CALCULO DE NÚMEROS "GRANDES" UTILIZANDO UNA CALCULADORA DE BOLSILLO

Mario Alberto Villalobos Arias
Departamento de Matemáticas
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N.

Resumen

Este trabajo se inspiró en el problema de poder calcular 2^{64}, cuando apenas estaba en los primeros años de la preparatoria. Se presenta un procedimiento para calcular números "grandes" de una manera simple con los conocimientos de un estudiante de secundaria y con la ayuda de una calculadora de bolsillo.

1. Introducción

Cuando apenas estaba en los primeros años de la preparatoria al leer el libro"El divertido Juego de las Matemáticas" se presenta la historia del ajedrez y se menciona que el que le presenta el juego al Sultán no quiere gratificación alguna pero el Sultán insiste y entonces él le pide que le dé un grano por el primer cuadro del tablero del juego 2 por el segundo, 4 por el tercero y así sucesivamente, al final resulta que el número de granos que le deben dar es $2^{64} - 1$, que resulta ser una cantidad muy grande, en el libro se dice que:

$$2^{64} = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616,$$

y se me vino la duda ¿será cierto? Y comencé a calcular a mano a ver si podía verificarlo, al rato me aburrí y lo dejé. Luego, después de haber cursado un par de años en la universidad, pude resolverlo de una manera que cualquier estudiante (que lo desee) de preparatoria lo pueda hacer, utilizando los conocimientos matemáticos que él posee.

2. Preliminares

Para poder realizar los cálculos es necesario recordar las siguientes igualdades, que están escritas de una manera adecuada para los propósitos de este trabajo:

Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma (o factorización)

$$ab + ac = a (b + c), \forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

Multiplicación de binomios

$$(ax + b) (cx + d) = acx^2 + (ad + bc) x + bd, \forall\ a, b, c, d, x \in \mathbb{R}$$

Fórmula notable

$$(ax + b)^2 = a^2 x^2 + 2\ ab\ x + b^2, \forall\ a, b, x \in \mathbb{R}.$$

Propiedades de potencias

$$b^{m+n} = b^m\ b^n \text{ y } b^{mn} = (b^m)^n \quad \forall\ m, n \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R}$$

Notación en base 10 o en base b

$$a = a_n\, 10^n + \ldots + a_2\, 10^2 + a_1\, 10 + a_0 \quad \forall\, a \in I\!N$$

Por ejemplo:

$$7893982017 = 7 \cdot 10^9 + 8 \cdot 10^8 + 9 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 7,$$

y para el procedimiento se puede escribir

$$7893982017 = 7 \cdot (10^3)^3 + 893 \cdot (10^3)^2 + 982 \cdot 10^3 + 017$$

3. Algunos Resultados Básicos

Además de las propiedades anteriores necesitaremos los siguientes tres resultados.

Proposición 1 Para cualquier $n \in I\!N$, $10^n - 1$ es el número de n dígitos más grande.

Ejemplo: $10^7 - 1 = 9999999$.

Proposición 2 Sean $n, m \in I\!N$, El producto de un número n dígitos por otro de m dígitos tiene a lo sumo $m+n$ dígitos.

Proposición 3 Para cualquier $n \in I\!N$, 2^n tiene como ultimo digito un número par diferente de 0.

4. Un problema con las calculadoras

Un problema que se tiene con las calculadoras es que como tienen capacidad de sólo almacenar un número muy pequeño de dígitos, que puede ser 10 o 12, al calcular el producto de dos números de 10 dígitos, por ejemplo, no nos puede dar el resultado exacto. Así si queremos calcular

$$7893982017 \cdot 1652738747$$ [1]

La calculadora nos da que es

$$13\ 046\ 689\ 950\ 000\ 000\ 000,$$

lo cual no es exacto pues el último digito de este cálculo es 9 y como se ve hay un "0".

Lo mismo para calcular

$$2^{64} \approx 18\ 446\ 744\ 070\ 000\ 000\ 000,$$

e inclusive, con un número mucho más pequeño como:

$$2^{40} \approx 1\ 099\ 511\ 627\ 000.$$

Como se vio en la proposición 3 en estos cálculos no puede dar "0" al final, de donde se concluye que la calculadora no puede hacer estos cálculos exactamente.

[1] a este le llamaremos el "producto grande"

5. La idea de la solución

La idea de la solución es escribir los números en base 10^k de manera que las operaciones que tengamos que hacer las podamos hacer con una calculadora de manera rápida y exacta. Así pues, si la calculadora que tenemos tiene sólo 10 dígitos de precisión escribimos los números en base 10^5 para que al multiplicar los números por la proposición 2 el producto siempre nos de un número de a lo sumo 10 dígitos, el cual podrá ser calculado exactamente por la calculadora, y rápidamente.

