Memorias de la XVII Semana Regional de
Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 20, Agosto, 2007, pp. 117–128.

CONTROL ÓPTIMO DE SISTEMAS DE INVENTARIOS

Joaquín Humberto López Borbón
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Resumen

Se desarrolla un algoritmo para encontrar una política óptima (s^*, S^*) *en costo promedio para sistemas de inventarios en tiempo discreto. El sistema de inventarios se plantea como un problema de control markoviano y basado en resultados de renovación, el algoritmo va obteniendo cotas para* s^* *y* S^* *(niveles óptimos de reorden y de reabastecimiento respectivamente) cada vez más refinadas, hasta converger a la política óptima. Se ilustra el algoritmo con un ejemplo de inventario que tiene demandas con distribución de Poisson y los resultados son validados mediante simulación.*

1 Introducción

En términos generales, un inventario puede considerarse como una cantidad de bienes o materiales bajo el control de una empresa que se mantienen por un tiempo en forma improductiva esperando su venta o uso. Es decir, es un sistema regulador entre los procesos de oferta y de demanda.

La razón fundamental para el control de inventarios se debe a que es poco frecuente que los bienes sean entregados justamente cuando la demanda ocurre. No tener los materiales ni los suministros cuando se necesitan representa pérdidas económicas en el proceso productivo o perder al cliente. Por otra parte, si se tiene en abundancia para protegerse de faltantes, la inversión puede resultar muy grande y tener mucho capital paralizado. Otros motivos para mantener inventarios son: economía de escala, especulación y precaución ([6], [7]). Lo anterior, justifica la elaboración de modelos matemáticos con el objeto de minimizar los costos de operación de los inventarios sujetos a la restricción de satisfacer la demanda y además que den respuestas a las preguntas claves que se requieren para el control óptimo del inventario: ¿Cuándo se ordena? y ¿Cuánto se ordena?

2 Sistema de inventarios como problema de control markoviano

Se estudia un sistema de inventario con revisión periódica para un solo producto que satisface lo siguiente:

1. Las órdenes del producto se hacen al inicio de cada periodo y suponemos que son entregadas instantáneamente.

2. Si se presenta déficit de productos estos son acumulados hasta que se tiene inventario para satisfacer la demanda atrasada.

3. Las demandas en cada periodo toman valores en los enteros no negativos y forman una sucesión de variables aleatorias independientes.

4. La estructura de costo y los parámetros asociados son estacionarios, es decir, no cambian durante la operación del sistema.

2.1 Dinámica del sistema y función de costo

Considere un sistema de inventario que evoluciona de acuerdo a la siguiente ecuación recursiva

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + a_n - w_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0 := \{0,1,2,\cdots\}, \\ x_0 &= x \in X, \end{aligned} \tag{1}$$

donde:

1. x_n es el **nivel de inventario** en el periodo $n \in \mathbb{N}_0$ y toma valores en el **espacio de estados** $X := \mathbb{Z}$.
2. a_n es la **cantidad de productos ordenados** en el periodo $n \in \mathbb{N}_0$ y toma valores en el **espacio de acciones** $A := \mathbb{N}_0$.
3. $y_n := x_n + a_n$ es el **nivel de inventario a la mano** en el periodo $n \in \mathbb{N}_0$.
4. w_n es la **demanda** del producto durante el periodo $n \in \mathbb{N}_0$.

Hipótesis 2.1. Se supone que se cumplen las siguientes condiciones:

1. La sucesión $\{w_n\}$ está formada por variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con función de masa de probabilidad $p_j = P[w_n = j]$ concentrada en $\mathbb{N}_0$, esto es, $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$.
2. $p_0 < 1$.
3. $\mu := E[w_k] < \infty$.

