Memorias de la XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas.
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México,
Mosaicos Matemáticos, No. 20, Agosto, 2007, pp. 83–91.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN EL PLANO COMPLEJO

Rodrigo González González
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
e-mail: rgonzlz@gauss.mat.uson.mx

Resumen

El objetivo del presente trabajo es bosquejar algunas ideas fundamentales y describir las propiedades más importantes asociadas con las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano complejo, así como relacionar algunos conceptos que surgen frecuentemente en la aplicación de las matemáticas en problemas físicos, con el fin de atraer la atención de los estudiantes de licenciatura hacía una de las más maravillosas y privilegiadas ramas de las matemáticas, la Teoría de Funciones de Variable Compleja.

1 Introducción

En este trabajo se analiza la existencia y naturaleza de las soluciones de un tipo especial de ecuaciones diferenciales ordinarias definidas en el plano complejo. Esto es, el objeto de estudio es una ecuación diferencial no lineal de n-ésimo orden definida sobre un dominio del plano complejo, descrita por la expresión

$$\frac{d^n w}{dz^n} = F\left(z; w, \frac{dw}{dz}, \cdots, \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}\right), \tag{1}$$

con F una función localmente analítica de todos sus argumentos. Esto es, F posiblemente poseé singularidades aisladas o puntos de ramificación en algún dominio $\mathcal{D}$.

Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en el plano complejo es de la forma

$$\frac{dw_j}{dz} = f_j\left(z; w_1, \cdots, w_n\right), \quad j = 1, \cdots, n \tag{2}$$

donde de nuevo f_j es una función locamente analítica de cada uno de sus argumentos.

Al igual que en el caso real, la ecuación (1) es equivalente a un sistema de primer orden, el cual se obtiene mediante el procedimiento recursivo: $w_{j+1} = \dfrac{d^j w_1}{dz^j}$, $j = 1, \cdots, (n-1)$ y $\dfrac{d^n w_1}{dz^n} = F\left(z; w_1, \dfrac{dw_1}{dz}, \cdots, \dfrac{d^{n-1}w_1}{dz^{n-1}}\right)$, con $w_1 \equiv w$.

Una pregunta natural que surge inmediatamente es acerca de si existe solución analítica para este tipo de ecuaciones, dados valores iniciales acotados, y si ésta es única. En el caso de la ecuación (2), por ejemplo, las condiciones iniciales en $z = z_0$ están dadas por

$$w_j(z_0) = w_{j0} < \infty, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{3}$$

La respuesta a esta pregunta fundamental es afirmativa, la cual se establece inicialmente de forma local en el siguiente resultado, debido a Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

Teorema 1.1. (**Cauchy**) : *El sistema* (2) *con valores iniciales* (3) *y con* $f_j(z; w_1, \cdots, w_n)$ *una función analítica de cada uno de sus argumentos en un dominio* $\mathcal{D}$ *que contiene a* $z = z_0$ *tiene una única solución analítica en una vecindad de* z_0.

Dem. La demostración de este resultado se basa en un método que utiliza *acotadores maximizantes*, llamados también *"mayorantes"* de Cauchy, para la representación en serie de la solución. Esto es, se trata de determinar una serie convergente que domine a la representación verdadera de la solución. La idea básica se adquiere a partir del problema simple de Cauchy de la ecuación escalar no lineal de primer orden

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w), \quad w(0) = 0. \tag{4}$$

El problema para otros valores iniciales $w(z_0) = w_0$ se reduce a este caso trasladando las variables. La función $f(z, w)$ se supone que es analítica y acotada cuando z y w están dentro de los círculos $|z| \leq a$ y $|w| \leq b$, con $|f| \leq M$ para a, b y M constantes predeterminadas. La expansión en serie de la solución del problema (4) se puede determinar tomando derivadas sucesivas. Esto es,

