Memorias de la XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México
Mosaicos Matemáticos No. 20, agosto 2007, pp. 101-106.



# LAS DUALIDADES DE LA NEGATIVIDAD Y EL CERO EN LA TRANSICIÓN DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA [1]

**Abraham Hernández y Aurora Gallardo**
CINVESTAV, México

**Resumen**

*En este artículo se reporta un estudio de caso donde una alumna muestra el reconocimiento de las dualidades del signo menos (unario – binario) y del cero (nulidad – totalidad) durante la transición de la aritmética al álgebra, en estudiantes de segundo de secundaria. Este reconocimiento constituye una posible vía para lograr la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros. Es muy relevante el hecho de que una estudiante competente en aritmética, encuentre dificultades ante expresiones donde aparecen la negatividad y el cero.*

## Revisión de literatura

Actualmente el cero y los números negativos son temas del currículo escolar, generalmente tratados sin considerar la importancia que tienen para lograr la extensión numérica de los naturales a los enteros y alcanzar una competencia en el manejo del lenguaje algebraico.
Piaget (1960), afirma que constituye uno de los grandes descubrimientos de la historia de las matemáticas, el hecho de haber convertido al cero y a los negativos, en números. Entre los investigadores que han estudiado los números negativos y el cero en el campo de la Educación Matemática se encuentran los siguientes: Freudenthal (1973); Glaeser (1981), Bell (1982, 1986), Janvier (1985), Fischbein (1987), Resnick (1989), Vergnaud (1989) entre otros. Estos trabajos, mostraron las dificultades extremas presentadas por los estudiantes en la conceptualización y la operatividad de los números negativos en el ámbito pre-algebraico y algebraico. Es relevante manifestar que estas dificultades continúan a niveles superiores de escolaridad (Gallardo, Torres, 2005). El análisis de este tema, fundamental para la educación matemática, continua vigente hasta nuestros días.

## El Estudio General

Una investigación previa al Estudio aquí presentado es el trabajo de Gallardo (2002), donde se mostró que en el proceso de transición de la aritmética al álgebra en los estudiantes de secundaria, cobra una importancia fundamental el análisis de la construcción de los números negativos, cuando los estudiantes se enfrentan con ecuaciones y problemas que tienen números negativos como coeficientes, en constantes o soluciones.
En el presente artículo, se reportan los resultados de un proyecto de investigación que pretende ahondar en el proceso de la problemática de los números negativos, vía el estudio del cero. En este trabajo entendemos por negatividad a los significados y sentidos que los estudiantes manifiestan al utilizar los números negativos. Analizaremos cómo se relaciona esta negatividad

[1] Trabajo financiado por CONACYT. Proyecto de Investigación: 44632. "Procesos de Abstracción y patrones de Comunicación en Aulas de Matemáticas y Ciencias con Entornos Tecnológicos de aprendizaje: Estudio Teórico – experimental con alumnos de 10 a 16 años de edad.

con las interpretaciones del cero asignadas por los alumnos. Preguntas como las siguientes guían este proyecto. En la transición de la aritmética al álgebra:

1. ¿Cómo contribuye el cero a la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros?
2. ¿Conciben los estudiantes al cero como número?
3. ¿Los estudiantes están conscientes de la naturaleza dual del cero y de la negatividad?
4. ¿Los estudiantes entienden la suma, la sustracción, la multiplicación y la división entre cero?
5. ¿El hacer un análisis histórico – epistemológico sobre el cero y la negatividad puede contribuir a comprender las dificultades que se presentan hoy día con los estudiantes?
6. ¿Qué cambios cognitivos provoca en los estudiantes la enseñanza de los enteros vía ambientes tecnológicos?

