Memorias de la XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 20, Agosto, 2007, pp. 75–82.



# EL CÁLCULO ESTOCÁSTICO CUÁNTICO Y UNA RELACIÓN CON EL ANÁLISIS FUNCIONAL

**Oswaldo González Gaxiola**
Universidad Autónoma Metropolitana-Cuajimalpa

**Resumen**

*Se dará una caracterización alternativa de la solución de una ecuación diferencial estocástica cuántica (Ecuación del tipo Hudson-Parthasarathy) que describe la interacción de un sistema cuántico con el medio ambiente.*

## 1 Introducción

Consideremos la Ecuación Diferencial Estocástica Cuántica (EDEC) del tipo Hudson-Parthasarathy [6], es decir, de la forma:

$$\begin{cases} dV_t = [(W-I)d\Lambda_t - L^*WdA_t + LdA_t^\dagger \\ -(iH + \frac{1}{2}L^*L)dt]V_t, \\ V_0 = I. \end{cases}$$

Donde $W$, $L$ y $H$ son operadores en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ y $d\Lambda_t$, $dA_t$, $dA_t^\dagger$ son las diferenciales estocásticas básicas en un espacio de Fock simétrico $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_+))$.

Con el propósito de motivar la aparición en la dinámica cuántica de la EDEC anterior; consideremos el caso en el que el operador del sistema $L = 0$. En tal caso, si pensamos en el flujo de un número aleatorio de fotones moviéndose a través de un eje óptico de derecha a izquierda; la amplitud probable del flujo es un vector de Fock simétrico $\Psi_t \in \Gamma^2(L^2(\mathbb{R}))$ con soporte sobre la trayectoria óptica. Si este flujo es estacionario y no interactúa con el medio ambiente ($L = 0$), entonces

$$\Psi_t = (\psi_0, \psi_1(x_1+t), ..., \psi_n(x_1+t, ..., x_n+t), ...)$$

donde $\psi_0 \in \mathbb{C}$, $\psi_n \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y así $|\psi_0|^2$ es la probabilidad de que no existan fotones sobre el eje óptico y $|\psi_n(x_1+t, ..., x_n+t)|^2$ es la probabilidad de detectar $n$ fotones en los puntos $x_1, ... x_n$ a lo largo del eje óptico. La ecuación de evolución para las amplitudes $\Psi_t$ es la ecuación hiperbólica

$$\partial_t \Psi_t = c\nabla\Psi_t$$

donde para simplificar, podemos suponer que la velocidad $c = 1$. Supongamos que en el origen del eje óptico, los fotones intereactuan permanentemente con un sistema cuántico externo y adquieren el corrimiento de fase $e^{i\theta(t)}$, donde $\theta(t) = e^{iHt}\theta e^{-iHt}$ con $\theta = \theta I$. $\theta(t)$ es una observable del sistema cuántico acoplado. observando, que como los fotones se mueven de derecha a izquierda, el salto de fase se realiza en el intervalo $(-t, 0)$; considerando la ecuación de evolución y la segunda cuantización a todo el espacio de Fock, ver [3], resulta que $\Psi_t$ es la solución débil de la ecuación

$$\begin{cases} d\Psi(v)_t = \Psi_t(v)(W_t - I)d\Lambda_t \\ W_t = e^{iHt}e^{\theta}e^{-iHt} \end{cases}$$

la cual es una EDEC del tipo de las que se estudian en el presente trabajo.

De acuerdo con resultados fundamentales del Cálculo Estocástico Cuántico, véase por ejemplo el Teorema 27.8 en [6], la solución $\{V_t\}_{t\geq 0}$ de esta EDEC es un proceso adaptado de operadores en $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_+))\otimes\mathcal{H}$ que describe la evolución total del sistema cuántico junto con su medio ambiente.

Asociado de manera canónica con el proceso $\{V_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ existe un grupo 1-paramétrico $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$; [3].

