Memorias de la XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México. Mosaicos Matemáticos No. 20, agosto 2007, pp. 7-12. **Nivel Superior**

APLICACIÓN DE UNA DESIGUALDAD MATRICIAL PARA LA ESTABILIZACION DE SISTEMAS LINEALES

Baltasar Aguirre (bahe@xanum.uam.mx)
Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana
Apdo. Postal 55-534, 09340, México, D. F., México

Resumen

En este trabajo, dado un sistema estable a lazo abierto, utilizando una desigualdad matricial encontramos un cono de ganancias c tal que la función $u = -kc^T x$ *es un control estabilizante para todo k > 0. Con este control también se consigue que todos los eigenvalores del sistema controlado tengan parte real negativa y que uno de ellos diverja a* $-\infty$*, es decir, es un control de alta ganancia.*

Palabras clave: Polinomios Hurwitz, controles de alta ganancia.

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es diseñar controles estabilizantes para sistemas estables a lazo abierto. Considerar el sistema controlable $\dot{x} = Ax + bu$ el cual está escrito en la forma canónica (5). Definamos un control de retroalimentación *u*, dado por

$$u = -kc^T x \tag{1}$$

donde $c \in R^n$ y $k > 0$. Supongamos que *c* es tal que el polinomio a lazo cerrado $p_c(t)$ es un polinomio Hurwitz, es decir $u = -kc^T x$ es un control estabilizante. Si $k >> 1$ el control (1) es conocido como control de alta ganancia, ya que ganancias muy grandes de control $kc^T x$ son inducidas. En los últimos 30 años se han utilizado diversos enfoques para estudiar los controles de alta ganancia (ver por ejemplo [8, 10, 12, 13, 14]). En aplicaciones practicas, es común que los controles de alta ganancia sean utilizados para reducir el efecto de perturbaciones y no linealidades ([7]). Es bien conocido (ver [10, 14]) que cuando $k \to \infty$, un valor propio del sistema a lazo cerrado, digamos λ_1, tiene la propiedad de que $\frac{\lambda_1}{k} \to -c_1$ y los otros valores propios convergen a las raíces del polinomio $c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + ... + c_n$. Por lo tanto el sistema a lazo cerrado es asintóticamente estable en el origen cuando *k* es suficientemente grande. Sin embargo, el origen no es necesariamente asintóticamente estable para todo *k* > 0, aún cuando $c \in R^n$ sea escogido de tal manera que el polinomio $c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + ... + c_n$ sea Hurwitz. De aquí que sea importante tener técnicas para encontrar vectores *c* tales que $u = -kc^T x$ sea un control estabilizante. En este trabajo presentamos una condición suficiente sobre *c* para garantizar que $u = -kc^T x$ sea un control estabilizante. La condición suficiente es la desigualdad matricial (6). En términos de polinomios, nosotros obtenemos una condición suficiente para que un cono $p_0 + K$ consista sólo de polinomios estables. Aquí p_0 es un polinomio estable de grado *n* y *K* es un cono convexo de polinomios de grado *n* - 1. En la terminología de [4] esto corresponde a tener robustez infinita del polinomio p_0 con respecto a perturbaciones en las direcciones contenidas en *K*. Ilustraremos estas ideas con el siguiente ejemplo.

Considerar el sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -11 & -7 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ((-65k, -3k, -k)x) \qquad (2)$$

cuyo polinomio a lazo abierto $p_0(t) = t^3 + 7t^2 + 11t + 5 = (t+1)^2(t+5)$ es Hurwitz y su polinomio a lazo cerrado $p_c(t)$ esta dado por $p_c(t) = t^3 + (7+k)t^2 + (11+3k)t + 5 + 65k$. Uno de los valores propios del sistema a lazo cerrado, digamos que λ_1, tiene la propiedad de que $\frac{\lambda_1}{k} \to -1$ y los otros dos valores propios convergen a las raíces del polinomio $p_c^*(t) = t^2 + 3t + 65$. Así que, el origen es localmente asintóticamente estable para valores largos de *k*. En realidad, el origen es localmente asintóticamente estable para $k \in [0, 3) \cup (8, \infty)$. El sistema a lazo cerrado no es asintóticamente estable en el origen para $k \in [3, 8]$ ya que la correspondiente condición de Hurwitz $(7+k)(11+3k) - (5+65k) > 0$ no se cumple.

