

CONTROL DE OSCILACIONES EN LA BIFURCACIÓN TAKENS-BOGDANOV

Fco. Armando Carrillo N. Fernando Verduzco G.

Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Resumen

Es ya un resultado conocido que una deformación versal de la bifurcación Takens-Bogdanov es posible encontrar sistemas dinámicos que sufren bifurcaciones silla-nodo, homoclínica y Hopf. En este documento se considera un sistema de control no lineal en el plano, cuyo campo vectorial nominal posee la bifurcación Takens-Bogdanov, y entonces la idea es diseñar una ley de control escalar tal que el sistema a lazo cerrado experimente una bifurcación de Hopf.

Palabras clave: *Bifurcación Takens-Bogdanov, deformación versal, bifurcación de Hopf, formas normales, variedad central.*

1 Introducción

Uno de los objetivos en el control de bifurcaciones es el poder establecer *a priori* la aparición o eliminación de estados estacionarios, como puntos de equilibrio, ciclos límite, toros y atractores extraños, con sus respectivos rasgos de estabilidad. A pesar que desde hace 20 años se inició el estudio del control de bifurcaciones, sólo se ha sistematizado el control de las bifurcaciones de codimensión uno: Hopf, silla-nodo, transcítica y horquilla.

Este documento es la continuación del estudio sistemático para controlar la bifurcación de codimensión dos llamada Takens-Bogdanov o doble cero, estudio que se inició con [5]. La bifurcación Takens-Bogdanov ocurre cuando la parte lineal del sistema dinámico posee un valor propio cero de multiplicación dos y el resto de los valores propios tienen parte real diferente de cero. En [4] y [2], Takens y Bogdanov respectivamente encontraron de manera independiente, una deformación versal de este punto de bifurcación, es decir, encontraron una familia bi-paramétrica de sistemas que contiene todas las posibles perturbaciones del sistema original. Demostraron que alrededor del mencionado punto de bifurcación podrían ocurrir la bifurcación silla-nodo y la homoclínica así como la bifurcación de Hopf, Ver [3] y [6]. Diremos que hemos controlado la bifurcación Takens-Bogdanov cuando sea posible diseñar leyes de control tales que nos permitan recorrer todos los posibles escenarios dinámicos que subyacen alrededor de este punto de bifurcación.

La idea de este trabajo es diseñar una ley de control de tal suerte que nuestro sistema de control no lineal retroalimentado represente una perturbación del sistema sin control, en el cual ocurre la bifurcación Takens-Bogdanov, y sea tal que nuestro sistema retroalimentado experimente una bifurcación de Hopf. El diseño de la ley de control que provoca la bifurcación homoclínica fué trabajado en [5], mientras que el diseño que provoque la bifurcación silla-nodo será considerado en futuras contribuciones.

2 Bifurcación de Hopf

Teorema 2.1. *(Teorema de la bifurcación de Hopf) Supongamos que el sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, tiene un punto de equilibrio (x_0, μ_0) tal que*

(H1) $D_x f(x_0, \mu_0)$ tiene un par de valores propios imaginarios puros y ningún otro valor propio con parte real cero.

(H2) Entonces (H1) implica que existe una curva de equilibrio suave $(x(\mu), \mu)$ con $x(\mu_0) = x_0$. Los valores propios $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$ de $D_x f(x_0, \mu_0)$ los cuales son imaginarios en $\mu = \mu_0$, varían suavemente con μ . Si además

$$d = \frac{d}{d\mu} (\operatorname{Re}(\lambda(\mu)))|_{\mu=\mu_0} \neq 0. \quad (1)$$

Entonces existe una única variedad central tridimensional que pasa por $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y un sistema de coordenadas suave para el cual la expansión de Taylor de grado tres sobre la variedad central es dada por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (d\mu + l(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y, \\ \dot{y} &= (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))x + (d\mu + l(x^2 + y^2))y, \end{aligned}$$

la cual es expresada en coordenadas polares como

$$\begin{aligned} \dot{r} &= (d\mu + lr^2)r, \\ \dot{\theta} &= \omega + c\mu + br^2. \end{aligned}$$

Si $l \neq 0$, entonces existe una superficie de soluciones periódicas en la variedad central, la cual tiene tangencia cuadrática con el eigenspacio de $\lambda(\mu_0), \bar{\lambda}(\mu_0)$ que coincide en dimensión dos, con el paraboloido $\mu = -\frac{l}{d}r^2$. Si $l < 0$, entonces, esas soluciones periódicas son estables, mientras que si $l > 0$, son ciclos límite inestables.

Los coeficientes de estabilidad d y l son llamados *velocidad de cruce* y *primer coeficiente de Lyapunov*, respectivamente.

