n es un continuo y además $S_{n+1} \subset S_n$. Por el Teorema 3, se sigue que $\mathcal{S}$ es un continuo. En la siguiente figura se muestran los primeros 3 pasos del proceso de construcción de la carpeta de Sierpiński:

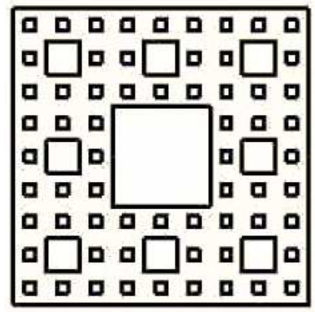

Figura 10: Carpeta de Sierpiński.

Éste continuo tiene la propiedad de que contiene una copia homeomorfa de cada continuo de dimensión 1 (subconjuntos de $\mathbb{R}^k$ con interior vacío en $\mathbb{R}^k$, para $k \geq 2$) que esté en el plano. Se dice que la Carpeta de Sierpiński es un continuo **universal** para los continuos de dimensión 1 del plano.

Ejercicio 5. *Encuentre subcontinuos en la carpeta de Sierpiński homeomorfos a:*

1. *El continuo* $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$*,*

2. *El abanico sobre el conjunto de Cantor,*

3. *El arcoiris de Knaster.*

Ejemplo 11. La curva de Menger. *El continuo que se presenta aquí, es una versión tridimensional del conjunto de Cantor y de la carpeta de Sierpiński. La construcción es análoga, sólo que ahora comenzaremos con el cubo* $M_1 = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$*; luego, se define* $M_2 \subset M_1$ *como el conjunto que resulta al dividir al cubo* M_1 *en nueve partes iguales por cada cara y remover la barra central abierta de cada cara. El proceso con el que se obtiene cada* M_n *es similar. Definimos* $\mathcal{M} = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ *y nuevamente, por el Teorema 3,* $\mathcal{M}$ *es un continuo. A continuación, presentamos una figura con los primeros tres pasos de la construcción de la curva de Menger:*

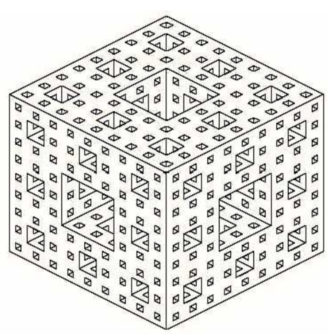

Figura 11: Curva de Menger.

La curva de Menger es un continuo universal para todo continuo de dimensión 1, esté o no en el plano.

Ejemplo 12. El solenoide diádico. *Considere un toro sólido* X_1 *y dentro de él,* X_2 *un toro sólido que le da dos vueltas a* X_1*; después,* X_3 *será un toro sólido que le de dos vueltas a* X_2*, es decir, que le de* 2^2 *vueltas a* X_1*. En general,* X_n *es un toro sólido, dentro de* X_{n-1}*, que le da dos vueltas a éste, o bien,* 2^{n-1} *vueltas a* X_1*. Finalmente, el continuo* $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ *es denotado por* Σ_2*.*

Si en vez de dar dos vueltas en cada paso, damos 3, o bien, p vueltas, el continuo que se obtiene al intersectar ésa familia de continuos se conoce como ***solenoide*** p***-ádico*** *y se denota por* Σ_p*.*

Definición 1.5. *Diremos que un continuo es* ***descomponible*** *si se puede expresar como la unión de dos subcontinuos propios; de otro modo, diremos que el continuo es* ***indescomponible****.*

Ejemplos de continuos descomponibles son: el intervalo (ejemplo 1), el círculo (ejemplo 3), el disco (ejemplo 4), el continuo sen $\frac{1}{x}$ (ejemplo 7), el abanico armónico y el abanico sobre el conjunto de Cantor (ejemplos 6 y 8).

Ejemplos de continuos indescomponibles son: el arcoiris de Knaster y el solenoide diádico. Aparentemente, casi todo continuo que podemos imaginar es descomponible, pero la verdad es que existen muchos más continuos indescomponibles que descomponibles (similar a lo que ocurre con los números racionales e irracionales).

