

TRATAMIENTO DIDÁCTICO DE LAS DISTRIBUCIONES DE PROPORCIONES MUESTRALES CON EL USO DE TECNOLOGÍA

Gerardo Gutiérrez Flores y Enrique Hugues Galindo
Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora

Resumen

Se presenta una propuesta didáctica que se apoya en el funcionamiento de un dispositivo basado en programas de computadora elaborados en Visual Basic, con los que se interactúa a través de una Hoja Electrónica. En la que se pretende ayudar a los estudiantes a superar dificultades relacionados con contenidos de Estadística. Se resalta el papel del abordaje de situaciones problemáticas como eje de las actividades didácticas para el logro de aprendizajes significativos. Con el Software se obtienen las distribuciones de las proporciones muestrales de una población, a través de diferentes sistemas de representación. Fue diseñado con propósitos esencialmente didácticos, por lo que haremos una descripción de su uso y funcionamiento en esos términos, caracterizando la idoneidad de las actividades didácticas en las que se propone su uso.

Introducción:

Este trabajo se ubica en una línea que hemos venido desarrollando y cuyo propósito es producir materiales de apoyo para las actividades didácticas, particularmente en lo que se refiere a la producción de software educativo promoviendo y desarrollando el uso de la Hoja Electrónica Excel (HE) y del Sistema de Cómputo Simbólico (CAS). Entre los principales propósitos de esos trabajos están: El de crear situaciones didácticas que ayuden a que los estudiantes logren comprensiones significativas acerca de los conceptos estadísticos fundamentales, situaciones que son muy difíciles de abordar sólo con lápiz y papel. Así como, sustituir tareas rutinarias por el manejo de este tipo de dispositivos para que los estudiantes se centren en las principales ideas que significan los conceptos mencionados y la articulación de los mismos en los métodos de la Estadística.

En este caso, el trabajo se centra en el tratamiento de las distribuciones de las proporciones muestrales que se realiza en Estadística Inferencial, analizado en base a los conceptos y criterios de la Estadística Descriptiva. El problema principal que se aborda en estos tratamientos es la dificultad de los estudiantes para comprender la distribución de una variable como un todo, cuyo significado es un complejo de relaciones con otros objetos matemáticos, al que accedemos a través de sus diferentes representaciones y que sólo podemos comprender como la articulación de sus diversos componentes que permiten su descripción y caracterización, a las que llamaremos unidades significativas.

Cada una de las partes de este dispositivo están contenidas en el archivo de Excel **Propormuestrales**, las cuales ponen de manifiesto las diferentes unidades significativas relativas a las Distribución de proporciones muestrales, y que describimos en esta exposición recurriendo al modelo de urnas. Empezamos describiendo el funcionamiento de cada una esas partes, mostrando: el uso de cada una de las hojas de este archivo Excel, su interacción con los programas, las situaciones problema que motivan o sugieren cada una de estas hojas y sus

respectivas restricciones. Después mostramos la forma en que este dispositivo puede ser incorporado en las actividades didácticas antes mencionadas, en base al significado de los objetos matemáticos que se ponen en juego y los criterios de idoneidad didáctica de la configuración instruccional que significa esta propuesta, de acuerdo al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática propuesto por Godino y colaboradores [1].

1. Funcionamiento del Dispositivo

1.1 Hoja 1

El propósito principal de esta hoja es responder al problema:

En una urna se tienen objetos de solamente dos tipos: éxitos y fracaso, cada uno de estos tipos con una cierta cantidad. Si se extrae un número de objetos de esa urna ¿Cuáles son las diferentes formas en que éstos pueden ser extraídos?

El problema puede ser considerado bajo los siguientes tipos de extracciones: Los objetos se extraen uno por uno, lo cual puede hacerse con o sin reemplazamiento. Y todos los objetos son extraídos al mismo tiempo.

El programa **Extraer**, que funciona con esta hoja, arroja esas diferentes formas en cada uno de los casos o tipos de extracciones, ver Figura 1, bajo las siguientes condiciones:

- Disponer del número de objetos. Cantidad que se carga en la celda **B1**.
- Disponer del número de extracciones. Cantidad que se carga en la celda **B2**.
- Disponer de los objetos. Los cuales se cargan en la columna **A**, a partir de la celda **A7**, de los cuales se deben distinguir entre éxitos y fracasos; se recomienda usar una cadena alfanumérica formada por la inicial de éxito (**E**) o la de fracaso (**F**) y un numeral, lo cual permite distinguir no sólo entre éxitos y fracasos sino, también, entre las diferentes opciones de éxito y entre las diferentes opciones de fracaso.
- Pulsar **Ctrl + a**, para correr el programa **Extraer**.