El resto del trabajo está organizado como sigue: en la Sección 2 establecemos condiciones suficientes sobre $c = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$ de manera que podamos asegurar que el polinomio correspondiente $c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + ... + c_n$ sea Hurwitz (desigualdad (6)). Además, para *c* satisfaciendo la desigualdad (6) probamos que el correspondiente sistema a lazo cerrado es asintóticamente estable para todo valor del parámetro de alta ganancia *k*. En la Sección 3 explicamos en que consiste el Método de Kuhn-Fourier y hacemos notar que este método puede ser utilizado para resolver la desigualdad (6). Finalmente en la Sección 4 presentamos un ejemplo para ilustrar los resultados del trabajo.

2. Resultados principales

En esta sección nos planteamos dos objetivos. Primero, obtendremos condiciones algebraicas para la estabilidad de rayos de polinomios (la desigualdad matricial (6)). Después utilizaremos este resultado para encontrar un conjunto cónico de ganancias *c* tal que el control $u = -kc^T x$ sea un control estabilizante para todos los valores de $k > 0$.

Dado un polinomio real $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + ... + a_n$ definimos la matriz

$$E = \begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ a_5 & -a_4 & a_3 & -a_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_{n-1} & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

y denotamos por E_i, E_j el *i*-ésimo renglón y la *j*-ésima columna de la matriz *E*, respectivamente.

Teorema 2.1. *Considerar el siguiente sistema*

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{4}$$

donde $u = -kc^T x$ *es un control de retroalimentación, x,* $b \in R^n$ *y el par controlable* (*A* , *b*) *está dado en la forma canónica* (*ver* [2])

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Supongamos que el polinomio a lazo abierto $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ *es un polinomio Hurwitz. Sea E la correspondiente matriz definida por (3). Si el vector c es una solución al sistema de desigualdades lineales*

$$\boxed{E_{i.} c > 0, \ i = 1, \dots, n} \tag{6}$$

entonces el control $u = -kc^T x$ *es un control de alta ganancia.*

Observación 2.2. En la introducción se hizo notar que en general, un control de alta ganancia no necesariamente es un control estabilizante para todo valor del parámetro *k* y esto lo ilustramos con un ejemplo. Esto le da mayor importancia al siguiente resultado, el cual resulta útil para el diseño de controles estabilizantes de alta ganancia.

Teorema 2.3. *Considerar el sistema lineal* (*4*) *escrito en la forma canónica* (*5*). *Supongamos que A es Hurwitz, es decir, el polinomio a lazo abierto* $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ *es Hurwitz. Si* $c \succ 0$ *es una solución a* (*6*), *entonces, para todo k > 0, el control* $u(t) = -kc^T x$ *es un control estabilizante.*

El Teorema 2.1 puede ser escrito en términos de polinomios de la siguiente manera.

Corolario 2.4. *Dado el polinomio Hurwitz* $p_0(t)$ *sea G la familia de polinomios* $p_1(t) = c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \dots + c_n$, *tal que* $c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \succ 0$ *satisface la desigualdad* (6). *Entonces para cada* $p_1 \in G$, *el rayo de polinomios* $p_0(t) + k\, p_1(t), \quad k \geq 0$ *es Hurwitz.*

Observación 2.5. Una desigualdad similar fue obtenida en [1] y los resultados fueron presentados en términos de rayos de polinomios. Dado un polinomio real $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$, definimos la matriz $D \in M_{nxn}$ por

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Y denotemos por D_i el *i*-ésimo renglón de la matriz *D*.

Si $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T > 0$ es una solución de $D_c > 0$, entonces el polinomio $p_1(t) = c_1 t^n + c_2 t^{n-1} + \dots + c_n$ es Hurwitz y además $p_0(t) + k\, p_1(t)$ es Hurwitz para toda $k > 0$.

3. Solución de las desigualdades

Veamos qué desigualdades tenemos que resolver en el caso en que *n* es pequeño, para ilustrar la dificultad de encontrar la solución del sistema de desigualdades. Dado un polinomio real $p_0(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$, considerar la matriz *E* como fue definida anteriormente. Sea *H* el conjunto de soluciones de (6), es decir

$$H = \left\{ c \in R^n : c > 0 \ y \ E^i c > 0, i = 1, \dots, n \right\}$$

Para *n* =3, el conjunto *H* de soluciones son los vectores $c = (c_1, c_2, c_3)^T$, cuyas coordenadas satisfacen:

$$\frac{a_3 c_1 + a_1 c_3}{a_2} < c_2 < a_1 c_1$$

$$0 < c_3 < \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} c_1$$

$$0 < c_1$$

Para *n* = 4, las soluciones se escriben explícitamente como aquellos vectores $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T$, cuyas coordenadas satisfacen:

$$a_3 c_1 - a_2 c_2 + a_1 c_3 < c_4 < \frac{a_3 c_3 - a_4 c_2}{a_2}$$

$$\frac{c_2}{a_1} < c_1 < \frac{(a_2^2 - a_4) c_2 + (a_3 - a_1 a_2) c_3}{a_2 a_3}$$

$$c_3 < \frac{a_1 (a_2^2 - a_4) - a_2 a_3}{a_1 (a_1 a_2 - a_3)} c_2$$

$$0 < c_2$$

En ambos casos el conjunto de soluciones es no vacío debido a la estabilidad del polinomio $p_0(t)$.

3.1 Método de Kuhn-Fourier

Para dimensiones mayores, podríamos aplicar el Método de Eliminación de Kuhn-Fourier para saber si los sistemas $Dc > 0$ o $Ec > 0$ tienen alguna solución ([5], [11]) y encontrarla.

El algoritmo de eliminación de Fourier generaliza el método de eliminación para sistemas de ecuaciones lineales. Denotemos Γ : $Ec > 0$ a nuestro sistema de desigualdades. El algoritmo consiste en una primera parte en obtener un nuevo sistema de desigualdades Γ' en el que ya no aparece una de las variables, digamos que c_n y de manera que:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \text{es solución de } \Gamma' \text{ si y sólo si}$$

$$\exists\ c_n \quad \text{tal que} \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} \text{ es solución de } \Gamma .$$

De esta forma toda solución de Γ puede ser encontrada por eliminaciones sucesivas.

4. Un ejemplo

Considerar el siguiente sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3/2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-2k, \quad -4k, \quad -2k)\ x \tag{7}$$

La matriz E y el correspondiente producto con $(2, 4, 2)^T$ están dados por

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el sistema (7) es estable $\forall k > 0$. Pero este hecho no puede ser verificado con los resultados en [1] ya que

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3/2 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3/2\end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3/2 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$$

Bibliografía

[1] Aguirre, B.; Ibarra, C. and Suarez, R. Sufficient algebraic conditions for stability of cones of polynomials. *Systems & Control Letters* 46 (2002), 255-263.

[2] Barnett, S. and Cameron, R.G. *Introduction to Mathematical Control Theory*. Clarendon Press, Oxford, (1985).

[3] Gille, J.C.; Pelegrin, M.J. and Decaulne, P. Feedback *Control Systems: Analysis, Syntesis and Design*. New York: McGraw-Hill (1959).

[4] Hinrichsen, D. and Kharitonov, V. L. Stability of polynomial with conic uncertainty. *Math. Control Signal Systems 8*, (1995) 97-117.

[5] Kuhn, H.W.: (1956) Solvability and consistency for linear equations and inequalities. *Amer. Math. Monthly 63*,217-232.

[6] Ming-tzu Ho, Datta A. and Bhattacharyya, S.P. An elementary derivation of the Routh-Hurwitz criterion. *IEEE Transactions on Automatic Control*,. 43, No. 3 (1998) 405-409.

[7] Morari, M. and Zafiriou, E. *Robust Process Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1989).

[8] Schumacher, J.M. Almost stabilizability subspaces and high-gain feedback. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-29, (1984) 620-628.

[9] Shaked, V. and Kouvaritakis, B. Asymptotic behavior of root loci of linear multivariable systems. *Int. J. Contr.* 23, (1976) 297-340.

[10] Shaked, V. and Kouvaritakis, B. The zeroes of linear optimal control systems and their role in high feedback gain stability design. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-22, (1977) 597-599.

[11] Stoer, J. & Witzgall Ch.: (1970) *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I.* Springer-Verlag, N. Y.

[12] Willems, J. L. Disturbance isolation in linear feedback systems. *Int. J. Syst. Sci.*, 6, No. 3, (1975) 233-238.

[13] Willems, J. L. Almost invariant subspaces: An approach to high-gain feedback design -Part I and Part II. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-26, 235-252 and AC-27(1981) 1071-1085.

[14] Young, K. D.; Kokotovic, P. V. and Utkin, V. I. A singular perturbation analysis of high gain feedback systems. *IEEE Trans.*, AC-22, (1977) 931-939.