Memorias de la XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México. Mosaicos Matemáticos No. 20, agosto 2007, pp. 1-6.

Nivel Medio Superior y Superior

EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE SERVICIOS

Ricardo Aceves García (aceves@servidor.unam.mx)
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México

Introducción

Una técnica importante pero poco conocida es la denominada "Teoría de Localización de Servicios", la cual ofrece un gran potencial para la solución de problemas, donde se tenga que ubicar geográficamente uno o más servicios, para atender a un conjunto de usuarios. Entendiéndose por servicio: un hospital, un distrito político, una escuela, una fábrica, una estación de bomberos o de policía, etc.

El problema es muy antiguo, de la literatura matemática se tiene que Cavalier (1947), consideró el problema de determinar un punto cuya suma de sus distancias a tres puntos dados, sea mínima. Fagnano (1775), demostró que la suma de las distancias a los vértices de un cuadrilátero es mínima, en la intersección de las diagonales. Tedenat (1810), resolvió el mismo problema pero considerando *n* puntos. Y Steiner (1837) estableció las condiciones necesarias y suficientes para la obtención del mínimo.

La aplicación se presenta hasta los trabajos de Alfred Weber (1929) y Walter Isard (1956), sobre localización industrial, pero solo hasta los trabajos de Kuhn (1963) se pudo considerar al problema completamente tratado y resuelto.

En la actualidad a la localización de servicios se ha vinculado fuertemente con las técnicas de optimización, debido a los diferentes contextos en los que surge, utilizando para su análisis y solución a la programación matemática.

El problema general de localización de servicios se puede indicar como: "Dada la localización de cada usuario, su demanda y los costos (tiempo, distancia, etc.) de transporte en la región de interés, determinar el número de servicios, la ubicación geográfica y la capacidad de cada uno de ellos, de tal forma que se optimicen los costos de transporte, de funcionamiento, fijos de instalación, etc."

Los principales componentes de un problema de localización son:

Demanda: Definida como la interacción entre servicios y puntos de demanda.

Número de Servicios: Representa la cantidad de servicios que se desean o requieren localizar.

Medida de Distancia: Representa una medida de la forma del recorrido entre los puntos de demanda y la ubicación de los servicios, en la región o área de interés.

Espacio de Soluciones: Indica los diferentes sitios o lugares donde se puede ubicar algún servicio.

Función Objetivo: Permite evaluar soluciones alternativas y generalmente representa los costos (utilidad) total, por ubicar los servicios.

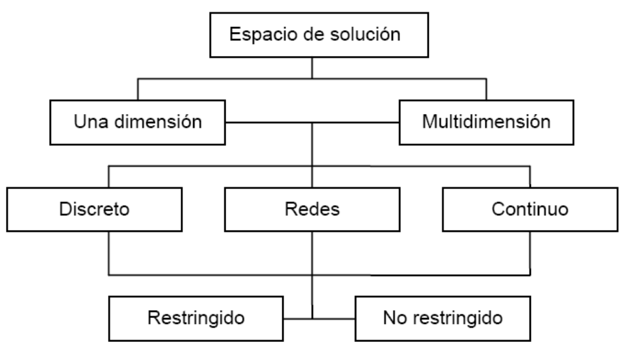
Existen infinidad de posibles aplicaciones de estos modelos, entre los que tenemos:

Servicios de emergencia. Las estaciones de bomberos, policía, urgencias médicas, rescate de accidentes, entre otros. Tienen el problema de localizar las unidades de respuesta ya que el tiempo de viaje, es un componente importante del criterio de costo.

Comunicaciones. Localizar centros de operación en una red de comunicaciones, para minimizar los costos de transmisión, o localizar los servicios de computación y software en una red de computadoras, para minimizar los costos de transmisión y almacenamiento anual, son el tipo de problemas que se pueden resolver con esta teoría.
Servicios públicos. Localizar servicios públicos para maximizar el beneficio o minimizar el costo de traslado del usuario, también pueden ser formulados con este tipo de herramienta. Por ejemplo, minimizar el costo de transporte del usuario mediante la localización de un centro comercial o un mercado, son el tipo de problemas que es posible resolver usando esta técnica.
Paradas de autobuses y buzones de correos. El problema de localizar paradas de autobuses y buzones de correos, consiste en ubicar un conjunto de ellos, de tal forma que, la distancia máxima que un usuario debe recorrer sea mínima. O localizar el número mínimo de estos servicios, tal que, la distancia máxima que un usuario debe recorrer, sea menor a un determinado valor.
Servicios educativos. El problema de localización de escuelas de diferente nivel, es sustancial y podría ser resuelto utilizando estas técnicas, e implementarse en los diferentes programas de planeación.
Aplicaciones militares. Muchos problemas de logística militar consideran la localización de sitios de abastecimiento de municiones y armas. Puesto que el problema de traslado es un elemento importante en estos casos.