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dz}, \quad \frac{d^3w}{dz^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w}\frac{dw}{dz} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{d^2w}{dz^2}, \quad \cdots$$

lo cual permite calcular $\left(\text{con la relación } \left(\frac{dw}{dz}\right)_0 = f(0,0) \text{ como punto de partida}\right)$

$$w = \left(\frac{dw}{dz}\right)_0 z + \left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{2!} + \left(\frac{d^3w}{dz^3}\right)_0 \frac{z^3}{3!} + \cdots \tag{5}$$

La técnica es considerar una ecuación de comparación con la misma condición inicial

$$\frac{dW}{dz} = F(z, W), \quad W(0) = 0 \tag{6}$$

en la cual cada término de la representación en serie de $F(z, W)$ domina al término respectivo de la serie correspondiente a $f(z, w)$,

$$f(z, w) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} C_{jk} z^j w^k, \quad C_{jk} = \frac{1}{j!k!}\left(\frac{\partial^{j+k} f}{\partial z^j \partial w^k}\right)_0. \tag{7}$$

En $z = a$ y $w = b$ la función f es acotada, $|f(z, w)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |C_{jk}| a^j b^k = M$. Como cada término de esta serie es acotado por M, entonces $|C_{jk}| \leq M a^{-j} b^{-k}$. Así, una expansión dominante para f puede ser de la forma

$$F(z, W) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{a^j b^k} z^j W^k. \tag{8}$$

Claramente la solución expandida para $W(z)$ (ecuación (5), con w reemplazada por W) domina a la expansión para w. Ahora, es fácil mostrar que la ecuación (6) para $W(z)$ tiene una solución en una vecindad de $z = 0$. Sumando la serie (8) da como resultado

$$F(z, W) = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{z}{a}\right)\left(1 - \dfrac{W}{b}\right)},$$

la cual al sustituirla en la ecuación (6) implica

$$\left(1 - \frac{W}{b}\right)\frac{dW}{dz} = \frac{M}{1 - \dfrac{z}{a}},$$

de donde por integración directa se obtiene

$$W(z) = b - b\left[1 + \frac{2aM}{b}\ \log\left(1 - \frac{z}{a}\right)\right]^{1/2}. \tag{9}$$

En la expresión (9) se toma el valor positivo para la raíz y el valor principal para la función logaritmo para que $W(0) = 0$. La serie para $W(z)$ converge absolutamente para $|z| < R$, *i.e.*, hasta alcanzar la singularidad más cercana: $z = R$, ya que $R = a\left(1 - \mathrm{e}^{-b/2aM}\right) < a$ (esto es, donde $[\cdot]^{1/2} = 0$). Por lo tanto, por comparación la solución $w(z)$ para la ecuación (4) debe de existir para $|z| < R$. Además, como se está trabajando exclusivamente sobre la clase de funciones analíticas, cualquier representación en serie obtenida de esta forma es única, ya que la serie de Taylor representa de forma única a una función analítica. Este método se puede extender sin mayor complicación al sistema de ecuaciones (2). Sin pérdida de generalidad, tomando valores iniciales $w_j = 0$ para $j = 1, \cdots, n$ en $z = 0$ y funciones analíticas dentro de $|z| \leq a,\ |w_j| \leq b$, se puede tomar $|f_j| \leq M$ en este dominio, y entonces para las funciones dominantes se tiene que

$$\frac{dW_1}{dz} = \frac{dW_2}{dz} = \cdots = \frac{dW_n}{dz} = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{z}{a}\right)\left(1 - \dfrac{W_1}{b}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{W_n}{b}\right)}\ , \tag{10}$$

donde $W_j(0) = 0$ para $j = 1, \cdots, n$.
Resolviendo $\dfrac{dW_j}{dz} = \dfrac{dW_{j+1}}{dz}$, con $W_j(0) = W_{j+1}(0) = 0$ para $j = 1, \cdots, n-1$, implica que $W_1 = W_2 = \cdots = W_n = W$, lo cual reduce a la ecuación (10) en

