

LA TOPOLOGÍA DE LOS ESPACIOS DE CONFIGURACIÓN

Miguel A. Xicoténcatl Merino

Departamento de Matemáticas, CINVESTAV

e-mail: xico@math.cinvestav.mx

Resumen

En este artículo expositivo introducimos los espacios de configuraciones $F_k(M)$ y $F_k(M)/\Sigma_k$ para una variedad M y analizamos la topología de algunos ejemplos interesantes. En el caso $M = \mathbb{C}$, los grupos fundamentales de los espacios $F_k(\mathbb{C})$ y $F_k(\mathbb{C})/\Sigma_k$ son isomorfos a los grupos de trenzas de clásicos P_k y B_k . Motivados por este hecho, definimos los grupos de trenzas de superficies $P_k(M)$, $B_k(M)$ y estudiamos algunas de sus propiedades más conocidas, así como una de las contribuciones del autor a este tema. Por último, hacemos notar que en el caso de una variedad general M , los espacios de configuraciones son piezas fundamentales de ciertos espacios de funciones.

1 Invariantes algebraicos

El método de la topología algebraica consiste en la construcción de invariantes algebraicos de espacios topológicos, esto es funtores de la categoría de espacios topológicos en diversas categorías algebraicas, que permitan transformar problemas geométricos en problemas algebraicos posiblemente más fáciles de analizar. Por ejemplo, el grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es un funtor $\pi_1 : \mathcal{TOP}_* \rightarrow \mathcal{GR}$ de la categoría de espacios basados en la categoría de grupos.

Recordemos que si X es un espacio topológico y $x_0 \in X$, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es el conjunto de clases de homotopía de lazos basados en x_0 , es decir, funciones continuas $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tales que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Por construcción es claro que si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo tal que $f(x_0) = y_0$, entonces $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$. Esta propiedad elemental permite distinguir inmediatamente espacios topológicos no homeomorfos.

Ejemplo 1: Sea $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la esfera unitaria y $\mathbb{R}P^n := S^n/x \sim \pm x$ el espacio proyectivo de dimensión n . Es fácil probar que cuando $n \geq 2$, $\pi_1(S^n) = 0$ pero $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}/2$. Por lo tanto S^n y $\mathbb{R}P^n$ no pueden ser homeomorfos si $n \geq 2$.

Ejemplo 2: Los espacios S^3 , $SO(3)$, $S^2 \times S^1$ y $S^1 \times S^1 \times S^1$, son todas variedades compactas, conexas, orientables de dimensión 3. Sin embargo, no existen dos de ellos que sean homeomorfos entre sí, ya que sus grupos fundamentales son isomorfos a 0 , $\mathbb{Z}/2$, \mathbb{Z} y \mathbb{Z}^3 , respectivamente.

Aún así, la clasificación de espacios topológicos salvo homeomorfismo es un problema bastante difícil, por lo que usualmente se recurre a una relación de equivalencia menos fina, la equivalencia homotópica $X \simeq Y$.

Definición 1.1 Sean X, Y dos espacios topológicos.

1. Dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ se dicen homotópicas si existe una función continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in X$. En tal caso escribiremos $f \simeq g$.

2. Los espacios X, Y se dicen homotópicamente equivalentes si existen funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que:

$$\begin{aligned} g \circ f &\simeq id_X \\ f \circ g &\simeq id_Y \end{aligned}$$

Es importante hacer notar que los invariantes algebraicos más comunes como el grupo fundamental, son invariantes homotópicos, es decir si $X \simeq Y$, entonces $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.

Durante el resto de este trabajo restringiremos nuestra atención a los espacios de configuraciones $F_k(M)$ y $F_k(M)/\Sigma_k$, que consisten de subconjuntos de M de cardinalidad k , ordenados o no (ver definiciones en la sección 2). En el caso en que M es una superficie, los respectivos grupos fundamentales están íntimamente relacionados con los grupos de trenzas de Artin P_k y B_k como se verá en las secciones 3 y 4. Finalmente, en la sección 5 veremos que en el caso en que M es una variedad general, los espacios $F_k(M)$ son componentes fundamentales de modelos combinatorios para diversos espacios de funciones.