El **costo en cada periodo** de operación está dado por la función

$$\widehat{C}(x,a) := \begin{cases} K_f + ca + G(x+a) & \text{si } a > 0 \\ G(x) & \text{si } a = 0, \end{cases} \tag{2}$$

donde:

1. $K_f \geq 0$ es el **costo fijo por colocar una orden.**
2. $c \geq 0$ es el **costo unitario de producción**
3. La función $G : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ incluye otros costos del sistema. En muchos casos concretos la función G tiene la forma

$$G(y) = hE_w\left[\max\{0, y - w\}\right] + peE_w\left[\max\{0, w - y\}\right],$$

donde h es el **costo unitario por manejo de inventario**, pe es el **costo unitario por déficit**, w es la demanda aleatoria, E_w es el operador esperanza, y el nivel de inventario a la mano.

Hipótesis 2.2. Se supone que la función G satisface las siguientes condiciones:

1. $-G$ es unimodal.
2. $\lim_{|y|\to\infty} G(y) \geq \min_{y} G(y) + K_f$.

2.2 Políticas de control admisibles

Una **política de control admisible** es una sucesión $\pi = \{\pi_n\}$ de reglas para elegir controles, donde cada π_n puede depender de la historia h_n del sistema hasta el tiempo n,

$$h_n = (x_0, a_0, w_1, x_1, a_1, w_2, \ldots, x_{n-1}, a_{n-1}, w_n, x_n).$$

Además de depender de la historia, las reglas π_n pueden ser aleatorizadas. En este caso tendríamos que $\pi_n(\cdot \mid h_n)$ es una distribución de probabilidad sobre el espacio de controles A para cada historia h_n y $n \in \mathbb{N}$. A la familia de las políticas admisibles la denotaremos por Π.

Diremos que la política $\pi = \{\pi_n\}$ es **estacionaria determinista** si en cada una de los periodos los controles se eligen por medio de una función $f : X \to A$, es decir, $a_n = f(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. En este caso, a la política π la identificaremos con la función f y a la clase de las políticas estacionarias deterministas la denotaremos por $\mathbb{F}$.

En este trabajo la atención está dirigida a una clase de políticas estacionarias deterministas denominadas genéricamente como políticas (s, S), donde s y S son enteros tales que $s < S$. Estas políticas se denotan por $f = (s, S)$ y se definen por

$$f(x) := \begin{cases} S - x & \text{si } x \leq s \\ 0 & \text{si } x > s. \end{cases}$$

Cuando el nivel de inventario es menor o igual a s, se coloca una orden para incrementar el nivel de inventario hasta $S = x + f(x)$, es decir, se ordenan $S - x$ unidades. Si el inventario es mayor que s no se ordena. Los parámetros s y S se denominan nivel de reorden y nivel de reabastecimiento, respectivamente.

2.3 El problema de control óptimo

Para una política $\pi = \{\pi_n\}$ y el estado inicial $x_0 = x \in X$ se define el **costo esperado en n-periodos** como

$$\widehat{J}_n(\pi, x) := E_x^{\pi}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \widehat{C}(x_k, a_k) - c(x_n - w_{n+1})\right], \tag{3}$$

donde $\widehat{C}(x, a)$ es la función en (2) y E_x^{π} indica el operador esperanza cuando se usa la política π dado que el estado inicial es x.

El **costo promedio esperado** (por unidad de tiempo) es definido como

$$\widehat{J}(\pi, x) := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \widehat{J}_n(\pi, x). \tag{4}$$

La **función de valor óptimo** en **costo promedio** es

$$\widehat{J}(x) := \inf_{\pi\in\Pi} \widehat{J}(\pi, x). \tag{5}$$

De esta manera, el **problema de control óptimo** consiste en encontrar una política $\pi^* \in \Pi$ tal que

$$\widehat{J}(x) = \widehat{J}(\pi^*, x) \quad \forall x \in X. \tag{6}$$

Si tal política existe, se le llama **política óptima en costo promedio**

El siguiente resultado es el punto de partida para el desarrollo del algoritmo.

