LA NATURALEZA GLOBAL Y DINÁMICA DE LA DERIVADA COMO OBJETO MATEMÁTICO Y DE ENSEÑANZA*

José Ramón Jiménez Rodríguez
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Resumen

Se analiza la compleja naturaleza, global y dinámica, de la derivada como objeto matemático en sí. También se discute la importancia de tomar en cuenta esta complejidad y sus manifestaciones al momento de desarrollar estrategias didácticas para la enseñanza de este concepto. A la luz de esta caracterización de la derivada como objeto complejo, se analiza la forma en que las propuestas habituales de enseñanza reflejan dicha complejidad, si es que lo hacen. A partir de todas estas consideraciones, se desarrolla una propuesta teórica para la investigación de la enseñanza de la noción de derivada y se destacan sus principales características, en particular, cómo se puede intentar aprovechar esta complejidad para facilitar el aprendizaje de tal concepto.

1. Consideraciones teóricas

La compleja naturaleza de las nociones matemáticas ha sido numerosas veces señalada tanto por matemáticos (Aleksándrov et. al, 1974), como por investigadores en Matemática Educativa (Sfard, 1991; Fischbein, 1993; Douady, 1995). En particular, Sfard (1991) ha señalado que muchas de las nociones matemáticas poseen una doble naturaleza o se muestran bajo un doble aspecto. Por un lado, son herramientas para ser aplicadas, algoritmos o procedimientos para ser ejecutados. Se trata del aspecto *operaciona*l de los objetos matemáticos. Las nociones de límite, derivada, integral y serie de Taylor, entre otras, son solo algunos ejemplos. Pero dichas nociones también revelan una naturaleza *estructural*: se refieren a algo más que un simple proceso o algoritmo, constituyen una idea o propiedad general que trasciende los límites operatorios de una ejecución mecánica (Tall & Vinner, 1991; Sfard, 1992; Douady, 1995).

En los cuatro casos que hemos señalado, podemos también referirnos a dos aspectos: uno *puntual* (local) y otro *global*, de tales nociones matemáticas. En un primer nivel, que parecería el más elemental, encontramos un significado *puntual*, y por lo tanto *local y estático*. Pongamos por caso la noción de derivada. La definición clásica de derivada de una función $f(x)$ de variable real x en un punto de abcisa x_0

$$\left.\frac{d\ f(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \text{donde} \quad x_0 \in D_f$$

constituye un algoritmo local, con un significado físico y geométrico igualmente local: o bien puede interpretarse como la razón instantánea de cambio de la función $f(x)$ en el punto de abcisa x_0, o como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. Pero también podemos referirnos a un segundo nivel, a una "segunda" definición de derivada

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \text{donde} \quad x \in D_f$$

* Trabajo apoyado parcialmente por CONACyT. Clave del proyecto: 35522-S.

en la que el algoritmo es *global*, ya no está atado a un punto específico, y por lo tanto su significado ya no depende del punto elegido: es una razón de cambio para cualquier valor permitido de la variable independiente, o es la pendiente de la recta tangente a cualquier punto que pertenece a la gráfica de la función. Se trata por lo tanto de un significado *global y dinámico*. En esencia, ambas definiciones son equivalentes, ya que, en virtud de que x_0 es cualquier punto que pertenece al dominio de la función, podemos "leer" la primera definición de la misma manera como leemos la segunda: como la derivada en cualquier punto. Pero aquí estamos hablando de una equivalencia matemática. Desde el punto de vista cognitivo, sin embargo, las cosas pueden ser diferentes para nuestros estudiantes. Ellos pueden tranquilamente percibir estas dos fórmulas como diferentes, en primer término porque su escritura simbólica así lo sugiere. Esto es particularmente notable en el primer caso, en el que el uso del símbolo $\Big|$ para explicitar la condición $x = x_0$ es realmente contundente. ¡Al parecer, esta notación simbólica induce una concepción puntual para la noción de derivada!