2 Espacios de configuraciones

En mecánica clásica, el espacio de configuraciones es el espacio de posiciones posibles de un sistema físico, el cual usualmente tiene estructura de variedad. En topología, los espacios de configuraciones fueron introducidos en 1962 por E. Fadell y L. Neuwirth [6] en conexión con los grupos de trenzas de Artin. Desde entonces su topología ha sido intensamente estudiada, principalmente por su relación con los grupos de trenzas, los espacios de funciones y de manera más reciente, con diversos problemas en robótica.

Definición 2.1 Si M es un espacio topológico y $k \geq 1$, definimos el espacio de configuraciones ordenadas de cardinalidad k , $F_k(M)$, como el siguiente subespacio de M^k :

$$F_k(M) = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in M^k \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}$$

Obsérvese que el grupo simétrico Σ_k actúa libremente en $F_k(M)$. El espacio de órbitas $F_k(M)/\Sigma_k$ se conoce como el espacio de configuraciones no ordenadas.

A continuación presentamos algunos casos particulares, en la mayoría de los cuales M es de hecho una variedad, aunque los espacios de configuraciones en espacios más singulares (como gráficas, etc.) también suelen ser de importancia.

Ejemplos:

1. Si M es arbitrario y $k = 2$, entonces el espacio $F_2(M)$ es el complemento de la diagonal en $M \times M$:

$$F_2(M) = \{(x, y) \in M \times M \mid x \neq y\} = (M \times M) \setminus \Delta.$$

2. En el caso en que $M = \mathbb{R}^n$ y $k = 2$ es bien sabido que el espacio $F_2(\mathbb{R}^n)$ es del mismo tipo de homotopía que S^{n-1} , la esfera de dimensión $n - 1$. En efecto, una equivalencia homotópica esta dada por la inclusión:

$$i : S^{n-1} \longrightarrow F_2(\mathbb{R}^n)$$

$$z \longmapsto (z, -z)$$

y una inversa homotópica es la retracción $r : F_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S^{n-1}$

$$(x, y) \longmapsto \frac{x - y}{\|x - y\|}$$

Es fácil verificar que $r \circ i = id_{S^{n-1}}$ y que $i \circ r \simeq id_{\mathbb{R}^n}$ por lo que se tiene que S^{n-1} es un retracto por deformación de $F_2(\mathbb{R}^n)$.

3. Si $M = G$ es grupo topológico (por ejemplo un grupo de Lie), entonces el espacio $F_k(G)$ es homeomorfo al producto $G \times F_{k-1}(G - \{e\})$. Un homeomorfismo está dado por la función:

$$F_k(G) \xrightarrow{\approx} G \times F_{k-1}(G - \{e\})$$

$$(g_1, \dots, g_k) \longmapsto (g_1) \times (g_1^{-1} \cdot g_2, \dots, g_1^{-1} \cdot g_k)$$

El caso particular en que G es el plano complejo \mathbb{C} es de gran importancia en el estudio de los grupos de trenzas. Aquí, \mathbb{C} es considerado como grupo topológico con la suma de números complejos y en este caso:

$$F_k(\mathbb{C}) \approx \mathbb{C} \times F_{k-1}(\mathbb{C} - \{0\})$$

Notemos ahora que $\mathbb{C} - \{0\}$ es nuevamente un grupo topológico bajo la multiplicación de complejos.

Así tenemos:

$$F_k(\mathbb{C}) \approx \mathbb{C} \times (\mathbb{C} - \{0\}) \times F_{k-2}(\mathbb{C} - \{0, 1\})$$

En el caso $k = 3$, el espacio $F_3(\mathbb{C})$ de ternas de puntos distintos en \mathbb{C} es homeomorfo al producto $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} - \{0\}) \times (\mathbb{C} - \{0, 1\})$, el cual es a su vez equivalente a $S^1 \times (S^1 \vee S^1)$.

