Mosaicos Matemáticos No. 11
Diciembre, 2003.

ANÁLISIS ASINTÓTICO DE LA COLISIÓN DE KINKS EN ECUACIONES TIPO SINE-GORDON

Georgii A. Omel'yanov
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Resumen

Consideramos una clase de ecuaciones de onda cuasi-lineales con un parámetro pequeño ε. Suponemos que el término no lineal $F(u)$ es tal que las ecuaciones tienen soluciones auto-similares exactas tipo kink. Se derivan las condiciones suficientes para $F(u)$ bajo las cuales dos kinks interactúan (en el término principal en ε) de manera que se preserva el mismo escenario de los kinks en la ecuación sine-Gordon.

Consideremos la ecuación de onda semi-lineal con un parámetro ε

$$\varepsilon^2(u_{tt} - u_{xx}) + F'(u) = 0. \tag{1}$$

Las condiciones

(A) $$F(z) \in C^\infty(\mathbb{R}^1), \quad F(z) > 0 \quad \text{para} \quad z \in (0,1),$$

(B) $$F^{(i)}(z_0) = 0,\ i = 0, 1, \ldots, K, \quad F^{(K+1)}(z_0) > 0,\ z_0 = 0 \quad \text{y} \quad z_0 = 1,$$

donde $K = 1$ o $K = 3$, garantizan la existencia de soluciones tipo kink auto-similares para la ecuación (1), que son de la forma

$$u(x, t, \varepsilon) = \omega(\beta \frac{x - Vt}{\varepsilon}), \tag{2}$$

donde

$$\beta^2 = (1 - V^2)^{-1}, \quad \omega(\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^1),$$
$$\omega(\eta) \to 0 \quad \text{para} \quad \eta \to -\infty, \qquad \omega(\eta) \to 1 \quad \text{para} \quad \eta \to +\infty,$$

que se estabiliza en $\pm\infty$ no más lentamente que $1/\eta$. Bajo la hipótesis adicional

(C) $$F(\tfrac{1}{2} + z) = F(\tfrac{1}{2} - z),$$

la función $\omega(\eta) - 1/2$ es impar, $\omega(\eta) + \omega(-\eta) = 1$. Los siguientes son ejemplos de tales funciones F:

$$F(z) = \frac{1 - \cos(2\pi z)}{4\pi^2}, \qquad F(z) = \sin^4(\pi z). \tag{3}$$

El primer ejemplo constituye la ecuación sine-Gordon (Ec. SG). Es bien conocido que los kinks de la Ec. SG colisionan sin cambiar de forma y que el único resultado de la interacción es la aparición de un corrimiento de fase, [1]. Una pregunta natural es la siguiente: ¿Es posible encontrar condiciones sobre F bajo las cuales los kinks de la ecuación (1) colisionarán siguiendo el mismo escenario de la Ec. SG?

Se desconocen soluciones exactas para el problema de Cauchy correspondiente a la ecuación (1), (ver [2]). Por tanto, construiremos una solución asintótica considerando a ε como un parámetro pequeño. Sin embargo, los kinks (2) tienden a la función de Heaviside cuando $\varepsilon \to 0$. Así, tenemos que usar una definición para que la solución admita el caso límite cuando $\varepsilon \to 0$. Es natural usar la definición de solución asintótica construída en base a la defincón $\mathcal{D}'$ estándar: $u \in \mathcal{D}'$ es solución de la ecuación (1) si la igualdad

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \{\varepsilon^2 u(\psi_{tt} - \psi_{xx}) + \psi F'(u)\} dxdt = 0$$

se satisface para cualquier función de prueba $\psi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Sin embargo, esta construcción con exactitud $\mod O(\varepsilon^2)$ no prescribe, para la ecuación (1), ninguna ley para la dinámica de los kinks. Para involucrar los términos diferenciales en la parte principal, establecemos la siguiente

Definición 1. *La sucesión $u(t,x,\varepsilon)$, para $\varepsilon > 0$ en $C^\infty(0,T;C^\infty(\mathbb{R}^1_x))$ y en $C(0,T;\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1_x))$ uniformemente para $\varepsilon \geq 0$, se llama* solución asintótica débil $\mod O(\varepsilon^2)$ *de la ecuación (1) si la relación*

$$2\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 u_t u_x \psi dx + \int_{-\infty}^{\infty} \{(\varepsilon u_t)^2 + (\varepsilon u_x)^2 - 2F(u)\}\psi_x dx = O(\varepsilon^2) \tag{4}$$

se satisface para cualquier función de prueba $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1_x)$.

