Memorias de la XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 20, Agosto, 2007, pp. 107–115.

OPERADORES DE TOEPLITZ

Maribel Loaiza
Escuela Superior de Física y Matemáticas del IPN

Resumen

En este artículo nos enfocamos en el estudio de operadores acotados en espacios de Hilbert. Damos las propiedades fundamentales de las álgebras C. Introducimos los llamados operadores de Toeplitz y estudiamos las álgebras C* generadas por operadores de Toeplitz cuyos símbolos pertenecen a diversas clases de familias.*

1 Introducción

El objetivo de este trabajo es introducir un tipo especial de operadores que hoy en día tiene gran importancia en diferentes áreas de las matemáticas y física. Estos operadores son llamados operadores de Toeplitz. No podemos comenzar con el estudio de ellos sin detenernos un poco en las cosas que dieron origen a la teoría de operadores. Podríamos pensar que esta área de las matemáticas es una generalización del álgebra lineal y del cálculo. En particular el estudio de las transformaciones lineales en espacios vectoriales de dimensión infinita. En las secciones dos, tres y cuatro introducimos los conceptos más importantes de análisis funcional, como lo son los conceptos de espacios de Banach, de Hilbert y de operador acotado. Las álgebras C* juegan un papel fundamental en teoría de operadores. Sus propiedades principales se presentan en la sección cinco. Las última sección está dedicada al estudio de los operadores de Toeplitz en la circunferencia unitaria y en el disco unitario, así como a algunas de sus aplicaciones en física.

2 La dimensión infinita

Si queremos responder a la pregunta ¿Cuándo y cómo aparece el concepto de dimensión infinita? nos tendremos que remontar a la época de Fourier (21 de marzo de 1768 - 16 de mayo de 1830). Es importante recalcar que:

- *Hasta un poco antes de 1830*: el álgebra lineal consistía del estudio de sistemas de ecuaciones lineales (con coeficientes reales o complejos) con un número finito de incógnitas.
- *Los cambios de variable* se hacían utilizando matrices (método de Gauss por ejemplo).
- *Antes del siglo XIX* sólo se sabía como interpretar geométricamente los cálculos de sistemas de ecuaciones de dos y tres variables.

Sin duda, Fourier es muy importante en la historia de las matemáticas, principalmente del análisis. Basta mencionar que la primera aparición de sistemas infinitos de ecuaciones lineales fue en el trabajo de Fourier sobre la ecuación de calor. El tenía que encontrar una sucesión infinita (a_n) tal que

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos[(2m-1)y],$$

Figura 1: Fourier

fuera válida para todo y.

Fourier resolvió el sistema, obteniendo la solución:

$$a_m = (-1)^{m-1} \frac{4}{\pi(2m-1)}.$$

Sin embargo, la forma de resolver este sistema no fue enteramente justificada. Intentos por justificar los métodos de solución de sistemas lineales infinitos fueron hechos por Hill(1877), Poincaré (1886), Koch (1896). Cada uno de ellos fue mejorando al anterior en el sentido de que su solución era válida para mayor variedad de sistemas de ecuaciones. A finales del siglo XIX trabajar con sistemas de ecuaciones infinitos o con espacios de dimensión infinita ya era natural entre los matemáticos de la época.

3 Espacios de Banach y de Hilbert

Uno de los conceptos más importantes en análisis es el concepto de Espacio de Banach. La definición de estos espacios surge de manera natural de la completez de sistemas conocidos como el sistema de los números reales. Un *espacio de Banach* es un espacio vectorial normado, tal que toda sucesión de Cauchy converge. Algunos ejemplos de este tipo de espacios son los siguientes:

1. $\mathbb{R}^n$ con la norma
$$\|x\| = \sum_{1}^{n} x_i^2.$$

2. $\mathbb{C}^n$ con la norma
$$\|z\| = \sum_1^n |z_i|^2.$$

3. $L^p(X, \Omega, d\mu)$, donde (X, Ω, μ) es un espacio de medida $\sigma-$finita, con la norma
$$\|f\|^p = \int_X |f|^p d\mu.$$

4. $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C}|$ f es continua$\}$ con la norma
$$\|F\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Sea V un espacio vectorial sobre un campo F. Un *producto interno,* es una función
$$\langle , \rangle : V \times V \to F$$
tal que para todo $u, v, w \in V$:

1. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$,
2. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$,
3. $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$,
4. $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$.