4. Si $M = S^n$ y $k = 2$ entonces $F_2(S^n) \simeq S^n$. Esto se sigue del hecho de que la proyección sobre la primera coordenada $F_2(S^n) \rightarrow S^n$ es una fibración localmente trivial, con fibra $S^n \setminus \{x_0\} \approx \mathbb{R}^n$ (ver [6]). En este caso la inclusión

$$S^n \xrightarrow{\simeq} F_2(S^n)$$

$$x \longmapsto (x, -x)$$

es: (i) una sección para la fibración antes mencionada, (ii) una equivalencia homotópica y (iii) compatible con la acción del grupo simétrico $\Sigma_2 \cong \mathbb{Z}/2$, es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\cong} & F_2(S^n) \\ \downarrow A=-1 & & \downarrow (12) \\ S^n & \xrightarrow{\cong} & F_2(S^n) \end{array}$$

Aquí $A : S^n \rightarrow S^n$ es el mapeo antipodal y $(12) : F_2(S^n) \rightarrow F_2(S^n)$ es la transposición $(12)(x, y) = (y, x)$. Por lo tanto, el espacio de órbitas $F_2(S^n)/\Sigma_2$ es del mismo tipo de homotopía que el espacio proyectivo real $S^n/\Sigma_2 \approx \mathbb{R}P^n$.

5. Si $M = S^n$ y $k = 3$, entonces el espacio $F_3(S^n)$ es homotópicamente equivalente al espacio homogéneo $SO(n+1)/SO(n-1)$. Para ver esto, comenzamos con la función continua

$$\begin{array}{ccc} SO(n+1) & \longrightarrow & F_3(S^n) \\ \alpha & \longmapsto & (\alpha(+1), \alpha(-1), \alpha(\infty)) \end{array}$$

la cual evalúa a una rotación $\alpha \in SO(n+1)$ en tres puntos distintos $+1, -1, \infty$ de S^n . Al escoger estos dichos puntos en un mismo subespacio de dimensión 2, esta función induce una función del espacio cociente

$$\begin{array}{ccc} SO(n+1) & \longrightarrow & F_3(S^n) \\ \downarrow & \nearrow \cong & \\ \frac{SO(n+1)}{SO(n-1)} & & \end{array}$$

la cual es una equivalencia homotópica. Finalmente en el caso $n = 3$, obtenemos la equivalencia siguiente: $\mathbb{R}P^3 \approx SO(3) \simeq F_3(S^2)$.

3 Grupos de trenzas

A continuación definimos los grupo de trenzas y establecemos su relación con los espacios de configuraciones del plano. Considérense los planos $z = 0$ y $z = 1$ en \mathbb{R}^3 , los cuales denotaremos por P y Q , respectivamente. Elijamos k puntos distintos $p_1, \dots, p_k \in P$ y sean q_1, \dots, q_k las correspondientes proyecciones ortogonales en Q . Por un arco en \mathbb{R}^3 entenderemos una función continua $\mathcal{A} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es un homeomorfismo sobre su imagen.

Definición 3.1 Una trenza β en k cuerdas es un sistema de arcos disjuntos en \mathbb{R}^3 , $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$, tales que:

1. Existe un $\sigma \in \Sigma_k$ de modo que \mathcal{A}_i conecta el punto p_i con el punto $q_{\sigma(i)}$.
2. Cada arco \mathcal{A}_i intersecta a todo plano paralelo entre P y Q en exactamente un punto.

Diremos que dos trenzas β_1 y β_2 son equivalentes si cada una se puede deformar continuamente en la otra por medio de trenzas, es decir, si los correspondientes sistemas de arcos son isotópicos. El conjunto de clases de isotopía de trenzas en k cuerdas se denota por B_k y es un grupo bajo la operación de yuxtaposición de trenzas y reescalamiento. El grupo B_k se conoce como el grupo de trenzas de Artin, debido a que E. Artin introdujo dichos grupos explícitamente en 1925 [1].