	A	B						
1		3	No. de Objetos					
2		2	No. de extracciones					
3								
4								
5								
6	Objetos		Orden y repetición		Orden sin Repetición		Ni Orden ni Repetición	
7	E1		E1	E1			E1	E2
8	E2		E1	E2	E1	E2	E1	E2
9	F1		E1	F1	E1	F1	E1	F1
10			E2	E1	E2	E1		
11			E2	E2				
12			E2	F1	E2	F1	E2	F1
13			F1	E1	F1	E1		
14			F1	E2	F1	E2		
15			F1	F1				

Figura 1: Ejemplo de una corrida del programa **Extraer** (Hoja 1)

En términos de la caracterización de las distribuciones de interés, esta hoja tiene también otros propósitos, ya que sus resultados pueden someterse a tratamientos con el objetivo de resolver problemas tales como:

- Dadas las condiciones del problema planteado, obtener las diferentes formas en que se pueden realizar las extracciones, para cada uno de los tipos, con la condición de que se obtenga: Ningún éxito, sólo un éxito, sólo dos éxitos, ..., o todos sean éxitos.
- Calcular la cantidad de formas en que se pueden realizar las extracciones en general o con las restricciones antes impuestas en el punto anterior.
- Mostrar que cada una de las restricciones planteadas en los dos puntos anteriores, excepto la de ningún éxito y la de todos son éxitos, es la unión de particiones mutuamente excluyentes cada una de las cuales tiene el mismo número de elementos.
- Introducir el lenguaje usual en la Combinatoria.
- Implementar procedimientos para deducir las fórmulas más utilizadas en Análisis Combinatorio, a partir del Principio Multiplicativo.

El programa **Extraer** presenta restricciones para arrojar resultados en dos sentidos: El primero tiene que ver con las restricciones en el número de columnas y filas de que se dispone en una hoja electrónica, lo cual puede ser superado recurriendo a otros acomodos para que se muestren esos resultados del programa. El segundo tiene que ver con la capacidad de valores de las variables que se pueden declarar en el programa **Visual Basic**, lo cual no ha sido superado por no ser parte de nuestros intereses. Por ser un dispositivo diseñado con fines didácticos, no se considera necesario abordar los problemas planteados para un número de objetos o extracciones que podrían rebasar las capacidades del software utilizado.

1.2 Hoja 2.

El propósito principal de esta hoja es responder al problema

En una urna se tienen objetos de solamente dos tipos: éxitos y fracaso, cada uno de estos tipos con una cierta cantidad. Si se consideran todas las posibles formas en que se puede extraer una cantidad de esos objetos, uno por uno y con reemplazamiento ¿Cuál es la distribución de la variable cuyos valores son el número de éxitos en cada una de esas posibles extracciones?

El programa **Muestra**, que interactúa con esta hoja 2, arroja todas las posibles formas en que se pueden extraer un cierto número de objetos, el número y el porcentaje de éxitos en cada una de estas formas, la tabla de frecuencias de la variable en cuestión y la gráfica de la distribución de esa variable, ver Figura 2. Bajo las siguientes condiciones:

- Disponer del número de objetos. Cantidad que se carga en la celda **B1**.
- Disponer del número de extracciones. Cantidad que se carga en la celda **B2**.
- Disponer del número de éxitos. Cantidad que se carga en la celda **B3**.
- Disponer de los objetos. Los cuales se cargan en la columna **A**, a partir de la celda **A7**, de los cuales se deben distinguir entre éxitos y fracasos; se recomienda usar una cadena alfanumérica formada por la inicial de éxito (**E**) o la de fracaso (**F**) y un numeral, lo cual permite distinguir no sólo entre éxitos y fracasos sino, también, entre las diferentes opciones de éxito y entre las diferentes opciones de fracaso.
- Pulsar **Ctrl + e**, para correr el programa **Muestra**.

Los tratamientos que motivan y sugieren los resultados de esta hoja, están relacionados por la forma en que tanto la gráfica como la tabla de frecuencias resumen los resultados de las extracciones. Así como el porcentaje y el número de éxitos de los resultados de las mismas. Los tratamientos que sugieren estos resultados están más relacionados con la caracterización de la

distribución del porcentaje de éxitos de las muestras, en términos de sesgos y aglutinamientos con los diferentes métodos que sugiere la Estadística Descriptiva.