Los productos internos permiten definir conceptos como ortogonalidad entre dos elementos de un espacio vectorial. Pero, dado que la mayoría de las cosas en análisis están relacionadas con normas o distancias, un producto interno en un espacio vectorial muchas veces no es suficiente. Por ello es necesario construír espacios con propiedades mucho más fuertes. Surgiendo así conceptos como el de *espacio de Hilbert.* Estos espacios son la generalización más directa del espacio euclideano $\mathbb{R}^n$. Formalmente, un *espacio de Hilbert* es un espacio de Banach cuya norma está determinada por un producto interno de la siguiente manera:
$$\|u\|^2 = \langle u, u\rangle.$$

Algunos ejemplos conocidos de espacios de Hilbert son los siguientes:

- $L^2(X, \Omega, \mu)$, donde (X, Ω, μ) es un espacio de medida $\sigma-$finita, con el producto interno
$$\langle f, g\rangle = \int f\overline{g} d\mu.$$

- F^n con el producto interno
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}.$$

Es importante mencionar que no todos los espacios de Banach son de Hilbert. En los ejemplos de espacio de Banach dados arriba, el espacio del ejemplo 4 no es de Hilbert y los espacios L^p son de Hilbert únicamente para $p = 2$.

Figura 2: Hilbert

4 Operadores acotados

Sea $M_n(\mathbb{C})$ el espacio vectorial formado por todas la matrices $n \times n$. Cada transformación lineal $T_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ está dada por

$$T_A(x) = Ax,$$

donde A es la matriz de la transformación lineal en una base de $\mathbb{C}^n$, por ejemplo en la base canónica. Dado que las transformaciones lineales de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ son funciones cuyas entradas son lineales en cada una de las variables tenemos que todas las tranformaciones lineales de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ son continuas.

Cuando el espacio en el que estamos trabajando es de dimensión infinita no todas las transformaciones lineales del espacio en sí mismo son continuas (continuidad puede ser definida cuando el espacio vectorial tiene estructura topológica). Cuando éstas son continuas reciben el nombre de operadores acotados. La definición es equivalente a la siguiente. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert (o de Banach) un *operador acotado* es una transformación lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty.$$

Sea $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \to H | \, T \text{ es acotado}\}$. Este espacio es un espacio vectorial, más aún es un álgebra. Esto es:

1. Si $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \Rightarrow S + T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,
2. $\lambda \in F \Rightarrow \lambda T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,
3. $ST \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, donde el producto de dos operadores está dado por la composición.

Cuando el espacio $\mathcal{H}$ es de Hilbert, tenemos una estructura adicional que nos permite definir otra operacion en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Sea $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, el *operador adjunto* $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es el único operador tal que

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle.$$

En álgebra lineal, el operador adjunto de una transformación lineal T_A es la transformación lineal T_{A^*}, donde $A^* = \overline{A^t}$, es decir, A^* es la matriz adjunta de A . Las propiedades más importantes del operador adjunto son las siguientes:

- Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\|T^*\| = \|T\|$,
- $(T^*)^* = T$,
- $(\alpha S + \beta T)^* = \overline{\alpha} S^* + \overline{\beta} T^*$,
- $(ST)^* = T^* S^*$,
- Además la norma es tal que $\|T\|^2 = \|TT^*\|$.

5 Algebras y álgebras C^*

Un *álgebra* es un espacio vectorial, sobre un campo F, que posee una operación entre sus elementos. Un *álgebra de Banach* es un álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ que posee una norma bajo la cual es un espacio de Banach y que cumple la siguiente desigualdad

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

La desigualdad anterior implica que la multiplicación $. : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es una operación continua.

Un álgebra C^* es un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ con una operación $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, llamada involución, que cumple las siguientes propiedades:

1. $(a^*)^* = a$,
2. $(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$,
3. $(ab)^* = b^* a^*$,
4. Además la norma es tal que $\|a\|^2 = \|aa^*\|$.

Las álgebras C* no son objetos extraños en matemáticas. De hecho, muchas de los espacios con los que se trabaja día con día son álgebras C*. Por ejemplo:

- El espacio de funciones continuas en el intervalo $[0,1](C([0,1]))$, donde la multiplicación es puntual, es decir ;

  $$(fg)(x) = f(x)g(x), \forall f, g \in C([0,1])$$

  y la involución dada por

  $$f^*(z) = \overline{f(z).}$$

- $M_n(\mathbb{C})$, con las operaciones de suma, multiplicación y adjunción usuales y con la norma dada por la norma de operadores actuando en $\mathbb{C}^n$.

- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, con la multiplicación dada por la composición de operadores y la operación * dada por el adjunto de un operador.

Uno de los teoremas más importantes de álgebras C* es el teorema de Gelfand-Naimark.