El lado izquierdo de (4) es el resultado de multiplicar la ecuación (1) por $\psi(x)u_x$ y de integrar por partes en el caso en que u es suave. Por tanto, es cero para cualquier solución exacta.

Por otra parte, la relación (4) es la condición de ortogonalidad que aparece en soluciones asintóticas de una sóla fase (en el caso $F = F(u,t,x,\varepsilon)$, ver [3, 4]). Esta condición garantiza la existencia de la primera corrección e implica una ecuación para el movimiento del frente del kink distorsionado.

Esta ecuación, llamada *condición de Hugoniot*, puede ser considerada como el caso límite de la ecuación (1) cuando $\varepsilon \to 0$.

Consideremos dos kinks que no interactúan en $t = 0$

$$u|_{t=0} = \sum_{i=1}^{2} \omega\Big(\beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon}\Big), \qquad \varepsilon u_t'|_{t=0} = -\sum_{i=1}^{2} \beta_i C_i V_i \omega'\Big(\beta_i \frac{x - x_i^0}{\varepsilon}\Big), \tag{5}$$

donde x_i^0 son constantes tales que $x_1^0 - x_2^0 \geq \text{const} > 0$ uniformemente en ε, $C_i = \pm 1$, $V_i \in (0,1)$. Tomemos, para fijar ideas, $C_2 = 1$. Entonces, las trayectorias $x = C_i V_i t + x_i^0$ tienen un punto común $x = x^*$ para $C_1 = -1$ y para cualquier $V_i \in (0,1)$, o para $C_1 = 1$ y $V_2 > V_1$.

Nuestro resultado principal es el siguiente:

Teorema 2. *Supongamos que las hipótesis* (A)-(C) *se satisfacen. Supongamos también que la función F y los parámetros β_1, β_2 satisfacen las condiciones*

(D) $$F(z+1)=F(z),$$

(E) $$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega(\eta)+\omega(\theta\eta))d\eta \le \int_{-\infty}^{\infty}\{F(\omega(\eta))+F(\omega(\theta\eta)) + 2\beta_1\beta_2\sqrt{F(\omega(\eta))F(\omega(\theta\eta))}\}d\eta, \quad \theta=\tfrac{\beta_1}{\beta_2}.$$

Entonces, la interacción de los kinks en el problema (1)-(5) *preserva el escenario de la Ec. SG.*

Todas las hipótesis se satisfacen para ambas funciones en (3). Damos ahora un bosquejo de la demostración del teorema.

De acuerdo al método asintótico débil [5-7], hagamos

$$u(t,x,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{2}\omega\Big(\beta_i\frac{x-\Phi_i(t,\tau,\varepsilon)}{\varepsilon}\Big)+O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2), \tag{6}$$

donde $\Phi_i=\varphi_{i0}(t)+\varepsilon\varphi_{i1}(\tau)$, $\varphi_{i0}=V_it+x_i^0$, $\tau=\beta_1(\varphi_{20}-\varphi_{10})/\varepsilon$, $\varphi_{i1}\to 0$ as $\tau\to-\infty$. El instante de "tiempo" $\tau=0$ significa que las trayectorias se intersectan en el punto $x=x^*$. El comportamiento de $\varphi_{i1}(\tau)$ cuando $\tau\to\infty$ describe el escenario de la interacción de los kinks. A continuación, encontramos los límites débiles para los términos en (4). Por ejemplo, tenemos

$$(\varepsilon u_x)^2=\varepsilon a_2\Big\{\sum_{i=1}^{2}\beta_i\delta(x-\Phi_i)+2\beta_1\lambda_1\delta(x-x^*)\Big\}+O_{\mathcal{D}'}(\varepsilon^2),$$

donde

$$\lambda_1=\frac{1}{a_2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega'(\eta)\omega'(\theta\eta+\sigma)d\eta, \quad a_2=\int_{-\infty}^{\infty}(\omega'(\eta))^2d\eta, \quad \sigma=\beta_1\frac{\Phi_2-\Phi_1}{\varepsilon}.$$

