Memorias de la XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México. Mosaicos Matemáticos No. 20, agosto 2007, pp. 51-57. **Nivel Superior**

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN-DISTRIBUCIÓN

Mayra Elizondo Cortés y Ricardo Aceves García
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México
Tel. 56223296 ext 101 Tel. 56223312
mareli@avantel.net aceves@servidor.unam.mx

Resumen

El problema de Inventario Ruteo (Inventory Routing Problem) surge en un contexto logístico que se presenta en las empresas y que pretende satisfacer las demandas de un conjunto de clientes distribuidos geográficamente, utilizando una flotilla de vehículos de capacidad limitada que se encuentran en un almacén central, al menor costo posible. El IRP es un problema NP-duro que en aplicaciones reales suele ser de gran tamaño. Para su resolución se diseñó una estrategia que utiliza de forma conjunta, la descomposición cruzada y la relajación Lagrangeana separable, con lo que se obtienen un esquema tipo ping-pong entre los dos subproblemas, que son del tipo transporte, para el cual se tiene un algoritmo de solución muy eficiente de orden O(n3) y fácil de implementar para el problema completo.

Palabras clave: ***Ruteo, descomposición cruzada separable, asignación-distribución***

Introducción

Uno de los obstáculos principales para la competitividad de las pequeñas y medianas empresas en México, es la falta de recursos y cultura para invertir en proyectos de desarrollo logístico. El desarrollo de estrategias poco costosas y fáciles de implementar que mejoren sus indicadores de desempeño, les proporcionarán instrumentos para sortear el inestable y cambiante entorno económico mexicano.

La investigación en el área logística de las últimas dos décadas, se ha avocado a desarrollar varias estrategias, encaminadas a coordinar la toma de decisiones en las actividades dentro de los elementos de las cadenas de suministro, para mejorar su desempeño y efectividad en términos de costo, tiempos de respuesta, suministro a tiempo y servicio al cliente. Problemas como el de inventario manejado por el vendedor o problema de inventario ruteo (Elizondo, 2005) y el plan de reabastecimiento continuo, han sido algunas de las estrategias más promisorias para la coordinación de la cadena de suministro (Xu *et al.*, 2001).

En particular el problema de inventario ruteo (Inventory Routing Problem, IRP), modela una situación que se presenta comúnmente en las empresas e involucra en un solo modelo a las dos actividades más costosas de la cadena de suministro: el manejo de inventarios y la distribución física de productos. El IRP típico considera que una compañía de distribución, opera desde un almacén central y abastece a un gran número de clientes, geográficamente distribuidos (Baita *et al*. 1998). En la aplicación práctica, el IRP resulta ser de gran tamaño, y adicionalmente se considera como un problema NP-duro para un contexto de NP-completez, debido a que el componente de ruteo de vehículos del problema, además incluye restricciones de inventario (Cousineau-Ouimet,2002). De tal forma que, la obtención óptima de la solución en tiempos razonables se torna prácticamente imposible.

El IRP tratado en Elizondo (2005) trabaja bajo dominio de tiempo (Baita *et al.* 1998), en intervalos discretos, en los cuales se deciden las cantidades a enviar y las rutas a seguir. En dicho trabajo, se analizaron estrategias de solución para problemas similares, tales como los de Federgruen y Zipkin (1984), Chien, Balakrishnan y Wong (1989), Christiansen (1999), Campbell *et al.* (2002) y Cousineau-Ouimet (2002) en los cuales se observó que si bien la mayoría dan resultados satisfactorios para sus IRP específicos, un grave obstáculo común, fue el tratar con un problema entero mixto grande para el cual no se han presentado alternativas de solución adecuadas. El presente artículo expone una estrategia de solución, a partir de un modelo entero mixto denominado de asignación-distribución (AD), para el problema de decidir la asignación de clientes a vehículos y la cantidad de producto que le será entregada a cada uno de ellos. Dicha estrategia resultó ser muy eficiente y mejora los resultados obtenidos hasta ahora. Para su resolución se utiliza la técnica de descomposición cruzada separable propuesta por Aceves (1996).

El Problema de Asignación-Distribución (AD)

Sea el problema AD, en el cual un número finito *m* de vehículos disponibles distribuyen un solo tipo de producto, para atender la demanda de una cierta población de usuarios concentrada en *n* puntos discretos, cada uno con demanda d_j, Cuando un vehículo en particular es seleccionado, se incurre en un costo fijo f_i por la utilización del vehículo *i* y un costo variable $c_{ij}x_{ij}$ que está en función del costo unitario de viaje del vehículo *i* al destino *j* atendiendo la fracción x_{ij} de la demanda del cliente *j*.