Clasificación de los problemas de localización

Es posible establecer varias formas para clasificar los problemas de localización de servicios, sin embargo se usará como base el espacio de soluciones.



Formulación Matemática del problema

Una de las características que hacen la diferencia entre los modelos de localización, es la forma como la demanda y los sitios candidatos para instalar servicios son representados. En los modelos planares (caso continuo), la demanda ocurre en cualquier parte del plano y los servicios pueden ser localizados también en cualquier parte del mismo.

En los modelos de localización en redes, la demanda, los viajes entre sitios de demanda y la ubicación de los servicios, ocurren solamente en el contexto de una estructura compuesta de nodos y arcos. Con frecuencia se supone que la demanda ocurre solo en los nodos de la red y la localización de los servicios puede ser en nodos o arcos. Sin embargo, algunos modelos consideran que la demanda también puede ocurrir en los arcos de la red.

Los modelos discretos permiten el uso de distancias arbitrarias entre nodos, y con este supuesto la estructura de red se pierde y al eliminarse esta restricción del problema, se tiene una clase de modelos más general que permite ampliar el rango de problemas a ser resueltos. Los problemas de localización discretos son generalmente formulados como problemas de programación matemática entera mixta.

a).- Caso continuo

$$\underset{x}{Min} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\, l_p\left(X_i, a_j\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} S_{ij}\, l_p\left(X_i, X_r\right)$$

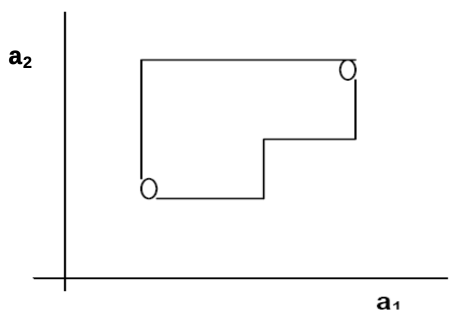
Donde

m: Número de servicios a ser localizado
n: Número de centros o puntos de demanda
r_{ij} : Factor de peso entre puntos de demanda y servicios
S_{ij} : Factor de peso entre servicios
$X_i = (x_1, x_2)$: Coordenadas de localización de los nuevos servicios
$a_j = (a_1, a_2)$: Coordenadas de localización de los puntos de demanda
$l_p (X_i , a_j)$: Medida de distancia entres puntos de demanda y servicios
$l_p (X_i , X_r)$: Medida de distancia entre servicios

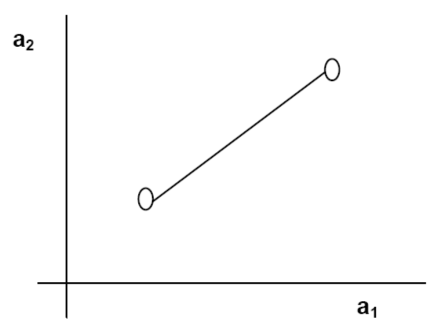
Donde la medida de distancia para el caso continuo es la norma:

$$l_p\left(X_i a_j\right) = \left[\left|x_1 - a_1\right|^p + \left|x_2 - a_2\right|^p\right]^{1/p} \qquad , \quad p \geq 1$$

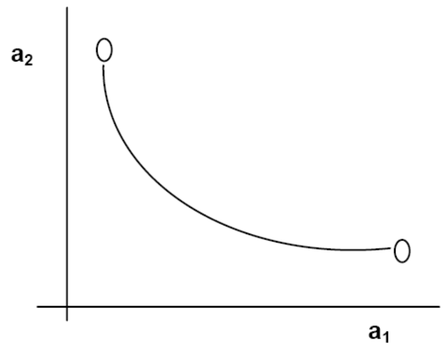
Si p =1, se tiene la medida de distancia rectangular, es apropiada para el análisis de algunas áreas urbanas, donde los viajes ocurren en un conjunto ortogonal de calles. O en el interior de edificaciones, donde el conjunto de caminos es paralelo a las paredes de las edificaciones.



Si p =2, se tiene la medida de distancia Euclidiana, es apropiada para ciertos problemas como tendido de tuberías, cables eléctricos o telefónicos, rutas marítimas y aéreas, entro otras.



Si se usa la distancia cuadrado de la Euclidiana, es apropiada para ciertos problemas del tipo emergencia, en donde lo fundamental es llegar rápido sin importar el costo, o también para problemas donde haya que transportar mercancías o personas.