Teorema 5.1. *(Gelfand-Naimark) Toda álgebra C^* con identidad es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert.*

El teorema de Gelfand-Naimark muestra la importancia del estudio de las álgebras de operadores.

6 Operadores de Toeplitz

Uno de los personajes más importantes en la historia del análisis es Otto Toeplitz.

Nacido el 1ro. de agosto de 1881 en Breslau, Alemania (ahora es parte de Polonia y se llama Wroclaw). Terminó su doctorado en 1905 en la universidad de Breslau, estudiando geometría algebraica, a la edad de 24 años.

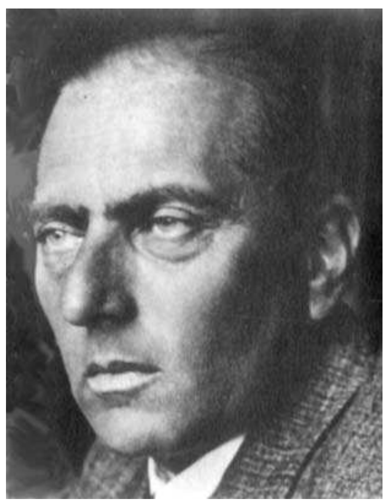

Figura 3: Otto Toeplitz

Fue invitado a trabajar en la universidad de Göttingen en 1906. Hilbert trabajaba allí y siendo ya todo un personaje dentro de las matemáticas, Hilbert influenció a Toeplitz, comenzando este último a trabajar problemas de análisis.

6.1 Operadores de Toeplitz en el espacio de Hardy

Los operadores de Toeplitz actúan en el espacio de Hardy de la circunferencia unitaria ($\mathbb{T}$). Este espacio está definido como:

$$H^2(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) | \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\chi_n(e^{i\theta})d\theta = 0, \quad \text{para } n > 0 \right\},$$

donde $\chi_n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ y $L^2(\mathbb{T})$ denota a las funciones cuadrado integrables en la circunferencia unitaria, con respecto a la longitud de arco. La colección $\{\chi_n, n \geq 0\}$ forma una base del espacio de Hardy.

Para una función acotada f, definida en la circunferencia unitaria, el operador de Toeplitz con símbolo f es el operador $T_f : H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ dado por

$$T_f(g) = P_{H^2}(fg),$$

donde $P_{H^2} : L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ es la proyección ortogonal.

A pesar de ser operadores relativamente sencillos, es muy dificil que dos operadores de Toeplitz conmuten, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 6.1. *(En el espacio de Hardy) Si dos operadores de Toeplitz T_φ y T_ϕ conmutan, entonces ambos símbolos son analíticos o conjugados analíticos o $a\varphi + b\phi$ son constantes para algunas constantes a, b no ambas cero.*

Si $\mathcal{F}$ es una familia de símbolos, denotamos por $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ al álgebra C* generada por todos los operadores de Toeplitz de la forma T_a tal que $a \in \mathcal{F}$.

Corolario 6.2. *Las álgebras conmutativas de operadores de Toeplitz en el espacio de Hardy son triviales.*

Cuando los símbolos de los operadores de Toeplitz no poseen las características dadas en el teorema 6.1, es posible estudiar si las álgebra que generan son conmutativas módulo los operadores compactos.

Teorema 6.3. *El álgebra $\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))$, generada por todos los operadores de Toeplitz con símbolos continuos, contiene al ideal $\mathcal{K}$ de los operadores compactos y la sucesión:*

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{T}(C(\mathbb{T})) \to C(\mathbb{T}) \to 0,$$

es una sucesión exacta corta. Esto implica que:

$$\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))/\mathcal{K}$$

es isométricamente isomorfa a $C(\mathbb{T})$.

6.2 Operadores de Toeplitz en otros espacios

Sea $\mathbb{D}$ un dominio en $\mathbb{C}^n$, con la medida de Lebesgue. Denotamos por $L^2(\mathbb{D})$ al espacio de funciones cuadrado integrables definidas en $\mathbb{D}$. El *espacio de Bergman* $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ es el espacio formado por las funciones analíticas que están en $L^2(\mathbb{D})$. Este espacio es cerrado en $L^2(\mathbb{D})$. La *Proyección de Bergman* $B_{\mathbb{D}}$ es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{D})$ sobre $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$. Las propiedades de un operador de Toeplitz dependen directamente de su símbolo. Por ejemplo, en el disco unitario un operador de Toeplitz es compacto si su símbolo se anula en la frontera del disco. Como en el caso de la circunferencia unitaria, en el disco unitario (o en un dominio en general) es muy dificil que dos operadores de Toeplitz conmuten. Por ejemplo Si T_{z^n} y T_f conmutan, entonces f es analítica.

