Memorias de la XVII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 20, Agosto, 2007, pp. 177–181.

Nivel Superior

ESPACIOS CASI–ω–RESOLUBLES

Humberto Villegas Rodríguez
Escuela de Ciencias Físico-Matemáticas
Universidad Autónoma de Sinaloa

Resumen

En 1947 Katĕtov planteó el siguiente problema: ¿Existe un espacio topológico X sin puntos aislados en el cual toda función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua en algún punto? En [6] A. Tamariz y H. Villegas estudian los espacios casi–ω–resolubles y obtienen que la existencia de un espacio que no es casi–ω–resoluble es equivalente a la existencia de un espacio de Katĕtov. En esta exposición, se explican las ideas y los conceptos que se usan para obtener éste y otros resultados relacionados.

1 Introducción

En 1947 [3] M. Katĕtov planteó el siguiente problema: ¿Existe un espacio topológico X sin puntos aislados en el cual toda función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua en algún punto? Es fácil ver que si X tiene dos densos ajenos, entonces se puede definir una función f en X de tal manera que no sea continua en ningún punto, así que el espacio de Katĕtov hay que buscarlo en los espacios irresolubles, es decir espacios que no contienen densos ajenos. En 1986 Kunen K., Szymanski A., Tall F. [12] prueban que la existencia de un espacio de Katĕtov es equivalente a la existencia de un espacio Baire irresoluble y la existencia de un espacio Baire irresoluble es equiconsistente con la existencia de un cardinal medible.

En [6] Tamariz y Villegas estudian los espacios casi-ω-resolubles y obtienen que la existencia de un espacio que no es casi-ω-resoluble, es equivalente a la existencia de un espacio Baire irresoluble y por lo tanto equivalente a la existencia de un espacio de Katĕtov. En esta plática explicaremos las ideas y conceptos que se usan en [6] para obtener este resultado y otros relacionados. Entre estos conceptos se encuentran el de productos caja y espacios de funciones continuas con la topología caja, que tratamos en la siguiente sección.

2 Espacios de funciones continuas con la topología caja

Sea $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Un conjunto de la forma $\Pi_\alpha U_\alpha$, en donde U_α es un conjunto abierto de X_α para cada α, es llamado *caja abierta* de $\Pi_\alpha X_\alpha$. La topología sobre $\Pi_\alpha X_\alpha$ que tiene como base todas las cajas abiertas, es llamada *topología caja* del producto cartesiano $\Pi_\alpha X_\alpha$. A $\Pi_\alpha X_\alpha$ con la topología caja lo denotamos por $\square_\alpha X_\alpha$. Si para cada $\alpha \in I$, $X_\alpha = X$, escribiremos $\square X^I$, en lugar de $\square_\alpha X_\alpha$.

La topología caja fue la primera topología que se consideró para un producto infinito de espacios (*Tietze* 1924 [8]), pero dado que esta topología no preserva propiedades complejas como la compacidad, conexidad y metrizabilidad, entre otras, fue sustituida por la topología de Tychonoff. La topología de *Tychonoff* sobre $\Pi_\alpha X_\alpha$ es la que tiene como base todos los conjuntos de la forma:

$\Pi_\alpha U_\alpha$, donde U_α es un abierto de X_α, y $U_\alpha = X_\alpha$, excepto para un número finito de índices.

Consideremos el espacio de todas las funciones de X a $\mathbb{R}$ con la topología de Tychonoff que denotamos por $\mathbb{R}^X$. La *topología de la convergencia puntual* sobre $C(X)$, es la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}^X$; es natural considerar entonces la topología que hereda $C(X)$ como subespacio de $\square\mathbb{R}^X$. A la topología que hereda $C(X)$ como subespacio de $\square\mathbb{R}^X$ la llamaremos *topología caja*, y a $C(X)$ con esta topología lo denotamos por $C_\square(X)$.

Un espacio topológico Tychonoff X es *casi-ω-resoluble* si para cualquier función continua $f : X \to R$, siempre es posible encontrar funciones $g_1,\ g_2 : X \to \mathbb{R}$, tales que $g_1(x) < f(x) < g_2(x)$ para todo $x \in X$, y de tal manera que si $f_1 : X \to R$ es una función continua y $g_1(x) < f_1(x) < g_2(x)$ para todo $x \in X$, entonces $f = f_1$. Los espacios *casi-ω-resolubles* se definieron en [6] de manera diferente, pero no es difícil ver la equivalencia de las dos definiciones.