3 Bifurcación Takens-Bogdanov

Considérese el sistema dinámico en el plano $\dot{z} = f(z)$, con $f(0) = 0$ y $J = Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De la teoría de las formas normales, existe un cambio de coordenadas tal que el sistema original se puede expresar, hasta orden dos, en la forma

$$\dot{z} = f_0(z) = \begin{pmatrix} z_2 \\ a_0 z_1^2 + b_0 z_1 z_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

el cual es llamada la forma normal truncada del sistema original. Una deformación versal de dicha forma normal truncada es, en pocas palabras, una familia de sistemas dinámicos que contiene al sistema (2) y a toda una “familia de perturbaciones” del mismo. Takens y Bogdanov demostraron que la familia

$$\dot{z} = F(z, \mu) = \begin{pmatrix} z_2 \\ \mu_1 + \mu_2 z_2 + a_0 z_1^2 + b_0 z_1 z_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

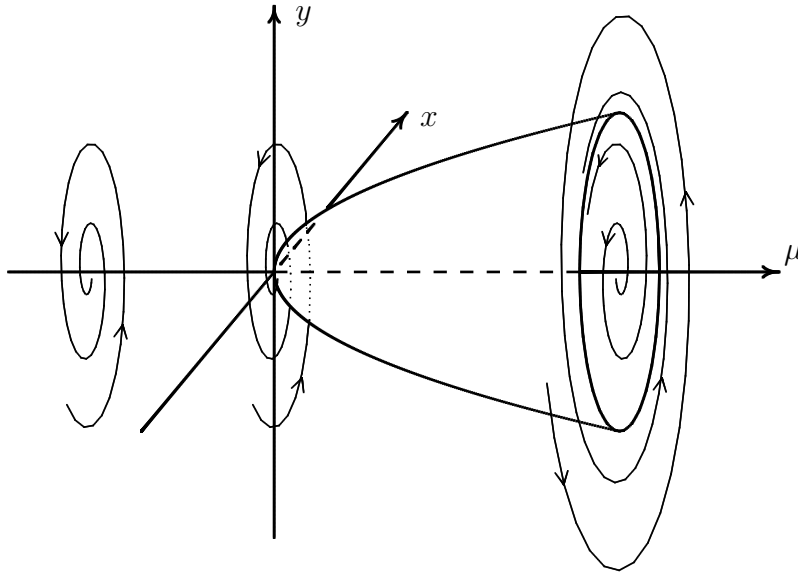


Figura 1: Familia uni-paramétrica de órbitas periódicas S resultantes de la bifurcación de Hopf, en un punto de equilibrio no hiperbólico x_0 y un valor de bifurcación μ_0 .

con $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ representa una deformación versal del sistema truncado (2). Puede probarse que para $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 \neq 0$ la familia representa un sistema que sufre la bifurcación silla-nodo; para $\mu_1 = -\mu_2^2 + \dots$ el sistema sufre la bifurcación de Hopf, y para $\mu_1 = -\frac{49}{25}\mu_2^2 + \dots$ ocurre una bifurcación homoclínica.

4 Planteamiento del Problema

Considérese un sistema de control no lineal de la forma

$$\dot{\xi} = J\xi + f(\xi) + g(\xi)u \quad (4)$$

con $\xi \in \mathbb{R}^2$ tal que $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f(\xi) = f_2(\xi) + \dots$, donde $f_2(\xi) = \begin{pmatrix} f_{11}\xi_1^2 + f_{12}\xi_1\xi_2 + f_{13}\xi_2^2 \\ f_{21}\xi_1^2 + f_{22}\xi_1\xi_2 + f_{23}\xi_2^2 \end{pmatrix}$, y $g(\xi) = b + M\xi + g_2(\xi) + \dots$, donde $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $M = (m_{ij})_{2 \times 2}$ y $g_2(x) = \begin{pmatrix} g_{11}\xi_1^2 + g_{12}\xi_1\xi_2 + g_{13}\xi_2^2 \\ g_{21}\xi_1^2 + g_{22}\xi_1\xi_2 + g_{23}\xi_2^2 \end{pmatrix}$.

Nuestro objetivo en este documento es diseñar una ley de control $u = u(x, \mu)$ con $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, de tal forma que el sistema a lazo cerrado experimente la bifurcación de Hopf.

El problema se analizará y se resolverá mediante una serie de transformaciones y cambios de coordenadas, dando las siguientes restricciones a los vectores f y g dados. Con respecto al vector no lineal f supondremos que: $2f_{11} + f_{22} \neq 0$ y $f_{21} \neq 0$. Con respecto al vector g supondremos que en su parte constante b , la entrada $b_2 \neq 0$.