El fundamento teórico del Estudio general está basado en las ideas rectoras de los siguientes autores:

Filloy (1999), introdujo los modelos teóricos locales (MTL) para la observación empírica. Estos modelos constan de componentes sobre los procesos cognitivos y de comunicación, sobre la competencia y sobre modelos de enseñanza. La metodología general de nuestro estudio aborda estos componentes en dos planos de análisis, el plano histórico – epistemológico (evolución de los significados en el devenir de la historia) y el plano didáctico (enseñanza – aprendizaje – cognición).

Con respecto al componente de los procesos cognitivos, Filloy menciona que desde 1933, Piaget descubrió en el niño un sistema de tendencias de las cuales el infante no es consciente y por ende, no puede manifestarlas en forma explícita. En esta misma dirección, Filloy (1999) explicó que hay tendencias debidas a las estructuras cognitivas del sujeto que aparecen en cada estadio del desarrollo individual, que dan preferencia a distintos mecanismos de proceder, diferentes maneras de codificar y descodificar mensajes matemáticos. Estas "tendencias cognitivas", pueden observarse en el aula y durante las entrevistas clínicas.

Además, Gallardo (2002) encontró cinco niveles de aceptación de números negativos, evidenciados y abstraídos de un análisis histórico – epistemológico y a la vez de un estudio empírico con 35 alumnos de 12-13 años de edad.

Estos niveles son lo siguientes: <u>Sustraendo</u>, donde la noción de número se subordina a la magnitud (en a-b, a siempre es mayor que b donde a y b son números naturales); <u>Número signado,</u> donde un signo menos es asociado a una cantidad y no tiene significado adicional a otras condiciones; <u>El número relativo,</u> dónde la idea de cantidades opuestas está en el dominio discreto y la idea de simetría se pone evidente en el dominio continuo; <u>El número aislado,</u> es el resultado de una operación o la solución a un problema o ecuación; <u>El número negativo formal,</u> noción matemática de número negativo, dentro del cual hay concepto general de número que contempla los números positivos y negativos (los enteros de hoy). Este nivel normalmente no se alcanza por el estudiante 12-13 años de edad.

**Un Estudio de Caso**

En este artículo, nos abocamos solamente a los componentes sobre los procesos cognitivos y sobre modelos de enseñanza del MTL, que fundamentaron el estudio de caso aquí presentado. Para este propósito, se realizaron cuestionarios y entrevistas clínicas individuales con 16 estudiantes de segundo de secundaria que habían iniciado su enseñanza en el álgebra básica. De todos ellos se eligió el caso más representativo (**P**), donde aparecen hechos relacionados con el cero y la negatividad.

Durante los diálogos de la entrevista, surgieron nítidamente las dos tendencias cognitivas que se describen a continuación:

**Confiriendo sentidos intermedios.** En la resolución de adiciones y sustracciones de enteros, se dotó de múltiples sentidos a los números negativos que se correspondieron con los niveles de aceptación reportados por Gallardo (2002).

**La presencia de mecanismos inhibitorios.** Surgió el no reconocimiento de la sustracción de un número mayor de un número menor. La presencia de las soluciones negativas provocó la inhibición de reglas sintácticas que ya se habían dominado.

En relación al componente de modelo de enseñanza, se usó el Modelo de Bloques (MB) porque en él se muestran claramente las dualidades de la negatividad y el cero. Éste es un modelo de enseñanza para números negativos, donde el cero manifiesta su carácter dual, es decir, como elemento nulo: *a = a+ 0 = a+ 0 + 0 =…* y como contenido por una infinidad de parejas de opuestos: *a + (– a) = 0; a* número natural. (Hernández, 2004).

En este trabajo se consideraron dos versiones del MB: el modelo gráfico y el modelo concreto. La primera versión es la representación en lápiz y papel del segundo. En el modelo concreto se manipulan físicamente bloques cuadrados de cartón. Por ejemplo:

■■ □□□□
■■■ +5 □□□□ – 8

En este modelo, la acción de sumar se representa juntando los bloques correspondientes, es decir, bloques con color o sin color. Si en esta acción aparecen simultáneamente bloques de ambos tipos, se convierten en elementos nulos al emparejarse (principio fundamental del modelo). La acción de restar se representa quitando los elementos que constituyen el sustraendo o marca con una cruz los bloques eliminados en el minuendo. La representación alternativa del número: a = a + 0 = a + 0 + 0 =… cobra relevancia en la sustracción cuando el sustraendo es mayor que el minuendo.