Ejercicio 6. *Dar una descomposición de cada uno de los continuos descomponibles que se mencionan.*

Es momento de invitar a recordar la **topología producto**: Sea $\{X_\alpha, p_\alpha\}$ una colección de espacios topológicos junto con una colección de funciones, indexada en el conjunto Λ, donde $p_\alpha : \prod_{\beta\in\Lambda} X_\beta \to X_\alpha$ es la **proyección sobre el** α**-ésimo factor**. La topología producto es la que tiene como *subbase* a la familia

$$\mathscr{S} = \left\{p_\alpha^{-1}(A) : A \text{ es abierto en } X_\alpha \text{ para cada } \alpha \in \Lambda\right\},$$

es decir, cada abierto del producto topológico $\prod_{\beta\in\Lambda} X_\beta$ se obtiene al tomar uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{S}$.

Recordemos que el producto numerable de continuos es un continuo: Si tenemos una sucesión de espacios métricos (X_n, d_n), podemos metrizar al producto $\prod_{n=1}^{\infty} X_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in X_n\}$ definiendo

$$\delta\left((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)},$$

que resulta ser una métrica para la topología producto. El Teorema de Tychonoff asegura que el producto de compactos es compacto. Con argumentos sencillos de conexidad, se puede probar que el productos de conexos es conexo.

Ejemplo 13. El cubo de Hilbert. *Considere el producto numerable del intervalo* $[0,1]$ *y denotémoslo como* I^∞*; tome la métrica*

$$\delta\left((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}.$$

El continuo I^∞ *se llama* ***cubo de Hilbert****.*

Teorema 4. *Todo continuo* X *es homeomorfo a un subcontinuo de* I^∞*.*

Demostración. Si d es la métrica en X, considere en X la métrica acotada $d'(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$. Ahora, sea $D = \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso y numerable de X (el cual existe, pues X es compacto y por tal razón, es *separable*) y definamos la siguiente función:

$$f(x) = \left(d'(x,p_i)\right)_{i=1}^{\infty}.$$

Claramente, f es continua, ya que la función distancia lo es. Además, es uno-a-uno pues si $x \neq y$, existe un abierto A tal que $x \in A$ y $y \notin A$. Como D es denso, existe $p_k \in D \cap A$ y se tiene $d'(x,p_k) < d'(x,y)$, es decir,$f(x)$ difiere en la k-ésima componente con $f(y)$. Se concluye que f es un homeomorfismo por ser X compacto y el espacio I^∞ es Hausdorff. $\square$

2 Límites inversos

Una *sucesión inversa* es una sucesión de espacios X_n, junto con una sucesión de funciones continuas $f_n : X_{n+1} \to X_n$ (llamadas *funciones de ligadura*), y se denota $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} \cdots \xleftarrow{f_{n-1}} X_n \xleftarrow{f_n} \cdots$$

El *límite inverso* de una sucesión inversa $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es el subespacio del producto $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ definido como

$$X_\infty \equiv \varprojlim X_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : f_n(x_{n+1}) = x_n\}.$$

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\nu_n : \prod_{i=1}^{\infty} X_i \to X_n$$

es la proyección natural sobre el n-ésimo factor, entonces denote por π_n a la restricción de ν_n al límite inverso X_∞, es decir, $\pi_n = \nu_n|_{X_\infty}$ para cada número natural n.

$$\begin{tikzcd}
 & & X_\infty \arrow[dll, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \arrow[dr, "\pi_n"] & & \\
X_1 & X_2 \arrow[l, "f_1"] & \cdots \arrow[l, "f_2"] & X_n \arrow[l, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[l, "f_n"]
\end{tikzcd}$$

Observemos que $\pi_n = f_n \circ \pi_{n+1}$ y en general, si $m < n$ tenemos que

$$\pi_m = f_m \circ f_{m+1} \circ \cdots \circ f_{n-1} \circ \pi_n.$$

Además, si cada función de ligadura es suprayectiva, entonces todas las proyecciones π_n también son suprayectivas.

