Memorias de la XVII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 20, Agosto, 2007, pp. 151–161.

ALGUNAS TÉCNICAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE CONTINUOS INDESCOMPONIBLES

Carlos A. Robles Corbalá **Martha P. Andrade Espinoza**
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora.

Resumen

En el presente artículo presentamos dos técnicas de construcción de continuos indescomponibles, una de las cuales logra una caracterización de los mismos en términos del cálculo del interior de todos sus subcontinuos propios, dicha técnica también nos servirá para probar que el continuo de Knaster es indescomponible.

La otra técnica considerada, también logra una caracterización de los continuos indescomponibles en términos de que el continuo sea irreducible respecto a tres de sus puntos; con ella y utilizando el hecho de que intersección anidada de continuos es un continuo, podemos construir una familia de subcontinuos indescomponibles del plano y un continuo indescomponible por cada tres puntos distintos de $\mathbb{R}^2$.

Por último, presentamos un conjunto de propiedades de esta clase de continuos relacionadas con el concepto de la ***composante*** *de un punto del continuo X, entre las cuales destaca la siguiente: la composante es un conjunto denso y conexo en el continuo X.*

Otras propiedades que se presentan son: la caracterización de continuos irreducibles respecto al punto p en términos de la composante en p, así como también el que los continuos descomponibles y no irreducibles poseen como composante (única) al espacio total X. Una propiedad fundamental en la caracterización de continuos indescomponibles es que las composantes son ajenas dos a dos.

Probaremos además que con una unión numerable de subcontinuos podemos formar las composantes; además que en el continuo indescomponible X, la colección de composantes en X es más que numerable.

1 Definición y caracterización de continuos indescomponibles.

Definición 1.1 *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado. Un subcontinuo es un continuo el cual está contenido en un espacio métrico. Un continuo* X *es* ***descomponible*** *si* $X = A \cup B$*, donde* A *y* B *son subcontinuos propios de* X*. Diremos que un continuo* X *es* ***indescomponible*** *si no es descomponible.*

Ejemplo 1.2 *El intervalo* $[0, 1]$ *así como cualquier arco es un continuo, el cual es descomponible. Obsérvese que hay una infinidad de formas de poder descomponer este continuo, por ejemplo una de ellas es tomando*

$$A = \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad y \quad B = \left[\frac{1}{3}, 1\right].$$

Luego A *y* B *son subcontinuos propios de* $[0, 1]$ *y* $A \cup B = [0, 1]$.

Ejemplo 1.3 *Tomemos* $P = S^1 \cup ([1,2] \times \{0\})$, *donde* $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. *A* P *se le conoce como la paleta y es un continuo descomponible. Una forma de descomponerlo es la siguiente: Tomemos*

$$A = S^1 \cup \left(\left[1, \frac{5}{3} \right] \times \{0\} \right) \quad y \quad B = \left(\left[\frac{4}{3}, 2 \right] \times \{0\} \right),$$

Claramente $P = A \cup B$, *donde* A *y* B *son subcontinuos propios de* P.

Ejemplo 1.4 *La 1-esfera, como cualquier n-esfera, es un continuo descomponible.*

Ejemplo 1.5 *El continuo* $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ *es la cerradura de* F *donde* $F = \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$. *Obsérvese que el continuo* $\operatorname{sen} \frac{1}{x} = F \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$, *además éste es un continuo descomponible. Una forma de descomponerlo es tomando*

$$A = \{ \left(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq \frac{1}{2} \} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$$

y

$$B = \{ \left(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \right) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \}.$$

Así A *y* B *son subcontinuos propios de sen*$\frac{1}{x}$ *y claramente* $A \cup B = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

Ejemplo 1.6 *El Círculo de Varsovia. Tomemos el continuo* X *de* $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ *y consideremos un arco* Y *del punto* $(0,-1)$ *al punto* $(1, \mathit{sen}\,(1))$ *de tal forma que,*

$$X \cap Y = \{(0,-1), (1, \ \mathit{sen}\,(1))\}.$$

Entonces $Z = X \cup Y$ *es llamado el Círculo de Varsovia. Este continuo es un continuo descomponible y lo podemos descomponer en una infinidad de formas similares al ejemplo anterior.*

Éstos y más ejemplos se pueden consultar en [1] [2] [3] [4] y [8].

A simple vista este concepto nos pudiera confundir pensando que todos los continuos son descomponibles, pero en realidad existen muchos más continuos indescomponibles. Por ello, a continuación nos enfocaremos en presentar algunas propiedades, conceptos y ejemplos de continuos indescomponibles.