	A	B	C				
1		3	No. de Objetos				
2		2	No. de extracciones				
3		2	No. de éxitos				
4							
5					No. de éxitos		
6	Objetos		Resultados posibles		% de éxitos		
7	E1		E1	E1	2	100	
8	E2		E1	E2	2	100	
9	F1		E1	F1	1	50	
10			E2	E1	2	100	
11			E2	E2	2	100	
12			E2	F1	1	50	
13			F1	E1	1	50	
14			F1	E2	1	50	
15			F1	F1	0	0	
16							
17	% de éxitos			0	50	100	Total
18	No. de muestras			1	4	4	9
19							
20							
21	Distribución de la Proporción de éxitos en las muestras						
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							

Figura 2: Ejemplo de una corrida del programa **Muestra** (Hoja 2)

Las restricciones en los resultados que se arrojan en esta hoja son las mismas que para la hoja 1 y, como se puede ver, las consideraciones que se hicieron para la anterior proceden en el mismo sentido para esta hoja 2.

1.3 Hojas 3 y 4.

La diferencia de estas hojas es que en la primera aparece la tabla que permite calcular los momentos, con respecto a la media, pero no se obtienen explícitamente los indicadores de esos momentos y en la segunda sucede exactamente lo contrario. El propósito principal de estas hojas es proporcionar elementos que permitan comparar la distribución de las proporciones muestrales con una distribución normal.

Partimos de que una variable muestral se distribuye de forma aproximadamente normal si cumple con alguno de los siguientes criterios:

- La gráfica de los valores de esa variable con respecto a sus frecuencias relativas tiene forma de una campana.
- El porcentaje de valores que caen en un intervalo alrededor de la media y con un radio de k desviaciones estándar, de acuerdo a los valores que arroja la tabla de la distribución normal estándar que aparece en los textos.
- Los indicadores de los momentos con respecto a la media aritmética.

Lo cual permite caracterizar las distribuciones de las proporciones muestrales de acuerdo a su similitud con una distribución normal.

El Programa **Momentos**, que interactúa con la **hoja 3**, arroja la tabla de momentos del número de éxitos en los resultados de las extracciones, de cierto tamaño, y la gráfica de las distribuciones de frecuencias relativas de esa variable; bajo las condiciones siguientes:

- Disponer del número de objetos. El cual se carga en la celda **B1**.
- Disponer del número de extracciones. El cual se carga en la celda **B2**.
- Disponer del número de éxitos en la urna. El cual se carga en la celda **B3**.
- Pulsar **Ctrl + i** para correr el programa **Momentos**.

El Programa **Limite**, que interactúa con la **hoja 7**, arroja los valores de los momentos con respecto a la media aritmética y sus indicadores respectivos del número de éxitos en los resultados de las extracciones, de cierto tamaño, y la gráfica de las distribuciones de frecuencias relativas de esa variable, ver figura 3; bajo las condiciones siguientes:

- Disponer la proporción de éxitos. El cual se carga en la celda **B2**.
- Disponer del número de extracciones. El cual se carga en la celda **B3**.
- Pulsar **Ctrl + u** para correr el programa **Limite**.