Teorema 2.1. *Si se satisfacen las Hipótesis 2.1 y 2.2, entonces existe una política óptima* $f^* = (s^*, S^*)$, *es decir,*

$$\widehat{J}(x) = \widehat{J}(f^*, x) \ \ \forall \ x \in X.$$

La optimalidad de la clase de las políticas $f = (s, S)$ se ha demostrado bajo condiciones muy generales (consultar [12], [3] y [5]). En este trabajo partimos de este resultado y nos enfocamos sobre los fundamentos del algoritmo y su implementación.

Por otra parte con el fin de simplificar el análisis, supondremos que el costo de producción c es igual a cero. Este supuesto no implica pérdida de generalidad como se muestra en el siguiente teorema y su corolario.

Teorema 2.2. *Para toda política* $\pi = \{\pi_n\}$ *y estado inicial* $x_0 = x \in X$, *se cumple lo siguiente:*

$$E_x^\pi \left[\sum_{k=0}^{n-1} ca_k - c(x_n - w_{n+1}) \right] = -cx + (n+1)c\mu.$$

donde $\mu := E[w_k]$

Corolario 2.3. *Como consecuencia del Teorema 2.2 anterior se tiene que*

$$\widehat{J}(\pi, x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_x^\pi \sum_{k=0}^{n-1} C(x_k, a_k) + c\mu \quad \forall \pi \in \Pi, \quad x \in X,$$

donde

$$C(x, a) := \begin{cases} K_f + G(x + a) & si \ a > 0 \\ G(x) & si \ a = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Definiendo

$$J(\pi, x) := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_x^\pi \sum_{k=0}^{n-1} C(x_k, a_k), \quad x \in X, \quad \pi \in \Pi, \tag{8}$$

$$J(x) := \inf_{\pi\in\Pi} J(\pi, x), \quad x \in X, \tag{9}$$

del corolario anterior se tiene

$$\widehat{J}(\pi, x) = J(\pi, x) + \mu c, \quad \forall x \in X, \quad \pi \in \Pi, \tag{10}$$

$$\widehat{J}(x) = J(x) + \mu c, \quad \forall x \in X. \tag{11}$$

Nota 2.1 En conclusión, una política π^*es óptima para $\widehat{J}(\cdot)$ si y sólo si es óptima para $J(\cdot)$. Por esta razón, de aquí en adelante, nos concentraremos en el problema de control con función de costo (7) en un periodo en la cual no se considera el costo unitario de producción c.

3 Estructura de renovación de las políticas (s, S)

En esta sección se estudia la estructura de renovación de la función de costo promedio esperado $J(f, x)$ inducida por las políticas $f = (s, S)$, donde la época de renovación es cada vez que el sistema se reabastece hasta el nivel S. Además, para obtener los resultados de esta sección se mantendrá fija una política (s, S) que se denotará por f.

Para $v > 0$, se define

$$t(v) := \min\{n \geq 1 : x_n \leq s, x_0 = s + v\} \quad \text{y} \quad T(v) := E^f_{s+v} t(v). \tag{12}$$

Note que $t(v)$ es el tiempo de espera para que el nivel de inventario sea menor o igual al punto de reorden s, cuando se comienza con v unidades arriba de s. Además $T(v)$ es el valor esperado del tiempo de espera.

Ahora, considerando, $y := s + v$. donde $v > 0$ se define la función

$$k(s, y) := \sum_{k=0}^{t(v)-1} C(x_k, a_k), \quad y > s$$

la cual representa el costo acumulado hasta ordenar, cuando se comienza con un nivel de inventario y con $v > 0$ unidades mayor que s. Es decir, son los costos que se acumulan hasta que el nivel de inventario sea menor o igual al punto de reorden s, incluyendo el costo fijo por ordenar K_f. También se denota su valor esperado

$$K(s, y) = E^f_y k(s, y) = E^f_y \sum_{k=0}^{t(v)-1} C(x_k, a_k), \quad y > s \tag{13}$$

Los siguientes son resultados de teoría de renovación (consultar [8]).

