CLANES Y MATROIDES

Martín Eduardo Frías Armenta[†*] **Juan Antonio Nieto García**[‡]
María Jesús Carrillo Trejo[†*]
[†]Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
[‡]Departamento de Investigación en Física, Universidad de Sonora
[‡]Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Autónoma de Sinaloa

Resumen

En el presente trabajo se plantea la posibilidad de relacionar los conceptos de clanes y matroides. Con este propósito se da un breve repaso de la teoría de clanes y de la teoría de matroides. La conjetura principal (de este trabajo) es que una generalización de clanes a matroides permitiría considerar el dual de clanes para cualquier tipo de gráficas, no sólo para gráficas planares. Nuestra investigación sugiere la introducción del concepto de clanoide, el cual se define en términos de matroides uniformes y puede entenderse como una extensión natural de un clan a matroides.

1 Introducción

De acuerdo con un teorema de Kuratowski [1], una gráfica es planar si y sólo si no tiene una subgráfica homeomórfica a la gráfica completa K_5 y a la gráfica bipartita $K_{3,3}$. Por otra parte una gráfica tiene dual si y sólo si es planar. De aquí se deduce que K_5 y $K_{3,3}$ no tienen una gráfica dual asociada. Es probable que el concepto de matroides [2] haya surgido como un intento de insistir en asociar algún tipo de dualidad a K_5 y $K_{3,3}$. Whitney [3] seguramente notó que si $M(K_5)$ y $M(K_{3,3})$ denotan los matroides asociados a K_5 y $K_{3,3}$ respectivamente entonces los correspondientes matroides duales $M^*(K_5)$ y $M^*(K_{3,3})$ no son gráficos. De aquí que la teoría de matroides pueda ser entendendida como una generalización de la teoría de gráficas.

Un fenómeno análogo se presenta en la teoría de clanes [4]. Un clan de una gráfica es una subgráfica maximal completa. Por lo tanto las gráficas planares no pueden tener clanes de tamaño mayor a cuatro vértices, de lo contrario no serían planares de acuerdo con el teorema de Kuratowski. Esto significa que gráficas que tienen dual no tienen clanes del tipo K_5. Este resultado es quizá una de las razones por las que no hay mucho interés en estudiar clanes duales.

En este trabajo estudiamos la posibilidad de relacionar clanes y matroides. Nuestra conjetura es que dicha relación permitiría extender el concepto de clanes de tal forma que tenga sentido considerar el dual para cualquier clan. Concretamente, si a las gráficas completas K_i, donde $i = 1, 2..., n$, les asociamos el matroide correspondiente $M(K_i)$ entonces, dado que todo matroide tiene un dual único asociado, tendriamos los matroides duales $M^*(K_i)$ y por lo tanto sería razonable hablar de clanes matroidales (clanoides) y de clanes matroidales duales.

*Trabajo apoyado parcialmente por CONACYT. Clave del proyecto: 489100-S-I36596-E.

El planteamiento anterior nos conduce a la pregunta: ¿Cuál sería el análogo de un clan en la teoría de matroides? Para poder dar una respuesta a esta interrogante necesitamos primeramente saber cuáles serían los análogos de las gráficas completas en la teoría de matroides. Aquí, planteamos la posibilidad de que los matroides uniformes $U_{p,q}$ sean los análogos a las gráficas K_i y consecuentemente sean los candidatos apropiados para definir el clanoide; término propuesto para enfatizar la combinación clan-matroide.

La organización de de este trabajo es la siguiente. En la sección II, introducimos la definición de clanes y en la sección III damos un breve repaso de la teoría de matroides. En la sección IV, establecemos una relación de los conceptos de matroides y clanes, y se propone una definición del concepto de clanoide, utilizando los matroides uniformes. Finalmente, en la sección V, hacemos comentarios finales.

2 Nociones de Clanes

El concepto de clan [4] (clique en inglés) juega un papel importante en dinámica de gráficas. En particular, los clanes tinenen interesantes consecuencias en gráficas de clanes iteradas (ver Ref. [5] y referencias ahí citadas).

Recordemos que una gráfica simple G es un par $(V(G), \mathcal{E}(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices y $\mathcal{E}(G)$ es una familia finita de subconjuntos (llamados aristas o lados) de pares distintos de elementos de $V(G)$. El orden de G es el número de vértices; se denota por $v(G)$. El tamaño de G es el número de aristas; se denota por $e(G)$. El tamaño de una gráfica de orden n tiene la propiedad

$$0 \leq e(G) \leq \binom{n}{2}, \tag{1}$$

donde $\binom{n}{2}$ denota el número de combinaciones de dos elementos tomados de un conjunto de n elementos.