Es un resultado clásico de Artin que el grupo B_k admite la siguiente presentación en términos de generadores y relaciones:

$$B_k \cong \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k-1} \mid \begin{array}{l} [\sigma_i, \sigma_j] = 1 \text{ si } |i - j| \geq 2 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{array} \right\rangle$$

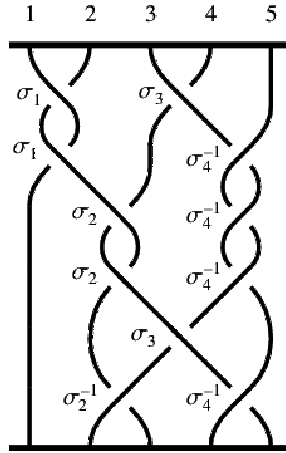


Figura 1: Una trenza en 5 cuerdas

Geoméricamente, el generador σ_i puede interpretarse como la trenza que intercambia las cuerda i con la $i + 1$, como se aprecia en la siguiente figura:

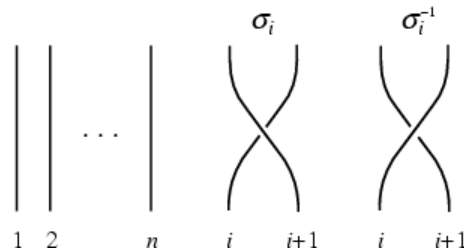


Figura 2: La trenza identidad y el generador σ_i

Más aún, el grupo de trenzas viene equipado con un epimorfismo natural $\pi : B_k \rightarrow \Sigma_k$ dado por $\sigma_i \mapsto (i, i + 1)$, cuyo núcleo $P_k := \ker \pi$ es un subgrupo normal de B_k conocido como el grupo de trenzas puras.

Equivalentemente, para todo k existe una sucesión exacta corta:

$$1 \longrightarrow P_k \xrightarrow{i} B_k \xrightarrow{\pi} \Sigma_k \longrightarrow 1 \quad (1)$$

Topológicamente, el grupo B_k fue reinterpretado en 1962 por R. Fox y L. Neuwirth [7] como el grupo fundamental del espacio de configuraciones no ordenadas $F_k(\mathbb{C})/\Sigma_k$. Recordemos que el grupo simétrico actúa de manera propia y discontinua en $F_k(\mathbb{C})$. Más aún, la proyección canónica induce un recubrimiento:

$$\Sigma_k \longrightarrow F_k(\mathbb{C}) \longrightarrow F_k(\mathbb{C})/\Sigma_k \quad (2)$$

del cual se puede recobrar la sucesión exacta (1) al aplicar grupo fundamental.

Teorema 3.2 (R. Fox, L. Neuwirth) *Para $k \geq 1$ se tiene:*

1. *Los grupos fundamentales $\pi_1(F_k(\mathbb{C}))$ y $\pi_1(F_k(\mathbb{C})/\Sigma_k)$ son isomorfos a los grupos de trenzas puras P_k y completo B_k , respectivamente.*
2. *El espacio $F_k(\mathbb{C})$ es un espacio de Eilenberg-Mac Lane de tipo $K(\pi, 1)$.*
3. *La sucesión exacta de homotopía de la fibración (2) está dada por la sucesión exacta corta (1).*