Teorema 3.1. *$T(\cdot)$ y $K(s, \cdot)$ son las únicas funciones que satisfacen las ecuaciones de renovación*

$$T(v) = 1 + \sum_{j=0}^{v-1} T(v - j)p_j, \tag{14}$$

$$K(s, y) = G(y) + K_f \sum_{j=y-s}^{\infty} p_j + \sum_{j=0}^{y-s-1} K(s, y - j)p_j, \quad y > s, \tag{15}$$

respectivamente. Además

$$T(0) := 0 \;\; y \;\; T(v) = \sum_{j=0}^{v-1} m(j), \quad v \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

$$K(s, y) = K_f + \sum_{j=0}^{y-s-1} G(y - j)m(j), \quad y > s, \tag{17}$$

donde

$$m(0) := [1 - p_0]^{-1},$$

$$m(j) := \sum_{k=0}^{j} m(j-k)p_k \ , \quad j \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Nota 3.1 Bajo una política $f = (s, S)$ el costo promedio esperado $J(f, x)$ no depende del inventario inicial $x \in X$, ya que por la Hipótesis 2.1 $p_0 < 1$, el nivel de inventario con probabilidad uno será menor o igual al nivel de reorden s en un número finito de periodos y en consecuencia el sistema se reabastecerá reiterativamente hasta el nivel S, con tiempos entre reabastecimientos independientes e idénticamente distribuidos. En lo sucesivo el costo promedio esperado bajo una política (s, S) será denotado por $c(s, S)$.

El siguiente resultado de teoría de renovación con recompensa constituye la parte principal del algoritmo para encontrar una política óptima (s, S) y su demostración se puede consultar en Teorema 3.16, pg 52, [8].

Teorema 3.2. *El costo promedio esperado $c(s, S)$ tiene la siguiente estructura*

$$c(s, S) = K(s, S)/T(S - s). \tag{19}$$

4 Propiedades del costo promedio esperado $c(s, S)$ y cotas para s^* y S^*

En esta sección se aprovecharán los resultados de la sección anterior, para obtener propiedades de la función de costo promedio esperado $c(s, S)$, cotas para el nivel de reorden óptimo s^* y para el nivel de reabastecimiento óptimo S^*. Estas cotas serán usadas iterativamente en los pasos del algoritmo en la siguiente sección.

Sean $y_1^* = \min\{y : G(y) = \min\limits_{x \epsilon X} G(x)\}$, $y_2^* = \max\{y : G(y) = \min\limits_{x \epsilon X} G(x)\}$. Para un nivel de reabastecimiento S dado, diremos que un nivel de reorden $s^0 < y_1^*$ es óptimo si

$$c(s^0, S) = \min_{s<S} c(s, S).$$

Para la demostración de los siguientes resultados consulte [11]. El siguiente teorema proporciona una caracterización para el valor de s óptimo.

Teorema 4.1. *Sea S un nivel de reabastecimiento dado. Un nivel de reorden $s^0 < y_1^*$ es óptimo para S si y solo si*

$$G(s^0) \geq c(s^0, S) \geq G(s^0 + 1). \tag{20}$$

El siguiente corolario proporciona una manera eficiente para encontrar un nivel óptimo de reorden para un nivel de reabastecimiento S dado.

Corolario 4.2. *Sea S un nivel de reabastecimiento dado y*

$$s^0 := \max\{y < y_1^* : c(y,S) \leq G(y)\}. \tag{21}$$

Entonces (20) se cumple y s^0 es un nivel óptimo de reorden para S.

Corolario 4.3. *Cotas para s^*. Sea (s^*, S^*) una política óptima*

(1) *Si s_l^* es el menor nivel de reorden óptimo para S^* óptimo entonces $s_l^* \leq \overline{s} := y_1^* - 1$.*

(2) *Sea s_u^* el mayor nivel de reorden óptimo menor que y_1^* para S^* óptimo. Si s^0 satisface (20) para algún nivel de reabastecimiento S dado entonces $s^0 \leq s_u^*$.*

Teorema 4.4. *Sea (s^*, S^*) una política óptima. Entonces se cumple lo siguiente:*