$$\begin{aligned} &\frac{dW}{dz} = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{z}{a}\right)\left(1 - \dfrac{W}{b}\right)^{n}}, \\ &W(0) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

cuya solución es de la forma

$$W = b - b\left[1 + \frac{(n+1)aM}{b}\ \log\left(1 - \frac{z}{a}\right)\right]^{\frac{1}{n+1}}\ , \tag{12}$$

con un radio de convergencia dado por $|z| < R$, donde

$$R = a\left(1 - \mathrm{e}^{-b/(n+1)aM}\right). \tag{13}$$

Por lo tanto, la serie solución del sistema (2), con $w_j(0) = 0$, converge absoluta y uniformemente dentro del círculo de radio R.

■

Así, el Teorema 1 establece el hecho que para $f_i(z; w_1, \cdots, w_n)$, en la ecuación (2), analítica de todos sus argumentos, existe una solución analítica en una vecindad (aún por muy pequeña que pudiera ser) para el problema de valor inicial en $z = z_0$. Afortunadamente es posible dar una continuación analítica hasta encontrar una nueva singularidad, lo cual es posible en base al *principio de continuación*, establecido por el siguiente resultado.

Teorema 1.2. (**Principio de Continuación**) : *La función obtenida por continuación analítica de la solución del sistema (2), a lo largo de cualquier trayectoria en el plano complejo, es una solución de la continuación analítica de las ecuaciones diferenciales que conforman al sistema.*

Dem. Como $g_j(z) = w_j' - f_j(z; w_1, \cdots, w_n)$, $j = 1, \ldots, n$, es cero dentro del dominio donde se ha establecido la existencia de la solución, entonces cualquier continuación analítica de $g_j(z)$ necesariamente tiene que ser cero. Dado que la solución $w_j(z)$ satisface $g_j(z) = 0$ dentro del dominio de existencia y dado que las operaciones en $g_j(z)$ mantienen la analiticidad, entonces extendiendo analíticamente $w_j(z)$ proporciona la extensión analítica de $g_j(z)$, la cual es idénticamente a cero.

■

Ahora, la pregunta inmediata es sobre dónde y cómo se localiza la nueva singularidad y de que tipo puede ser. La posibilidad es que se puede tener una *singularidad fija* o una *singularidad móvil*. Una singularidad fija es la que se determina por las singularidades explícitas de las funciones $f_j(z; \cdot)$. Por ejemplo, $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{w}{z^2}$ tiene un punto singular fijo (PSF) en el origen. La solución refleja este hecho: $w = A\mathrm{e}^{-1/z}$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$. Por otro lado, un punto singular móvil (PSM) depende de la condición inicial impuesta. Por ejemplo, la ecuación $\dfrac{dw}{dz} = w^2$ no tiene PSF's, pero la solución $w = -\dfrac{1}{z - z^*}$, con z^* arbitrario tiene un polo simple móvil, ya que z^* depende de la condición inicial. Para el caso, $w(z = 0) = w_0$, $z^* = 1/w_0$. Dependiendo de la ecuación considerada, es posible tener diferentes tipos de singularidades móviles. Por ejemplo, para cada $p > 2$, la ecuación $\dfrac{dw}{dz} = w^p$, cuya solución es $w = [(p-1)(z^* - z)]^{1/(1-p)}$, tiene un punto de ramificación móvil en $z = z^*$.

2 Ecuaciones Lineales

El caso lineal general tiene la estructura siguiente

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dz} = \mathbf{A}(z)\boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{w}(z_0) = \boldsymbol{w}_0, \tag{14}$$

donde $\boldsymbol{w}$ es un vector columna $n \times 1$ y $\mathbf{A}(z)$ es una matriz $n \times n$.