Para definir $U_t$ es necesario considerar la segunda cuantización $\Theta_t$, sobre el espacio de Fock simétrico

$$\Gamma(L^2(\mathbb{R})) = \Gamma(L^2(\mathbb{R}_-))\otimes\Gamma(L^2(\mathbb{R}_+)),$$

del grupo unitario fuertemente continuo del operador de traslación $\theta_t$ sobre $L^2(\mathbb{R})$; el cual se define para cada $t\in\mathbb{R}$ por

$$\theta_t v(r) = v(r+t),\ \text{para toda } v\in L^2(\mathbb{R}) \text{ continua},$$
$$\Theta_t\psi(v) = \psi(\theta_t v),\ \text{para toda } v\in L^2(\mathbb{R}),$$

donde $\psi(v)$ denota el vector exponencial asociado con $v$.

El operador $\Theta_t$ anterior, puede extenderse a todo el espacio $\Gamma(L^2(\mathbb{R}))\otimes\mathcal{H}$, y se cumple la propiedad de cociclo de $V_t$ con respecto a $\Theta_t$:

$$V_{s+t} = \Theta_s^* V_t \Theta_s V_s,\ \forall s,t\geq 0.$$

Entonces podemos definir el grupo unitario fuertemente continuo $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, mediante

$$U_t = \begin{cases} \Theta_t V_t & t\geq 0 \\ V_{|t|}^*\Theta_t & t<0. \end{cases}$$

Por el teorema de Stone $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, es generado por un operador autoadjunto $C$, entonces para cada $t\in\mathbb{R}$, tenemos formalmente

$$U_t = e^{-itC}.$$

El problema de la caracterización del operador $C$ permaneció abierto alrededor de quince años. El principal problema es que $C$ es un operador singular y su dominio se describe usando condiciones de frontera.

## 2 El generador infinitesimal de $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$

Consideraremos el caso sin multiplicidad, es decir, $L=0$, y $W$ es un operador unitario que conmuta con el operador autoadjunto y acotado $H$, el Hamiltoniano del sistema. El grupo unitario asociado con la EDEC es definido para cada $t\in\mathbb{R}$ por [2],

$$U_t\Psi = (\psi_0, U_{t,1}\psi_1, U_{t,2}\psi_2, ...)$$

donde

$$\Psi = (\psi_0,\psi_1,\psi_2,...)\in\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*))\otimes\mathcal{H}$$

con $\psi_n$ continua para cada $n \geq 1$, $\psi_0 \in \mathbb{C}$ y $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para cada $n \geq 1$ tenemos,

$$U_{t,n} = \begin{cases} U_{t,n} & t \geq 0 \\ U^*_{|t|,n} & t < 0, \end{cases}$$

donde

$$(U_{t,n}\psi_n)(x_1, ..., x_n) = e^{-itH} \bigotimes_{j=1}^{n} \{I_{(-t,0)}(x_j)v(x_j + t)W$$

$$+I_{\mathbb{R}\setminus(-t,0)}(x_j)v(x_j + t)\} \otimes h,$$

aquí $e^{-itH}$ y $W$ son identificados con $I \otimes e^{-itH}$ y $I \otimes W$, respectivamente, $I_A$ denota la función indicadora del conjunto $A$ y $\psi_n(x_1, ..., x_n) = v(x_1) \otimes \cdots \otimes v(x_n) \otimes h$, $h \in \mathcal{H}$. La definición de $U_{t,n}$ se extiende por densidad a todo $L^2(\mathbb{R}^n_*) \otimes \mathcal{H}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Primero trabajaremos con el subespacio de $n$-partículas de $L^2(\mathbb{R}^n_*) \otimes \mathcal{H}$, para cada $n \geq 1$. Consideraremos el subespacio denso de $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*)) \otimes \mathcal{H}$ dado por

$$\mathbb{F} = \{\Psi \in \Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*)) \otimes \mathcal{H} : \exists \quad k \in \mathbb{N} \quad tal \quad que \quad \psi_n = 0 \quad \forall \quad n > k\}.$$

Para $v_j \in W_{2,1}(\mathbb{R}_*)$, $j = 1, ..., n$, (espacio de Sobolev) definimos

$$A^{\pm}_j v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = v_j(0^{\pm})v_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{v_j} \otimes \cdots \otimes v_n,$$

donde el tilde $\widehat{}$ significa que el factor correspondiente es omitido.