(1) *Cota inferior para S^*: $S^* \geq \underline{S} := y_2^*$.*

(2) *Cota superior para S^*: Sea c^* el costo promedio esperado óptimo para (s^*, S^*). Es decir, si $c^* := c(s^*, S^*)$ entonces*

$$S^* \leq \overline{S}^* := \max\{y \geq y_2^* : G(y) \leq c^*\}.$$

(3) *Si $c = c(s,S)$ es el costo promedio esperado de una política arbitraria (s,S), $c > c^*$ y se define*

$$\overline{S}_c^* := \max\{y \geq y_2^* : G(y) \leq c\}. \tag{22}$$

entonces $\overline{S}^* \leq \overline{S}_c$. Además, $\overline{S}_{c_1} \leq \overline{S}_{c_2}$ si $c_1 \leq c_2$.

El siguiente teorema requiere de la siguiente definición: Para cualquier nivel de reabastecimiento S fijo se define

$$c^*(S) := \min_{s<S} c(s,S) \tag{23}$$

Se dice que S es un mejoramiento de S^0 si $c^*(S) < c^*(S^0)$.

Teorema 4.5. *Para cualquier nivel de reabastecimiento $S^0 \geq y_2^*$, sea $s^0 < y_1^*$ el nivel de reorden óptimo para S^0.*

(1) *$c^*(S) < c^*(S^0)$ si y sólo si $c(s^0, S) < c(s^0, S^0)$.*

(2) *Suponga que (20) se satisface con $S = S^0$. Si $c(s^o, S') < c(s^o, S^0)$ para algún $S' \geq y_2^*$, entonces*

$$s' := \min\{y \geq s^0 : c(y, S') > G(y+1)\}, \tag{24}$$

es óptimo para S'; además $s' < y_1^*$ y

$$G(s') \geq c(s', S') \geq G(s'+1).$$

5 Algoritmo

En esta sección, usando los teoremas y corolarios de la sección anterior, se desarrolla un algoritmo para calcular una política óptima (s^*, S^*). El algoritmo necesita de entrada las funciones $G(\cdot)$, $c(\cdot, \cdot)$ y el punto mínimo y^* de $G(\cdot)$. Este consta de dos pasos con instrucciones que se dan a continuación.

Paso 0

$s \leftarrow y^* - 1;$

$S_0 \leftarrow y^*;$

$Mientras\ G(s) < c(s, S_0)\ hacer\ s \leftarrow s - 1;$

$s_0 \leftarrow s;$

$c^0 \leftarrow c(s_0, S_0);$

$S^0 \leftarrow S_0;$

$S \leftarrow S^0 + 1;$

Paso 1

$Mientras\ G(S) \leq c^0\ hacer$

$Si\ c(s, S) < c^0\ entonces$

$S^0 \leftarrow S;$

$Mientras\ c(s, S^0) \leq G(s + 1)\ hacer\ s \leftarrow s + 1;$

$c^0 \leftarrow c(s, S^0);$

$fin\ si$

$S \leftarrow S + 1;$

$fin\ mientras$

El *Paso* 0 inicia con nivel de reabastecimiento $S^0 \leftarrow y^*$, donde y^* es un mínimo arbitrario de la función $G(\cdot)$. Se encuentra el nivel de reabastecimiento s^0 óptimo para S^0, disminuyendo el valor de s con pasos de tamaño uno desde y^*, hasta que se obtiene la desigualdad $c(s, S_0) \leq G(s)$. La optimalidad de s^0 para S^0 se sigue del Corolario 4.2.

En el *Paso* 1, se busca el menor valor de S mayor que S^0, que mejora el costo para S^0. El valor de S es incrementado de uno en uno, comparando en cada paso $c(s^0, S)$ y $c(s^0, S^0)$ para verificar si S mejora a S^0, lo anterior es justificado por el Teorema 4.5 (1). En caso de que S sea una mejora, S^0 se actualiza igualándolo a S y se obtiene el nuevo nivel óptimo de reorden s^0, incrementando de uno en uno el valor actual de s^0 hasta que $c(s, S^0) \leq G(s+1)$. La existencia de tal nivel de reorden s^0, su optimalidad (para el nuevo valor de S^0) y $s^0 < y^*$ son garantizados por el Teorema 4.5 (2).

