Memorias de la XVII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 20, Agosto, 2007, pp. 137–142.

ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDO

Guadalupe M. Munguía Gámez **Martín G. García Alvarado**
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Resumen

En este trabajo se analiza la solución de una Ecuación Diferencial con Retardo (EDR) lineal de primer orden. Después de encontrar la solución formal, se discute cómo escribir soluciones aproximadas. Se termina presentando un ejemplo particular.

1 Introducción

En este trabajo se presenta la solución, tanto analítica como numérica, del problema

$$\left.\begin{array}{l} y'(t) = \alpha y(t-\delta), \quad \delta > 0, \quad \text{en} \quad [0,b], \quad b > 0 \\ \\ y(t) = \phi(t) \quad \text{en} \quad [-\delta, 0], \end{array}\right\} \tag{1}$$

para α y δ arbitrarias.

La ecuación diferencial en este problema se llama *Ecuación Diferencial con Retardo,* (EDR), el intervalo $[-\delta, 0]$ se llama *preintervalo,* ϕ se llama *prefunción.* Esta es una EDR de primer orden. La solución de este problema puede ser una función decreciente o creciente, como es de esperarse, pero lo que probablemente es inesperado, es que también puede tener soluciones oscilatorias. Por supuesto, la naturaleza de la solución depende fuertemente de los parámetros α y δ, así como de la prefunción ϕ.

Las EDR son un caso particular de una clase de ecuaciones diferenciales llamadas *ecuaciones diferenciales funcionales,* ecuaciones en las que las derivadas de una función desconocida, $y(t)$, tiene en un instante t un valor que está relacionado con y como función de otra *función* en t. Por ejemplo, la forma general de la ecuación diferencial funcional de primer orden es

$$y'(t) = f(t, y(t), y(u(t))). \tag{2}$$

Este tipo de ecuaciones se usa para modelar fenómenos en los que el cambio en una cantidad depende de la manera en la que la cantidad es afectada por algún mecanismo.

2 Ecuación característica

Suponiendo que el problema (1) admite una solución de la forma $y(t) = c\,\mathrm{e}^{rt}$, al sustituirla en la EDR $y'(t) = \alpha y(t-\delta)$ se obtiene la *ecuación característica no lineal* $r\,\mathrm{e}^{r\delta} - \alpha = 0$. Para $\delta > 0$ fijo, definamos la función

$$f(r) = r\,\mathrm{e}^{r\delta} - \alpha. \tag{3}$$

Necesitamos encontrar las raíces de $f(r)$; es decir, las soluciones de

$$r\,\mathrm{e}^{r\delta} - \alpha = 0. \tag{4}$$

Si $\alpha = 0$ la EDR se reduce a $y'(t) = 0$ y la única solución de la ecuación (4) es $r = 0$, y por tanto, la solución es la constante $y(t) = \phi(0)$.

Si $\alpha \neq 0$ se tienen los siguientes cuatro casos.

1. $\alpha < -\dfrac{1}{\delta\,\mathrm{e}} < 0$. En este caso $f(r)$ no tiene raíces reales.
2. $\alpha = -\dfrac{1}{\delta\,\mathrm{e}}$. Aquí $f(r)$ tiene exactamente una raíz real, $r = -\dfrac{1}{\delta}$.
3. $-\dfrac{1}{\delta\,\mathrm{e}} < \alpha < 0$. $f(r)$ tiene exactamente dos raíces reales, ambas negativas.
4. $\alpha > 0$. $f(r)$ tiene exactamente una raíz real, $r > 0$.

3 Soluciones características

1. Caso $\alpha < -\dfrac{1}{\delta\,\mathrm{e}} < 0$.

   En este caso $f(r)$ no tiene raíces reales, pero podemos buscar raíces complejas $z = p \pm \mathrm{i}\, q$ tales que $z\,\mathrm{e}^{z\delta} - \alpha = 0$. Igualando a cero las partes real e imaginaria de la ecuación resultante obtenemos

$$p\cos(q\delta) - q\,\mathrm{sen}(q\delta) = \alpha\,\mathrm{e}^{-p\delta}, \tag{5}$$

$$q\cos(q\delta) + p\,\mathrm{sen}(q\delta) = 0, \tag{6}$$

   respectivamente. Como $q \neq 0$, la ecuación (6) se puede escribir en la forma

$$p = -q\cot(q\delta), \quad q \neq 0. \tag{7}$$

   De la ecuación (7) se tiene que $p \to -\dfrac{1}{\delta}$ cuando $q \to 0$, ya que

$$\lim_{q\to 0}\left(-q\cot(q\delta)\right) = \lim_{q\to 0}\frac{-q\delta\cos(q\delta)}{\delta\,\mathrm{sen}(q\delta)} = -\frac{1}{\delta}.$$

   De manera que (5) y (6) se satisfacen con $(p,q) = \left(-\dfrac{1}{\delta}, 0\right)$ si $\alpha = -\dfrac{1}{\delta\,\mathrm{e}}$ (caso 2). Al sustituir (7) en (5) se obtiene

$$q = -\alpha\,\mathrm{sen}(q\delta)\,\mathrm{e}^{q\delta\cot(q\delta)}. \tag{8}$$