La relación que existe entre los espacios casi-ω-resolubles y $C_\square(X)$ se expresa en el siguiente teorema:

Teorema 2.1. *(Tamariz-Villegas, [6]) Un espacio de Tychonoff X sin puntos aislados es casi-ω-resoluble si y sólo si $C_\square(X)$ es discreto.*

Recordemos que si X es un espacio topológico, un punto $x \in X$ es *aislado* en X si $\{x\}$ es abierto y X es *discreto* si cada uno de sus puntos es aislado.

En toda esta exposición siempre se supone que los espacios son Tychonoff, es decir Hausdorff, completamente regulares e infinitos.

3 Algunos espacios que son casi-ω-resolubles

En esta sección se presentan algunos ejemplos y caracterizaciones de espacios casi-ω-resolubles.

Teorema 3.1. $C_\square(\mathbb{R})$ *es un espacio discreto.*

Prueba: Sea $f \in C_\square(\mathbb{R})$. Mostraremos que existe una caja abierta $\prod_{x\in\mathbb{R}} G_x$ tal que $f \in \prod_{x\in\mathbb{R}} G_x$ y ésta es la única función continua que contiene.

Para cada $r \in \mathbb{Q}$ existe una sucesión $\{x_n^r\}$ de puntos irracionales tal que $x_n^r \to r$, que cumple además que si $r_1 \neq r_2$, entonces $\{x_n^{r_1}\}_{n\in\omega} \cap \{x_n^{r_2}\}_{n\in\omega} = \emptyset$. Consideremos la caja abierta $\prod_{x\in\mathbb{R}} G_x$, donde

$$G_x = \begin{cases} (f(x) - \frac{1}{n}, f(x) + \frac{1}{n}) & si \quad x = x_n^r, r \in \mathbb{Q}, n \in \omega \\ (f(x) - 1, f(x) + 1) & en \quad otro \quad caso. \end{cases}$$

Es claro que $f \in \prod_{x\in\mathbb{R}} G_x$, y además f es la única función continua que contiene $\prod_{x\in\mathbb{R}} G_x$; en efecto sea $g \in \prod_{x\in\mathbb{R}} G_x$ una función continua; dado que para cada $r \in \mathbb{Q}$, $x_n^r \to r$ entonces $g(x_n^r) \to g(r)$. Por otro lado se tiene que para cada $n \in \omega$,

$$f(x_n^r) - \frac{1}{n} < g(x_n^r) < f(x_n^r) + \frac{1}{n},$$

tomando límites tenemos que $f(r) \leq g(r) \leq f(r)$, esto es $f(r) = g(r)$. Como r es arbitrario y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ se tiene que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Una propiedad importante que se usa en la demostración de que $\mathbb{R}$ es casi-ω-resoluble es el hecho de que $\mathbb{R}$ es separable, es decir contiene un conjunto denso numerable. Vemos ahora que la separabilidad de un espacio es suficiente para obtener que es casi-ω-resoluble.

Teorema 3.2. *(Tamariz-Villegas,* [6]*) Un espacio separable X sin puntos aislados es casi-ω-resoluble.*

Un corolario importante de este teorema es el siguiente:

Corolario 3.3. *Todo espacio infinito numerable sin puntos aislados es casi-ω-resoluble.*

El siguiente teorema es una caracterización de los espacios casi-ω-resoluble que nos permitirá obtener muchos más ejemplos de este tipo de espacios. Recordemos que estamos considerando espacios Tychonoff.

Teorema 3.4. *(Tamariz-Villegas,* [6]*) Un espacio X sin puntos aislados es casi-ω-resoluble, si y sólo si, X tiene una cubierta $\{D_n\}_{n>0}$ de conjuntos ajenos dos a dos, tal que cualquier conjunto abierto de X intersecta una infinidad de elementos de los $\{D_n\}_{n>0}$.*

Un espacio X es *resoluble* si contiene dos conjuntos densos ajenos. Más generalmente, dado un cardinal α, decimos que X es un espacio *α-resoluble* si existe una familia de cardinalidad α de subconjuntos densos de X, ajenos dos a dos. Un caso de especial importancia son lo espacios *ω- resolubles*, es decir espacios para los cuales existe una familia numerable de subconjuntos densos ajenos dos a dos. Estos espacios forman una clase amplia que contiene, entre otros, a los espacios Hausdorff sin puntos aislados que son metrizables, o localmente compactos o numerablemente compactos. Se puede ver en [9] una selección de resultados que tratan sobre los espacios resolubles y ω- resolubles.

Aplicando el Teorema 3.4 obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.5. *Todo espacio ω-resoluble es casi-ω-resoluble.*

Eric K. van Douwen mostró que existen espacios numerables regulares sin puntos aislados que no son ω-resolubles [10], y por otro lado por el Corolario 3.3 se tiene que todo espacio numerable sin puntos aislados es C$_\square$-discreto. Esto nos muestra que la clase de espacios casi-ω-resoluble contiene en sentido propio a la clase de los espacios ω-resolubles.