5 Primer transformación de coordenadas

Consideremos $x \in \mathbb{R}^2$, tal que $x = (x_1, x_2)^T$ y un vector de polinomios homogéneos de grado dos, $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, y hagamos $\xi = x + H(x)$, con

$$H(x) = \begin{pmatrix} h_{11}x_1^2 + h_{12}x_1x_2 + h_{13}x_2^2 \\ h_{22}x_1x_2 + h_{23}x_2^2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

También hagamos

$$u = \beta x_2^2 + v. \quad (6)$$

Luego

$$\dot{x} = (I + DH(x))^{-1}\dot{\xi},$$

pero

$$(I + DH(x))^{-1} = I - DH(x) + (DH(x))^2 + \dots$$

entonces

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (I - DH(x) + (DH(x))^2 + \dots)[J(x + H(x)) + f(x + H(x))] + \bar{g}(x)(\beta x_2^2 + v) \\ &= Jx + [JH(x) + f_2(x) - DH(x)Jx + b\beta x_2^2] + \mathcal{O}(|x|^3) + \bar{g}(x)v, \end{aligned} \quad (7)$$

que podemos resumir como

$$\dot{x} = Jx + \bar{f}(x) + \bar{g}(x)v, \quad (8)$$

donde $\bar{f}(x) = \bar{f}_2(x) + \dots$, con

$$\bar{f}_2(x) = JH(x) + f_2(x) - DH(x)Jx + b\beta x_2^2, \quad (9)$$

$$\bar{g}(x) = (I - DH(x) + (DH(x))^2 + \dots)g(x + H(x)),$$

nótese que $\bar{g}(0) = g(0) = b$, y

$$\begin{aligned} \bar{g}(x) &= (I - DH(x) + \dots)g(x + H(x)) \\ &= (I - DH(x) + \dots)(b + M(x + H(x)) + g_2(x + H(x))) \\ &= (I - DH(x) + \dots)(b + Mx + MH(x) + g_2(x) + \mathcal{O}(|x|^3)) \\ &= b + Mx - DH(x)b + \bar{g}_2(x) + \mathcal{O}(|x|^3) \\ &= b + \bar{M}x + \bar{g}_2(x) + \mathcal{O}(|x|^3) \end{aligned}$$

con $\bar{M}x = Mx - DH(x)b$ y $\bar{g}_2(x) = MH(x) - DH(x)Mx + g_2(x)$.

6 Segundo cambio de coordenadas

Consideremos ahora el sistema (8)

$$\dot{x} = Jx + \bar{f}(x) + \bar{g}(x)v,$$

sea

$$v = \mu_1 + \alpha x + w, \quad (10)$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Sustituyendo (10) en (8), tenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Jx + \bar{f}(x) + (b + \bar{M}x + \bar{g}_2(x) + \cdots)(\mu_1 + \alpha x + w) \\ &= b\mu_1 + Jx + \mu_1\bar{M}x + b\alpha x + \bar{f}(x) + \mu_1\bar{g}_2(x) + \bar{M}x\alpha x + \cdots + \bar{g}(x)w \\ &= b\mu_1 + \hat{J}x + \hat{f}(x) + \bar{g}(x)w,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{J} &= J + \mu_1\bar{M} + b\alpha \\ \hat{f}(x) &= \bar{f}(x) + \mu_1\bar{g}_2(x) + \bar{M}x\alpha x + \cdots\end{aligned}$$

Ahora, tomemos el cambio de coordenadas $y = P^{-1}x$. Luego $\dot{y} = P^{-1}\dot{x}$, es decir,

$$\dot{y} = P^{-1}[b\mu_1 + \hat{J}Py + \hat{f}(Py) + \mu_1\bar{g}_2(Py) + \cdots + \bar{g}(Py)w],$$

lo cual podemos escribir como

$$\dot{y} = \mu_1\tilde{b} + \tilde{J}y + \tilde{f}(y) + \tilde{g}(y)w, \quad (11)$$

donde

$$\tilde{b} = P^{-1}b, \quad (12)$$

$$\tilde{J} = P^{-1}\hat{J}P, \quad (13)$$

$$\tilde{f}(y) = P^{-1}(\hat{f}(Py) + \mu_1\bar{g}_2(Py) + \cdots), \quad (14)$$

$$\tilde{g}(y) = P^{-1}\bar{g}(Py). \quad (15)$$

Lema 6.1. *Existen $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, tales que $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\tilde{J} = J$.*

Prueba:

Resolvemos el sistema

$$\begin{aligned}\text{tr}(\tilde{J}) &= 0 \\ \det(\tilde{J}) &= 0\end{aligned}$$

para que los valores propios de \tilde{J} sean un par de ceros, luego de (13) es claro que

$$\alpha_1 = \frac{k_1\mu_1^2 + k_2\mu_1}{k_0\mu_1 + b_2^2}, \quad \alpha_2 = \frac{k_3\mu_1^2 + k_4\mu_1}{k_0\mu_1 + b_2^2},$$

donde

$$\begin{aligned}
k_0 &= b_1 b_2 (2b_1 h_{22} - 2h_{12} b_2 + m_{11} - m_{22} - 2h_{11} b_1 + 2h_{23} b_2) - b_1^2 m_{21} \\
&\quad + m_{12} b_2^2 - 2h_{13} b_2^3 \\
k_1 &= (2h_{11} m_{21} + (-h_{22}^2 + 4h_{11}^2 - 2h_{11} h_{22}) b_2 \\
&\quad + h_{22} m_{21}) b_1^2 + ((-2h_{22} h_{23} + 4h_{11} h_{12}) b_2^2 \\
&\quad + (m_{11} h_{22} + 2h_{23} m_{21} + m_{22} h_{22} - 4m_{11} h_{11}) b_2 - m_{11} m_{21} - m_{22} m_{21}) b_1 \\
&\quad + (h_{12}^2 + 2h_{22} h_{13}) b_2^3 - (h_{22} m_{12} + 2h_{13} m_{21} + 2m_{11} h_{12}) b_2^2 + (m_{11}^2 + m_{12} m_{21}) b_2 \\
k_2 &= m_{21} b_2 - h_{22} b_2^2 \\
k_3 &= b_1 (4h_{13} h_{23} + 2h_{13} h_{12}) b_2^3 + b_1 (4h_{13} h_{11} b_1 + 2b_1 h_{12} h_{23} - 2m_{12} h_{23} - m_{12} h_{12} - 4b_1 h_{23}^2 \\
&\quad - 2h_{13} m_{11} - 2h_{13} m_{22} + h_{12}^2 b_1) b_2^2 + b_1 (m_{12} m_{11} + 2b_1 h_{13} m_{21} + m_{12} m_{22} + 4b_1 m_{22} h_{23} \\
&\quad - b_1 h_{12} m_{22} - h_{12} b_1 m_{11} - 2m_{12} h_{11} b_1 - 4b_1^2 h_{22} h_{23} + 2h_{12} b_1^2 h_{11}) b_2 + b_1^2 (h_{12} b_1 m_{21} \\
&\quad - m_{12} m_{21} - m_{22}^2 - b_1^2 h_{22}^2 + 2b_1 m_{22} h_{22}) \\
k_4 &= (m_{22} + m_{11}) b_2 - (2h_{11} b_2 + m_{21}) b_1 - (2h_{23} + h_{12}) b_2^2
\end{aligned}$$

y tenemos entonces el cambio de coordenadas

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & b_1 \\ p_{21} & b_2 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

donde

$$p_{11} = (b_1^2 h_{22} + ((2h_{23} - h_{12}) b_2 - m_{22}) b_1 - 2h_{13} b_2^2 + m_{12} b_2) \mu_1 + b_2 \quad (17)$$

$$p_{21} = (((2h_{11} - h_{22}) b_2 + m_{21}) b_1 + h_{12} b_2^2 - b_2 m_{11}) \mu_1 \quad (18)$$

Q.E.D.

Luego entonces, después del cambio de coordenadas P y tomando $e_2 = (0 \ 1)^T$, el sistema (11) se puede reescribir como

$$\dot{y} = \mu_1 e_2 + Jy + \tilde{f}(y) + \tilde{g}(y)w, \quad (19)$$

7 Tercer cambio de coordenadas

Usando la teoría de las formas normales, hacemos $y = z + h(z)$, donde $z = (z_1, z_2)^T$ y $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$h(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta z_1^2 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

esto es que, estaremos tomando a h como un vector de polinomios homogéneos de grado dos. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= (I - Dh(z) + \dots) \dot{y} \\
&= \mu_1 e_2 + (Jz - \mu_1 Dh(z) e_2) + (\tilde{f}(z + h(z)) + Jh(z) - Dh(z)Jz + \dots) + \\
&\quad (I - Dh(z) + \dots) \tilde{g}(z + h(z)) w \\
&= \mu_1 e_2 + Jz + F(z) + G(z)w
\end{aligned}$$

donde

$$F(z) = \tilde{f}(z + h(z)) + Jh(z) - Dh(z)Jz + \cdots, \quad (21)$$

$$G(z) = (I - Dh(z) + \cdots)\tilde{g}(z + h(z)). \quad (22)$$

Como nuestro análisis es local, y en una vecindad del origen, entonces

$$\tilde{f}(z + h(z)) = \tilde{f}(z) + D\tilde{f}(z)h(z) + \cdots,$$

por lo tanto, de (14) y (21)

$$F(z) = P^{-1}[\tilde{f}(Pz) + \mu_1\bar{g}_2(Pz)] + Jh(z) - Dh(z)Jz + \mathcal{O}(|z|^3).$$