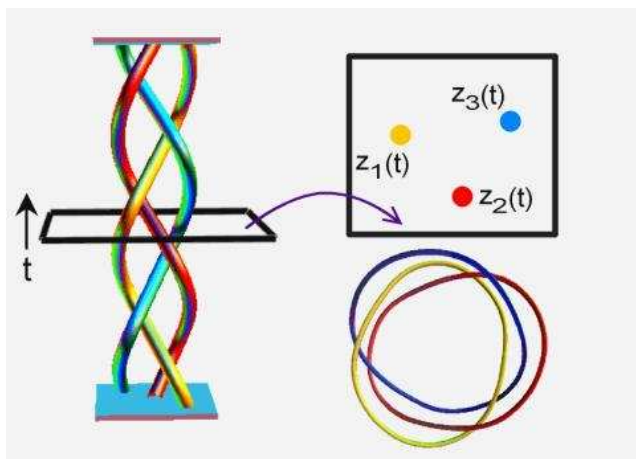


Figura 3: Un elemento de P_3

No es difícil ver que para $k \geq 2$ el grupo B_k es infinito y que además es libre de torsión. Sin embargo, es posible exhibir diversos subgrupos normales $H \leq B_k$ tales que el grupo cociente B_k/H es finito, siendo el grupo de trenzas puras P_k el ejemplo más natural de entre todos ellos. Se puede probar usando los resultados E. Fadell y L. Neuwirth [6] que el grupo de trenzas puras $P_k \leq B_k$ es un producto semidirecto iterado de grupos libres:

$$P_k \cong F_{k-1} \rtimes (F_{k-2} \rtimes \cdots \rtimes (F_2 \rtimes F_1) \cdots)$$

Más a'un, es relativamente fácil probar que P_k es el subgrupo normal de B_k generado por los cuadrados de los generadores $\sigma_1^2, \dots, \sigma_{k-1}^2$. Por lo tanto:

$$B_k / \langle \sigma_i^2 \rangle \cong \Sigma_k$$

Una variante interesante se obtiene al reemplazar el grupo de trenzas puras por $\langle \sigma_i^n \rangle$, el subgrupo normal generado por las n -ésimas potencias de los generadores del grupo de trenzas.

Definición 3.3 Para $k, n \geq 2$ definimos $\langle \sigma_i^n \rangle$ como el subgrupo normal de B_k generado por $\sigma_1^n, \dots, \sigma_{k-1}^n$ y al grupo $B_k(n)$ como el cociente:

$$B_k(n) := B_k / \langle \sigma_i^n \rangle$$

Por ejemplo, para $n = 2$ y k arbitrario se tiene $B_k(2) \cong \Sigma_k$. Para $k = 2$, es inmediato que $B_k \cong \mathbb{Z}$ y de aquí se sigue que el cociente $B_k(n)$ es isomorfo a \mathbb{Z}/n . Ahora la siguiente pregunta surge de manera natural: ¿Para qué valores de k y n es finito el grupo cociente $B_k(n)$? La respuesta es bastante asombrosa y fue dada por H.S.M. Coxeter en [5].

Teorema 3.4 (H.S.M. Coxeter) Para $k, n \geq 3$, el grupo $B_k(n)$ es finito si y sólo si $(k, n) = (3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)$.

Es decir, el grupo $B_k(n)$ es finito si y sólo si (k, n) es el tipo de uno de los 5 sólidos platónicos. La demostración original de Coxeter usa ideas de grupos de isometrías hiperbólicos, aunque actualmente existen demostraciones de este hecho que sólo usan teoría de representaciones de grupos finitos.