El siguiente teorema nos ayudará en la construcción de nuestro primer ejemplo de continuos indescomponibles; pero antes requerimos del siguiente lema.

Lema 1.7 *Sea* X *un continuo y* Z *un subcontinuo de* X. *Si* $X - Z = A \cup B$ *entonces* $Z \cup A$ *y* $Z \cup B$ *son subcontinuos de* X.

Para su demostración consultar [1] (Lema 7.2, p.100).

Teorema 1.8 *Un continuo X es indescomponible si y sólo si todos sus subcontinuos propios tienen interior vacío.*

Prueba. Primero supongamos por contradicción que X es descomponible, tenemos que probar que existe algún subcontinuo propio que tiene interior no vacío.

Sean A y B subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$. Entonces $X - B \subset A$, pero como B es cerrado y propio tenemos que

$$\emptyset \neq X - B \subset \mathring{A}$$

por lo que

$$\mathring{A} \neq \emptyset.$$

Ahora probaremos el otro sentido del teorema, también por contradicción. Supongamos que A es un subcontinuo propio de X tal que

$$\mathring{A} \neq \emptyset$$

y probemos que X es un continuo descomponible.

Existen dos posibles casos respecto a la conexidad de $X - A$:

- $X - A$ es conexo.

  Entonces $\left(\overline{X - A}\right)$ es un subcontinuo de X. Como $\mathring{A}$ es abierto, no vacío y está contenido en A, es claro que $\mathring{A} \cap \left(\overline{X - A}\right) = \emptyset$. Por lo tanto $\left(\overline{X - A}\right)$ es subcontinuo propio de X y $X = A \cup \left(\overline{X - A}\right)$.

- $X - A$ es disconexo.

  Existen dos conjuntos mutuamente separados y no vacíos H y K tales que $X - A = H \cup K$. Por el Lema 1.7 tenemos que $A \cup H$ y $A \cup K$ son subcontinuos propios de X, y además
  $$X = (X - A) \cup A = (H \cup K) \cup A = (A \cup H) \cup (A \cup K).$$

En cada caso se tiene que X es la unión de dos subcontinuos propios, por lo tanto X es descomponible. ■

2 El continuo arcoiris de Knaster.

El siguiente es un ejemplo de un continuo indescomponible.

Ejemplo 2.1 *Este continuo indescomponible es conocido como arcoiris de Knaster. Se construye de la siguiente manera:*

Sea C es el conjunto de Cantor de tercios intermedios y consideremos el subconjunto $C_0 = C \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$. Ahora construimos todas las semicircunferencias positivas en $\mathbb{R}^2$ con *centro* $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ *y que pasan por los puntos de* C_0 *(semicircunferencias positivas en* $\mathbb{R}^2$ *con puntos de* C_0 *equidistantes al punto* $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$*), entonces a la unión de tales circunferencias llamémosle* X_0*.*

Ahora consideremos todas las semicircunferencias en $\mathbb{R}^2$ *con coordenadas no positivas con centro en el punto* $\left(\frac{5}{6}, 0\right)$ *y por extremo algunos puntos de* C_0*; denotemos por* X_1 *a la unión de estas semicircunferencias. Seguimos el proceso inductivamente, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, donde* X_n *será la unión de las semicircunferencias en* $\mathbb{R}^2$ *con coordenadas no positivas que tienen por extremo pares de puntos de* C_0 *y centro a* $\left(\frac{5}{2(3)^n}, 0\right)$*.*

Entonces, el arcoiris de Knaster se define como $X = X_0 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$*, el cual es un* ***continuo****. En efecto:* X *es* ***conexo*** *pues es unión de conjuntos conexos que se intersectan 2 a 2, y es* ***compacto****, pues es cerrado y acotado. Por lo tanto* X *es un continuo. Tenemos que todo subcontinuo propio de* X *es un arco (pues pegando arcos es como lo construimos) cuyo interior en* X *es vacío. Por el teorema anterior resulta que* X *es indescomponible.*

En la Figura 1, se muestran los primeros pasos en su construcción.

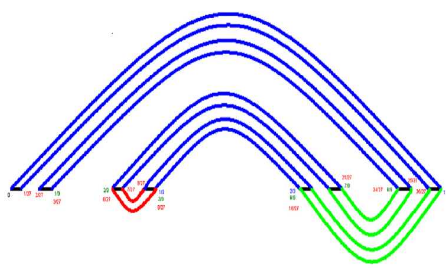


Figura 1: Arcoiris de Knaster

3 Otra técnica para obtener continuos indescomponibles.

El siguiente teorema cuya demostración se encuentra en [1] y [2] nos proporciona un método para la construcción de continuos.