Algunos investigadores, en particular Sfard (1991), han elevado a rango de principio didáctico el supuesto de que las concepciones puntuales (instrumentales u operacionales) deben preceder cognitivamente a las globales (estructurales o relacionales). Sin embargo, no está del todo claro, aunque parezca obvio, que las concepciones globales crecen y se desarrollan sobre la base de las concepciones puntuales. En otras palabras, no hay evidencia empírica suficientemente sólida de que el hecho de asimilar una concepción puntual sea el prerrequisito o la condición necesaria para construir sobre ella una concepción global (Heugl, 1999). Sosteniendo una posición más radical, hay quienes afirman que el haber asimilado previamente una concepción puntual puede eventualmente constituirse en un obstáculo epistemológico para arribar a la concepción global correspondiente (Lagrange, 1999). También hay quienes afirman que probablemente la cognición requiera de una relación dialéctica entre ambas concepciones, con alternancias y reforzamientos mutuos entre lo puntual y lo global (Duval, 1998), entre lo algorítmico y lo conceptual (Artigue, 2001). A partir de estas reflexiones parecería obvio plantear la hipótesis de que el proceso de desarrollo de una noción o concepto matemático en el alumno debería ser complicado y prolongado, y que sería demasiado ingenuo esperar de él una comprensión inmediata y una asimilación rápida de dicho concepto. La epistemología de las matemáticas parece apoyar esta conclusión al plantear que también el desarrollo de los conceptos al interior de esta ciencia ha pasado por un proceso de evolución gradual desde su interpretación intuitiva hasta su definición formal. Por ejemplo, al caracterizar la evolución conceptual del Cálculo, Beliáiev y Perminóv (1981) comentan:

> "Es obvio que un sistema de conceptos no puede ser lógicamente fundamentado antes de que alcance cierto grado de madurez, riqueza de contenido y unicidad en sus definiciones fundamentales. Una teoría que aún se encuentra en búsqueda de las regularidades fundamentales y de las definiciones para sus conceptos básicos no puede ser fundamentada rigurosamente".

Parafraseando esta lección epistemológica y transfiriéndola al campo de la enseñanza, podemos también afirmar que ninguna noción matemática puede ser rigurosamente concebida o formulada antes de que, en la estructura cognitiva del estudiante, alcance cierto grado de madurez, riqueza de contenido y representación, y congruencia y unidad en sus representaciones fundamentales. De hecho, es precisamente éste el planteamiento formulado por Duval (1998) respecto al funcionamiento cognitivo del pensamiento: que la comprensión (aprehensión) de un objeto matemático implica una coordinación efectiva y operante de los diferentes registros semióticos en que dicho objeto puede ser representado.

Tomando en cuenta las anteriores consideraciones, en el desarrollo del presente trabajo hemos asumido la siguiente postura. El diseño de las actividades de enseñanza de los conceptos matemáticos (y particularmente de la noción de derivada) debe incorporar, desde su misma concepción, esta doble relación dialéctica que se manifiesta en el proceso de gestación y evolución de dichos conceptos, por un lado, como tensión entre *lo puntual* y *lo global*, y por el otro, entre las interpretaciones *estática* y *dinámica* de tales conceptos. Esta doble relación dialéctica queda naturalmente anclada en la expresión analítica (o algoritmo) que refleja la naturaleza de tal concepto, y que en la ciencia matemática se presenta como la definición formal del concepto.

2. La enseñanza actual de la derivada: un acercamiento dinámico, pero puntual

Parece obvio que no solamente la enseñanza tradicional, sino también la que pretende denominarse innovadora, ha centrado el tratamiento y la visualización casi exclusivamente en el aspecto puntual de las nociones matemáticas. Para convencerse de ello, basta con echar un vistazo a las diferentes propuestas de enseñanza, incluidas las dinámicas, de los conceptos matemáticos. Con el fin de ilustrar la manera en que este enfoque puntual se realiza y se fomenta en la práctica educativa, recurriremos a un ejemplo sencillo, y tomaremos el caso elemental de la función $f(x) = x^2$. Supondremos además que esta función modela ya sea una ley de movimiento (en cuyo caso es común rescribirla como $h(t) = t^2$, o de algún otro modo), o bien a un objeto geométrico: la curva conocida como parábola (en este caso es más común representarla como $y(x) = x^2$). En este caso, el esquema adoptado comúnmente se realiza de acuerdo con las siguientes etapas.