4 Espacios Baire irresolubles

Las consideraciones anteriores sobre los espacios ω-resolubles y el Teorema 3.5 nos hacen preguntarnos ¿existen espacios que no sean casi-ω-resolubles? En esta última sección damos una respuesta a esta pregunta. Recordamos antes algunas definiciones. Un subconjunto F de un espacio topológico X es *denso en ninguna parte* si $Int(\overline{F}) = \emptyset$. No es difícil ver que la unión finita de conjuntos densos en niguna parte es densa en ninguna parte. Un espacio topológico X es de *primera categoría* si se puede expresar como una unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Un espacio X es de *segunda categoría* si no es de primera categoría. La siguiente propiedad de los espacios de segunda categoría es muy conocida: En un espacio de segunda categoría cualquier sucesión de conjuntos densos abiertos, tiene intersección no vacía.

Un espacio X es *Baire*, si cualquier sucesión de conjuntos densos abiertos en X tiene intersección densa.

El siguiente teorema nos muestra que un espacio que no sea casi-ω-resoluble debemos buscarlo entre los espacios de segunda categoría.

Teorema 4.1. *(Tamariz-Villegas,* [6]*) Si X es un espacio de primera categoría sin puntos aislados, entonces X es casi-ω-resoluble.*

Un espacio X sin puntos aislados es *irresoluble*, si no se puede escribir como la unión de dos subconjuntos densos ajenos, es decir, si X no es resoluble.

Una técnica para construir espacios irresolubles es debida a Hewitt [11]. El concepto básico de esta construcción es el de topología maximal. Un espacio X es *maximal* si no tiene puntos aislados y cualquier topología más fuerte sobre X tiene puntos aislados. Un espacio X es *submaximal* si todo subespacio denso de X es abierto.

Es claro que todo espacio submaximal es irresoluble y se puede ver en [11] que todo espacio maximal es submaximal. También fue probado por Hewitt [11] que todo espacio topológico sin puntos aislados tiene una extensión maximal, es decir una topología más fuerte maximal.

Tenemos enseguida el resultado principal de esta sección:

Teorema 4.2. *(Tamariz-Villegas,* [6]*) Las siguientes condiciones son equivalentes en ZFC:*

i) existe un espacio Baire irresoluble;
ii) existe un espacio submaximal que no es casi-ω-resoluble;
iii) existe un espacio maximal que no es casi-ω-resoluble.

El siguiente corolario nos da un respuesta a la pregunta que nos planteamos al principio de esta sección ¿existen espacios que no sean casi-ω-resolubles?

Corolario 4.3. *La existencia de un cardinal medible es equiconsistente con la existencia de un espacio maximal que no es casi-ω-rresoluble*

Se obtiene la demostración aplicando el hecho de que la existencia de un cardinal medible es equiconsistente con la existencia de un espacio Baire irresoluble[12] y el Teorema 4.2.

Bibliografía

[1] Engelking R. *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[2] García-Máynez A., Tamariz Mascarúa A. *Topología General*, Porrúa, México, 1988.

[3] Katětov M. On topological spaces containing no disjoint dense sets, Mat, Sb, 21 (1947), 3-12.

[4] Williams S.W. *Box Products*, en Handbook of Set Theoretic Topology, Kunen K. y Vaughan J.E., editores, North Holland, (1984), 169-200.

[5] Van Douwen E.K. *Covering and separation properties of box products*, en Surveys in General Topology, Academic Press, New York, (1980), 55-130.

[6] Tamariz Mascarúa A. y Villegas Rodríguez H. *Spaces of continuos functions, box products y almost-ω-resoluble spaces,* Comm. Math. Univ. Carolinae **43** (2) (2002),687-705.

[7] Hewitt E. *Rings of real-valued continuous functions I*, Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 175-179.

[8] Tietze H. *Beitrage zur allgemeinen topologie I*, Math. Ann. **88** (1923), 280-312.

[9] Comfort W.W., García-Ferreira S. *Resolvability: a selective survey and some new results*, Topology Appl. **74** (1996), 149-167.

[10] van Dowen E. K. *Applications of maximal topologies*, Topology Appl. **51** (1993), 125-139.

[11] Hewitt E. *A problem of set-theoretic topology*, Duke Math. J. **10** (1943), 309-333.

[12] Kunen K., Szymanski A., Tall F. *Baire irresoluble spaces and ideal thory*, Annal. Math. Silesiana **2** (14) (1986), 98-107.