La teoría de las formas normales asegura la existencia de la función h tal que

$$F(z) = F_2(z) + \mathcal{O}(|z|^3),$$

considerando H dada por (5) y h dada por (20) y tomando

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{2b_2b_1f_{11} - f_{22}b_1b_2 + b_2^2f_{12} - 2f_{21}b_1^2 + b_2m_{21}}{2b_2^2} \\ &\quad + \frac{(-b_2b_1g_{22} + b_2^2g_{12} - 2g_{21}b_1^2 + 2b_2b_1g_{11})\mu_1}{b_2^2}, \\ h_{12} &= \frac{b_2f_{22}b_1^2 - 2b_2b_1^2f_{11} - b_1b_2m_{21} - b_2^2b_1f_{12} + 2f_{21}b_1^3 + m_{11}b_2^2}{b_2^3} \\ &\quad + \frac{(b_2b_1^2g_{22} - b_2^2b_1g_{12} + 2g_{21}b_1^3 - 2b_2b_1^2g_{11})\mu_1}{b_2^3}, \\ h_{13} &= \frac{m_{12}b_2^3 + 2b_2b_1^3f - 11 - b_2f_{22}b_1^3 + b_1^2b_2m_{21} + b_2^2b_1^2f_{12} - 2f_{21}b_1^4 - b_1m_{11}b_2^2}{2b_2^4} \\ &\quad + \frac{(-b_2b_1^3g_{22} + b_2^2b_1^2g_{12} - 2g_{21}b_1^4 + 2b_2b_1^3g_{11})\mu_1}{2b_2^4}, \\ h_{22} &= \frac{m_{21}}{b_2}, \\ h_{23} &= \frac{b_2m_{22} - b_1m_{21}}{2b_2^2}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\eta = (b_1g_{21} - b_2g_{11})\mu_1 - b_2f_{11} + b_1f_{21}, \quad (24)$$

y en (6)

$$\beta = \frac{b_2m_{21} - f_{23}b_2^2 - f_{22}b_1b_2 - f_{21}b_1^2}{b_2^3} - \frac{(b_2^2g_{23} + b_2b_1g_{22} + g_{21}b_1^2)\mu_1}{b_2^3} \quad (25)$$

tenemos que

$$F_2(z) = \begin{pmatrix} c_0z_2^2 \\ c_1z_1^2 + c_2z_1z_2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

donde

$$c_0 = f_{13}b_2 - m_{11} - b_1f_{23} + f_{12}b_1 + \frac{1}{2}m_{22} + \frac{3b_1}{2b_2}m_{21} + \frac{(b_2f_{11} - b_1f_{21} - b_2f_{22})b_1^2}{b_2^2} + \mathcal{O}(\mu_1),$$

$$c_1 = f_{21}b_2 + \mathcal{O}(\mu_1), \quad (27)$$

$$c_2 = (2f_{11} + f_{22})b_2 + \mathcal{O}(\mu_1), \quad (28)$$

y $G(z) = e_2$. Y de nuevo obsérvese que $G(0) = \tilde{g}(0) = \tilde{b} = e_2$. Hemos probado entonces el siguiente

Lema 7.1. *Existe $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que el cambio de coordenadas $y = z + h(z)$ transforma (19) en*

$$\dot{z} = \mu_1 e_2 + Jz + F(z) + G(z)w \quad (29)$$

donde $F(z) = F_2(z) + \dots$ y $G(0) = e_2$, con $F_2(z)$ dado por (26).

Ahora bien, es claro que el sistema (29) se puede reescribir como

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0 z_2^2 + \mathcal{O}(|z|^3) \\ c_1 z_1^2 + c_2 z_1 z_2 + \mathcal{O}(|z|^3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w.$$

Tomando $w = \mu_2 z_2$, y despreciando los términos cúbicos, el sistema queda de la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + c_0 z_2^2 \\ \dot{z}_2 &= \mu_1 + \mu_2 z_2 + c_1 z_1^2 + c_2 z_1 z_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Nuestro objetivo es probar que en el plano $\mu_1 \mu_2$, este sistema (30) experimenta bajo ciertas condiciones la bifurcación de Hopf.

Los puntos críticos del sistema (30) son de la forma $z_0 = \left(\pm \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}, 0 \right)$, así que la matriz Jacobiana de este sistema evaluada en z_0 es

$$\mathcal{J}(z_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 2c_1 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}} & \mu_2 \pm c_2 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Debido a que existen dos “ramas” de puntos críticos, las definiremos como

$$z_0^+ = \left(\sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}, 0 \right) \quad \text{y} \quad z_0^- = \left(-\sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}, 0 \right),$$

rama positiva y rama negativa respectivamente, y los valores propios de la matriz (31) son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu_2 \pm c_2 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}}{2} \pm \frac{\sqrt{\mu_2^2 \pm 2\mu_2 c_2 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}} - \frac{c_2^2 \mu_1}{c_1} \pm 8c_1 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}}}{2}. \quad (32)$$

El análisis posterior se hará sólo sobre la rama positiva de puntos críticos, ya que éste es totalmente análogo para la rama negativa.