Sin embargo, las álgebras de operadores de Toeplitz conmutativas pueden tener generadores con símbolos discontinuos. Por ejemplo, si el dominio $\mathbb{D}$ es el disco unitario y los símbolos son radiales entonces el álgebra de Toeplitz que generan es conmutativa.

6.3 Algebras de Toeplitz conmutativas en el disco

Módulo los operadores compactos podemos obtener álgebras de operadores de Toeplitz conmutativas, para familias de generadores cuyos símbolos son continuos en la cerradura del disco unitario $\mathbb{D}$.

Teorema 6.4. *El álgebra $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$ es irreducible y contiene el ideal de todos los operadores compactos. Además*

1. *Cada operador $T \in \mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$ es de la forma $T_a + K$, donde K es un operador compacto.*
2. $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))/\mathcal{K} \simeq C(\overline{\mathbb{D}})$
3. *La función $sym : \mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))/\mathcal{K} \to C(\overline{\mathbb{D}})$ dada por*

$$sym(T_a + K) \mapsto a|_{\partial\overline{\mathbb{D}}},$$

es un isomorfismo isométrico.

Más aún, los símbolos de los generadores de las álgebras de Toeplitz pueden tener discontinuidades y generar álgebras de Toeplitz conmutativas.

Teorema 6.5.
1. *(Vasilevski) El álgebra de Toeplitz (en el disco unitario) generada por operadores de Toeplitz cuyo símbolo tiene discontinuidades en la frontera del disco es conmutativa (módulo operadores compactos) si existen sólo dos límites.*
2. *(M. Loaiza, 2005) El álgebra de Toeplitz (en el disco unitario) generada por operadores de Toeplitz cuyo símbolo tiene discontinuidades en la frontera del disco es conmutativa (módulo operadores compactos) si existe un número finito de límites.*

6.4 Operadores de Toeplitz y Física

Los operadores de Toeplitz son utilizados en física, particularmente en la llamada Teoría Cuántica de Campos.

Definición 6.6. *La medida Gaussiana en $\mathbb{C}^n$ está definida por*

$$d_{\mu_r}(z) = \left(\frac{r}{\pi}\right)^n e^{-r|z|^2} d_\nu(z), r > 0,$$

donde $|z|^2 = |z_1|^2 + \ldots |z_n|^2$.

El Espacio $H^2(d_{\mu_r})$ es el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{C}^n, d_{\mu_r})$ formado por todas las funciones enteras cuadrado integrables. Para una función acotada g, el operador de Toeplitz con símbolo g está definido por

$$T_g^r(h) = \int g(w)h(w)e^{rz.w} d_{\mu_r}(w)$$

y la correspondencia

$$g \to T_g^r$$

se considera una Cuantización de $\mathbb{C}^n$ donde r juega el papel del inverso de la constante de Planck.

En [1] se presentan aplicaciones de los operadores de Toeplitz a Teoría Cuántica de campos. En ese trabajo se utilizan los llamados Super Operadores de Toeplitz, cuya particularidad es que actúan en espacios que poseen variables anticonmutativas.

Bibliografía

[1] D. Borthwick, S. Klimek, A. Lesniewski, M. Rinaldi, *Super Toeplitz Operators and Non-Perturbative Deformation Quantization of Supermanifolds, Commun. Math. Phys. 153, 49-76 (1993).*

[2] A. Böttcher, B. Silvermann *Analysis of Toeplitz Operators*, Second edition, Springer, 2006.

[3] J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*. North Holland, 1981.

[4] R. Douglas *Banach Algebras Techniques in Operator Theory*, Second edition, Springer, 1972.

[5] M. Loaiza, *On an algebra of Toeplitz operators with piecewise continuous symbols.* Integral Equations and Operator Theory, 51 (2005), no. 1, 141-153.

[6] N. L. Vasilevski, *Banach algebras produced by two-dimensional integral operators with a Bergman kernel and Piecewise continuous coefficients I*, Investiya VUZ, matematika, vol. 30 (1986), no.2, 12-21.

[7] N. L. Vasilevski, *Banach algebras produced by two-dimensional integral operators with a Bergman kernel and Piecewise continuous coefficients II*, Investiya VUZ, matematika, vol. 30 (1986), no.3, 33-38.

[8] N. Young, *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge, 1988.

Maribel Loaiza
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional,
Edificio 9, Unidad Profesional Adolfo López Mateos,
México D.F., Mexico
mloaiza@esfm.ipn.mx