Primeramente se propone a los alumnos explorar el comportamiento de las velocidades promedio $\bar{v}$ en la inmediatez de un instante t_0 específico, digamos $t_0 = 1$, o bien el comportamiento de la pendiente m_s de las rectas secantes a la gráfica de la función en las cercanías de un punto específico de abcisa x_0, digamos $x_0 = 1$. Naturalmente, el primer abordaje se da en el marco tabular. A partir de los datos obtenidos en una tabla, se procede a analizar numérica y/o gráficamente la tendencia en el comportamiento de $\bar{v}$ o de m_S, para formular la siguiente conclusión: si $\Delta t \to 0$ (o bien $\Delta x \to 0$), entonces $\overline{v(1)} \to 2$ (o bien $m_s(1) \to 2$). Una vez analizado este primer ejemplo, se procede a explorar otros dos o tres valores específicos de la variable independiente, digamos $t_0 = 2$ ($x_0 = 2$), $t_0 = 3$ ($x_0 = 3$), etcétera, para finalmente pasar al caso general $t_0 = a$ ($x_0 = a$). En cada uno de los ejemplos analizados se elabora la tabla correspondiente y se formula la conclusión pertinente. Finalmente, en una puesta en común, se procede a analizar *conjuntamente* todos los ejemplos anteriores, y a partir de tal análisis se pretende que los alumnos arriben a una importante conclusión que expresa una propiedad *global*: que la derivada de la función x^2 es la función $2x$ para *todo* valor de x en el dominio de la función. En otras palabras, se trata de obtener una propiedad global a partir del análisis de una propiedad puntual (en unos cuantos puntos aislados). En nuestra opinión, el enfoque que hemos analizado pudiera ser considerado típico para muchas de las propuestas constructivistas reportadas (Dolores, 1999; Salinas et. al., 2001).

Analicemos algunas de las principales omisiones en que incurren, desde nuestro punto de vista, las propuestas de este tipo. De antemano queremos enfatizar que nuestra crítica de ningún modo pretende presentar dichos enfoques como incorrectos o inadecuados. Simplemente pretende evidenciar que dichos enfoques no concuerdan con la visión teórica que se discute en este documento.

1. La observación más importante que podemos hacer es que las propuestas de este tipo, en nuestra opinión, se basan en un enfoque claramente *inductivo*, que intenta hacer avanzar el pensamiento de los alumnos de lo particular (puntual, específico) a lo general (global, dinámico). Se trata, en consecuencia, de un enfoque restringido, desde la perspectiva teórica que hemos venido discutiendo, ya que obstaculiza la interacción dialéctica entre los significados puntual y global de la noción de derivada.

2. Este tipo de acercamientos, al hacer cambiar los valores del incremento de la variable independiente (Δt o Δx), privilegian a la secuencia de números de la forma $1/10^n$, representados por otra parte en forma decimal, no en forma de números racionales. Sin embargo, además de la comodidad de tratamiento, no hay ninguna otra razón sustancial para privilegiar tal secuencia: la condición $\Delta x \to 0$ ***no implica restricción alguna*** sobre la manera en que Δx se aproxima a 0, y pensamos que precisamente así debe ser abordada.

Además de las dos deficiencias que ya hemos señalado, y que nuestra propuesta desea superar, existen por lo menos otras dos deficiencias más en las propuestas de enseñanza constructivistas habituales, que nos parecen importantes, y que permiten afirmar que ellas no promueven realmente una comprensión cabalmente global y dinámica de la noción de derivada. Se trata de las siguientes.