Asumiendo que la capacidad de cada vehículo es limitada, el problema consiste en decidir cuáles de los posibles vehículos serán utilizados, de tal manera que sus capacidades no sean excedidas y las demandas satisfechas; así como qué patrón de distribución deberá utilizar, tal que el costo total de establecer las unidades en servicio, conformado por costos fijos más costos variables, sea minimizado en un horizonte finito de planeación. El problema AD se puede formular como sigue:

$$\textit{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i$$

$$\textit{sujeto a}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \qquad (1.1)$$

$$x_{ij} \le y_i, \qquad \forall i, j \qquad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i y_i \ge \sum_{j=1}^{n} d_j \qquad (1.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_{ij} \le a_i y_i, \quad \forall i \qquad (1.4)$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad y_i = 0{,}1, \quad \forall i, j.$$

donde

m : número de vehículos disponibles; *n* : número de clientes; d_j : demanda del cliente *j*

f_i : costo fijo para el vehículo *i;* a_i : capacidad del vehículo *i;* c_{ij} : costo (en función de la distancia recorrida) de distribución al cliente *j* utilizando el vehículo *i* ; x_{ij} : fracción de la demanda total atendida del cliente *j* utilizando el vehículo *i*.; y_i = 1 si se usa el vehículo *i*, 0 en otro caso.

La restricción (1.1) asegura la atención total de la demanda, (1.2) establece la distribución sólo con vehículos activos, (1.3) considera el uso de suficientes vehículos para atender la demanda y (1.4) considera no exceder la capacidad del vehículo.

El AD tienen dos decisiones inherentes: elegir los vehículos que se utilizarán y la forma de distribuir mejor la demanda para atender a los clientes. Esta complejidad lo hace un atractivo campo para el uso de técnicas de descomposición, ya que si la decisión discreta de elegir el vehículo se ha tomado, el problema continuo de distribución, generalmente es más fácil de resolver. Además tiene una estructura especial que se puede explotar por las técnicas de descomposición.

La investigación desarrollada por Aceves (1996), incorpora en un mismo proceso la descomposición cruzada (Van Roy, 1983) y la relajación Lagrangeana separable (Guinard and Kim, 1983), logrando la ventaja de que ninguna de las restricciones originales desaparece y no es necesario elegir entre la calidad de la cota que se obtiene, y el grado de dificultad del problema que queda. Además se establece, que no es necesario utilizar el problema maestro en la solución, *i.e.*, es posible resolver al problema completo iterando únicamente entre subproblemas, evitando por completo a los problemas maestros. A este procedimiento se le denominó descomposición cruzada separable y es el que se emplea para resolver el problema AD.

Aplicando descomposición de Benders al problema primal (AD), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\mathit{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i \\
&\mathit{sujeto\ a}: \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \qquad \forall j \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} d_j x_{ij} \le a_i y_i, \quad \forall i \\
&\qquad 0 \le x_{ij} \le y_i, \qquad \forall i, j
\end{aligned}
$$

que resulta en un problema del tipo transporte; y aplicando el esquema de relajación Lagrangeana separable propuesto por Aceves (1996), el problema AD se puede establecer a través del siguiente proceso.

Copiar $\sum_j d_j x_j = \sum_j d_j x'_j$, duplicar la restricción $\sum_i a_i y_i = \sum_j d_j = D$, dualizar la restricción de igualdad, y separar al problema de tal forma que se obtengan dos subproblemas con los siguientes conjuntos de restricciones: $A = \{(1,1),(1,2),(1,3)\}$ y $B = \{(1,2),(1,3),(1,4)\}$

Del conjunto de restricciones (A) se obtiene un problema en variables que al aplicarle el principio de linearización entera, y realizar la separación para cada vehículo *i*,

$\{y_i = 1,\ i = 1,2,...,m\}$ con valores conocidos de $\lambda_i,\ i = 1,2,...,m$, se obtiene la solución óptima $V_i = \{\lambda_i a_i\ con\ \lambda_i < 0\ y\ 0\ en\, otro\, caso\}$. Al minimizar la contribución total generada por cada V_i, se obtiene un problema del tipo mochila 0 - 1 de la forma:

$$\underset{i}{Min}\left\{\sum (\mu_i + \nu_i) y_i \middle| \sum a_i y_i \geq D,\ \ y_i = 0{,}1,\ \mu \text{ no rest.}\right\}$$

