Memorias de la XVII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 20, Agosto, 2007, pp. 23–29.

APLICACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUPERFICIES EN $\mathbb{R}^3$ EN LA ECUACIÓN DE SINE–GORDON

Misael Avendaño Camacho
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Resumen

La ecuación de sine-Gordon aparece como modelo de varios fenómenos en el campo de la física-matemática, tales como La Teoría Relativista, la Física del estado Sólido, y Óptica No–lineal entre otras. Dicha ecuación solitónica tiene una estrecha relación con las ecuaciones de Gauss-Mainardi-Codazzi para superficies hiperbólicas que aparecen en Geometría Diferencial. El propósito de este trabajo es obtener una interpretación geométrica de la ecuación de sine-Gordon, aplicando el Teorema Fundamental de Superficies para construir superficies de solitón.

1 Ecuación de sine-Gordon

La ecuación de sine-Gordon es una ecuación diferencial parcial que aparece en geometría diferencial y en el campo de la teoría relativista. La ecuación, como varias de sus técnicas de solución, son conocidas desde el siglo XIX, pero el interés por esta ecuación aumento cuando que se descubrió que posee soluciones de tipo solitón. La ecuación de sine-Gordon también aparece en un buen número de aplicaciones físicas, incluyendo el movimiento de una cadena de péndulos fijos acoplados, dislocaciones en cristales, entre otros. Es posible encontrar más aplicaciones de la ecuación de sine-Gordon, además de otras ecuaciones, y su relación con la teoría de solitones en [2] y [3].

La ecuación de sine-Gordon es

$$\theta_{xx} - \theta_{tt} = \operatorname{sen}\theta, \tag{1}$$

donde θ_{xx} y θ_{tt} indican derivadas parciales con respecto a los parámetros x y t. Ésta ecuación puede ser transformada bajo el siguiente cambio de coordenadas:

$$\xi = \frac{x-t}{2}, \quad \eta = \frac{x+t}{2}, \tag{2}$$

en la ecuación

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi\partial\eta} = \operatorname{sen}\theta \quad \text{ó} \quad \theta_{\xi\eta} = \operatorname{sen}\theta. \tag{3}$$

Notemos que la igualar a cero el lado derecho de (1), ésta se convierte en la *ecuación de onda*, por lo que se puede considerar que la ecuación de sine-Gordon es la ecuación onda no lineal

Una familia de soluciones de la ecuación de sine-Gordon tiene la forma

$$\theta(x,t) = 4\arctan\left[C\exp\left(\frac{x-\lambda t}{(1-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right], \tag{4}$$

donde C y $|\lambda| < 1$ son constantes arbitrarias.

2 Representación de Lax

Definición 2.1. *Sean $U \subset \mathbb{R}^2_{(x,t)}$ un abierto y $\mathbf{L}, \mathbf{M} : U \to \mathfrak{gl}(n)$ funciones matriciales suaves. Se define La Ecuación de Curvatura Cero para $\mathbf{L}, \mathbf{M}$ por*

$$\alpha\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x} + \beta\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = [\mathbf{L}, \mathbf{M}] := \mathbf{LM} - \mathbf{ML}, \tag{5}$$

donde α, β son constantes reales. La pareja $\{\mathbf{L}, \mathbf{M}\}$ es un **par de Lax***, si satisface la ecuación* (5).

Observación 2.2. *Al tomar $\alpha = -\beta = 1$ y las funciones $\mathbf{L}, \mathbf{M} : U \to \mathfrak{gl}(3)$, dadas por*

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_t & -\operatorname{sen}\theta \\ \theta_t & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_x & 0 \\ \theta_x & 0 & \cos\theta \\ 0 & -\cos\theta & 0 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

donde $u : \theta \subset \mathbb{R}^2_{(x,t)} \to \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación de sine-Gordon (1)*, resulta entonces que $\mathbf{L}, \mathbf{M}$ forman un par de Lax.*

Observación 2.3. *En el contexto de las ecuaciones diferenciales parciales* (EDF)*, al sustituir $\alpha = -\beta = 1$ en la ecuación* (5)*, ésta resulta ser la condición de compatibilidad del sistema* (EDP)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x} &= \mathbf{GM}, \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} &= \mathbf{GL}. \end{aligned}$$

3 Ecuaciones de compatibilidad y Teorema Fundamental de Superficies en $\mathbb{R}^3$

En esta parte se hace un breve repaso del estudio de las superficies en $\mathbb{R}^3$ y de sus propiedades y ecuaciones más importantes, lo que facilitará el seguimiento en el estudio de la superficies de solitón; para un estudio más profundo de estos temas, remitimos a las fuentes [1] y [5].

Supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u,v)$ es una parametrización que describe una vecindad de un punto $\mathbf{p}$ de una superficie $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^3$. Recordemos que los vectores $\mathbf{x}_u$ y $\mathbf{x}_v$ son linealmente independientes y tangentes a $\mathcal{M}$ en el punto $\mathbf{p}$, además el vector

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}, \tag{7}$$

determina un vector unitario normal a $\mathcal{M}$. La primera y segunda forma fundamental son definidas por

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x}\rangle = Edu^2 + Fdudv + Fdv^2, & (8) \\ \mathrm{II} &= \langle -d\mathbf{x}, d\mathbf{N}\rangle = edu^2 + fdudv + gdv^2, & (9) \end{aligned}$$

donde

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u\rangle, \quad F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\rangle, \quad G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v\rangle, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} e &= -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uu}\rangle, \\ f &= -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv}\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vu}\rangle = -\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v\rangle, \\ g &= -\langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v\rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vv}\rangle. \end{aligned}$$

El sistema lineal de Gauss-Weingarten asociado a la superficie $\mathcal{M}$ es

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v & \mathbf{N}\end{bmatrix}_u = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v & \mathbf{N}\end{bmatrix}\mathbf{P}, \quad \begin{bmatrix}\mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v & \mathbf{N}\end{bmatrix}_v = \begin{bmatrix}\mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v & \mathbf{N}\end{bmatrix}\mathbf{Q}, \tag{11}$$

donde $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son matrices de 3×3 definidas por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}\Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & e \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 & f \\ a_{11} & a_{21} & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix}\Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & f \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & g \\ a_{12} & a_{22} & 0\end{bmatrix}. \tag{12}$$

Los coeficientes Γ_{jk}^i que aparecen en las ecuaciones (12), son los usuales símbolos de Christoffel dados por la fórmula

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{il}}{2}(g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}),$$

donde, al tomar $x^1 = u, x^2 = v$,

$$\mathrm{I} = g_{jk}dx^j dx^k \quad \text{y} \quad g^{jk}g_{kl} = \delta_l^j;$$

mientras que los coeficientes a_{ij} están dados por

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2}\begin{bmatrix}fF - eG & eF - fE \\ gF - fG & fF - gE\end{bmatrix}. \tag{13}$$

Las condiciones de compatibilidad $(\mathbf{x}_{uu})_v = (\mathbf{x}_{uv})_u$, $(\mathbf{x}_{uv})_v = (\mathbf{x}_{vv})_u$ y $\mathbf{N}_{uv} = \mathbf{N}_{vu}$ aplicados al sistema lineal de Gauss (11) dan como resultado la expresión

$$\mathbf{P}_v - \mathbf{Q}_u = [\mathbf{P}, \mathbf{Q}]. \tag{14}$$

La ecuación matricial (14) es equivalente a las ecuaciones *no lineales de Peterson-Mainardi-Codazzi*

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f\left(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1\right) - g\Gamma_{11}^2, \tag{15}$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f\left(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1\right) - g\Gamma_{21}^2, \tag{16}$$

y a la ecuación desarrollada por Gauss en su Teorema Egregio, en donde expresa la curvatura Gaussiana por

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\Gamma_{11}^2\right)_v - \left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\Gamma_{12}^2\right)_u\right], \tag{17}$$

Las ecuaciones (15),(16) y (17) son conocidas como las ecuaciones clásicas de compatibilidad de la teoría de superficies. El siguiente resultado, de los más importante en Geometría Diferencial, establece que si un conjunto de funciones $\{E, F, G, e, f, g\}$ satisfacen las ecuaciones de compatibilidad, entonces determinan localmente una superficie $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^3$, la cual es única salvo su posición en el espacio.