Ejemplo 14. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $X_n = [0,1]$ y $f_n = f$, donde*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x+2 & si\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

y tiene como gráfica la siguiente:

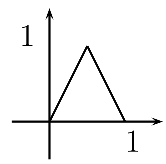

Figura 12: La gráfica de f.

El Teorema 5 mostrará que X_∞ es un continuo; de hecho, se puede demostrar que X_∞ es homeomorfo al arcoiris de Knaster.

Ejemplo 15. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos $X_n = \mathbb{S}^1$ y $f_n(z) = z^2$, viendo a z como número complejo de modulo 1.*

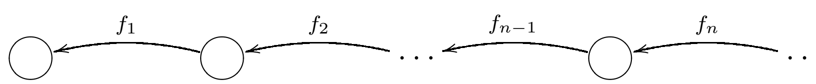

Figura 13: Sucesión inversa para $X_n = \mathbb{S}^1$ y $f_n(z) = z^2$.

Al probar el Teorema 5, sabremos que X_∞ es un continuo y puede mostrarse que X_∞ es homemorfo al solenoide diádico.

El resultado que necesitamos para encontrarle sentido a la presentación de éste concepto es el siguiente.

Teorema 5. *El límite inverso de una sucesión inversa de continuos es un continuo.*

Demostración. Sea $\{X_n, f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión inversa de continuos y definamos para cada $k \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$Q_k = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty : f_n(x_{n+1}) = x_n, \text{ para } 1 \leq n \leq k\right\}.$$

Si definimos además, $h_k((x_n)_{n=1}^\infty) = (x_n)_{n=k+1}^\infty$, entonces cada h_k es un homeomorfismo entre Q_k y $\prod_{n=k+1}^\infty X_n$ (para la inyectividad, use las funciones de ligadura). Claramente, $Q_{k+1} \subset Q_k$ y $X_\infty = \bigcap_{k=1}^\infty Q_k$. $\square$

Ahora, veremos un criterio para saber si el límite inverso de una sucesión inversa de continuos será un continuo indescomponible.

Una sucesión inversa de continuos $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene la propiedad (#) si cumple con lo siguiente:

(#) Para cada $n \in \mathbb{N}$, si $X_{n+1} = A_{n+1} \cup B_{n+1}$, con A_{n+1} y B_{n+1} subcontinuos de X_{n+1}, entonces $f_n(A_{n+1}) = X_n$ o bien $f_n(B_{n+1}) = X_n$.

Teorema 6. *Si una sucesión inversa de continuos $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene la propiedad (#), entonces X_∞ es un continuo indescomponible.*

La propiedad (#) se le conoce como *indescomponible* para la sucesión inversa de continuos. Para la demostración, necesitamos del siguiente

Lema 1. *Si A es un subconjunto compacto de X_∞, entonces*

$$A = \varprojlim \{\pi_n(A), f_n|_{\pi_{n+1}(A)}\}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & & A \subset X_\infty \arrow[dll, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \arrow[dr, "\pi_n"] & & \\
\pi_1(A) & \pi_2(A) \arrow[l, "f_1|_{\pi_2(A)}"] & \cdots \arrow[l, "f_2|_{\pi_3(A)}"] & \pi_n(A) \arrow[l, "f_{n-1}|_{\pi_n(A)}"] & \cdots \arrow[l, "f_n|_{\pi_{n+1}(A)}"]
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 7. *Demuestre el Lema usando el diagrama anterior.*

Demostración. (Teorema 6). Supongamos que $X_\infty = A \cup B$, con A y B subcontinuos de X_∞. Demostraremos que alguno de los dos es el total.