Usaremos en el presente trabajo la identificación natural $L^2(\mathbb{R}^n_*, \mathcal{H}) = L^2(\mathbb{R}^n_*) \otimes \mathcal{H}$ y $W_{2,1}(\mathbb{R}^n_*, \mathcal{H}) = W_{2,1}(\mathbb{R}^n_*) \otimes \mathcal{H}$.

Sea $C_n$, $n \in \mathbb{N}$, el operador $C_n = \sum_{k=1}^{n} i\partial_{x_k} + H$ con dominio

$$D_n = \{\psi_n \in W^s_{2,1}(\mathbb{R}^n_*) \otimes \mathcal{H} : A^-_j\psi_n = WA^+_j\psi_n,\ 1 \leq j \leq n\}.$$

La condición de frontera $A^-_j\psi_n = WA^+_j\psi_n$, $1 \leq j \leq n$, es el resultado de la interacción del sistema cuántico con su medio ambiente la cual asumiremos que está asociada con la acción del operador unitario $W$. Tenemos el siguiente resultado que nos permite caraterizar al generador infinitesimal del grupo 1-paramétrico $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$; grupo de operadores que a su vez como se ha mencionado en la introducción, proporciona, mediante la segunda cuantización del operador de corrimiento $\Theta_t$ la solución de la EDEC.

**Teorema 2.1.** *La cerradura del operador $iC$ en $\Gamma^s(L^2(\mathbb{R}_*)) \otimes \mathcal{H}$ definido mediante $C\Psi = (0, C_1\psi_1, ..., C_n\psi_n, ...)$ sobre $\mathcal{D} = \{\Psi \in \mathbb{F} : \psi_j \in D_j, \quad j \in \mathbb{N}\}$ es el generador infinitesimal del grupo unitario fuertemente continuo $\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.*

Por lo tanto $\bar{C}$ es un operador autoadjunto y $\mathcal{D}$ es un dominio esencial para él. Como lo dijimos antes, para probar este teorema trabajaremos con el subespacio de $n$-partículas; pues realizando la segunda cuantización del operador $iC_n$ sobre todo el espacio de Fock obtenemos la conclusión del Teorema 2.1 para el operador $iC$.

**Teorema 2.2.** *La cerradura del operador* $iC_n = -\sum_{k=1}^n \partial_{x_k} + iH$ *con dominio* $D_n$ *es el generador infinitesimal del grupo unitario fuertemente continuo* $\{U_{t,n}\}_{t\in\mathbb{R}}$ *en* $L^2(\mathbb{R}_*^n)$.

*Demostración:* Es suficiente demostrar que $D_n$ es un dominio esencial para $\bar{C}_n$. Debido a un resultado bien conocido acerca de dominios esenciales de generadores infinitesimales, ver [1], Corolario 3.1.7, p. 167, es suficiente demostrar que

1. $D_n$ es denso en $L^2(\mathbb{R}_*^n) \otimes \mathcal{H}$.

2. $D_n$ es invariante bajo la acción $U_{t,n}$.

3. $D_n \subset D(\bar{C}_n)$, donde $D(\bar{C}_n)$ es el dominio de $\bar{C}_n$.

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}_*^n;\mathcal{H}) \subset D_n$, por lo tanto $D_n$ es un subespacio denso de $L^2(\mathbb{R}_*^n;\mathcal{H})$ y (1) es cierto. Para $\psi_n \in W_{2,1}(\mathbb{R}_*^n) \otimes \mathcal{H}$, la acción de $U_{t,n}$ para $t \geq 0$ es dada por

$$U_{t,n}\psi_n(x_1,...,x_n) = e^{-itH}W^l\psi_n(x_1+t,...,x_n+t),$$

donde $l = \#\mathfrak{k}$, con $\mathfrak{k} = \{k \in \{1,...,n\} : \quad x_k \in (-t,0)\}$. El subespacio $W_{2,1}(\mathbb{R}_*^n) \otimes \mathcal{H}$ es invariante bajo la acción de $U_{t,n}$, por lo tanto para probar (2) es suficiente ver que $\Psi_{t,n} = U_{t,n}\psi_n$ satisface las condiciones de frontera. Para $1 \leq j \leq n$ tenemos que