   Sea $x = q\delta$. Entonces la ecuación (8) es

$$x = -\alpha\delta\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{e}^{x\cot(x)}, \quad \text{donde} \quad -\delta\alpha > \frac{1}{\mathrm{e}}. \tag{9}$$

   Para resolver (9) encontramos las intersecciones de

$$y = x \quad \text{y} \quad y = -\alpha\delta\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{e}^{x\cot(x)}. \tag{10}$$

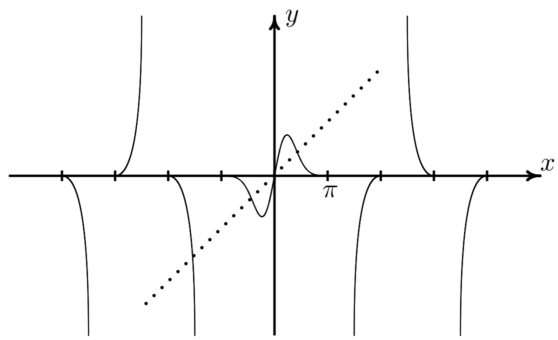

Figura 1: Gráficas de $y = x$ (línea punteada) y $y = -\alpha\delta\,\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{e}^{x\cot(x)}$

De las gráficas en la Figura 1 se ve que la ecuación (9) tiene una infinidad de soluciones, que se pueden encontrar numéricamente (usando el Método de Newton-Raphson, por ejemplo) para δ y α dados.

Ahora, sea x_k una raíz de (9). Como $q = x/\delta$, sea $q_k = x_k/\delta$. Los valores de p_k se calculan con la ecuación (7) usando los valores de q_k. Entonces las raíces de la ecuación (4) son $p_k + \mathrm{i}\,q_k$ y las soluciones características son $\mathrm{e}^{p_k t}\cos(q_k t)$ y $\mathrm{e}^{p_k t}\,\mathrm{sen}(q_k t)$. Como (1) es lineal, la solución formal de la EDR cuando $\alpha < -\dfrac{1}{\delta\,\mathrm{e}}$ es

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{p_k t}\left[c_{1k}\cos(q_k t) + c_{2k}\,\mathrm{sen}(q_k t)\right], \tag{11}$$

donde c_{1k} y c_{2k} son constantes.

2. Caso $\alpha = -\dfrac{1}{\delta\,\mathrm{e}}$.

   En este caso la solución es

$$y(t) = c_0\,\mathrm{e}^{(-1/\delta)t} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{p_k t}\left[c_{1k}\cos(q_k t) + c_{2k}\,\mathrm{sen}(q_k t)\right]. \tag{12}$$

3. Caso $-\dfrac{1}{\delta\,\mathrm{e}} < \alpha < 0$.

   La solución es

$$y(t) = c_1\,\mathrm{e}^{r_0 t} + c_2\,\mathrm{e}^{r_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{p_k t}\left[c_{1k}\cos(q_k t) + c_{2k}\,\mathrm{sen}(q_k t)\right], \tag{13}$$

   donde p_k y q_k son las raíces de (5) y (6) para el rango de valores de α, y r_0 y r_1 son las raíces reales de (4).

4. Caso $\alpha > 0$.

   La solución es

$$y(t) = c_3\, \mathrm{e}^{rt} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{p_k t} \left[c_{1k} \cos(q_k t) + c_{2k} \operatorname{sen}(q_k t) \right], \tag{14}$$

   donde p_k y q_k son las raíces de (5) y (6) para $\alpha > 0$.

4 La solución general

Los resultados anteriores constituyen la demostración del siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sea $\delta > 0$ y sean $p_k \pm i q_k$ las raíces complejas de (4) obtenidas de las ecuaciones (5) y (6) para un número real $\alpha \neq 0$. Entonces, para constantes arbitrarias c_{1k} y c_{2k}, la función*

$$y(t) = c_0\, e^{-t/\delta} + c_1\, e^{r_0 t} + c_2\, e^{r_1 t} + c_3\, e^{rt} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{p_k t} \left[c_{1k} \cos(q_k t) + c_{2k}\, sen(q_k t) \right] \tag{15}$$

satisface la ecuación $y'(t) = \alpha y(t - \delta)$ en $[0, b]$, $b > 0$, dado que

1. *$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$ cuando $\alpha < -\dfrac{1}{\delta\, e}$;*

2. *$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ y c_0 es arbitrario cuando $\alpha = -\dfrac{1}{\delta\, e}$;*

3. *$c_0 = c_3 = 0$, c_1 y c_2 arbitrarios y r_0 y r_1 son las raíces reales de la ecuación (4) cuando $-\dfrac{1}{\delta\, e} \alpha < 0$;*

4. *$c_0 = c_1 = c_2 = 0$, c_3 arbitrario y r la raíz real de la ecuación (4) cuando $\alpha > 0$.*