Por ejemplo: (+ 4) + (– 7) = – 3 (+8) – (+5) = +3

■■■■ ⏞ ☒☒☒☒☒■■■
□□□□□□□

El cuestionario y la entrevista exploran la capacidad de interpretar, manipular y simbolizar situaciones que contienen los siguientes tópicos:

1) Identificar números positivos y negativos representados en el Modelo de Bloques.
2) Resolver vía el lenguaje aritmético, operaciones de adición y sustracción representadas en el Modelo de Bloques (MB)
3) Resolver adiciones y sustracciones expresadas en lenguaje aritmético – algebraico.
4) Simplificación de expresiones algebraicas (expresiones abiertas)
5) Sustitución de valores numéricos cualesquiera en expresiones algebraicas
6) Resolución de ecuaciones lineales
7) Invención de problemas verbales a partir de ecuaciones lineales dadas.

A continuación se muestran los diálogos más representativos de la entrevista de (P), acompañados por la interpretación del entrevistador (E), contenida en los paréntesis de la forma […]. Lo expresado por P aparece entre comillas "… "

[En el tópico 1, **P** representa correctamente números enteros asociando el color negro a los números positivos y el blanco o no color a los negativos. En la resolución de operaciones representadas en el M. B. (tópico 2), surgió la dualidad entre el número negativo y la operación de sustracción]. Se exhiben cuatro casos a continuación:

**1**[er] **Caso**. Ante la adición: □□□ □□ agregar ■■■■ ■■■, ella escribe: **–5 + 7=.**
Afirma: *"Es como si tuviera siete menos cinco igual a dos"* [Ella lee la expresión de derecha a izquierda y transforma la adición en una sustracción. Obsérvese que la equivalencia: (–5) + (+7) = 7 – 5 es correcta. Sin embargo, el primer miembro representa una adición de números signados y el segundo una sustracción de números naturales. De hecho, **P** manifiesta una tendencia cognitiva que consiste en dotar del sentido de sustraendo, al número negativo –5 (dualidad del signo menos: unario, binario)].

**2° Caso**. Ante la sustracción: ■■■■ ■■■■ quitar ■■ ■■, ella escribe: +8 – + 4 = . Observa la expresión anterior y afirma:
*"Es lo mismo que ocho menos cuatro, porque este signo* [+ 8 – + 4] *es siempre menos, porque más por menos es menos".*[Considera los signos – + como un sólo signo – , pues recurre a la regla de los signos (– ) (+) = – . Al introducir el dominio multiplicativo, manifiesta una T. C. al conferirle al doble signo (– +) sentido binario (8 – 4). Este hecho la conduce a considerar una sustracción de números naturales y no una sustracción extendida a los números enteros].

**3° Caso**. Ante la representación: □□□□ □□□□ quitar ■■■■ ■■■, escribe: – 8 – (+7) = –1. Observa la expresión anterior y verbaliza: *"Es como si tuviera menos ocho más siete, es igual a menos uno".* [**E** le pregunta: ¿Por qué no hiciste la sustracción?]. Ella argumentó: *"No puedo restar porque el siete es mayor que negativo ocho. Hice una suma"*(manifiesta una tendencia inhibitoria). Escribe: – 8 + 7 = –1 [**E** la cuestiona de nuevo: ¿Porqué – 8 + 7 = –1?]. Ella responde: "*Por que –8 es igual a – 1 y –7 los dos forman el menos 8*, y escribe: – 8 + 7 = –1 –7 + 7 = *–1"*. [De hecho, ella aprendió vía el MB a descomponer los números y a "hacer ceros", lo que nos permitió descubrir que ella acepta la adición de números signados en el caso de: –8+7 = –1. Esta aceptación fue posible, gracias a que ella introdujo el cero como la pareja de opuestos: –7 + 7. La dualidad del cero ha contribuido a extender la adición más allá de los números naturales. Lo anterior nos permite afirmar que reconoce números signados, pues verbaliza *"negativo ocho"*; números relativos, ya que escribe: "– 7 + 7" y también número aislado: –1, todos ellos sentidos intermedios del número negativo].