7.1 Estudio de la dinámica local

Los valores propios de la matriz $\mathcal{J}(z_0^+)$ son de la forma

$$\lambda_{1,2}^+ = \frac{\mu_2 + c_2 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}}{2} \pm \frac{\sqrt{\mu_2^2 + 2\mu_2 c_2 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}} - \frac{c_2^2 \mu_1}{c_1} + 8c_1 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}}}{2}. \quad (33)$$

Supongamos que $c_1 > 0$, entonces $\mu_1 \leq 0$. Si $\mu_1 = 0$, entonces $\lambda_{1,2} = \{0, \mu_2\}$; si $\mu_1 < 0$, entonces los puntos críticos serán nodos o focos, estables o inestables dependiendo del signo y magnitud de c_2 .

Supongamos que $c_1 < 0$, entonces $\mu_1 \geq 0$. Si $\mu_1 = 0$, entonces $\lambda_{1,2} = \{0, \mu_2\}$; si $\mu_1 > 0$, entonces los puntos críticos serán nodos o focos, estables o inestables dependiendo del signo y magnitud de c_2 . Finalmente en el caso particular en el que

$$\mu_2 = -c_2 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}, \quad (34)$$

tenemos que $\lambda_{1,2}^+ = \pm \sqrt{2c_1 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}}$, lo cual nos indica que la curva (34) es una curva de bifurcación.

7.2 Las bifurcaciones de los puntos fijos

Examinaremos ahora, el cambio de estabilidad de los puntos fijos z_0^+ sobre $\mu_2 = -c_2 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}$.

De (33) los valores propios asociados con la linealización alrededor de la curva de puntos fijos (34)) son

$$\lambda_{1,2}^+ = \pm \sqrt{2c_1 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}}, \quad \text{con } \mu_1 > 0 \text{ y } c_1 < 0.$$

Si vemos a μ_2 como un parámetro, entonces usando (32) obtenemos que

$$\left. \frac{d}{d\mu_2} \Re \lambda_{1,2} \right|_{\mu_2 = -c_2 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}} = \frac{1}{2} \neq 0. \quad (35)$$

Entonces parece que una bifurcación de Hopf ocurre sobre $\mu_2 = -c_2 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}$.

Ahora checaremos la estabilidad de las órbitas periódicas de la bifurcación de Hopf. Por el teorema de la bifurcación de Hopf, lo anterior requiere de poner el sistema en una cierta “forma normal” y entonces calcular el coeficiente de Lyapunov l , el cual es dado por diferentes derivadas de las funciones que surgen de esta “forma normal”. Para esto primero trasladaremos el punto fijo al origen, este desarrollo lo haremos para ambas ramas de puntos críticos.

Sea

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= z_1 - z_{01}^+ = z_1 - \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}} \\ \bar{z}_2 &= z_2 \end{aligned}$$

y de (30) tenemos que

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{z}}_1 \\ \dot{\bar{z}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2c_1\sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_0\bar{z}_2^2 \\ c_1\bar{z}_1^2 + c_2\bar{z}_1\bar{z}_2 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

entonces ponemos la parte lineal de (36) en forma normal vía la transformación

$$\begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{-2c_1\sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

bajo la cual (36) toma la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-2c_1\sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}} \\ \sqrt{-2c_1\sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1(\varphi_1, \varphi_2) \\ L_2(\varphi_1, \varphi_2) \end{pmatrix} \quad (37)$$

donde

$$\begin{aligned} L_1(\varphi_1, \varphi_2) &= \frac{c_1\varphi_2^2}{\sqrt{-2c_1\sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}}} + c_2\varphi_1\varphi_2 \\ L_2(\varphi_1, \varphi_2) &= 2c_0c_1\sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}\varphi_1^2 \end{aligned}$$

y sabemos que

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{16} (L_{1\varphi_1\varphi_1\varphi_1} + L_{1\varphi_1\varphi_2\varphi_2} + L_{2\varphi_1\varphi_1\varphi_2} + L_{2\varphi_2\varphi_2\varphi_2}) \\ &\quad + \frac{1}{16\sqrt{-2c_1\sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}}} (L_{1\varphi_1\varphi_2}(L_{1\varphi_1\varphi_1} + L_{1\varphi_2\varphi_2}) - L_{2\varphi_1\varphi_2}(L_{2\varphi_1\varphi_1} + L_{2\varphi_2\varphi_2}) \\ &\quad - L_{1\varphi_1\varphi_1}L_{2\varphi_1\varphi_1} + L_{1\varphi_2\varphi_2}L_{2\varphi_2\varphi_2}), \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$l = -\frac{c_2}{16\sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}}, \quad (38)$$

y podemos concluir que el signo de l depende directamente del signo de c_2 , lo cual a su vez nos indica una bifurcación de Hopf que es supercrítica o subcrítica para una órbita periódica estable o inestable bajo $\mu_2 = -c_2\sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}$ si $c_2 > 0$ o si $c_2 < 0$ respectivamente.