Esto, y la definición implican que una combinación lineal de $\delta(x-x^*)$, $\varepsilon\delta'(x-x^*)$ y $\varepsilon\delta'(x-\Phi_i)$, $i=1,2$, tiene que ser igual a cero. Haciendo cero los coeficientes de las funciones delta obtenemos las relaciones $\beta_i^2=1/(1-V_i^2)$ y las condiciones tipo Hugoniot

$$\frac{d\sigma}{d\tau}=P, \qquad \frac{dW}{d\tau}=Q, \tag{7}$$

donde

$$P=\frac{1}{L}\Big\{\frac{W}{f}+\sigma-2(b_1\bar{\lambda}_2+\theta b_2\lambda_2)\Big\},$$

$$Q=\frac{f}{2}\Big\{(1-\theta\lambda_1^2)P^2-2(1+\lambda_1(b_2-\theta b_1))P+1+2\lambda_1(b_2^2+\theta b_1^2)\Big\}+\frac{1}{\nu^2}\Big(\lambda_1-\frac{B_\Delta}{2\beta_1\beta_2}\Big),$$

y

$$L=\sigma+\bar{\lambda}_2-\theta\lambda_2,\ f=\frac{1}{1+\theta(1+2\lambda_1)},\ \nu=C_2V_2-C_1V_1,\ b_i=\frac{C_iV_i}{\nu},$$

$$\lambda_2=\frac{1}{a_2}\int_{-\infty}^{\infty}\eta\,\omega'(\eta)\omega'(\theta\eta+\sigma)d\eta, \quad \bar{\lambda}_2=\frac{1}{a_2}\int_{-\infty}^{\infty}\eta\,\omega'(\eta)\omega'(\frac{\eta-\sigma}{\theta})d\eta,$$

$$B_\Delta = \frac{2}{a_2}\int_{-\infty}^{\infty}\{F(\omega(\eta)+\omega(\theta\eta+\sigma)) - F(\omega(\eta)) - F(\omega(\theta\eta+\sigma))\}d\eta.$$

Las funciones φ_{11}, φ_{21}, y σ están acopladas por medio de las ecuaciones

$$\beta_1\frac{d\varphi_{11}}{d\tau} = -fG_1, \qquad \beta_2\frac{d\varphi_{21}}{d\tau} = \theta f G_2, \tag{8}$$

donde

$$G_1 = (1+\theta\lambda_1)\frac{d\sigma}{d\tau} + 2\theta b_1\lambda_1 - 1, \quad G_2 = (1+\lambda_1)\frac{d\sigma}{d\tau} - 2b_2\lambda_1 - 1.$$

La hipótesis (B) garantiza la existencia de las convoluciones. Ahora, es sencillo probar las propiedades

$$\operatorname{sign}\sigma\lambda_2 = -1 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sign}\sigma\bar{\lambda}_2 = 1.$$

Así, $L \neq 0$ para cualquier $\sigma \neq 0$. Sin embargo, el sistema dinámico (7) tiene la singularidad sobre la línea $\{\sigma = 0,\, W \in \mathbb{R}^1\}$ y el paso desde el semiplano izquierdo al semiplano derecho es posible sólo a traves del punto $(\sigma = 0,\, W = 0)$. Las condiciones suficientes para la existencia de tal trayectoria son las siguientes:

$$L'_\sigma|_{\sigma=0} \neq 0, \tag{9}$$

$$\Big\{1 + 2\lambda_1(b_2^2 + \theta b_1^2) + \frac{2}{\nu^2 f}\Big(\lambda_1 - \frac{B_\Delta}{2\beta_1\beta_2}\Big)\Big\}\Big|_{\sigma=0} > 0. \tag{10}$$