El problema escalar lineal homogéneo

$$\frac{d^n w}{dz^n} = p_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} + p_2(z)\frac{d^{n-2}w}{dz^{n-2}} + \cdots + p_n(z)w \tag{15}$$

es un caso particular de la ecuación (14), con

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ p_n(z) & p_{n-1}(z) & p_{n-2}(z) & \cdots & p_2(z) & p_1(z) \end{bmatrix} \tag{16}$$

y

$$w_1 \equiv w,\ w_2 = \frac{dw_1}{dz},\ \cdots\ ,\ w_n = \frac{dw_{n-1}}{dz}. \tag{17}$$

Un resultado importante para el caso lineal se establece en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Si* $\mathbf{A}(z)$ *es analítica en un dominio simplemente conexo* $\mathcal{D}$*, entonces el problema de valor inicial* (14) *tiene una única solución analítica en* $\mathcal{D}$*.*

Dem. La demostración es directa observando que al buscar la serie solución $w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ alrededor de una singularidad, digamos $z = 0$, es posible determinar explícitamente los coeficientes c_k y mostrar que la serie converge hasta la singularidad más cercana de $\mathbf{A}(z)$.

■

Una consecuencia de este teorema es que la ecuación lineal general (14) tiene únicamente puntos singulares fijos, determinados por las singularidades de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}(z)$. Por ejemplo, la ecuación escalar de primer orden

$$\frac{dw}{dz} = p(z)w, \quad w_0(z_0) = w_0 \tag{18}$$

tiene la solución explícita

$$w(z) = w_0\ \mathrm{e}^{\int_{z_0}^{z}\ p(\xi)d\xi}, \tag{19}$$

la cual es analítica si $p(z)$ es analítica.

Una clase especial de ecuaciones lineales que surge frecuentemente en la aplicación consiste de aquellas ecuaciones que poseén *puntos singulares regulares*: la ecuación (14) tiene un punto singular regular en $z^* \in \mathcal{D}$ si la matriz $\mathbf{A}(z)$ tiene un polo simple en $z = z^*$. Esto es,

$$\mathbf{A}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k (z - z^*)^{k-1}, \tag{20}$$

donde $\mathbf{A}_0$ es una matriz no nula. Equivalentemente, la ecuación escalar (15) tiene un punto singular regular en $z = z^*$ si $p_k(z)$ tiene un polo de orden k en ese punto. En otro caso, el punto se dice ser *singular irregular*. Utilizando las relaciones $Q_j(z) = -(z - z^*)^j p_j(z)$, las cuales son analíticas en $z = z^*$ para $j = 1, \cdots, n$, la ecuación (15) se puede reescribir en la forma

$$(z - z^*)^n \frac{d^n w}{dz^n} + \sum_{j=1}^{n} Q_j(z)(z - z^*)^{n-j} \frac{d^{n-j} w}{dz^{n-j}} = 0. \tag{21}$$

Frobenius muestra que la solución contiene puntos de ramificacón en $z = z^*$. En efecto, expandiendo $Q_j(z)$ alrededor de z^*, $Q_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(z - z^*)$, se tiene que la solución de la ecuación (21) tiene la forma

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z^*)^{k+r}, \tag{22}$$

donde r satisface la *ecuación indicial*

$$r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1) + \sum_{j=1}^{n-1} c_{j0} r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+j+1) + c_{n0} = 0. \tag{23}$$

Si las raíces de (23) no son múltiples o difieren entre si por un entero, entonces se tienen n soluciones (22) linealmente independientes. De otra forma, la solución se complementa con términos apropiados que contienen potencias de $\log(z - z^*)$. Si $Q_j(z) \equiv c_{j0}$, $j = 1, \cdots, n$, entonces (23) lleva a raíces asociadas con soluciones de la *Ecuación de Euler*. El caso estándar de este último tipo de ecuaciones es la ecuación de segundo orden. Por ejemplo, algunas ecuaciones de segundo orden bien conocidas que contienen puntos singulares regulares son

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - p^2) w = 0 \quad (\textit{Ecuación de Bessel}),$$
$$(1 - z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + p(p+1) w = 0 \quad (\textit{Ecuación de Legendre}),$$
$$z(1 - z) \frac{d^2 w}{dz^2} + [c - (a + b + 1) z] \frac{dw}{dz} - abw = 0 \quad (\textit{Ecuación Hipergeométrica}),$$

con a, b, c, p constantes.