$$A_j^-\Psi_{t,n} = e^{-itH}W^lA_j^-\psi_n = e^{-itH}W^lWA_j^+\psi_n = WA_j^+\Psi_{t,n},$$

donde $A_j^\pm$ es identificado con $A_j^\pm \otimes I$ y hemos usado que $e^{-itH}$ y $W$ conmutan con $A_j^\pm$ pues ellos actúan sobre diferentes factores. Cálculos similares se tienen para el caso $t < 0$, por lo tanto $\Psi_{t,n}$ satisface las condiciones de frontera en $D_n$.

Tomando $\psi_n \in D_n$, y para $1 \leq j \leq n$, definimos $Q_j = \mathbb{R}_* \times \cdots \times \underbrace{(-t,0)}_{j} \times \cdots \times \mathbb{R}_*$, por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
&\|\frac{1}{t}(\{U_{t,n}-I\}\psi_n) - (iC_n\psi_n)\|^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}_*^n} |\frac{1}{t}(\{U_{t,n}-I\}\psi_n)(x_1,...,x_n) - (iC_n\psi_n)(x_1,...,x_n)|^2 dx_1\dots dx_n \\
&= \int_{\bigcup_{j=1}^n Q_j} |\frac{1}{t}(\{U_{t,n}-I\}\psi_n)(x_1,...,x_n) - (iC_n\psi_n)(x_1,...,x_n)|^2 dx_1\dots dx_n \\
&+ \int_{\mathbb{R}_*^n\setminus\bigcup_{j=1}^n Q_j} |\frac{1}{t}(\{U_{t,n}-I\}\psi_n)(x_1,...,x_n) - (iC_n\psi_n)(x_1,...,x_n)|^2 dx_1\dots dx_n,
\end{aligned}$$

donde $|\cdot|$ denota la norma en $\mathcal{H}$.
La segunda integral tiende a cero cuando $t \to 0$ pues el operador $iC_n = -\sum_{k=1}^n \partial_{x_k} + iH$ con dominio $W_{2,1}^s(\mathbb{R}_*^n) \otimes \mathcal{H}$ es el generador infinitesimal del grupo unitario definido por $(V_{t,n}\psi_n)(x_1,...,x_n) = e^{-itH}\psi_n(x_1+t,...,x_n+t)$, para $\psi_n \in L^2(\mathbb{R}_*^n) \otimes \mathcal{H}$, continua.
Para cada $\{k_1,...,k_m\} \subset \{1,...,n\}$, $1 \leq m \leq n$, definimos la familia de subconjuntos ajenos

$$R_{\{k_1,...,k_m\}} = \{(x_1,...,x_n) : \; x_{k_s} \in (-t,0), 1 \leq s \leq m,$$

$$y\ x_{k_r} \notin (-t,0) \text{ para } k_r \notin \{k_1,...,k_m\}\}.$$

Tenemos que $R_{\{1,...,n\}} = \cap_{j=1}^n Q_j$, y $\cup_{j=1}^n Q_j = \cup_{m=1}^n \cup_{\{k_1,...,k_m\}} R_{\{k_1,...,k_m\}}$. Para estimar la primera integral introduciremos las funciones

$$\widetilde{\psi}_{\{k_1,\cdots,k_m\}}(x_1,...,x_n) = \begin{cases} W^m\psi_n(x_1,\ldots,x_m) & \text{si } (x_1,...,x_n) \in S_{\{k_1,...,k_m\}} \\ \psi_n(x_1,...,x_n) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $S_{\{k_1,...,k_m\}} = \{(x_1,...,x_n) :\ x_{k_s} > 0, 1 \le s \le m\}$.