8 Resultado Principal

Todo el análisis y el desarrollo de este trabajo lo resumimos en el siguiente teorema:

Teorema 8.1. *Sea el sistema de control no lineal en el plano*

$$\dot{\xi} = J\xi + f(\xi) + g(\xi)u, \quad (39)$$

donde los campos vectoriales f y g son lo suficientemente suaves en una vecindad del origen,

$$\xi = (\xi_1 \ \xi_2)^T \in \mathbb{R}^2, \ u \in \mathbb{R}, \ J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ f(\xi) = f_2(\xi) + \dots, \ \text{con}$$

$$f_2(\xi) = \begin{pmatrix} f_{11}x_1^2 + f_{12}x_1x_2 + f_{13}x_2^2 \\ f_{21}x_1^2 + f_{22}x_1x_2 + f_{23}x_2^2 \end{pmatrix}, \ \text{con } 2f_{11} + f_{22} \neq 0, \ g(\xi) = b + M\xi + g_2(\xi) + \dots, \ \text{con}$$

$$b = (b_1 \ b_2)^T, \ \text{donde } b_2 \neq 0, \ M = (m_{ij})_{2 \times 2} \ \text{con } m_{ij} \in \mathbb{R}, \ \forall i, j \ \text{y}$$

$$g_2(\xi) = \begin{pmatrix} g_{11}x_1^2 + g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_2^2 \\ g_{21}x_1^2 + g_{22}x_1x_2 + g_{23}x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Entonces la ley de control

$$u(\xi, \mu) = \mu_1 + \beta(\xi_2 - H_2(\xi))^2 + \alpha(\xi - H(\xi)) + \mu_2(P^{-1}(\xi - H(\xi)) - h(P^{-1}(\xi - H(\xi))))e_2, \quad (40)$$

donde $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, con μ_1 y μ_2 relacionados por $\mu_2 = \pm c_2 \sqrt{-\frac{\mu_1}{c_1}}$, donde c_1 y c_2 son dados por (27) y (28) respectivamente, β es dada por (25), $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ es dada por (??), $P = \begin{pmatrix} p_{11} & b_1 \\ p_{21} & b_2 \end{pmatrix}$, $h(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta z_1^2 \end{pmatrix}$, donde p_{11} , p_{21} y η estan dados por (17), (18) y (24) respectivamente. Es tal que el sistema a lazo cerrado (39)-(40) experimenta la bifurcación de Hopf en $\xi = 0$, con la velocidad de cruce y los coeficientes de Lyapunov dados por (35) y (38).

9 Un ejemplo

Ilustraremos el resultado con el siguiente ejemplo,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + x_1x_2 + u, \end{aligned} \quad (41)$$

nótese que en este caso, $f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 + x_1x_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M = (0)_{2 \times 2}$, y $g_2(x) = 0$, entonces, para este sistema, la ley de control es simplemente

$$u = \mu_1 + \mu_2x_2,$$

lo que convierte el sistema (41) en el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \mu_1 + \mu_2x_2 + x_1^2 + x_1x_2. \end{aligned} \quad (42)$$

Los puntos fijos de (42) están dados por $x_0 = (\pm\sqrt{-\mu_1}, 0)$. En particular, no existen puntos fijos para $\mu_1 > 0$. El jacobiano de el campo vectorial evaluado en los puntos fijos está dado por

$$\mathcal{J}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 2\sqrt{-\mu_1} & \mu_2 \pm \sqrt{-\mu_1} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de esta matriz están dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu_2 \pm \sqrt{-\mu_1}}{2} \pm \frac{\sqrt{(\mu_2 \pm \sqrt{-\mu_1})^2 \pm 8\sqrt{-\mu_1}}}{2}. \quad (43)$$

Denotando por $x_0^+ = (\sqrt{-\mu_1}, 0)$ y $x_0^- = (-\sqrt{-\mu_1}, 0)$ a las ramas positiva y negativa de puntos críticos, respectivamente, vemos de (43) que x_0^+ es una *silla* para todo μ_2 y $\mu_1 < 0$, mientras que para $\mu_1 = 0$ los valores propios de x_0^+ están dados por $\lambda_{1,2} = 0, \mu_2$. El punto crítico x_0^- es un nodo inestable para $\{\mu_2 > \sqrt{-\mu_1}, \mu_1 < 0\}$ y un nodo asintóticamente estable para $\{\mu_2 < \sqrt{-\mu_1}, \mu_1 < 0\}$; para $\mu_1 = 0$, los valores propios de x_0^- son dados por $\lambda_{1,2} = 0, \mu_2$, y para $\mu_2 = \sqrt{-\mu_1}, \mu_1 < 0$, los valores propios de x_0^- son dados por