Para el cálculo de las potencias lo que se hace es escribirlas utilizando las propiedades de potencias como números que se pueda calcular exactamente con nuestra calculadora. Para nuestro calculo de 2^{64} se puede escribir como:

$$2^{64} = 2^{40} \cdot 2^{24} = (2^{20})^2 \cdot 2^{24},$$

los cuales pueden ser calculados exactamente por la calculadora, como veremos mas adelante.

6. El cálculo de los números "grandes"

6.1 Cálculo del producto grande.

Como se mocionó antes vamos a escribir los números en base 10^5, con lo que

$$\begin{aligned} 7893982017 \cdot 1652738747 &= (78939 \cdot 10^5 + 82017) \cdot (16527 \cdot 10^5 + 38747) \\ &= 78939 \cdot 16527 \ (10^5)^2 \\ &+ (78939 \cdot 38747 + 82017 \cdot 16527)\, 10^5 \\ &+ 82017 \cdot 38747 \end{aligned}$$

Utilizando la calculadora obtenemos:

$$\begin{aligned} 78939 \cdot 16527 &= 1304624853 \\ 78939 \cdot 38747 &= 3058649433 \\ 82017 \cdot 16527 &= 1355494959 \\ 82017 \cdot 38747 &= 3177912699 \end{aligned}$$

Reemplazando se obtiene:

$$1304624853\, (10^5)^2 + (3058649433 + 1355494959)\, 10^5 + 3177912699$$

para obtener que

$$7893982017 \cdot 1652738747 = 1304624853 \cdot 10^{10} + 4414144392\, 10^5 + 3177912699$$

que lo sumamos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lr} & 13046248530000000000 \\ & 441414439200000 \\ + & 3177912699 \\ \hline & 13046689947617112699 \end{array}$$

Para tener finalmente que

$$7893982017 \cdot 1652738747 = 13046689947617112699$$

6.2 Cálculo de 2^{40}

Para este calculo utilizamos la propiedades de potencias para escribir

$$\begin{aligned} 2^{40} = (2^{20})^2 &= (1048576\ )^2 \\ &= (10 \cdot 10^5 + 48576\ )^2 \\ & \quad 10^2 \cdot (10^5)^2 + 2 \cdot 10 \cdot 48576 \cdot 10^5 + (48576\ )^2 \\ & \quad 100 \cdot 10^{10} + 971520 \cdot 10^5 + 2359627776, \end{aligned}$$

que lo calculamos manualmente como:

$$\begin{array}{lr} & 100000000000 \\ & 97152000000 \\ + & 2359627776 \\ \hline & 1099511627776 \end{array}$$

y obtenemos que

$$2^{40} = 1\ 099\ 511\ 627\ 776$$

6.3 Cálculo de 2^{64}

Aquí utilizamos, como se menciona anteriormente, las propiedades de potencias para escribir

$$2^{64} = 2^{40} \cdot 2^{24}.$$

Como la calculadora que se tiene calcula exactamente 2^{24} y de la sección anterior se tiene:

$$2^{40} = 1\ 099\ 511\ 627\ 776 \text{ y que } 2^{24} = 16777216,$$

de donde

$$2^{64} = 1099511627776 \cdot 16777216$$

$$
\begin{aligned}
2^{64} &= \{109 \cdot (10^5)^2 + 95116 \cdot 10^5 + 27776\} \cdot (167 \cdot 10^5 + 77216) \\
&= 109 \cdot 167 \cdot (10^5)^3 + (109 \cdot 77216 + 95116 \cdot 167)(10^5)^2 \\
&+ (95116 \cdot 77216 + 27776 \cdot 167)\, 10^5 + 27776 \cdot 77216.
\end{aligned}
$$

Con la ayuda de la calculadora se obtiene

$$
\begin{aligned}
109 \cdot 167 &= 18203 \\
109 \cdot 77216 + 95116 \cdot 167 &= 24300916 \\
95116 \cdot 77216 + 27776 \cdot 167 &= 7349115648 \\
27776 \cdot 77216 &= 2144751616,
\end{aligned}
$$

con lo cual

$$
2^{64} = 18203 \cdot 10^{15} + 24300916 \cdot 10^{10} + 7349115648 \cdot 10^5 + 2144751616,
$$

que como se hizo antes se calcula como

$$
\begin{array}{lr}
 & 18203000000000000000 \\
 & 243009160000000000 \\
 & 734911564800000 \\
+ & 2144751616 \\
\hline
 & 18446744073709551616
\end{array}
$$

Finalmente, se verifica que

$$
2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.
$$

7. Conclusiones

La calculadora se puede utilizar en secundaria para apoyar a los estudiantes pero se debe idear formas en las que ellos no solo la utilicen como un artefacto que sólo sirve para hacer mas rápido los cálculos, también hacerles ver que las calculadoras no hacen los cálculos exactamente, que cometen errores. Espero que con este trabajo se contribuya en algo en esto.

Bibliografía

[1] Baldor, A. (2000) *Álgebra*. Edición 18. Publicaciones Cultural. México.
[2] Perel'man, I. (1968) *El divertido juego de las matemáticas*. Martínez Roca. Bogotá, Colombia.