Finalmente, note que siempre que el *Paso* 1 es iniciado, c^0 representa una cota superior para c^* (la mejor cota disponible). En vista del Teorema 4.4 (3) la búsqueda para un mejor valor de S debe terminar cuando $G(S) > c^0$. En la última iteración del algoritmo, cuando $S^0 \leftarrow S^*$ y $s^0 \leftarrow s^*$ para alguna política óptima (s^*, S^*) se tiene que $c^0 \leftarrow c^*$ y $S^0 \leftarrow \bar{S}$, por el Teorema 4.4 (2). La prueba en el ciclo exterior *mientras-fin mientras* del *Paso* 1 falla cuando $S \leftarrow \bar{S}^* + 1$, de acuerdo a la definición de $\bar{S}^*$ por el Teorema 4.4 (2).

6 Demandas con distribución de Poisson

Se considera un sistema de inventarios con costo de producción $c = 5$, costo fijo por ordenar $K_f = 64$, costo por mantener en inventario una unidad durante un periodo $h = 1$, costo de penalización por unidad de demanda no satisfecha durante un periodo $pe = 9$. La demanda en cada uno de los periodos tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 10$. Determinaremos una política y el costo promedio óptimo cuando se inicia con nivel de inventario cero.

Para este problema la función $G(\cdot)$ tiene la forma

$$G(y) = 9E_w\left[\max\{0, w-y\}\right] + E_w\left[\max\{0, y-w\}\right].$$

El algoritmo es implementado en lenguaje R (consultar [10]) y da como resultados

Política Óptima (6,40) y Costo Promedio Óptimo 85.02156.

7 Simulación del inventario

Para conocer la evolución en cada periodo y verificar los resultados, es necesario la simulación del sistema [9].

La simulación también se implementa en lenguaje R. Se necesita como entrada la política (6,40) y se inicia con nivel de inventario cero. En una corrida con $100,000$ periodos del inventario, se obtienen resultados que se muestran en las siguientes gráficas, donde X es el vector de estados del inventario, w vector de las demandas y Vcp vector que almacena la evolución del costo promedio esperado.

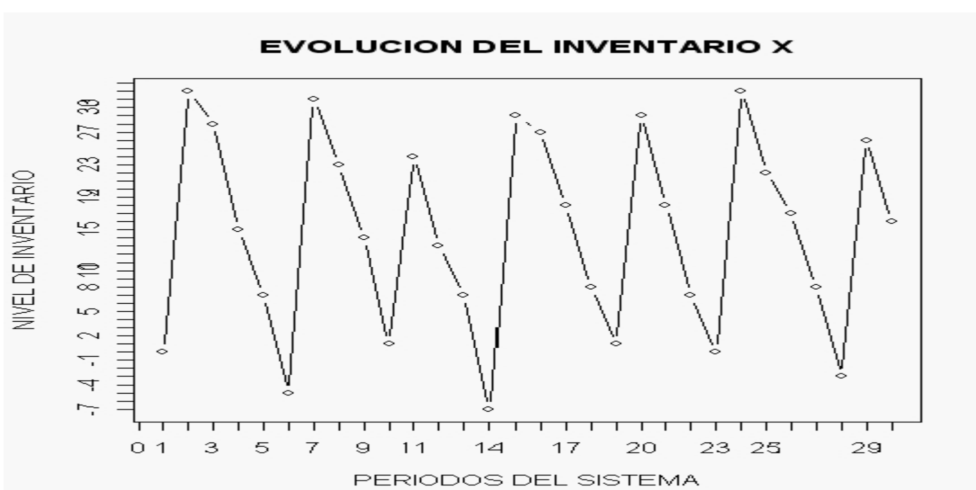

Figura 1: $X = [0, 32, 28, 15, 7, -5, 31, 23, 14, 1, 24, 13, 7, -7, 29, 27, 18, 8, 1, 29, 18, 7, 0, \ldots]$