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2\sqrt{-\mu_1}}.$$

Entonces se espera que en $\mu_2 = \sqrt{-\mu_1}, \mu_1 = 0$ sea una curva de bifurcación sobre la cual x_0^- experimenta una bifurcación de Hopf. Si vemos entonces, a μ_2 como un parámetro, usando (43) obtenemos que la velocidad de cruce

$$\left. \frac{d}{d\mu_2} \Re \lambda_{1,2} \right|_{\mu_2 = \sqrt{-\mu_1}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Entonces efectivamente se espera que la bifurcación de Hopf ocurra en $\mu_2 = \sqrt{-\mu_1}$. Ahora, trasladaremos el punto fijo al origen, haciendo

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 - x_{01}^-, \\ \bar{x}_2 &= x_2, \end{aligned}$$

así (42) pasa a ser

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\sqrt{-\mu_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2^2 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Ponemos la parte lineal de (44) en forma normal mediante la transformación

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{-2\sqrt{-\mu_1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

bajo la cual (44) se convierte en el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-2\sqrt{-\mu_1}} \\ \sqrt{-2\sqrt{-\mu_1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1\varphi_2 + \frac{\varphi_2^2}{\sqrt{-2\sqrt{-\mu_1}}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Donde, de la parte no lineal de (46) podemos fácilmente calcular el coeficiente de Lyapunov, el cual es

$$l = \frac{1}{16\sqrt{-\mu_1}} > 0,$$

el cual concuerda con (38) (para la rama negativa) y nos indica una bifurcación de Hopf subcrítica para una órbita periódica bajo $\mu_2^2 = -\mu_1$.

Fijando el valor de $\mu_2 = 0.05$ y tomando el valor $\mu_1 = -0.003$ tenemos una órbita periódica repulsora alrededor de punto crítico $(-\sqrt{0.003}, 0)$ como se muestra en la Figura 2.

10 Conclusiones

Para un sistema de control en el plano, cuyo campo vectorial posee, en el origen, un valor propio cero de multiplicidad dos, hemos diseñado una ley de control de tal forma que el sistema a lazo cerrado experimenta una bifurcación de Hopf. Este trabajo es la continuación de [5] presentado en el Congreso de Control Automático 2006, y de lo que pretendemos sea un estudio sistemático para el control de la bifurcación de codimensión dos llamada Takens-Bogdanov.

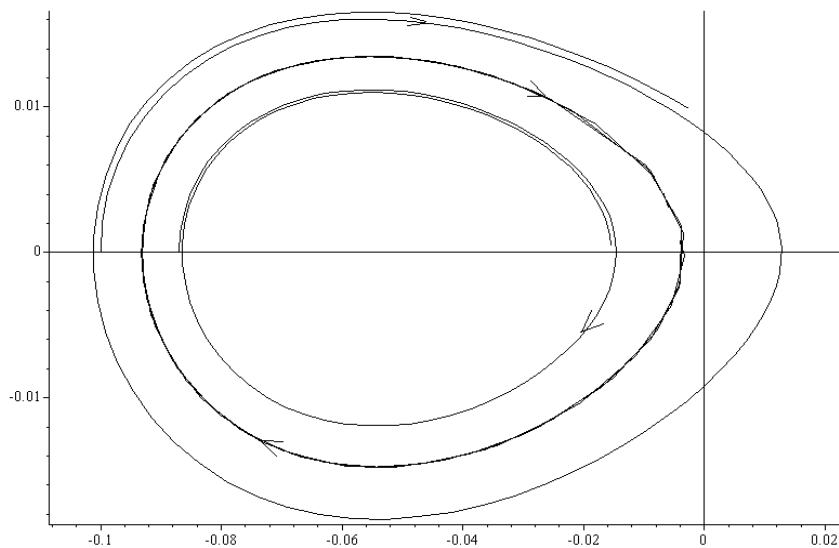


Figura 2: $\mu_2 = 0.05$

Bibliografía

- [1] V.I. Arnold. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 250. A series of Comprehensive Studies in Mathematics. Springer-Verlag. Second Edition. 1988.

- [2] R.I. Bogdanov. *Versal deformations of a singular point on the plane in the case of zero eigenvalues*. Functional analysis and its applications 9. pp:144-145. 1975.
- [3] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, Dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag. 1993.
- [4] F. Takens. *Forced oscillations and bifurcations*. Applications of Global Analysis I. Comm. Math. Inst. Rijksuniversitat Utrecht, 3. pp:1-59. 1974.
- [5] F. Verduzco y I. Segundo. *Órbitas homoclínicas en la bifurcación Takens-Bogdanov*. Congreso Nacional de Control Automático 2006. Octubre 2006.
- [6] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics, Vol. 2. Springer-Verlag. Second Edition. 2003.