5 Soluciones aproximadas

Se puede dar una aproximación a la solución dada en la ecuación (15) definiendo la función $y_n(t)$ de la manera siguiente

$$y_n(t) = c_0\, \mathrm{e}^{-t/\delta} + c_1\, \mathrm{e}^{r_0 t} + c_2\, \mathrm{e}^{r_1 t} + c_3\, \mathrm{e}^{rt} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{p_k t} \left[c_{1k} \cos(q_k t) + c_{2k} \operatorname{sen}(q_k t) \right]. \tag{16}$$

Para garantizar la continuidad de la solución en $t = 0$ podemos requerir que $y_n(0) = \phi(0)$. Tomemos una partición uniforme en m subintervalos del intervalo $[-\delta, 0]$, donde $m = 2n - 1 + h$ puntos, con $h = 0, 1, 2, 3$ o 4, dependiendo del número de coeficientes libres de entre los primeros cuatro (dependiendo de α y de δ). Si $\mathcal{P}_m$ es la partición que resulta y si sus puntos son $-\delta = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 0$, entonces $y_n(t_j) = \phi(t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, m - 1$ es, en general, un sistema lineal, no singular, de tamaño $m \times m$, cuya solución representa una solución aproximada, basada en la partición $\mathcal{P}_m$. En la sección 6 presentamos la solución aproximada $y_2(t)$ para el caso 1.

6 Un ejemplo particular, para ilustrar el caso 1

En esta sección aplicaremos un algoritmo numérico para resolver el problema con condición a la frontera (1) como una ecuación de diferencias finitas. Como el sistema es lineal, usando el Método de Euler se obtiene una aproximación similar a la que se obtendría usando el Método Runge-Kutta de cuarto orden.

Como un ejemplo particular tomemos $\delta = 1.25$, $\alpha = 1.25$ y $\phi(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ para $t \in [-\delta, 0]$. Esto nos coloca en el caso 1 y la ecuación (10) es $x = 1.5625 \operatorname{sen}(x) e^{x \cot(x)}$ (con $x = q\delta$). Algunas raíces, encontradas con el Método de Newton-Raphson, son $x = \pm 1.568394$, $x = \pm 7.6465$, $x = \pm 13.9808, \ldots$. De estas raíces encontramos varios valores para q : $q = 1.2547, 6.1172, 11.1847, \ldots$, y, de la ecuación (7) $p = -0.0031, -1.2877, -1.7629, \ldots$

Construyamos la solución aproximada $y_2(t)$. Sea $y_2(0) = \phi(0)$. Construyamos una partición del intervalo $[-\delta, 0]$ en $2n - 1$ (es decir, tres) subintervalos cuyos extremos izquierdos son -0.41666, -0.8333 y -1.25, requiriendo que $y_2(t) = \phi(t)$ en cada uno de ellos. Así, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-0.0031t} \left(c_{11} \cos(1.2547t) + c_{12} \operatorname{sen}(1.2547t)\right) \\ &\quad + \mathrm{e}^{-1.2877} \left(c_{21} \cos(6.1172t) + c_{22} \operatorname{sen}(6.1172t)\right) = \mathrm{e}^{t^2} \end{aligned}$$

en los cuatro puntos $t = 0, -0.41666, -0.8333, -1.25$. De este sistema calculamos los coeficientes $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$, y encontramos la siguiente solución aproximada:

$$\begin{aligned} y_2(t) = \ &\mathrm{e}^{-0.0031t} \left(0.96665 \cos(1.2547t) - 0.05096 \operatorname{sen}(1.2547t)\right) \\ &+ \mathrm{e}^{-1.2877t} \left(0.033335 \cos(6.1172t) - 0.024881 \operatorname{sen}(6.1172t)\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Si graficamos esta solución (ver Figura 2) y la comparamos con la solución numérica, se ve que es difícil distinguirlas en el intervalo [0,30] y la coincidencia entre las dos es muy notable sobre intervalos mucho más grandes.

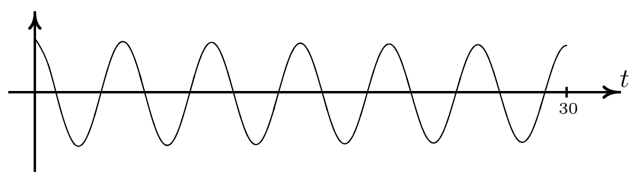

Figura 2: Gráficas de la solución aproximada $y_2(t)$ (17) y de la solución numérica del problema (1) para $t \in [0, 30]$

7 Conclusiones

En este trabajo se ha buscado la solución analítica de la EDR (1) y se ha encontrado que tal solución está dada, en general, por una serie infinita. Si se toman unos cuantos términos de tal solución se obtiene una solución aproximada. Se ha ilustrado, mediante un ejemplo, cómo la solución aproximada es prácticamente indistinguible de la solución exacta (calculada numéricamente) para un intervalo de tiempo razonablemente grande.

Bibliografía

[1] Hale, Jack, *Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1971.

[2] Kuang, Yang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics,* Academic Press, Boston, 1993.