Si se considera ahora, el subproblema originado por el conjunto de restricciones (B), y sólo se usa la parte correspondiente a la variable y_i, resulta en un problema con el mismo conjunto de restricciones que el mochila anterior, y con valor de $\mu_i = (f_i - v_i)/2$ la función objetivo es la misma. Por lo cual, al realizar operaciones y reagrupar términos entre ambos problemas, nos queda $\underset{i}{Min}\left\{\sum (f_i + v_i) y_i \middle| \sum a_i y_i \geq D,\ y_i = 0{,}1\right\}$, que resulta ser también, un problema del tipo mochila. En consecuencia el problema dual Lagrangeano se puede formular como los subproblemas:

$$\begin{array}{llll} Q = \underset{y}{Min} \displaystyle\sum_i (f_i + \nu_i)\, y_i & & & S = \underset{x}{Min} \displaystyle\sum_i \sum_j \left(C_{ij} - d_j \lambda_i\right) x_{ij} \\ s.a: \quad \displaystyle\sum_i a_i\, y_i \ \geq\ D, \quad \forall\ j & \text{y} & & s.a: \quad \displaystyle\sum_i x_{ij} \ =\ 1 \\ \qquad y_i = 1{,}0 \qquad \forall i & & & \qquad x_{ij} \geq 0,\ \ \lambda_i \ no\ rest,\ \ \forall\, i, j \end{array}$$

Cuya solución estará dada por $v(PDL) = v(Q) + v(S)$.

Como Q y S son función de λ_i , es posible establecer para $\lambda_i = -f_i / a_i$, o de forma más general $\lambda_i = -f_i / \sum_i x_{ij}$, que el valor de la función objetivo de Q es cero, con $v_i = \lambda_i$. Por lo cual, cualquier valor de $y_i \neq 0,\ i = 1,2,...,m$ cumple para obtener el mínimo del problema.

Ahora, si se considera una solución factible que cumpla con la restricción (1.4), se tiene que el producto $\lambda_i (a_i y_i - \sum_j d_j x_{ij}) \leq 0$, para $y_i = 1$ y $\lambda_i < 0\ \ i = 1,2,...,m$ y de esta forma aún se cumple la propiedad de dualidad débil de programación lineal. Por lo cual, es posible reforzar al problema S con la restricción (1.4), con lo que se obtiene un problema del tipo transporte. Suceso muy interesante ya que existen algoritmos de solución muy eficientes.

$$\begin{array}{l} \underset{x}{Minimizar} \ \displaystyle\sum_i \sum_j \left(C_{ij} - \lambda_i\right) x_{ij} \\ sujeto\, a: \\ \qquad \displaystyle\sum_i x_{ij} \geq d_j, \qquad \forall j \\ \qquad \displaystyle\sum_j x_{ij} \leq a_i, \qquad \forall i \\ \qquad x_{ij} \geq 0,\ \ \lambda_i < 0,\ \ \forall i, j \end{array}$$

Con todos estos resultados, fue posible desarrollar un algoritmo de solución más sencillo y rápido, que los obtenidos hasta el momento (Aceves, 1996).

Algoritmo de Descomposición Cruzada Separable para el Problema de Asignación-Distribución

1.- **Iniciar.**

$$v_D(-\infty),\ \ v_P(+\infty);\ \ Y_i^0 = 1,\ \ para\ \ i = 1,\dots,m;$$

$$\lambda_i^0 = -\frac{f_i}{a_i},\ \ para\ \ i = 1,\dots,m.$$

2.- **Resolver.** Subproblema dual SD_{λ^k} (problema de transporte), para obtener

$$y_i^1 = 1,\ \ \sum_j x_{ij} \ \ \text{y} \ \ \ v(SD_{\lambda^k})$$

2.1.-**Calcular.** $\lambda_i^k = -\dfrac{f_i}{\sum_j x_{ij}}$ para $i = 1, 2, \dots, m$

3.- **Probar.** Si $\lambda^{k-1} = \lambda_1^k$ para $y_i^k = 1$, entonces terminar. De otra forma, identificar cuáles $y_i^k = 1$ para $i = 1, 2, \dots, m$.

4.- **Resolver.** Subproblema primal $SP_{y_i^k}$ (problema de transporte), para obtener $v(SP_{y^k})$.

5.- **Probar.** Si $v(SP_{y^k}) = v(SP_{\lambda^k})$, entonces terminar. De otra forma regresar a la etapa 2 pero ahora con λ_i^k.

En iteraciones sucesivas de la descomposición cruzada separable, las rutas más económicas se van haciendo cada vez más baratas y en consecuencia se les asigna cada vez más flujo hasta que se saturan, ya sea agotando la capacidad del vehículo o satisfaciendo la demanda, es decir:

$$\sum_j x_{tj}^{k-1} \le \sum_j x_{tj}^{k} \le \sum_j x_{tj}^{k+1} \le \dots \quad \text{con} \quad \lambda_t^{k-1} \le \lambda_t^k \le \lambda_t^{k+1} \le \dots \le -\frac{f_t}{a_t}$$

De esta forma, es posible usar los vehículos que satisfacen la demanda, obtenidos de la solución del subproblema dual Lagrangeano SD_λ como vehículos activos; es decir los $y_i = 1$, con $i = 1, 2, \dots, m$, que se fijarán en el subproblema primal SD_λ. Así, el algoritmo de descomposición cruzada separable termina en un número finito de iteraciones, y obtiene la solución. $i = 1,\dots,m$

Eficiencia del algoritmo

Como se mencionó, el algoritmo que produce una solución sucesiva de dos subproblemas del tipo de transporte. Es importante resaltar la enorme ventaja de tener este tipo de problemas, ya que sus algoritmos de solución son de bajo orden de complejidad, O(n^3) (Toth y Vigo, 2002), siendo además éste, el orden que acota superiormente a cada una de las fases de la estrategia propuesta, situación que la hace extremadamente eficiente de manera global.