Teorema 3.1 *Si* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de subcontinuos de un espacio métrico* (Y, d) *, tal que para toda* $n \in \mathbb{N}$*,* $X_{n+1} \subset X_n$ *entonces* $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ *es un continuo.*

Otro resultado que utilizaremos pero que omitimos su prueba para no hacer más extensa la escritura de este artículo, es el siguiente:

Lema 3.2 *Sea* X *un continuo. Si* D *es un subcontinuo propio de* X*, entonces existe un subcontinuo propio* C *de* X *tal que* $C \neq D$ *y* $D \subset C$*.*

Su demostración la podemos encontrar en [1] y [2] .

A continuación estudiaremos el concepto de composante, que está relacionado con las propiedades que estamos trabajando.

Definición 3.3 *Si X es un continuo y $p \in X$,* ***la composante*** *de p es el conjunto de todos los puntos x de X tales que existe algún subcontinuo propio de X que contiene a p y x.*

Por ejemplo, si $X = [0,1]$, la composante de 0 es el subconjunto $[0,1)$, la composante de 1 es $(0,1]$ y la de cualquier punto distinto de 0 y 1 es el intervalo $[0,1]$.

Por otra parte la composante de p es la unión de los subcontinuos propios de X que contienen a p. Por ser unión de conexos con un punto en común, tenemos que las composantes son conexas.

Teorema 3.4 *Si K es alguna composante del continuo X, el conjunto K es denso y conexo.*

Prueba. Sea $p \in X$ y K la composante de p. Por la observación anterior, tenemos que K es conexa. Ahora supongamos que $\overline{K} \neq X$. Entonces, ya que K es conexo tenemos que $\overline{K}$ es un subcontinuo propio y no vacío (contiene a p) de X. Por Lema 3.2, existe un subcontinuo propio H de X tal que $K \subset H$ y $K \neq H$. Pero entonces H es un subcontinuo propio de X que contiene a p, por lo que por definición de K debemos tener que $H \subset K$, lo cual implica que $H = K$, que es una contradicción. Por tanto $\overline{K} = X$, esto quiere decir que K es denso. ■

Teorema 3.5 *Si X es descomponible, X es composante de alguno de sus puntos.*

Prueba. Sean A y B dos subcontinuos propios, no vacíos de X, tal que $X = A \cup B$. Entonces

$$A \cap B \neq \emptyset,$$

pues de lo contrario tendríamos que si

$$A \cap B = \emptyset,$$

entonces X sería disconexo, lo cual sería un absurdo pues X es un continuo. Tomemos $x \in A \cap B$ y K la composante de x. Como A y B son subcontinuos propios de X que contienen a x, tenemos que

$$A \subset K \quad y \quad B \subset K,$$

de donde

$$X = A \cup B \subset K$$

y por lo tanto $K = X$. ■

En esta sección estudiaremos un concepto que está muy relacionado con el concepto de composante y con la propiedad que estamos estudiando.

Definición 3.6 *Si X es un continuo y $\{p, q\} \subset X$, decimos que X es* ***irreducible*** *con respecto a p y q si no existe ningún subcontinuo propio de X que contiene a tales puntos.*

Ejemplo 3.7 *El intervalo $[0, 1]$ es irreducible con respecto a 0 y 1.*

Ejemplo 3.8 *El continuo* $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ *es irreducible con respecto a cualquier punto del conjunto* $\{0\} \times [-1, 1]$ *y el punto* $(1, \ sen\,(1))$.

De la definición de composante y de irreducible, debe ser clara la relación entre tales conceptos, ya que si p y q son puntos de X tales que p no pertenece a la composante de q (o viceversa), entonces por definición de composante, X es irreducible con respecto a p y q. Es decir:

Teorema 3.9 *Sean X un continuo y $p \in X$. Entonces X es irreducible respecto a p y algún otro elemento de X si y sólo si la composante de p es un subconjunto propio.*

Igualmente, si X es irreducible respecto a p y q, cada uno de esos puntos no pertenece a la composante del otro.

Corolario 3.10 *Si el continuo X es irreducible respecto a $\{p, q\}$, entonces las composantes de p y de q son subconjuntos propios de X y distintos entre sí.*

Veamos ahora que los continuos descomponibles y no irreducibles tienen exactamente una composante.