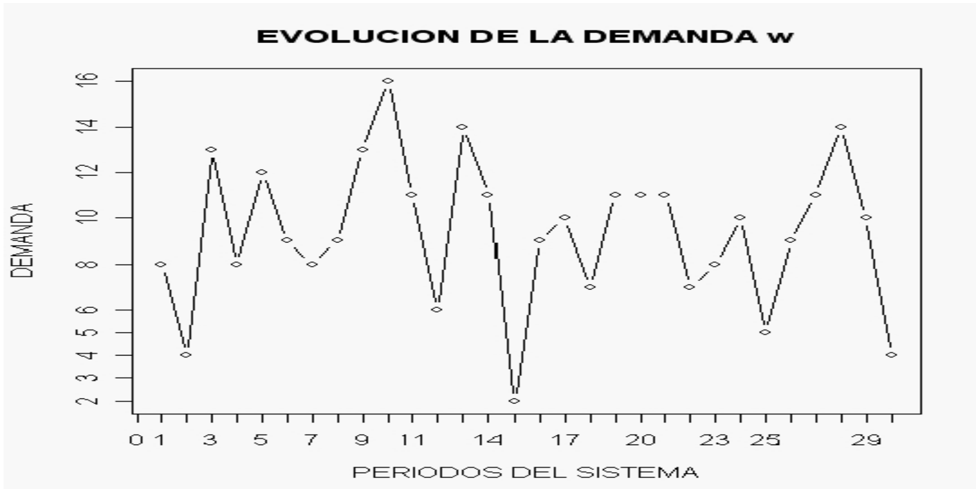

Figura 2: $w = [8, 4, 13, 8, 12, 9, 8, 9, 13, 16, 11, 6, 14, 11, 2, 9, 10, 7, 11, 11, 11, 7, 8, 10, \ldots]$

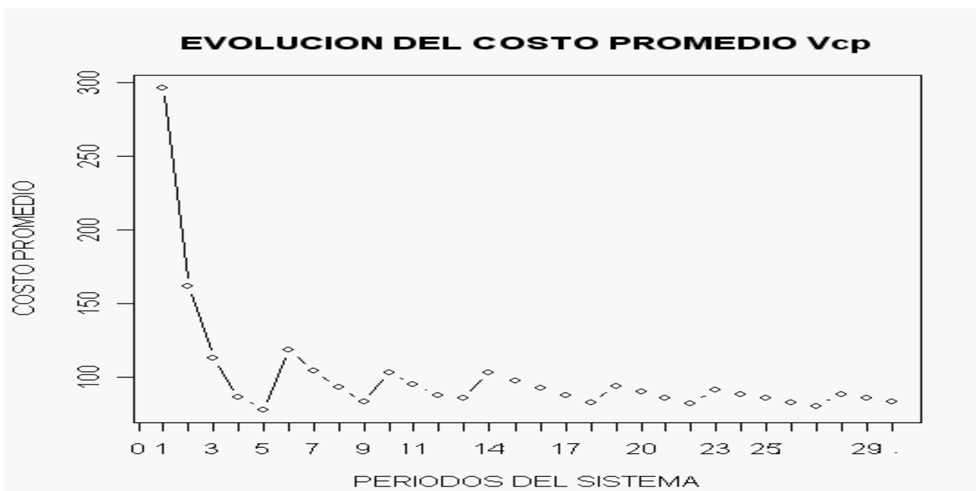

Figura 3: $Vcp = [296, 162, 113, 86.5, 78.2, 118.5, 104.85, 93.50, 83.22, 103.20, 95.00, 87.67, 85.77, 103.07, 98.00, 93.00, 88.00, 83.17, 93.94, 90.15, 86.19, 82.27, \ldots]$

Se realizan varias corridas para 100,000 periodos y se obtienen los siguientes costos promedios esperados

85.06527 85.0265 85.03992 85.02532 85.03723 84.97543 84.9977 84.99914

Haciendo simulaciones con otras políticas también para 100,000 periodos, se puede observar que $(6, 40)$ es efectivamente la de menor costo promedio esperado.