**4° Caso**. Ante la representación: ■■■■■■ ■■■■■■ quitar □□ □□ ella escribe: 10– (– 4) =.

Explica: "*Es que este signo* [10 – (–4)=] *es de la operación y el otro* [10 – (– 4) =] *es del número"*. Agrega: *"Cuando hay dos signos como estos* [10 – ( – 4)= ], *es como si se sumara".*[Se observa que advierte la dualidad al distinguir el signo del número (unario) y el signo de operación (binario), es decir reconoce signos pero no el número – 4 como tal. Por esta razón, una vez que se ha desprendido del modelo y se encuentra ante la expresión sintáctica: 10 – (– 4) =, aplica la ley de los signos (–) (–) = +, desapareciendo la sustracción y por ende la posibilidad de la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros].
Lo más relevante de la actuación de **P** al resolver operaciones sintácticamente, es decir, sin la presencia explícita del MB, se presentó en el tópico 3. Se observó que en el ítem: (+8) – (+10) = , **P** interpretó el único signo menos [(+8) – (+10) =] con naturaleza dual, es decir, ella advierte que el signo está vinculado al número y también lo considera como signo de operación y cree que este hecho puede ocurrir simultáneamente. Aunque incorrecto, esta doble significación asociada a un

sólo signo, le permite sustraer un número mayor de un número menor, situación que no aceptó en el 3º. Caso. Obsérvese el siguiente diálogo:
Ante la expresión. (+8) – (+10) =. Ella escribe: + 8 – 10 = 2. Exclama: *"¡No!, es menos dos"* y corrige el resultado: +8 –10 = – 2. Explica: *"Porque es como si tuviéramos una resta, diez menos ocho, el resultado es dos, pero como este número* [+8 – 10 = – 2] *es negativo y es más grande que ocho, el resultado es negativo".* [Nótese que **P** consideró una sustracción de números naturales expresada verbalmente como: *"diez menos ocho"* y a la vez, asoció el mismo signo menos al número diez en la oración escrita: +8 – 10 = – 2 . De hecho, llevó a cabo dos lecturas de la misma expresión, una de derecha a izquierda para la sustracción *"diez menos ocho"* y otra de izquierda a derecha donde recupera al número 10 como número negativo, es decir, como –10. Esta *"dualidad incorrecta de un único signo menos"*, se puede interpretar como un progreso aunque incipientemente hacia la extensión del dominio numérico, debido a que pudo sustraer un número mayor en valor absoluto de un número menor en valor absoluto, vía "su concepción personal" de dualidad del signo menos].