Por lo tanto tenemos que

$$\int_{\bigcup_{j=1}^n Q_j} |\frac{1}{t}(\{U_{t,n} - I\}\psi_n)(x_1,...,x_n) - (iC_n\psi_n)(x_1,...,x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \sum_{m=1}^n \sum_{\{k_1,...,k_m\}} \int_{R_{\{k_1,...,k_m\}}} |\frac{1}{t}\{e^{-itH}W^m\psi_n(x_1+t,...,x_n+t)\cdot h - \psi_n(x_1,...,x_n)\} -$$

$$(iC_n\psi_n)(x_1,...,x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \sum_{m=1}^n \sum_{\{k_1,...,k_n\}} \int_{R\{k_1,...,k_n\}} |\frac{1}{t}\{e^{-itH}\widetilde{\psi}(x_1+t,...,x_n+t) - \widetilde{\psi}(x_1,...,x_n)\} -$$

$$(iC_n\widetilde{\psi})(x_1,...,x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n,$$

donde escribimos simplemente $\widetilde{\psi}$ en lugar de $\widetilde{\psi}_{\{k_1,...,k_m\}}$. La última integral tiende a cero cuando $t \to 0$ debido a que el operador $iC_n$ con dominio $W^s_{2,1}(\mathbb{R}^n_*) \otimes \mathcal{H}$ es el generador infinitesimal del grupo unitario $(V_t)_{t\in\mathbb{R}}$, en $L^2(\mathbb{R}^n_*) \otimes \mathcal{H}$ definido antes. $D_n \subset D(\bar{C}_n)$ y esto finaliza la demostración. $\square$

## 3 Índices de defecto de $C$

El problema de la autoadjunticidad de $C$ en el caso cuando $H$ es un operador simétrico no acotado es mucho más delicado. En [3] A. M. Chebotarev estudió condiciones suficientes que aseguran la autoadjunticidad de $C$, la propiedad de isometría del semigrupo asociado y la conservatividad de dos semigrupos dinámicos cuánticos canónicamente asociados con $C$. En esta sección expondremos un ejemplo que muestra que en algunos casos el operador $C$ no es autoadjunto y $iC$ puede no ser el generador de un semigrupo fuertemente continuo de isometrías. El siguiente ejemplo fue discutido en un contexto diferente en [2], también ver [4] y [5].

Sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(0,\infty)$ consideraremos operadores inducidos por la forma diferencial

$$\tau_f u = \frac{1}{2i}\left((fu)' + fu'\right),$$

donde $f \in C^{\infty}(0,\infty)$, $f > 0$, $f'$ es acotada y $\int_0^{\infty} dx f(x)^{-1} = \infty$. Notemos que las funciones de la forma $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, satisfacen estas condiciones. Denotaremos por $H_{1,0}$ el operador minimal inducido por $\tau_f$; este se define por

$$\mathrm{dom} H_{1,0} = C_0^{\infty}(0,\infty) \quad \text{y} \quad H_{1,0}u = \tau_f u, \qquad u \in \mathrm{dom} H_{1,0}.$$

Notemos que

$$\mathrm{dom}\bar{H}_{1,0} = \{u \in \mathrm{dom}H_1 : \quad u(0) = 0\},$$

ver para esto [7], Teorema 6.31.
El operador maximal $H_1$ inducido por $\tau_f$ está definido por

$$\mathrm{dom}H_1 = \{u \in L^2(0,\infty) : u \ \text{ es absolutamente continua y } \ \tau_f u \in L^2(0,\infty)\}$$

y

$$H_1 u = \tau_f u, \quad u \in \mathrm{dom}H_1.$$

Se puede demostrar que $H_{1,0}$ es un operador simétrico; por lo tanto es cerrable y su cerradura $\bar{H}_{1,0}$ es también simétrico, además $\bar{H}_{1,0}^* = H_{1,0}^* = H_1$.

Consideremos ahora las ecuaciones

$$H_{1,0}^* u = \pm i u, \quad u \in \mathrm{dom}H_{1,0}^*.$$

Las soluciones de estas ecuaciones son respectivamente,

$$u_+(x) = c_1 f(x)^{-1/2} exp^{-\int_0^x \frac{d\tau}{f(\tau)}}$$

y

$$u_-(x) = c_2 f(x)^{-1/2} exp^{+\int_0^x \frac{d\tau}{f(\tau)}}, \qquad c_1, c_2 \ \text{ no nulas.}$$