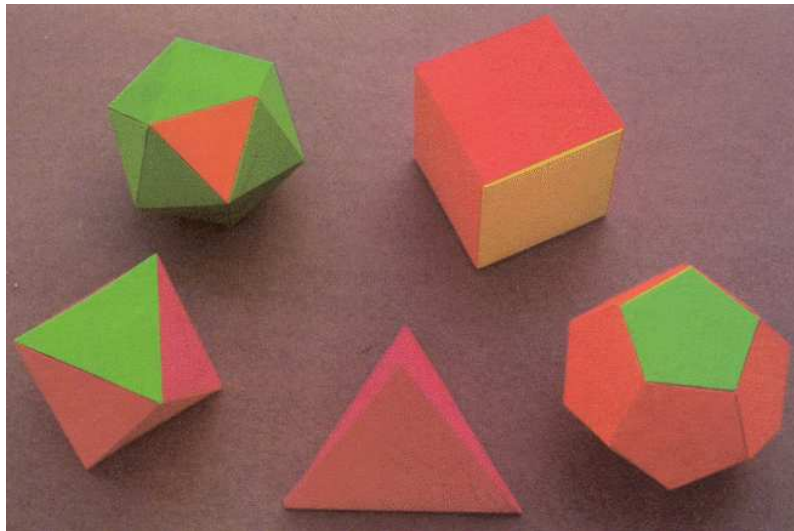


Figura 4: Poliedros regulares

4 Grupos de trenzas de superficies

En esta sección daremos la definición de los grupos de trenzas en superficies $P_k(M)$, $B_k(M)$, así como algunos resultados relativamente nuevos sobre la estructura de los mismos. Primeramente, notemos que motivados por el Teorema 3.2 podemos generalizar la definición de los grupos de trenzas B_k y P_k sustituyendo los espacios de configuraciones del plano \mathbb{C} por los de una variedad arbitraria M .

Definición 4.1 *Si M es una variedad, definimos el grupo de trenzas puras y el grupo de trenzas de M , como los grupos fundamentales de los espacios de configuraciones: $P_k(M) = \pi_1(F_k(M))$ y $B_k(M) = \pi_1(F_k(M)/\Sigma_k)$.*

En el caso de los grupos de trenzas puras, el siguiente resultado de J. Birman muestra que el caso más interesante es aquel en que M es una superficie.

Lema 4.2 (J. Birman) *Sea $\varphi_* : P_k(M) \rightarrow (\pi_1 M)^k$ el homomorfismo inducido por la inclusión $\varphi : F_k(M) \rightarrow M^k$. Entonces φ_* es un isomorfismo si $\dim M \geq 3$.*

Esto es, si M es una variedad de dimensión mayor o igual que 3, entonces la estructura del grupo $P_k(M)$ está completamente determinada por la geometría de M . Por otro lado, en el caso en que M es una superficie, la estructura del grupo $P_k(M)$ es mucho más elaborada que la de $(\pi_1 M)^k$, ya que contiene información del grupo de trenzas puras del plano $P_k \cong P_k(\mathbb{R}^2)$, como se ver'a a continuación.

Supóngase que M es una superficie y sea $V \subset M$ una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^2 . Es claro que la inclusión $\mathbb{R}^2 \approx V \subset M$ induce una inclusión $i : F_k(\mathbb{R}^2) \subset F_k(M)$ a nivel de espacios de configuraciones y por tanto un homomorfismo $i_* : P_k(\mathbb{R}^2) \rightarrow P_k(M)$ a nivel de grupos fundamentales. El siguiente resultado relaciona a los morfismos i_* y φ_* definidos anteriormente y puede considerarse como el teorema fundamental sobre grupos de trenzas puras de superficies.

Teorema 4.3 (J. Birman, C. Goldberg) *Si M es una superficie compacta, $M \neq S^2, \mathbb{R}P^2$, entonces:*

1. φ_* es un epimorfismo, es decir, existe una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \ker \varphi_* \longrightarrow P_k(M) \xrightarrow{\varphi_*} (\pi_1 M)^k \rightarrow 1$$

2. i_* es un monomorfismo. Por lo tanto P_k puede identificarse con un subgrupo de $P_k(M)$.
3. $\ker \varphi_* = \langle\langle P_k \rangle\rangle$, es la cerradura normal de P_k en $P_k(M)$.