Proposicón 3.11 *Sea X un continuo descomponible y no irreducible, entonces X posee exactamente una composante (que es X mismo).*

Prueba. Por el Teorema 3.4 , X es composante de alguno de sus puntos. Y por el Teorema 3.9, X no tiene composantes propias. Por lo tanto X es su única composante. ■

Ahora veamos la propiedad para los irreducibles.

Proposicón 3.12 *Si X es un continuo descomponible e irreducible, entonces X posee exactamente tres composantes.*

Prueba. Sea X un continuos descomponible e irreducible respecto a $\{p, q\}$. Aplicando el Teorema 3.4, resulta que X es composante, y por el Corolario 3.10 tenemos que las composantes de p y de q son subcontinuos propios de X y son distintos entre sí.

Ya tenemos tres composantes de X distintas entre sí. Vamos a probar que estas tres son todas sus composantes.

Sea r un elemento de X y sea K la composante de r. Veremos que K es uno de los subconjuntos que acabamos de mencionar. Supongamos que $K \neq X$. Entonces existe

$$y \in X - K.$$

Como X es descomponible, posee subcontinuos propios A y B tales que

$$X = A \cup B.$$

A y B no pueden contener a ambos puntos p y q, ya que X es irreducible respecto a este par, por lo que resulta que $p \in A$ y $q \in B$. Asumamos que $r \in A$.

Dado que A es subcontinuos propio de X y contiene a r, entonces $A \subset K$, de donde se sigue que $p \in K$. Supongamos que $q \in K$. Entonces existe un subcontinuo propio D tal que

$$\{r, q\} \subset D.$$

Recordemos que $\{p, r\} \subset A$. Como $y \notin K$, ningún subcontinuo propio contiene a $\{r, y\}$, por tanto tenemos que $y \notin A$ y $y \notin D$. Entonces

$$r \in A \cap D, \quad y \notin A \cup D \quad y \quad \{p, q\} \subset A \cup D,$$

lo cual quiere decir que $A \cup D$ es un subcontinuo propio de X que contiene a p y q, una contradicción, pues X es irreducible respecto a tal par de puntos. Entonces resulta que $q \notin K$.

Ahora demostraremos que K es composante de p.

Sea $x \in K$. Entonces existe un subcontinuo propio F de X tal que

$$\{r, x\} \subset F.$$

En particular, $q \notin K$ implica que $q \notin F$. Entonces

$$r \in A \cap F, \; q \notin A \cup F$$

y

$$\{x, p\} \subset A \cup F,$$

por lo cual $A \cup F$ es subcontinuo propio de X que contiene a x y p. Por lo tanto x pertenece a la composante de p.

Recíprocamente, sea x un elemento de la composante de p. Entonces existe un subcontinuo propio H de X tal que

$$\{x, p\} \subset H.$$

Como X es irreducible respecto a $\{p, q\}$ tenemos que $q \notin H$. Por lo tanto

$$p \in H \cap A, \quad q \notin H \cup A \quad y \quad \{x, r\} \subset H \cup A,$$

lo cual quiere decir que $H \cup A$ es subcontinuo propio de X que contiene a x y r, lo cual implica que $x \in K$.

Por lo tanto de las dos contenciones concluimos que K es precisamente la **composante** de p. Hemos probado que si una composante no es X mismo, entonces debe ser composante de alguno de los puntos respecto a los cuales X es irreducible. Por lo tanto no existen más composantes de las tres que teníamos y entonces X tiene exactamente 3 composantes. ■

A continuación veremos que en realidad basta la unión numerable de subcontinuos para formar la composante.

Teorema 3.13 *Sea X un continuo, $p \in X$ y K es la composante de p, entonces existe una colección numerable $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subcontinuos propios de X tales que $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.*

Prueba. Como todo continuo es segundo numerable, entonces X posee una base numerable, digamos $B_0 = \{V_1, V_2, ...\}$, con $V_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Definamos

$$U_n = V_n - \{p\}\,, \quad \text{para cada} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Sea F_n la componente (conexo maximal) de $X - U_n$ que contiene a p, es claro que F_n es un subcontinuo propio de X que contiene a p para cada $n \in \mathbb{N}$, y por último sea

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Como cada $X - U_n$ es cerrado y contiene a p, es claro que F_n es un subcontinuo de X que contiene a p para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $F \subset K$. Ahora veamos que $K \subset F$. Sea $x \in K$. Entonces existe un subcontinuo propio H de X que contiene a $\{x, p\}$. Como $X - H$ es abierto y no vacío existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$V_m \subset X - H.$$