Observe que (#) implica que las funciones de ligadura son suprayectivas; así, π_n es suprayectiva para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\pi_{n+1}(X_\infty) = \pi_{n+1}(A) \cup \pi_{n+1}(B) = X_{n+1}.$$

Luego, por (#) $f_n \circ \pi_{n+1}(A) = X_n$ o bien $f_n \circ \pi_{n+1}(B) = X_n$, es decir,

$$\pi_n(A) = X_n \text{ o bien } \pi_n(B) = X_n \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Es claro que existe un subconjunto infinito $J \subset \mathbb{N}$ tal que $\pi_n(A) = X_n$ para todo $n \in J$ o bien $\pi_n(B) = X_n$ para todo $n \in J$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\pi_n(A) = X_n$ para $n \in J$ y tomamos $k \in \mathbb{N}$ arbitrario, entonces existe $j \in J$ tal que $k < j$ y $\pi_j(A) = X_j$, así que

$$\pi_k(A) = f_k \circ f_{k+1} \circ \cdots \circ f_{j-1} \circ \pi_j(A) = f_k \circ f_{k+1} \circ \cdots \circ f_{j-1}(X_j) = X_k.$$

Aplicando el Lema 1, $A = \varprojlim \{\pi_n(A), f_n|_{\pi_n(A)}\} = \varprojlim \{X_n, f_n\} = X_\infty$. $\square$

3 La propiedad del punto fijo

De los cursos de Cálculo, se puede recordar una propiedad que tiene el intervalo que dice:

"Si $f : [0,1] \to [0,1]$ es continua, entonces intersecta en al menos un punto a la función identidad $g(x) = x$ ".

Se dice entonces que el intervalo posee la propiedad del punto fijo, que a continuación enunciaremos.

Definición 3.1. *Decimos que un continuo X tiene la* ***propiedad del punto fijo*** *si para cualquier función continua $f : X \to X$ existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Así pues, el intervalo es el primer ejemplo que tenemos de un continuo con tal propiedad.

En lo que resta, nuestro objetivo será el ver que el intervalo hereda, en algún sentido, la propiedad del punto fijo a un límite inverso de intervalos. Primero, una definición.

Definición 3.2. *Un continuo se dice ser* ***tipo arco*** *si se puede expresar como límite inverso de una sucesión de arcos con funciones de ligadura suprayectivas.*

Necesitaremos más adelante del siguiente resultado, que es una generalización de lo que ocurre en el intervalo.

Lema 2. *Sean X un espacio conexo y $f, g : X \to [0,1]$ dos funciones continuas con g suprayectiva, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, two heads, bend right, "g"'] & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

Demostración. Definamos los conjuntos

$$A = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}, \qquad B = \{x \in X : f(x) \geq g(x)\}.$$

Claramente, A y B son subconjuntos cerrados en X, pues son imagen inversa de cerrados bajo una función continua; también son no vacíos, pues por ser g suprayectiva, existen $x_0, x_1 \in X$ tales que $g(x_0) = 0$ y $g(x_1) = 1$ por lo que $x_1 \in A, x_0 \in B$. Es evidente que $X = A \cup B$ y por ser conexo, $A \cap B \neq \emptyset$. Ahora es claro que si $x \in A \cap B$, entonces $f(x) = g(x)$. $\square$

Una función continua $g : X \to Y$ es *universal* si para toda función continua $f : X \to Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$. El Lema 2 afirma que toda función continua y sobre el intervalo $[0,1]$ es universal.

Lema 3. *Sea X un continuo. Si para cada $\varepsilon > 0$ existen un espacio Y_ε y una función universal $f_\varepsilon : X \to Y_\varepsilon$ tal que para cada $y \in Y_\varepsilon$ el diámetro de $f_\varepsilon^{-1}(y)$ es menor que ε, entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

A la función f_ε de la que se habla en el Lema se le denomina **ε-función**. Veamos un ejemplo de este tipo de funciones para entender mejor el enunciado del Lema 3.