Recordemos que si H es un subgrupo de G , entonces la cerradura normal de H en G es el mínimo subgrupo normal $\langle\langle H \rangle\rangle$ que contiene a H . De manera explícita, $\langle\langle H \rangle\rangle$ es el conjunto de todos los productos finitos

$$\langle\langle H \rangle\rangle = \left\{ \prod_{i=1}^k g_i h_i g_i^{-1} \mid g_i \in G, h_i \in H; \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

Así pues, el teorema anterior provee una descripción combinatoria para $\ker \varphi_*$ como $\langle\langle P_k \rangle\rangle$ y por tanto de $P_k(M)$ como una extensión de $(\pi_1 M)^k$ por $\langle\langle P_k \rangle\rangle$.

Sin embargo esto está lejos de ser una descripción geométrica satisfactoria del grupo $\ker \varphi_*$. Recientemente, trabajo del autor ha permitido expresar a $\ker \varphi_*$ como el grupo fundamental de cierto espacio de configuraciones. La idea básica consiste en estudiar configuraciones en la cubierta universal de la superficie M como se muestra a continuación.

Recordemos que toda superficie compacta, orientable M_g de género $g \geq 1$, puede expresarse como cociente del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 módulo un subgrupo discreto $\Gamma_g \leq Iso^+(\mathbb{H}^2)$ del grupo de isometrías de \mathbb{H}^2 . Aquí $Iso^+(\mathbb{H}^2) \cong PSL(2, \mathbb{R})$ actúa en \mathbb{H}^2 vía transformaciones de Möbius.

Definición 4.4 *Si G actúa libremente en M y $k \geq 1$, definimos el espacio de configuraciones de órbitas en M por:*

$$F_k(M; G) = \{(x_1, \dots, x_k) \in M^k \mid G \cdot x_i \neq G \cdot x_j\}$$

donde $G \cdot x$ denota a la órbita del punto $x \in M$ bajo la acción de G .

Obsérvese que en este caso, el grupo $G^k = G \times \dots \times G$ actúa libremente en $F_k(M; G)$, coordenada a coordenada y que el cociente $F_k(M; G) / G^k$ es homeomorfo al espacio de configuraciones ordinario $F_k(M/G)$. El siguiente resultado fue probado en [10] usando los métodos desarrollados en [9].

Teorema 4.5 (M. Xicoténcatl) *Sea M_g una superficie compacta, orientable, de género $g \geq 1$, tal que $M_g \approx \mathbb{H}^2/\Gamma$. Entonces:*

1. $\ker \varphi_* \cong \pi_1 F_k(\mathbb{H}^2; \Gamma)$ y por tanto
2. Existe una sucesión exacta:

$$1 \rightarrow \pi_1 F_k(\mathbb{H}^2; \Gamma) \rightarrow P_k(M_g) \rightarrow (\pi_1 M_g)^k \rightarrow 1$$

5 Espacios de funciones

En esta última sección mencionaremos una conexión muy importante entre los espacios de configuraciones y los espacios de funciones. A saber, los espacios $F_k(M)$ son componentes básicos de un modelo combinatorio para ciertos espacios de funciones, $C(M; X)$, conocido mejor como el espacio de configuraciones en M con coeficientes en X .

Definición 5.1 Si X, Y son espacios topológicos, denotaremos por $Map(X, Y)$ al conjunto de las funciones continuas $f : X \rightarrow Y$, equipado con la topología compacto-abierta y por $Map_*(X, Y)$ al subespacio de funciones que preservan el punto base.

Ejemplos:

1. Si $X = S^1$, entonces $Map(S^1, Y)$ es el espacio lazos libres de Y y se denota por ΛY .
2. El subespacio $Map_*(S^1, Y) \subset \Lambda Y$ es el espacio de lazos basados de Y y se denota por ΩY . Los espacio de lazos basados son importantes en el estudio de los grupos de homotopía ya que $\forall k: \pi_k(\Omega Y) \cong \pi_{k+1}(Y)$.
3. En el caso en que $X = \Sigma X'$ es la suspensión reducida de X' , existe un homeomorfismo natural entre espacios de funciones, dado por adjunción:

$$Map_*(\Sigma X', Y) \approx Map_*(X', \Omega Y)$$

4. Si $X = S^n$, el espacio $\Omega^n Y := Map_*(S^n, Y)$ es el espacio de lazos basados de dimensión n . Por adjunción se tiene que $\Omega^n Y \approx \Omega(\Omega^{n-1} Y)$.