Entonces $p \notin V_m$ y por tanto

$$V_m = U_m.$$

Es claro que $H \subset X - U_m$, y dado que H es conexo y contiene a p, se sigue que $H \subset F_m$. Por lo tanto

$$x \in F_m \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Por lo tanto $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, con $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ familia de subconjuntos propios de X. ■

Teorema 3.14 *Si X es un continuo indescomponible, entonces la colección de composantes de X es más que numerable.*

Prueba. El Teorema 1.8 afirma que todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío, y por el teorema anterior tenemos que cada composante de X es unión numerable de tales subconjuntos.

Es claro que X es la unión de todas sus composantes, por lo que si X tuviera una cantidad numerable de composantes, tendríamos que X es la unión numerable de conjuntos con interior vacío, lo cual por el Teorema de Baire es imposible.

Por lo tanto X posee una cantidad más que numerable de composantes. ■

Teorema 3.15 *Sean X un continuo indescomponible y K una composante, entonces K es composante de cada uno de sus elementos.*

PRUEBA. Tomemos K composante de p y $x \in K$. Demostraremos que K también es composante de x. Como $x \in K$ tenemos que existe un subcontinuo propio H_0 de X que contiene a p y x. Ahora, si y pertenece a la composante de x, existe un subcontinuo propio H de X que contiene a $\{x, y\}$, entonces $x \in H \cap H_0$, y como X es indescomponible, entonces $H \cup H_0$ es un subcontinuo propio que contiene a p, por lo cual está contenido en K. Por lo tanto $y \in H \subset K$, *i.e.*, la composante de x está contenida en K.

Por otra parte, si $y \in K$, existe H_y subcontinuo propio que contiene a p y y. Entonces de manera similar tenemos que $H_y \cup H_0$ es subcontinuo propio de X, y es claro que contiene a x y y. Esto implica que y está contenida en la composante de x. Por lo tanto se sigue fácilmente que K es composante de x. ■

Teorema 3.16 *Sea X un continuo indescomponible, entonces sus composantes son ajenas dos a dos.*

PRUEBA. Tomemos K_1 composante de p_1 y K_2 composante de p_2 tales que $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Entonces existe $y \in K_1 \cap K_2$, y por el Teorema 3.15 resulta que cada uno de los conjuntos K_1 y K_2 es la composante de y. Por lo tanto $K_1 = K_2$. ■

Con esto estamos ya en condiciones de enunciar y demostrar una caracterización para continuos indescomponibles en términos de subconjuntos irreducibles.

Teorema 3.17 *Un continuo X es indescomponible si, y sólo si, posee un subconjunto $\{x, y, z\}$ tal que X es irreducible respecto a cada par de elementos de tal conjunto.*

PRUEBA. $\Leftarrow$) Sea $\{x, y, z\}$ tal que X es irreducible respecto a cada par de elementos de tal conjunto. Supongamos que existen subcontinuos propios de X tales que

$$X = A \cup B.$$

Ahora, como

$$\{x, y, z\} \subset A \cup B,$$

uno de los dos subcontinuos contiene a dos de los tres elementos. Lo cual significa que X no es irreducible respecto a tal par de elementos, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto X es indescomponible.

$\Rightarrow$) Supongamos que X es un continuo indescomponible. Por los Teoremas 3.14 y 3.16 podemos tomar tres composantes K_1, K_2 y K_3 de X, las cuales son ajenas dos a dos. Sean x, y y z tales que K_1 es composante de x, K_2 es composante de y y K_3 es composante de z. Como son ajenas, por definición de composante se tiene que ningún subcontinuo propio contiene a dos de tales tres elementos, por lo que tenemos que X es **irreducible** respecto a cada par de elementos de $\{x, y, z\}$. ■

Enseguida, mostraremos un continuo indescomponible con el cual utilizaremos la última caracterización mencionada.

Ejemplo 3.18 *Continuo indescomponible.*

Acontinuación daremos la descripción de la construcción de este continuo indescomponible. Su indescomponibilidad se desprende delteorema anterior. (En la figura 2 se presentan los primeros tres pasos de su construcción).

Sean a, b y c tres puntos en $\mathbb{R}^2$. Entonces existe una cadena simple $\mathcal{U}_1$ en $\mathbb{R}^2$ de a hasta c cuyos eslabones son bolas cerradas con diámetro menor que $\frac{1}{2}$ y tal que alguno de ellos contiene a b, es decir, $\mathcal{U}_1$ pasa por b.