$c(3,41)$	$c(4,41)$	$c(5,41)$	$c(6,41)$	$c(7,41)$	$c(8,41)$	$c(9,41)$
85.7790	85.3003	85.1009	85.0795	85.1706	85.6688	86.0903

$c(3,40)$	$c(4,40)$	$c(5,40)$	$c(6,40)$	$c(7,40)$	$c(8,40)$	$c(9,40)$
85.6226	85.2925	85.1192	85.0375	85.0841	85.4308	86.0430

$c(3,39)$	$c(4,39)$	$c(5,39)$	$c(6,39)$	$c(7,39)$	$c(8,39)$	$c(9,39)$
85.7856	85.3784	85.1842	85.0485	85.1587	85.3853	86.0771

8 Conclusiones

Se ha desarrollado un algoritmo para encontrar una política óptima para un sistema de inventario con revisión periódica en costo promedio. Note que las hipótesis 2.1 y 2.2 son muy generales por lo que el algoritmo puede considerar un amplia variedad de funciones $G(\cdot)$.

La implementación computacional del algoritmo permite acortar la brecha entre teoría y práctica en sistemas de inventarios. La implementación fue desarrollada en lenguaje R y soporta cualquier distribución discreta de la demanda, ya sea generada por el sistema del lenguaje R o por el usuario. El algoritmo es sencillo y fácil de implementar, su complejidad computacional es solo 2.4 veces mayor que la complejidad de evaluar una política (s, S) específica [11]. El algoritmo se aplica a sistemas de inventarios con revisión periódica y se pretende extenderlo a revisión continua

Bibliografía

[1] D. Bertsekas (1987), *Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models*, Prentice-Hall, New York

[2] D. Bertsekas (1995), *Dynamic Programming and Optimal Control Stochastic, Vols 1 and 2,* Athenea Scientific, Belmont, MA.

[3] D. Beyer and S.P. Sethi (1999), *The classical average-cost inventory mo-dels of Iglehart and Veinott-Wagner, revisited,* Journal of Optimization Theory and Applications: Vol. 101, No. 3, pp 523-555.

[4] A. Federgruen and P. Zipkin (1984), *An efficient algorithm for computing optimal (s, S) policies*, Oper. Res: Vol. 32, No. 6, pp 1268-1285.

[5] E.A. Feinberg and M.E. Lewis (2005), *Optimality inequalities for average cost Markov decision processes and optimality of (s,S) policies.* dirección electrónica: http://www.ams.sunysb.edu/˜feinberg/public/feinberg-lewis.pdf.

[6] H. L. Lee and S. Nahmias (1993), *Single-product, single-location models,* in Handbooks in OR & MS: Vol. 4, Eds. S. C. Graves et al., Elsevier Science Publishing, North Holland

[7] E. L. Porteus (1990), *Stochastic inventory theory*, in Handbooks in OR & MS, Vol. 2, Eds. D. P. Heyman, M. J. Sobel, Elsevier Science Publishing B. V., North Holland.

[8] S. M. Ross (1970), *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco.

[9] S. M. Ross (2002), *Simulation,* Academic Press, New York.

[10] W.N. Venables, D. M. Smith and the R Development Core Team, *An Introduction to R* (Copyright c 1999–2005) R Development Core Team.

[11] Y. S. Zheng and A. Federgruen (1991), *Finding optimal (s, S) policies is about as simple as evaluating a simple policy*, Oper. Res: Vol 39, No 4, pp 654-665.

[12] Y. S. Zheng (1991), *A simple proof for optimality of (s, S) policies in infinite-horizon inventory systems*, J. Appl. Prob: Vol 28, pp 802-810.

[13] P. Zipkin (1986), *Stochastic leadtimes in continuuous-time inventory models.* Naval Res. Logist. Quart: Vol 33, pp 763-774