Teorema 3.1 (Teorema Fundamental de Superficies). *Sean E, F, G, e, f, g funciones reales suaves definidas sobre un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, tales que $E > 0$, $G > 0$ y $EG - F^2 > 0$. Definamos las funciones matriciales $\mathbf{P}, \mathbf{Q} : U \to GL(3)$ por* (12). *Supongamos que $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ satisfacen la ecuación de compatibilidad* (14). *Entonces para cada par de puntos $(u_0, v_0) \in U$ y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ existe una vecindad $U_0 \ni (u_0, v_0)$ y una única función suave $\mathbf{x} : U_0 \to \mathbb{R}^3$ tal que:*

a) $\mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}$.

b) *El conjunto $\mathcal{M} = \mathbf{x}(U_0)$ es una superficie en $\mathbb{R}^3$.*

c) *Los coeficientes de las formas fundamentales asociados a la parametrización $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ son las funciones E, F, G, e, f, g.*

Ver este resultado completo y su demostración en [4] y en [6].

4 Superficies hiperbólicas y la ecuación de sine-Gordon

En esta parte vamos a obtener la superficie de Solitón asociada a la ecuación de sine-Gordon, debemos aclarar que dichas superficies son llamadas así ya que la ecuación de sine-Gordon, con la que relacionaremos a estas superficies, posee soluciones tipo solitón. Para esto veremos la relación que hay entre esta ecuación y las superficies hiperbólicas.

Si la curvatura total de una superficie $\mathcal{M}$ es negativa, es decir, si $\mathcal{M}$ es una superficie hipérbolica, entonces la curvas asintóticas (curvas en las que II se anula) de $\mathcal{M}$ pueden ser tomadas como curvas paramétricas. Entonces $e = g = 0$ y las ecuaciones de Mainardi-Codazzi (15),(16) se reducen a

$$\left(\frac{f}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u + 2\Gamma_{12}^2\frac{f}{\sqrt{EG-F^2}} = 0, \quad \left(\frac{f}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v + 2\Gamma_{12}^1\frac{f}{\sqrt{EG-F^2}} = 0, \tag{18}$$

y la curvatura gaussiana

$$\mathcal{K} = -\frac{f^2}{EG - F^2} =: -\frac{1}{\rho^2}. \tag{19}$$

El angulo ω entre las curvas paramétricas es tal que satisface

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \operatorname{sen}\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}, \tag{20}$$

podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $E = \rho^2 a^2$ y $G = \rho^2 b^2$, con lo cual las formas fundamentales (9), nos quedan de la forma

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \rho^2(a^2du^2 + 2ab\cos\omega dudv + b^2dv^2), \qquad (21)\\ \mathrm{II} &= 2\rho ab\operatorname{sen}\omega dudv. \qquad (22) \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Mainardi Codazzi (15),(16) en este caso son

$$\begin{aligned} a_v + \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a - \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b\cos\omega &= 0, \qquad (23)\\ b_u + \frac{1}{2}\frac{\rho_u}{\rho}b - \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho}a\cos\omega &= 0. \qquad (24) \end{aligned}$$

mientras que la curvatura gaussiana queda expresada por

$$\omega_{uv} + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_u}{\rho}\frac{b}{a}\operatorname{sen}\omega\right)_u + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_v}{\rho}\frac{}{b}\operatorname{sen}\omega\right)_v - ab\operatorname{sen}\omega = 0 \tag{25}$$

En el caso particular cuando $\mathcal{K} = -1/\rho^2 < 0$, es contante, la superficie $\mathcal{M}$ es conocida como superficie Pseudoesférica. De las ecuaciones de Mainardi-Codazzi se obtiene que $a = a(u)$ y $b = b(v)$. Si la superficie $\mathcal{M}$ es parametrizada usando las coordenadas de líneas asintóticas, entonces las formas fundamentales toman la forma

$$\mathrm{I} = du^2 + 2\cos\omega dudv + dv^2, \quad \mathrm{II} = \frac{2}{\rho}\operatorname{sen}\omega dudv, \tag{26}$$

mientras que la ecuación de Gauss para la curvatura total (25) se reduce a la ecuación de sine-Gordon

$$\omega_{uv} = \frac{1}{\rho^2}\operatorname{sen}\omega \tag{27}$$

Debemos notar que en el caso de las superficies hiperbólicas de curvatura total gaussiana constante y negativa, la ecuación del Teorema Egregio es precisamente la ecuación de sine-Gordon y recordemos que la ecuación de Gauss es una de las ecuaciones de compatibilidad que se requieren para la existencia local de una superficie (Teorema 3.1). En este momento estamos en condiciones de presentar el resultado central de este trabajo: *la ecuación de sine-Gordon es una condición que garantiza la existencia de una superficie en* $\mathbb{R}^3$ *a la que llamaremos* **superficie de solitón**

Teorema 4.1. *Sea ϕ una solución de la ecuación de sine-Gordon (1). Entonces existe un superficie $\mathcal{M}$ en $\mathbb{R}^3$ cuya curvatura total constante y negativa, tal que*

$$\phi_{uv} = -\mathcal{K} \operatorname{sen} \phi, \tag{28}$$

para alguna parametrización $\mathbf{x}(u,v)$ de $\mathcal{M}$. Además, el ángulo entre las dos direcciones asintóticas es 2ϕ.