Ejemplo 16. *Considere el continuo* $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$*, denotémoslo por* X*. Para* $\varepsilon > 0$ *sea* $b \in (0,1]$ *tal que* $\operatorname{sen}\frac{1}{b} = 1$*, con* $b < \varepsilon$*. Sea* $A = \{\operatorname{sen}\frac{1}{x} : x \geq b\}$ *y* $B = \{\operatorname{sen}\frac{1}{x} : x \leq b\}$*, entonces* X *es la unión de* A *y* B*; ahora, definamos*

$$f_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} x & si\ (x,y) \in A \\ h(0,y) & si\ (x,y) \in B \end{cases}$$

donde $h : \{0\} \times [-1,1] \to [0,b]$ *es un homeomorfismo que manda al punto* $(0,1)$ *en* b *y* $(0,-1)$ *en* 0*. Claramente,* f_ε *es continua en* A*, pues es la proyección sobre la primer componente; en* B*, tenemos que* f_ε *es la proyección sobre la segunda componente seguida de un homeomorfismo. Como* f_ε *coincide en la intersección* $A \cap B$*, entonces es continua en todo* X*. Más aún, por construcción tenemos que* $\operatorname{diam} f_\varepsilon^{-1}(x,y) < \varepsilon$ *y es suprayectiva; por el Lema 2,* f_ϵ *es universal y por el Lema 3,* X *tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. (Lema 3). Sean $f : X \to X$ una función continua y para cada $n \in \mathbb{N}$ tome $f_n : X \to Y_n$ una función universal con $\operatorname{diam} f_n^{-1}(y) < \frac{1}{n}$ para todo $y \in Y_n$.

Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n \circ f : X \to Y_n$ es continua, y por el Lema 2, existe un punto $q_n \in X$ tal que

$$y_n \equiv f_n \circ f(q_n) = f_n(q_n).$$

Como X es compacto, podemos suponer que $q_n \to q \in X$ (por la compacidad secuencial, existe una subsucesión convergente) y por la continuidad de f, tenemos que $\lim_{n\to\infty} f(q_n) = f(q)$; por otro lado, observe que

$$\begin{aligned} d(q, f(q)) &\leq d(q, q_n) + d(q_n, f(q)) \\ &\leq d(q, q_n) + d(q_n, f(q_n)) + d(f(q_n), f(q)). \end{aligned} \tag{1}$$

Es claro que $q_n, f(q_n) \in f_n^{-1}(y_n)$, por lo que $d(q_n, f(q_n)) < \frac{1}{n}$; así, por (1) vemos que

$$d(q, f(q)) \leq d(q, q_n) + \frac{1}{n} + d(f(q_n), f(q)),$$

y tomando límite cuando $n \to \infty$, tenemos que $f(q) = q$. □

Finalmente, presentamos el resultado anunciado.

Teorema 7. *Todo continuo tipo arco tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración. Sea $X_\infty = \varprojlim\{[0,1], f_n\} \subset \prod_{n=1}^{\infty}[0,1]$ un continuo tipo arco. Dado $\varepsilon > 0$, fijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$; demostraremos que $\pi_N : X_\infty \to [0,1]$, la cual es suprayectiva y por el Lema 2 universal, es una ε-función.

Sean $t \in [0,1]$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \pi_N^{-1}(t)$, entonces $x_N = y_N = t$ y así, $x_k = y_k$ para toda $1 \leq k \leq N$ (use las funciones de ligadura). Luego, tenemos

$$\begin{aligned} \delta((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, $\operatorname{diam} \pi_N^{-1}(t) < \varepsilon$. Finalmente, el Teorema se sigue aplicando el Lema 3. □

Bibliografía

[1] Nadler, S. B., *Continuum Theory, An Introduction*. New York: Marcel Dekker, 1992.

[2] Illanes, A., *Hiperespacios de Continuos*. México: Aportaciones Matemáticas #28 SMM, 2004.

[3] Escobedo, R.; Macías, H., *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios*. México: Aportaciones Matemáticas #31 SMM, 2006.

[4] Macías, H., *Topics on Continua*. Chapman & Hall/CRC, 2005.

[5] Dugundji, J., *Topology*. Boston: Allyn and Bacon, Inc, 1966.

[6] Hocking, J. G.; Young, G. S., *Topology*. New York: Dover Publications, Inc, 1988.