Notemos que

$$\|u_+\|^2 = c_1^2 \int_0^{\infty} dx f(x)^{-1} exp^{-2\int_0^x \frac{d\tau}{f(\tau)}} < \infty,$$

pues $\int_0^{\infty} \frac{d\tau}{f(\tau)} = \infty$, por lo tanto $u_+ \in L^2(0,\infty)$. De manera similar podemos demostrar que $u_- \notin L_2(0,\infty)$. Esto demuestra que los índices de defecto del operador simétrico $\bar{H}_{1,0}$ son $n_+(\bar{H}_{1,0}) = 1$ y $n_-(\bar{H}_{1,0}) = 0$.
Siendo $\bar{H}_{1,0}$ un operador simétrico maximal, entonces $i\bar{H}_{1,0}^* = iH_1$ es el generador de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones.

Ahora haciendo uso del siguiente teorema probado en [2]:

**Teorema 3.1.** *Supongamos que $H = I \otimes H_0$, donde $H_0$ es un operador cerrado, simétrico y densamente definido el cual actúa en $\mathcal{H}$ y conmuta con el operador unitario $W$. Entonces los índices de defecto de*

$$C_n \psi_n = (i\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} + H)\psi_n \qquad \psi_n \in D_n \otimes domH_0, \qquad n \geq 0$$

*coinciden con los índices de defecto de $H_0$.*

Obtenemos como consecuencia que el operador $C = i\partial_x \otimes I + I \otimes \bar{H}_{1,0}$ con dominio $D \otimes domH_0$, es un operador simétrico con índices de defecto iguales a los de $\bar{H}_{1,0}$, i.e., $n_- = 0$ and $n_+ = 1$, por lo tanto este no tiene extensiones autoadjuntas. También podemos probar que $i\bar{C}$ no es el generador de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones.

## 4 Condición suficiente para que $i\bar{C}$ sea generador

Dado un operador simétrico y cerrado $\bar{C}$ surge de manera natural la pregunta de cuándo $i\bar{C}$ es la restricción de un generador de un semigrupo fuertemente continuo de isometrías. En el siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en [5] damos una respuesta a esta pregunta usando los índices de defecto de $\bar{C}$.

**Teorema 4.1.** *Sea $\bar{C}$ un operador simétrico y cerrado en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con índices de defecto finitos $(n_+, n_-)$, entonces*

*(i) si $n_+ \leq n_-$ el operador $i\bar{C}$ es la restricción de un generador de un semigrupo fuertemente continuo de isometrías en $\mathcal{H}$.*

*(ii) si $n_+ > n_-$ entonces $i\bar{C}$ no es la restricción de un generador de un semigrupo fuertemente continuo de isometrías en $\mathcal{H}$.*

## 5 Conclusiones

Con un enfoque diferente de aquel desarrollado por A. Chebotarev en [2] y [3] tratamos el problema de caracterizar la solución de una EDEC en el marco de la teoría de operadores. Además daremos condiciones suficientes que aseguran que $-i\mathcal{C}$ es restricción de un generador de un semigrupo fuertemente continuo de isometrías en término de sus índices de defecto; así como la caracterización del generador infinitesimal de $U_t$ en el caso de coeficientes acotados conmutativos y sin multiplicidad.

## Bibliografía

[1] Bratteli, O; Robinson, D.W. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*; Springer-Verlag: New York, 1981.

[2] Chebotarev, A.M. *Lectures on Quantum Probability*; SMM Aportaciones Matemáticas (Textos nivel avanzado) 14: México, 2000.

[3] Chebotarev, A.M. *What is a quantum stochastic differential equation from the point of view of functional analysis?* Math. Notes 2002, 71, 408-427.

[4] García J.C.; Quezada R. *Hille-Yosida estimate and nonconservativity criteria for quantum dynamical semigroups.* Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. 2004, 7, 383-394.

[5] González-Gaxiola O.; Quezada R. *On the infinitesimal generator of a Quantum Stochastic Differential Equation*, Stochastic Models. 2006, 22, 561-572.

[6] Parthasaraty, K.R. *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*; Birkhäuser: Basel, 1992.

[7] Weidmann, J. *Linear operators in Hilbert spaces*; Graduate texts in mathematics **68**, Springer-Verlag: New York, 1980.