Ahora, existe una cadena simple $\mathcal{U}_2$ que va de b hasta c pasando por a, cuyos eslabones son bolas cerradas con diámetro menor a $\frac{1}{4}$ contenidas en la unión de $\mathcal{U}_1$.

También existe una cadena simple $\mathcal{U}_3$ que va de a hasta b y que pasa por c, cuyos eslabones son bolas cerradas con diámetro menor que $\frac{1}{8}$ contenidas en la unión de $\mathcal{U}_2$.

Seguimos el proceso de manera inductiva, encontrando una sucesión de cadenas $\mathcal{U}_n$ encajadas tales que cada eslabón de $\mathcal{U}_n$ tiene un diámetro menor que 2^{-n} y de forma que para cada $n \in \mathbb{N}$, la cadena $\mathcal{U}_{3n-2}$ va de a hacia c y pasa por b, la cadena $\mathcal{U}_{3n-1}$ va de b a c y pasa por a y por último la cadena $\mathcal{U}_{3n}$ va de a hasta b pasando por c. Observemos que por construcción las cadenas $\mathcal{U}_n$ están anidadas.

Definimos X como la intersección de las cadenas $\mathcal{U}_n$. Por el Teorema 3.1 tenemos que X es un **continuo**.

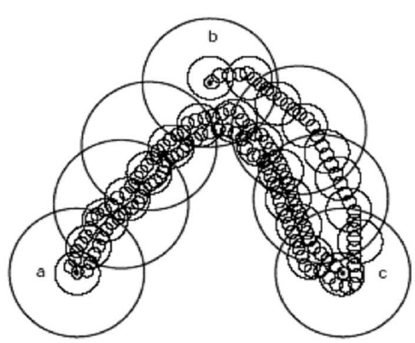
Veamos que X es un continuo indescomponible.

Supongamos que existe algún subcontinuo propio Z de X tal que $\{a, c\} \subset Z$. Sea $y \in X - Z$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y) \subset X - Z$. De la definición de X es claro que $X = \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_{3n-2}$. Si tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-3k+2} < \varepsilon$, es claro que los eslabones de $\mathcal{U}_{3n-2}$ contienen a y y están contenidos en $B_\varepsilon(y)$ (pues tienen diámetro menor que 2^{-3k+2}) y por lo tanto no intersectan a Z.

Ahora, como $\{a, c\} \subset Z \subset X = \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_{3n-2}$, y dado que $\mathcal{U}_{3n-2}$ va de a hacia c es claro que tomando por una parte los eslabones de tal cadena anteriores a los que contienen a y, y por otra parte los posteriores, creamos una separación de Z, contradiciendo su conexidad. Tal contradicción se originó de suponer la existencia de Z.

Por lo tanto X es irreducible respecto a a y c.

De igual manera de puede probar que X es irreducible respecto a las parejas $\{a, b\}$ y $\{b, c\}$, por lo que el Teorema 3.17 implica que X es indescomponible.



Bibliografía

[1] **Continuum Theory: An Introduction.** Sam B. Nadler Jr. West Virginia University. Morgantown, West Virginia, (1992).

[2] **Hiperespacios de continuos.** Alejandro Illanes Mejía. Aportaciones Matemáticas. No. 28. Sociedad Matemática Mexicana, (2004).

[3] **Hyperespaces of Sets.** A Text With Research Questions. Sam B. Nadler Jr. Aportaciones Matemáticas No. 33. Sociedad Matemática Méxicana (2006).

[4] **Historia y Desarrollo de la Teoría de los Continuos Indescomponibles.** Francis Leon Jones. Aportaciones Matemáticas. No. 27. Sociedad Matemática Mexicana, (2004).

[5] **Topología,** 2ª. edición. James R. Munkres. Massachusetts Institute of Technology. Prentice Hall. (2000).

[6] **Topología General.** John L. Kelley. New York. Springer-Verlag. (1991).

[7] **Topología General.** Carlos Alberto Robles Corbalá y Julio César Ávila Romero. Material didáctico No. 9. Departamento de Matemáticas. D.C.E.N. Universidad de Sonora. (2005).

[8] **Mosaicos Matemáticos No. 14. Memoria de la XIV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Bestiarios de Continuos y algunos ejemplos.** M.C. Carlos A. Robles Corbalá y Martha P. Andrade E. p. 127-135. Universidad de Sonora. Departamento de Matemáticas.