3. La interpretación geométrica de la derivada que se toma como base en dichas propuestas es solamente una de las tres variantes que se emplean más frecuentemente en algunas otras ramas del Análisis Matemático, tales como el Análisis Numérico. Se trata de la así llamada “derivada derecha”. Creemos que el no aprovechar las otras dos variantes, la “derivada izquierda” y la “derivada simétrica”, es el factor que caracteriza la visión parcial (no global) de la noción de derivada. Por razones de espacio, no hemos podido detenernos a analizar con más detalle esta cuestión. Sin embargo, es importante aclarar aquí que los cuatro programas para la calculadora simbólica que conforman nuestra propuesta, y cuyo funcionamiento describiremos en la siguiente sección, deliberadamente incluyen el tratamiento de la noción de derivada no solamente a partir de la definición estándar, sino también a partir de estas tres variantes de interpretación geométrica.

4. Como consecuencia de lo anterior, involuntariamente se privilegia a la “derivada derecha” como definición de derivada, en lugar de promover un significado más amplio que integre las tres variantes, en una definición integral única:

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x} = f'(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} \\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \end{cases}$$

Esta integración resulta posible y no contradictoria porque, cuando $f(x)$ es derivable, las derivadas regular, izquierda, derecha y simétrica de la función $f(x)$ en el punto x existen y están estrechamente relacionadas. Esta propiedad esencial de la derivada como objeto matemático puede ser expresada mediante el siguiente

> **Teorema sobre las derivadas laterales** (Versión fuerte). Si la función $y = f(x)$ tiene derivada regular en el punto x, entonces tiene también en ese punto derivadas izquierda, derecha y simétrica, y estas tres derivadas coinciden. A la inversa, si la función $y = f(x)$ tiene en el punto x derivadas izquierda, derecha y simétrica, y si estas tres derivadas coinciden, entonces la función $y = f(x)$ tiene derivada regular en el punto x.

3. Nuestra propuesta: un acercamiento dinámico y global

En nuestra concepción, apegada a la hipótesis de la interacción dialéctica entre lo puntual y lo global en el aprendizaje de los conceptos matemáticos, el tratamiento y la visualización de la función derivada debieran darse simultáneamente en todos los planos posibles e incorporando todas las representaciones e interpretaciones posibles. En el caso que estamos tratando como ejemplo, esto significa que el proceso de visualización no se debería limitar a la presentación de la derivada de x^2 en unos tres o cuatro puntos aislados. Más bien, debería incluirse y promoverse la visualización de dicha derivada ***en tantos puntos como sea posible y necesario***, o bien en el ***dominio completo*** de la función. Tenemos que reconocer que, aún con el apoyo de tecnología, no es fácil materializar esta idea. Por ejemplo, en un diseño preliminar con fines de experimentación, hemos desarrollado un paquete de cuatro programas para la calculadora TI-92 Plus que permiten visualizar dinámicamente y con diferentes significados la derivada de la función x^2 en algunos puntos cuyas abcisas están comprendidas en el intervalo $-4.5 \le x \le 4.5$, que ha sido escogido por razones prácticas. Por razones de espacio no ilustramos aquí el funcionamiento de dichos programas. En una versión preliminar, el primer programa permite seleccionar algunos de los siguientes valores de $x_0 : -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y mostrar la animación correspondiente a la aproximación a la derivada mediante rectas secantes que pasan por el punto escogido. El propósito fundamental de tal programa interactivo, dinámico y global es que los alumnos puedan por sí mismos arribar a dos importantes conclusiones:

Conclusión 1: Para cualquier valor de Δt (o de Δx), se tiene que $\overline{v(a)} = 2a + \Delta t$ (o bien $m_s(a) = 2a + \Delta x$).