Un análisis de $L'_\sigma|_{\sigma=0}$ muestra las propiedades

$$L'_\sigma|_{\sigma=0} > 0 \quad \text{para} \quad \theta \leq 1 \quad \text{y} \quad L'_\sigma(0,\theta) = L'_\sigma(0, 1/\theta).$$

Así, la condición (9) se satisface para cualquier $\theta > 0$. Ahora, permitiendo que la condición (10) sea menos estricta, escribimos

$$\Big\{\lambda_1 - \frac{B_\Delta}{2\beta_1\beta_2}\Big\}\Big|_{\sigma=0} > 0.$$

Escribiendo la última desigualdad en términos de la función F obtenemos el supuesto (E).

Por lo tanto, las hipótesis en el teorema garantizan la existencia de una trayectoria (la cual, de hecho, es una separatriz) que, uniformemente en $\tau \in \mathbb{R}^1$, está contenida en una franja $\{\sigma \in \mathbb{R}^1, |W| \leq \text{const}\}$ en el plano (σ, W), y $\sigma \to \pm\infty$ cuando $\tau \to \pm\infty$. Sin embargo, los límites $W^{\pm\infty}$ de W en los infinitos $\tau \to \pm\infty$ no son necesariamente iguales a cero. Si queremos obtener ceros para $W^{\pm\infty}$ y, respectivamente, los acotamientos de φ_{i1}, $i = 1, 2$, tenemos que agregar algunas funciones tipo solitón $\beta_{i1}(\sigma)$ a los parámetros β_i, $i = 1, 2$. La prueba de la existencia de $\beta_{i1}(\sigma)$ apropiadas completa la prueba del teorema 1.

Observaciones 1. *Como $\beta_i > 1$, $i = 1, 2$, la hipótesis* (E) *se puede plantear en la forma menos estricta pero más efectiva:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega(\eta) + \omega(\theta\eta))\, d\eta \leq \int_{-\infty}^{\infty}\{\sqrt{F(\omega(\eta))} + \sqrt{F(\omega(\theta\eta))}\,\}^2 d\eta.$$

Observaciones 2. *Enfatizamos que las hipótesis* (A)-(E) *son verificadas, al menos numéricamente. Por ejemplo, mediante cálculos numéricos para los ejemplos* (3)*, se obtiene que* $B_\Delta|_{\sigma=0} \leq 0$ *en ambos casos y, consecuentemente, la condición* (E) *se satisface.*

Teorema 3. *Las hipótesis* (A)-(E) *y las relaciones de energía*

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} u_t u_x \, dx = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} x\varepsilon^2 u_t u_x \, dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \{(\varepsilon u_t)^2 + (\varepsilon u_x)^2 - 2F(u)\} dx = 0$$

son necesarias y suficientes para que la función (6) *sea una solución asintótica débil del problema* (1)-(5) *en el sentido de la definición 1.*

Bibliografía

[1] Zakharov, V. E., Tahtadzjan L. A., & Faddeev, L. D., *Complete description of solitons of the 'sine-Gordon' equation*, Soviet Phys. Dokl. **219**, 824–826 (1974).

[2] Zhiber, A. V., & Sokolov, V. V., *Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type*, Russian Math. Surveys **56**, 1, 61–102 (2001).

[3] Maslov, V. P., & Omel'yanov, G. A., *Geometric Asymptotics for Nonlinear PDE*, I, AMS (Providence, RI, 2001).

[4] Danilov, V. G., Omel'yanov, G. A., & Radkevich, E. V., *Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase field system*, Europ. J. Appl. Math. 10, 55–77 (1999).

[5] Danilov, V. G., & Shelkovich, V. M., *Propagation and interaction of shock waves of quasi linear equation*, Nonlinear Studies **8**, 135–170 (2001).

[6] Danilov, V. G., *Generalized solutions describing singularity interaction*, International Journal of Math. and Mathematical Sci. **30**, 1–14 (2002).

[7] Danilov, V. G., Omel'yanov, G. A., Shelkovich, V. M., *Weak Asymptotics method and interaction of nonlinear waves*, In: Asymptotics Methods for Wave and Quantum Problems, AMS Transl. (2), **208**, 33-163, (2003).