Si M es una variedad y X un espacio, definimos el espacio de configuraciones de puntos de M con coeficientes en X , $C(M; X)$, como la **serie de Taylor**:

$$C(M; X) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} F_k(M) \times_{\Sigma_k} X^k \right] / \approx$$

donde: (i) la suma representa la unión disjunta de espacios, (ii) el grupo simétrico Σ_k actúa diagonalmente en $F_k(M) \times X^k$ y (iii) \approx es la relación de equivalencia:

$$[m_1, \dots, m_k; x_1, \dots, x_k] \approx [m_1, \dots, m_{k-1}; x_1, \dots, x_{k-1}] \quad \text{si } x_k = *.$$

El espacio $C(M; X)$ está filtrado de manera natural por la cardinalidad de las configuraciones

$$F_0 C \subset F_1 C \subset \dots \subset F_k C \subset \dots \subset C(M; X)$$

y admite una descomposición estable

$$C(M; X) \underset{s}{\simeq} \bigvee_{k=0}^{\infty} F_{k+1} C / F_k C$$

lo que permite por ejemplo, calcular la homología de $C(M; X)$ en términos de la homología de los espacios $F_k(M)$ y X . Más aún, el espacio $C(M; X)$ se puede interpretar como un espacio de funciones gracias al siguiente resultado.

Teorema 5.2 *Si X es del tipo de homotopía de un CW-complejo conexo, entonces existen equivalencias homotópicas:*

1. $C(\mathbb{R}, X) \simeq \Omega\Sigma X$
2. $C(S^1, X) \simeq \Lambda\Sigma X$
3. $C(\mathbb{R}^n, X) \simeq \Omega^n\Sigma^n X = \text{Map}_*(S^n, \Sigma^n X)$

Las equivalencias del teorema anterior son casos particulares de los resultados obtenidos por: I. James, J. Milnor, J.P. May, F.R. Cohen, L. Taylor y C.F. Bödigheimer, ver por ejemplo [3], [8]. Un resultado más general afirma que el espacio $C(M; X)$ es homotópicamente equivalente al espacio de secciones de cierto haz fibrado con fibra $\Sigma^m X$ y en algunos casos, equivalente a un espacio de funciones con valores en $\Sigma^m X$.

Bibliografía

- [1] E. Artin, “*Theorie der Zöpfe*”. Abh. Math. Sem. Hamburg, 4 (1925), 47–72.
- [2] E. Artin, “*Theory of braids*”. Annals of Math., 48 (1946), 101-126.
- [3] C.F. Bödigheimer, “*Stable splittings of mapping spaces*”. Algebraic Topology, Proc. Seattle (1985), Springer LNM 1286 (1987), 174–187.
- [4] J. Birman, “*Braids, links and mapping class groups*”. Annals of Math. Studies. Princeton University Press.
- [5] H.S.M. Coxeter, “*Factor groups of the braid group*” Proc. Fourth Canadian Math. Congress, Banff, 1957, 95–122.
- [6] E. Fadell, L. Neuwirth, “*Configuration spaces*”. Math. Scand.10, 111-118, 1962.
- [7] R.H. Fox, L. Neuwirth, “*The braid groups*”. Math. Scand., 10 (1962), 119-126.
- [8] J.P. May, “*The geometry of iterated loop spaces*”. Lecture Notes in Mathematics 271, Springer-Verlag.
- [9] M. Xicotécatl, “*Orbit configuration spaces, infinitesimal braid relations in homology and equivariant loop spaces*”. Ph.D. Thesis, University of Rochester, 1997.
- [10] M. Xicotécatl, “*On the pure braid group of a surface*”. Bol. Soc. Math. Mex. (3) Vol. 10, 2004.