Conclusión 2: Si $\Delta t \to 0$ (o bien $\Delta x \to 0$), entonces $\overline{v(a)} \to 2a$ (o bien $m_s(a) \to 2a$)

En el segundo programa, la visualización está apoyada en la interpretación de la derivada como el límite de las razones promedio de cambio de la función, tomadas éstas en intervalos consecutivamente más pequeños, tendientes a cero. La idea es la siguiente. En el primer paso, el intervalo $-4.5 \le x \le 4.5$ es dividido imaginariamente en subintervalos $[x_1, x_2]$ de tamaño $\Delta x = x_2 - x_1 = 1$. En cada uno de esos subintervalos se calcula el cambio promedio de la función $f(x) = x^2$ mediante la fórmula $\overline{f(x)} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x}$, y enseguida se procede a graficar este valor constante promedio en el subintervalo de referencia, para todos los subintervalos generados. Luego se toman subintervalos más pequeños y se repite el procedimiento, y así sucesivamente. Este tipo de visualización busca promover el hecho de que la derivada de la función $f(x) = x^2$ para todo x en el dominio de la función es la función lineal $g(x) = 2x$.

El tercer programa permite visualizar la interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en cualquier punto, empezando en -4.5 con incrementos de 0.25 hasta llegar a 4.5. Tomando cada uno de esos valores como abcisa, el programa traza la recta tangente correspondiente y calcula y grafica el valor de su pendiente.

El cuarto programa permite visualizar el significado global de la derivada como función. Tomando diferentes valores de Δx cada vez más pequeños, el programa muestra una animación dinámica de la función $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, una aproximación a la derivada.

De acuerdo con nuestra propuesta de investigación, estos programas deberían usarse simultáneamente, a fin de promover en el alumno esa visión dialéctica entre lo puntual y lo global, lo estático y lo dinámico, inherentes a la definición de derivada.

Referencias

Aleksándrov P. S., Kolmogórov A. N., Lavréntiev, et. al. *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Alianza Editorial. España. 1974.

Artigue M. Learning Mathematics in a CAS Environment: the Genesis of a reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *CAME 2001 Symposium*. Freudenthal Institute. The Netherlands. Disponible en línea en http:// ltsn.mathstore.ac.uk/came/events/feudenthal/1-Presentation-Artigue.pdf

Beliáev Y. A., Pierminóv V. Y. *Problemas filosóficos y metodológicos de la matemática*. Editorial de la Universidad de Moscú. Moscú, 1981.

Dolores F., C. Una introducción a la derivada a través de la variación. *Serie Cuadernos Didácticos,* Vol. 6. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1999.

Douady R. Juego de marcos y dialéctica herramienta–objeto. En: *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. Gómez P. (Ed.). Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1995.

Duval R. Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Hitt E. F. (Ed.). DME CINVESTAV. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1998.

Fischbein E. The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics* 24: 139–162. 1993. Kluwer Academic Publishers.

Heugl H. The necessary fundamental algebraic competence in the age of Computer Algebra Systems. *ACDCA Summer Institute 1999*. Portoroz, Slovenia. Disponible en línea en http://www.acdca.ac.at

Lagrange J. B. A didactic approach to the use of Computer Algebra Systems to learn mathematics. *CAME 1999 Workshop*. Weizmann Institute. Israel. Disponible en línea en http://ltsn.mathstore.ac.uk/CAME/events/weizmann/ y también en http://metric.ma.ic.ac.uk/came/events/weizmann

Salinas Martínez P., Alanís Rodríguez J. A., Escobedo Mireles J. C., Garza García J. L., Pulido Ríos R., Santos Leal F. X. *Elementos de Cálculo: Reconstrucción para el aprendizaje y su enseñanza*. Primera Edición. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2001.

Sfard A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22: 1–36, 1991. Kluwer Academic Publishers.

Sfard A. El origen operacional de los objetos matemáticos y la incertidumbre de la reificación: el caso de la función. En: *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Harel G. & Dubinsky E. (Eds.). MAA Notes, Vol. 25, 1992. pp. 59–84.

Tall D., Vinner Sh. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12 (1991), 151–169. D. Reidel Publishing Co.