3 Ecuaciones del Tipo Painlevé

Un tipo especial de ecuaciones diferenciales no lineales, que se caracterizan por poseer la propiedad de que sus únicas singularidades móviles son polos, son las *Ecuaciones de Tipo Painlevé*. Esta propiedad particular (originalmente impuesta por Émile Picard) permite linealización o solución exacta de la ecuación. Matemáticamente hablando estas ecuaciones son de las más simples posibles, ya que las soluciones además de sus singularidades fijas, las cuales se conocen a priori, únicamente tienen polos. Este tipo de ecuaciones surgen frecuentemente en problemas físicos en diferentes contextos, como por ejemplo dinámica de fluidos, mecánica cuántica, relatividad, entre otros.

El caso más simple ocurre por supuesto para las ecuaciones de primer orden, las cuales se pueden expresar como

$$\frac{dw}{dz} = f(z,w) = \frac{p(z,w)}{q(z,w)}, \tag{24}$$

con p y q polinomios en w y coeficientes localmente analíticos de z. La única ecuación de primer orden del tipo Painlevé es la *Ecuación de Riccati*,

$$\frac{dw}{dz} = A_0(z) + A_1(z)w + A_2(z)w^2, \tag{25}$$

la cual puede ser linealizada por la sustitución $w(z) = \alpha(z)\left(\frac{\frac{d\psi}{dz}}{\psi}\right)$ con $\alpha(z) = -1/A_2(z)$ y $\psi(z)$ satisfaciendo la ecuación lineal

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = [A_1(z) + A_2'(z)/A_2(z)]\frac{d\psi}{dz} - A_0(z)A_2(z)\psi. \tag{26}$$

La propiedad básica de Painlevé la comparten todas las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, pero es muy rara en las ecuaciones no lineales. En los últimos años del Siglo XIX, un trío de matemáticos Franceses, Paul Painlevé, É. Picard y B. Gambier, centraron su atención en la clasificación de la estructura de las singularidades de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, con coeficientes polinomiales. Esto es, ecuaciones de la forma

$$\frac{d^2w}{dz^2} = R\left(z; w, \frac{dw}{dz}\right), \tag{27}$$

con R una función racional en w y dw/dz, cuyos coeficientes son funciones localmente analíticas en z. Como un logro sobresaliente, Painlevé y colegas encontraron que, salvo la necesidad de ciertas transformaciones, tales ecuaciones pueden ponerse en una de las *cincuenta formas canónicas* posibles que existen: *a*) ecuaciones lineales, *b*) ecuaciones de Riccati, *c*) ecuaciones que contienen *funciones elípticas* (también llamadas *doble periódicas*) y *d*) las *"seis nuevas" ecuaciones de Painlevé*. La ecuación más general de las seis,

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2w}{dz^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w-z}\right)\left(\frac{dw}{dz}\right)^2-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{w-z}\right)\frac{dw}{dz}+ \\
&\quad +\frac{w(w-1)(w-2)}{z^2(z-1)^2}\left[\alpha+\beta\frac{z}{w^2}+\gamma\frac{(z-1)}{(w-1)^2}+\delta\frac{z(z-1)}{(w-1)^2}\right],
\end{aligned}
\tag{28}
$$

con α, β, γ y δ constantes, la cual en principio contiene a las otras cinco, fue olvidada en los escritos de Painlevé, pero fue redescubierta en 1905 por Richard Fuchs, quien realizó la mayor parte del trabajo para determinar su solución. Las soluciones de las seis nuevas ecuaciones diferenciales no lineales de Painlevé, las cuales generalmente no están dadas en términos de funciones elementales, son tradicionalmente conocidas como *Trascendentes de Painlevé* o Painlevé I-VI. Para resolver estos tipos de ecuaciones se requiere utilizar de entrada uno de los pilares más importantes del Análisis Complejo, la *Teoría de Transformación Conforme* (en especial transformaciones sobre "triángulos circulares") y después métodos más sofisticados utilizados para resolver problemas de Riemann-Hilbert que transforman los problemas originales en *Ecuaciones Integrales Lineales*.