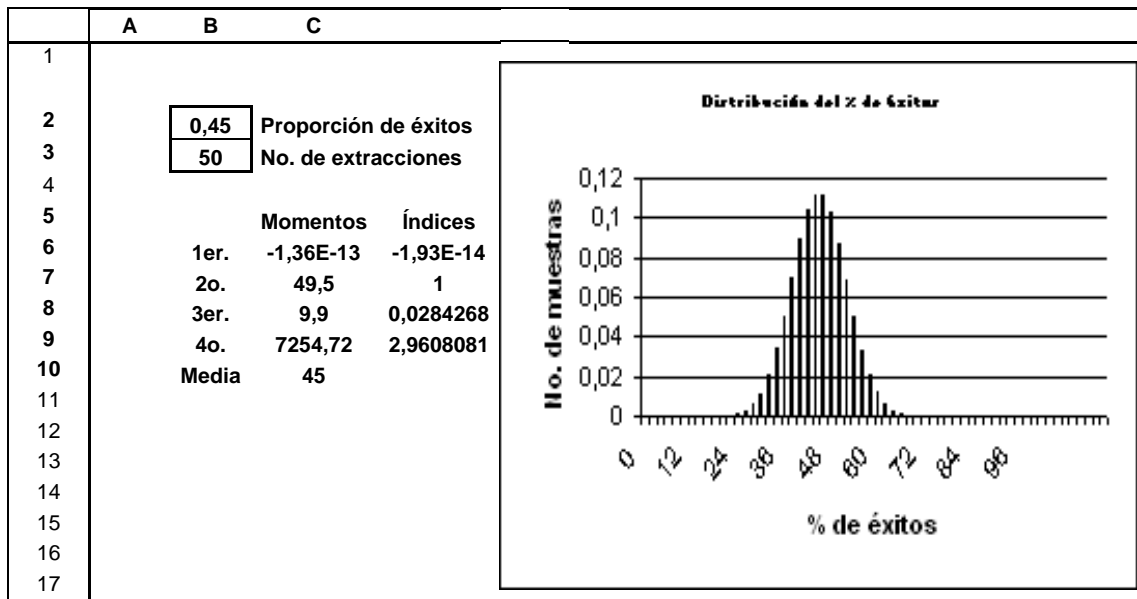


Figura 3: Ejemplo de una corrida del programa **Limite** (Hoja 4)

Las restricciones para el funcionamiento de los programas utilizados en estas hojas están relacionadas con su uso como recurso didáctico y no a la capacidad del software.

Como se puede ver, los tratamientos que motivan y sugieren los resultados que se obtienen en estas hojas no son muy diferentes, para efectos del estudio de la distribución de la variable en cuestión, aunque si están relacionados con conceptos importantes de la Estadística Descriptiva como son: Las técnicas y procedimientos para el cálculo de los momentos y sus indicadores respectivos, así como la relación entre el promedio de las proporciones muestrales y la proporción de éxitos en los objetos que contiene la urna. Estos tratamientos sintetizan aquellos para los cuales fue diseñado este dispositivo, los cuales podemos resumir en la secuencia del planteamiento de los problemas tipo siguientes:

Problema 1. Elaborar tablas de frecuencias relativas (no acumuladas) y sus gráficas respectivas de una variable cuyos valores pueden ser obtenidos de tabla de la Distribución Normal, usando diferentes particiones para el recorrido de los valores de esa variable.

Problema 2. A los estudiantes se les muestran diferentes representaciones de variables, como las del problema anterior, y se les pide que concluyan acerca de su sesgo y aglutinamiento, a partir de clasificaciones de los valores de la variable; de acuerdo a los criterios de clasificación siguientes: Partiendo el recorrido en intervalos del mismo tamaño, por percentiles y subjetivamente.

Problema 3. Bajo diferentes circunstancias y contextos, los estudiantes dispondrán de un conjunto de objetos, diferenciados en éxitos y fracasos, de los cuales se desea obtener las posibles muestras de cierto tamaño. Se les pide que obtengan la tabla de frecuencias relativas y las gráficas respectivas de la variable número de éxitos en las muestras.

Problema 4. A los estudiantes se les muestran diferentes representaciones de variables, como las del problema anterior, y se les pide que concluyan acerca de su sesgo y aglutinamiento, a partir de clasificaciones de los valores de la variable; de acuerdo a los criterios de clasificación: Partiendo el recorrido en intervalos del mismo tamaño, por percentiles y por los aglutinamiento alrededor de la media, tomando como referencia la desviación estándar

Problema 5. Realizar un análisis comparativo del sesgo y aglutinamiento de los valores de la variable número de éxitos en las muestras y una que se distribuye normalmente, a partir de diferentes representaciones y clasificaciones de los valores de las variables.

Problema 6. Dada la distribución de una variable, por medio de alguna representación, realizar un análisis comparativo con una distribución normal, a través el aglutinamiento de los valores de la variable alrededor de la media y a partir de los indicadores de los momentos de las variables.

Problema 7. En las mismas circunstancias de los problemas 2 y 4, hacer un análisis comparativo del sesgo y el aglutinamiento de los valores de las variables de acuerdo a los indicadores de los momentos de las variables.

2. La Propuesta Didáctica

Muchas de las dificultades para comprender algunos conceptos estadísticos están relacionadas con la comprensión que se tenga acerca de la distribución de una variable, sobre todo con la articulación de las diferentes características que permiten caracterizarlas. Y que, según nosotros, las técnicas y procedimientos que requieren los problemas didácticos que suelen plantearse en los cursos y en los textos, con estos contenidos, no ayudan a los estudiantes a superar esas dificultades.

Una de las ideas básicas, de las que parte esta propuesta, es la clasificación de los valores de la variable bajo observación, presente en las diferentes técnicas y criterios que se usan en Estadística Descriptiva para el estudio de los datos. Esta idea requiere no sólo de las características individuales de los datos, como valores (valores relativos), dimensión, frecuencia (frecuencias relativas), etc. Sino también aquellas características de los datos como un todo, tales como el rango, las medidas de centralización, medidas de dispersión, momentos, etc. Así, los significados de la idea de distribución que desarrollaremos en esta propuesta giran en torno a la idea de la cual partimos.