Y en general se puede tener cualquier tipo de medida de distancia establecida como una norma.

b).- Caso en redes Los principales problemas de localización en una estructura de tipo red son los siguientes, en donde la medida de distancia es la ruta más corta.

b1).- Problema de cobertura máxima. La Función objetivo establece maximizar el número de nodos con demanda cubierta

$$
\begin{aligned}
Max \quad & G = \sum_i h_i Z_i \\
s.a. \quad & \sum_j a_{ij} x_j \geq Z_i \quad , \quad \forall \ i \\
& \sum_j x_j \leq P \\
& x_j = 0,1 \ \ \mathrm{Z_i} = 0,1
\end{aligned}
$$

Donde

h_i: Demanda en el nodo i

P : Número de servicios a localizar

$$Z_i = \begin{cases} 1 & si\ el\ nodo\ i\ es\ cubierto \\ 0 & otra\ \ cos a \end{cases}$$

b2).- Problema de Conjunto Cobertura. La función objetivo establece minimizar el costo total de ubicar servicios.

$$
\begin{aligned}
Minimizar \quad & Z = \sum_i f_i x_i \\
\mathrm{s.a.} \quad & \sum_j a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall \ i \\
& x_j = 0, 1
\end{aligned}
$$

Donde:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ el\ servicio\ j\ cubre\ la\ demanda\ del\ nodo\ i \\ 0 & otra\ \cos a \end{cases}$$

f_i: Costo fijo de localizar un servicio en el sitio *i*

$$x_i = \begin{cases} 1 & si\ se\ localiza\ el\ servicio\ en\ un\ sitio\ candidato\ i \\ 0 & otra\ \cos a \end{cases}$$

b3).- Problema de Centros o Mínimax . La función objetivo establece minimizar la distancia máxima entre los nodos de demanda y los nodos con servicios más cercanos.

$$\begin{aligned} &Minimizar \quad W \\ &s.\ a. \quad \sum_j Y_{ij} \\ &\qquad \sum_j x_j = P \\ &\qquad Y_{ij} \leq X_j \quad \forall\ i, j \\ &\qquad W = h_i \sum d_{ij}\ Y_{ij} \quad \forall\ i \\ &\qquad X_j = 0, 1 \quad Y_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

Donde

d_{ij} : Distancia del nodo de demanda i al nodo de servicio o sitio candidato

h_i : Demanda en el nodo i *ih*

P: Número de servicios a localizar

$$X_j = \begin{cases} 1 & si\ se\ localiza\ el\ servicio\ en\ el\ sitio\ j \\ 0 & otra\ \cos a \end{cases}$$

Y_{ij} : Fracción de la demanda del nodo i atendida por el servicio del nodo

W: Distancia máxima entre un nodo de demanda y el servicio más cercano

c).- Caso discreto.

La formulación para el caso discreto se puede establecer de la siguiente forma donde la medida de distancia es cualquiera.

$$\begin{aligned} &Min \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}\ x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i\ y_i \\ &s.a. \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad \forall\ i \qquad (1) \\ &\qquad x_{ij} - y_i = 0, \quad \forall\ i, j \qquad (2) \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j \, x_{ij} \leq s_i \, y_i \,, \quad \forall \, i \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \, x_{ij} + \sum b_i \, y_i \leq r \,, \quad \forall \, j \qquad (4)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad y_i = 1, 0 \qquad \forall \, i, j$$

Donde

C_{ij}: Costo de atender la demanda del servicio *i* al centro de demanda *j*.
x_{ij}: Fracción de la demanda total atendida por el servicio *i*, del centro de demanda *j*.
$y_i = 0$, 1: Indica si el servicio *i* esta abierto o cerrado, respectivamente.
s_i: Representa la capacidad del servicio *i*.
a_{ij}, b_i, *r*: Representan constantes del conjunto de restricciones adicionales.

Y las restricciones representan las siguientes condiciones.

(1): Asegura que la demanda de cada usuario sea satisfecha.
(2): Garantiza que los clientes serán atendidos solo de servicios abiertos.
(3): Evita violar la capacidad de los servicios abiertos.
(4): Considera la posibilidad de incluir limitantes (lineales) sobre las variables x_{ij} y y_i.

Referencias

Love F., Robert; Morris G., James; Wesolowsky O., George: 1988. *Facilities Locatio*. Noth-Holland.
Mirchandani B., Pitu; Francis L., Richard: 1990. *Discrete Location Theory*. John Wiley & Sons.
Francis L., Richard; White A., John: 1974. *Facility Layout and Locatio*. Prentice Hall.
Handler Y., Gabriel; Mirchandai B., Pitu: 1979. *Location on Networks*. MIT-PRESS.
Marks S., Daskin: 1995. *Network and Discrete Location*. MIT-PRESS.