Las soluciones de 11 de las 44 ecuaciones del Tipo-P restantes pueden expresarse en términos de las soluciones de las seis ecuaciones trascendentes de Painlevé, mientras que las otras 33 son solubles en términos de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo y tercer orden o en términos de funciones elípticas. Muchas de las soluciones de las ecuaciones de Painlevé son de naturaleza *meromorfa* en el plano complejo. Las ecuaciones de tercer orden pueden ser aún más exóticas y su clasificación es un problema abierto (similarmente para ordenes más grandes), sus soluciones son formadas por *funciones automorfas*[1].

Respecto a la aplicación de este tipo de ecuaciones es importante mencionar, solo por dar un ejemplo, que la Teoría de Ondas en Medios No Lineales y la Teoría Analítica de Ecuaciones Diferenciales se desarrollaron simultáneamente de forma considerable bajo influencia mutua, en función de la necesidad física. De hecho, las ecuaciones del Tipo-P tienen una amplia aplicación en el campo de las *Ecuaciones Diferenciales Parciales* que gobiernan problemas no lineales de Hidrodinámica, Física de Plasmas, Óptica No Lineal, Física del Estado Sólido, Relatividad, entre otros. Ejemplos específicos de EDP's relacionadas con las Ecuaciones de Painlevé son la *Ecuación de Burger*, la *Ecuación KdV* (original, modificada, cilíndrica, de orden grande, etc.), la *Ecuación de Sine-Gordon*, ... y muy particularmente, la *Ecuación de Helmholtz* $\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$, con $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ y $k(z)$ una función localmente analítica, definida sobre geometrías específicas, el cual es un tema de investigación del autor.

Conclusión:

[1] Las funciones automorfas tienen la propiedad que $s(\gamma(z)) = s(z)$, donde $\gamma(z) = \dfrac{az+b}{cz+dz}$, $ad - bc = 1$. Es decir, son una generalización de las funciones periodicas (el ejemplo más simple son las funciones elípticas).

i) La *Propiedad de Painlevé* sustenta la *Propiedad de Integrabilidad* que poseén muchos problemas no lineales correspondientes a determinados fenómenos físicos.

ii) Las soluciones de las Ecuaciones Tipo Painlevé –las Trascendentes de Painlevé– parecen tener en la Física Teórica No Lineal el mismo papel que tienen las funciones especiales clásicas en la teoría lineal respectiva.

iii) El estudio de las Ecuaciones de Painlevé ayuda a relajar un poco el dilema de la interdisciplinariedad: *"los matemáticos necesitan involucrarse más en problemas físicos complejos, mientras que los físicos deben de estar conscientes de la importancia de la maquinaria matemática de alto nivel necesaria para su solución"*.

Bibliografía:

[1] Ablowitz M.J., Fokas A.S.: (2006). *Complex Variables. Introduction and Applications*, Cambridge University Press.

[2] Ahlfors L.V.: (1979). *Complex Analysis*, Mc.Graw-Hill Book Co.

[3] Gromak V.I., Laine I., Shimona S.: (2002). *Painlevé Differential Equations in the Complex Plane*, Walter de Gruyter Publications.

[4] Hille E.: (1976). *Ordinary Differential Equations in the Complex Plane*, Dover Publications, Inc.

[5] Ince E.L.: (1956). *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, Inc.