Para evaluar la eficiencia del algoritmo se generaron 6 problemas: 4 problemas pequeños (menos de 10 clientes), 2 medianos (30 y 35 clientes) y uno grande (150 clientes). Las capacidades, demandas y costos fijos, fueron tomados de las instancias y ejemplos mostrados en Aceves (1996). Los datos generados como variables aleatorias fueron las demandas de los clientes y las matrices de distancia entre clientes y entre clientes y el almacén central, emulando un área de operaciones semejante a la del Distrito Federal. Cada problema se solucionó para obtener el óptimo utilizando Bifurcación y Acotación. Después, cada problema se resolvió con el algoritmo propuesto, por medio de un programa de cómputo desarrollado en Pascal.

Entre los resultados obtenidos se encuentran: i) tiempo de solución extremadamente corto, ya que en la solución de los problemas se realizaron como máximo tres iteraciones y en todos los casos

Problema	Número de clientes	Vehículos	Estrategia propuesta (Iteraciones)	Solución óptima B-B (Iteraciones)	% de desviación de la solución óptima
E005-03	4	3	9819 (1)	9819 (17)	0
E006-04	5	4	16724 (1)	16724 (26)	0
E008-02	7	2	21256 (1)	21256 (17)	0
E009-04	8	4	13114 (1)	13114 (19)	0
E031-09	30	9	4332 (1)	4332 (220)	0
E036-11	35	11	3120 (3)	3120 (177)	0
E151-08	150	8	14770 (2)	14750 (805)	0.13

se obtuvieron los resultados en menos de 2 segundos; ii) la calidad de las soluciones resultó excelente, ya que sólo un problema presentó brecha de optimalidad de 0.1%, en todos los demás problema evaluados se obtuvo el óptimo. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Conclusiones

Se obtuvo una estrategia $O(n^3)$ con excelente calidad de resultados, bajo esfuerzo computacional, fácilmente aplicable e implementable, que supera las técnicas conocidas hasta el momento para solucionar un problema logístico grande que es esencialmente NP-duro.

Las técnicas de optimización deben utilizarse al afrontar los retos económicos, sociales, políticos y tecnológicos a los que se enfrentan los tomadores de decisiones logísticos al tratar de hacer más competitivas a sus organizaciones, de tal forma, dirigir los esfuerzos necesarios al auge de las pequeñas y medianas empresas mexicanas, contribuye al desarrollo de la economía del país.

Referencias

Aceves, R; (1996). "Un Algoritmo para Resolver el Problema de Localización de Servicios con Restricciones de Demanda y Adicionales", Tesis de doctorado en Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México.

Baita, F; Ukovich, W; Pesenti, R; Favaretto, D; (1998) "Dynamic Routing-And-Inventory Problems: A Review", *Transportation Research* 32, No. 8, 585-598.

Campbell, A; Clarke L; Savelsbergh M; (2002) "Inventory Routing in Practice. *The Vehicle Routing Problem*". Eds. P. Toth and D. Vigo., 309-330. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Chien, W; Balakrishnan, A; Wong, R; (1989) "An integrated inventory allocation and vehicle routing problem". *Transportation Science* 23,67.

Christiansen, M; (1999) "Decomposition of a Combined Inventory and Time Constrained Ship Routing Problem". *Transportation Science* 33, 3-16.

Elizondo M; (2005) “Una estrategia para resolver el problema de inventario distribución”. Tesis de doctorado en Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, México.

Federgruen, A; Zipkin. P; (1984) “A comprised vehicle routing and inventory allocation problem”. *Operations Research* 32 1019-1037.

Guignard, M; Kim, S; (1983) “A strong Lagrangean relaxation for capacitated plant location problem”. Technical report #56. Department of Statistics. The Wharton School, University of Pennsylvania.

Toth, P; Vigo, D; (2002) “The Vehicle Routing Problem. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications”. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Van Roy, T. J; (1983) “Cross decomposition for mixed integer programming”. *Mathematical Programming* 25, 46-63.

Van Roy, T. J; (1984) “A cross decomposition algorithm for capacitated facility location”. *Operation Research Society of America* 34, 145-163.

Xu, K; Dong Y; Evers, P; (2001) “Towards better coordination of the supply chain”. *Transportation Research Part E* 37, 35-54.