Demostración: Sea $\phi(u,v)$ una solución de la ecuación de sine-Gordon (1). Como se vió en la observación (2.2), la ecuación de sine-Gordon es equivalente a que la pareja de Lax

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_t & -\operatorname{sen}\theta \\ \theta_t & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_x & 0 \\ \theta_x & 0 & \cos\theta \\ 0 & -\cos\theta & 0 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

satisfaga la ecuación de curvatura cero (5), la cual coincide con la condición de compatibilidad (14). Como ést última ecuación es la condición de compatibilidad del Teorema Fundamental (Teorema 3.1), de dicho teorema se sigue la existencia de una superficie $\mathcal{M} in \mathbb{R}^3$; un esquema de construcción de dicha superficie puede encontrarse en la construcción del teorema fundamental dada en [6]. Hasta aquí se ha probado que cada solución de sine-Gordon implica la existencia de una superficie, y por unicidad, podemos asociar a cada solución una superficie de solitón.

La ecuación (28) se sigue de la equivalencia entre la ecuación de sine-Gordon y la ecuación (17), la cual fue establecida anteriormente, en esta misma sección.

Solo nos resta calcular el ángulo que forman las direcciones asintóticas. En este caso es conveniente parametrizar la superficie $\mathcal{M}$, $\mathbf{x}(u,v)$ en términos de coordenadas especiales de líneas de curvatura

$$x = u + v, \quad t = u - v. \tag{30}$$

Si tomamos $\omega = 2\phi$ (20), entonces la primera y segunda forma fundamental (9) se convierten en

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \cos^2\phi dx^2 + \operatorname{sen}^2\phi dt^2, && (31) \\ \mathrm{II} &= \frac{1}{\rho} \operatorname{sen}\phi \cos\phi (dx^2 - dt^2). && (32) \\ & && (33) \end{aligned}$$

y la ecuación de compatibilidad del Teorema (3.1) es

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \frac{1}{\rho^2} \operatorname{sen}\phi\cos\phi = \frac{1}{\rho^2} \operatorname{sen} 2\phi. \tag{34}$$

De la segunda forma fundamental (32) se sigue que $\mathbf{x}_x + \mathbf{x}_t$ y $\mathbf{x}_x - \mathbf{x}_t$ son las direcciones asintóticas, y calculando el producto interior euclidiano de estos dos vectores tenemos

$$\langle \mathbf{x}_x + \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_x - \mathbf{x}_t \rangle = \cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi = \cos 2\phi, \tag{35}$$

por lo tanto, el ángulo que forman estos vectores es 2ϕ $\square$

Debemos hacer notar que para cada solución ϕ existe una superficie intrínseca, que depende de ϕ, la cual llamaremos superficie de solitón.

Ejemplo 4.2. *Considere la ecuación de sine-Gordon*

$$\omega_{uv} = \operatorname{sen}\omega. \tag{36}$$

De la ecuación (28) *es fácil ver que la superficie de asociada a esta ecuación tiene curvatura gaussiana* $\mathcal{K} = -1$. *Cabe mencionar que la pseudoesfera es una superficie de solitón que se obtiene de la ecuación (*4*), tomando* $x = t$.

Bibliografía

[1] do Carmo, M. P. : (1976), *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc.

[2] Dranzin P.G. ; Johnson R.S. : (1990), *Solitons: an introduction*, Cambrige University Press, Cambrige

[3] Rogers C. ; Schief W. K. : (2002), *Bäcklund and Darboux Transformations*, Cambrige University Press.

[4] Spivak A M : (1979), *A comprehensive introduction to Differential geometry*, Vol. Three, Publishor Perish, Berkeley California.

[5] Struik D. J, *Geometría Diferencial Clásica*, Editorial Aguilar, Madrid.

[6] Avendaño C. M: (2006), *Teorema Fundamental de Superficies y el Criterio de Frobenius*, Tesis de Licenciatura, Universidad de Sonora.