**Conclusiones**
Del análisis de la entrevista de **P,** se puede concluir que manifiesta una dualidad entre la sustracción y el número negativo, así como también la dualidad del cero. Con el uso del MB, surgieron los casos siguientes:
1° Caso. Convierte la adición en una sustracción y exhibe la tendencia cognitiva de dotar del sentido de sustraendo al número negativo – 5.
2° Caso. La sustracción permanece pero la restringe a los números naturales: 8, 4.
3° Caso. Dota de sentidos intermedios a los números a saber: número signado – 8; números relativos: –7, +7 y número aislado: – 1. Lo más relevante de este caso es la descomposición de la adición: –8 + 7, en un número negativo y un cero (lleno de elementos opuestos, por ejemplo, la pareja: – 7 + 7), que le permite aceptar la adición de números signados: –8 + 7 = –1.
4° Caso. Reconoce los signos binario y unario respectivamente pero no al número negativo 4 como tal, razón por la que no puede sustraerlo de 10. De hecho, no observa los números 10 y – 4, sino se centra en los dos signos menos solamente.
En el tópico 3, donde ella resuelve los ítems sin la presencia del MB, exhibe aunque de forma incipiente, una posible ruta hacia la extensión del concepto de número signado. La equivalencia que establece entre la expresión escrita +8 – 10 y la expresión hablada *diez menos ocho*, le permite asociar "un único signo menos en forma simultánea" a la sustracción: 10 – 8 y al número –10. La aceptación de –2 como resultado de la sustracción de números signados: +8 – 10 significa que es posible sustraer un número mayor de un número menor.
Los tópicos 4, 5 y 6, hacen referencia al uso de la igualdad como equivalencia de expresiones algebraicas, así como de la extrapolación correcta de reglas aprendidas de la semántica del MB a la sintaxis del lenguaje algebraico. Esta temática se exhibirá en un próximo artículo.
En suma, se puede concluir con el estudio de caso, que durante la transición de la aritmética al álgebra, el reconocimiento de la dualidad del cero: nulidad – totalidad; y de la negatividad: unario – binario, pueden contribuir a la extensión del dominio numérico de los números naturales a los enteros. Aunque en forma parcial, hemos comenzado a responder las preguntas de investigación 1, 2 y 3, mencionadas al inicio de este escrito. El Estudio general se encuentra en proceso. Está por concluirse el análisis histórico – epistemológico que arrojará nueva luz para continuar la experimentación en el ámbito didáctico.

## Bibliografía


Bell, A. et. al.: 1986. *Diagnostic Teaching*. A report of an ESRC Project. University of Notitigham: Shell Centre for Mathematical Education.

Bell, A.: 1982. Looking and directed numbers. *Mathematics Teaching,* 100, 66 – 72.

Filloy, E.: 1999. *Aspectos teóricos del álgebra del álgebra educativa.* Investigaciones en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Fischbein, E.: 1987. *Intuition in science and mathematics*. An Educational Approach Reidel, Holland.

Freudenthal, H.: 1973. *Didactical phenomenology of mathematical structure*s. Reidel Publishing Company, Dordrecht / Boston / Lancaster.

Gallardo, A.: 2002. *"The extension of the natural number domain to the integers in the transition from artihmetic to algbera"*. Educational Estudies in Mathematics. 49: 171-192, 2002. Kluwer Academic publishers. Printed in the Netherlands.

Gallardo, A.; Torres, O.: 2005. *El Álgebra Aritmética de George Peacock: un puente entre la aritmética y el álgebra simbólica*. IX Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática (SEIEM). Córdoba, España 243-249.

Glaeser, A. : 1981. *Epistemologie des nombres realtifs.* Recherches en Didáctique des mathématiques. Vol. 2, No. 3, pp. 303 – 346.

Hernández, A.: 2004. *El Modelo Concreto de Bloques: Un Modelo de Enseñanza para Alumnos de Bajo Desempeño Académico.* Tesis de Maestria. CINVESTAV, México.

Janvier, C.: 1985. *Comparison of models aimed at teaching signed integers*. Proceedings of the Nineth Meeting of the PME. State University of Utrecht, The. Netherlands. pp 135-140.

Piaget, J.: 1933. *La representación del mundo en el niño.* Ediciones Morata, S. L. Madrid.

Resnick, L. B.: 1989. *Conceptual bases of Arithmetic errors: The case of decimal fractions.* In Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 20, No.1, pp.8 – 27.

Vergnaud, G. : 1989. *L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction á l'algébre. Construction des savoirs.* Colloque International Obstacle Epistémologique et conflict Socio – cognitif, CIRADE, Montreal.