Coincidiendo con Godino y colaboradores [1], describimos el significado de los objetos matemáticos, involucrados en esta propuesta, a partir de la tipología de los objetos matemáticos primarios siguiente:

- **Situaciones problema.** Son aquellas situaciones problemáticas de cuyo tratamiento emergen los objetos matemáticos y motivan el estudio sistemático de los datos, de acuerdo al desarrollo de la disciplina. Para efectos didácticos, la forma en que son planteados en el aula fueron expuestos en la sección anterior.

- **Lenguaje.** Son aquellas expresiones, notaciones, gráficas, etc. en sus diversos registros y que representan no sólo el vehículo para acceder a las situaciones problemáticas planteadas o para la implementación de su tratamiento, sino como forma de comunicación de los actores de las actividades didácticas con el objetivo de generar un lenguaje común, más acorde con el de la disciplina. Este lenguaje no sólo debe permitir la implementación de las técnicas y procedimientos para la caracterización de las distribuciones sino, también, la articulación de las características de los datos y los criterios y técnicas de la estadística para su tratamiento.

- **Técnicas y Procedimientos.** Tales como algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc. En nuestro caso: Cálculo de la media aritmética y la desviación estándar, tanto muestrales como poblacionales. Obtención de intervalos alrededor de la media y su frecuencia. Implementación de este dispositivo. Formación de tablas de frecuencia y sus gráficas respectivas. Obtención de las muestras de cierto tamaño a partir de una población. Obtención del espacio de eventos de los valores de una variable que se distribuye binomialmente. Implementación de diferentes criterios para clasificar a los datos.

- **Conceptos y Definiciones.** Proposiciones por medio de las cuales se pone de manifiesto características de los objetos: Media Aritmética Muestral y Poblacional. Desviación Estándar Muestral y Poblacional. Distribución de Frecuencias. Momentos. Sesgo de una distribución. Aglutinamiento

- **Propiedades.** Son proposiciones acerca de las características de los conceptos: Todas aquellas propiedades de las distribuciones relacionadas con el sesgo y los aglutinamientos; particularmente las distribuciones binomiales y normales.

- **Argumentos.** Enunciados para validar o explicar procedimientos. En estas actividades nos restringiremos a justificar los procedimientos implementados a partir de los conceptos y criterios de la estadística. Y a ejemplificar las proposiciones generales que se enuncien.

Los contenidos a abordar son los señalados en los planes y programas de estudio de las licenciaturas de Contabilidad, Administración [2] y Ciencias de la Comunicación [3] y la bibliografía propuesta. Que como se indica en los significados propuestos no se pretende la

formalización ni generalización de los mismos. Las situaciones problema son el punto de partida de las actividades didácticas en cuya resolución el profesor sólo interviene haciendo replanteamientos de las mismas, con el propósito de hacer más accesibles las situaciones planteadas de acuerdo a las comprensiones y dificultades que manifiesten los estudiantes. Los procesos de institucionalización se generaran a partir del planteamiento de situaciones problemáticas más generalizadas y conducidas por el profesor.

Así, el papel del profesor es, esencialmente el de un tomador de decisiones, acerca de qué problemas, cómo y cuándo plantearlos o replantearlos de acuerdo a las observaciones que haga sobre la conducta de los estudiantes al estarlos resolviendo. También sobre cuándo este dispositivo funciona como sustituto de procedimientos rutinarios con lápiz y papel o como apoyo para las diferentes actividades relacionadas con la comprensión de objetos matemáticos: generalización, abstracción, síntesis, etc. Y sobre todo cuando es conveniente dejar de usarlo; por ejemplo en actividades de institucionalización de los objetos matemáticos.

Bibliografía

- [1] Godino, J. D. Batanero, C. Font, V. Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. [URL: http://www.ugr.es/local/jgodino](http://www.ugr.es/local/jgodino) (1/5/2006)
- [2] Programa de la Materia: Estadística I. Licenciaturas de Contaduría y Administración Pública. Departamento de Contabilidad y Administración. División de Ciencias Económicas y Administrativas de la Universidad de Sonora.
- [3] Programa de la Materia: Estadística Descriptiva. Licenciatura en Ciencias de la Comunicación. Departamento de Psicología y Comunicación de la División de Ciencias Sociales de la Universidad de Sonora.