Con el propósito de definir un clan es conveniente primero establecer la definición de una $n-$gráfica completa.

Definición 2.1. *Una gráfica de orden n y tamaño $\binom{n}{2}$ se llama $n-$gráfica completa y se denota por K_n.*

Intuitivamente una gráfica completa K_n es la gráfica en la cual cualesquiera dos vértices están unidos por una arista.

Ejemplo 2.1. *K_0 es la gráfica de orden $v(G) = 1$ y tamaño $e(G) = 0$. Es decir, es la gráfica de un solo vértice.*

Ejemplo 2.2. *K_2 es la gráfica de orden $v(G) = 2$ y tamaño $e(G) = 1$: una arista uniendo dos vértices.*

Ejemplo 2.3. *K_3 es la gráfica de orden $v(G) = 3$ y tamaño $e(G) = 3$. Gráficamente K_3 corresponde a un triángulo.*

Como se mencionó en la introducción la gráfica completa K_5 se distingue de todas las gráficas completas debido al teorema de Kuratowski. En este sentido K_5 es un objeto excepcional.

Definición 2.2. *Un clan de una gráfica G es una subgráfica completa maximal.*

Ejemplo 2.4. *La gráfica K_3 tiene siete subgráficas completas, pero únicamente hay una subgráfica completa maximal que es K_3 misma.*

Definición 2.3. *La gráfica de clanes $k(G)$ de una gráfica G es la gráfica de intersección de la familia de clanes de G.*

Es importante mencionar que no es verdad que toda gráfica es la gráfica de clanes de alguna gráfica. De hecho Roberts y Spencer (ver referencia [6] p. 20 para detalles) han caracterizado las gráficas de clanes. Si $c(G)$ denota la gráfica de intersección de todas las subgráficas completas de G entonces $k(G)$ puede entenderse como la gráfica inducida por $c(G)$.

Por otro lado, utilizando $k(G)$ es posible definir gráficas iteradas de clanes las cuales pueden presentar varios comportamientos, por ejemplo $k - nulas$, $k - divergentes$, $k - estacionaria$ y $k - periódica$ (para detalles ver referencia [7]).

3 Breve repaso de la teoría de matroides

En 1935, Whitney [2] introdujo el concepto de matroides para probar que tiene sentido considerar las propiedades abstractas de la dependencia lineal. Dos ejemplos que le sirvieron para tal propósito fueron los matroides vectoriales y los matroides gráficos. Sorprendentemente, en el proceso de investigación Whitney encontró matroides que no tienen representación vectorial ni gráfica, sentando con ello las bases para la teoría de matroides. Actualmente, hay una amplia literatura sobre el tema. El lector interesado puede consultar por ejemplo el libro de Oxley [8] (ver también la referencia [9]).

Existe un número considerable de definiciones equivalentes del concepto de matroide. Quizá la más simple de tales definiciones es en términos de bases:

Definición 3.1. *Un matroide M es un par (E, B),donde E es un conjunto finito no vacío y B es una colección no vacía de subconjuntos de E (llamadas bases) que satisfacen las siguientes propiedades.*

(B1) *Una base no contiene propiamente otra base.*

(B2) *Si B_1 y B_2 son bases y si e es cualquier elemento de B_1, entonces existe un elemento f de B_2 con la propiedad de que $(B_1 - \{e\}) \cup \{f\}$ es también una base.*

Proposición 3.1. *Toda base de un matroide M contiene el mismo número de elementos.*

Un subconjunto de E es independiente si está contenido en alguna base del matroide M. Las bases de M son los conjuntos independientes maximales. A los subconjuntos de E que no son independientes se les llama dependientes. Un conjunto minimal dependiente define un circuito.

Teorema 3.1. *Un matroide M es un par (E, I), donde E es un conjunto finito no vacío, e I es una colección no vacía de subconjuntos de E, llamados conjuntos independientes que satisfacen las siguientes propiedades:*

(I1) *Cualquier subconjunto de un conjunto independiente es independiente;*

(I2) *Si I y J son conjuntos independientes con $|J| > |I|$,entonces existe un elemento e contenido en J pero no en I, tal que $I \cup \{e\}$ es independiente.*

Ejemplo 3.1. *Considérese la matriz*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Denotemos por $1, 2$ y 3 las columnas de esta matriz. Uno puede ver que A_1 constituye una representación vectorial de un matroide si asumimos que $E = \{1, 2, 3\}$ y

$$B = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}.$$

Cuando los elementos del conjunto fundamental E pueden ser mapeados a las columnas de una matriz en un campo F dado, se dice que el matroide (E, B) define un matroide vectorial.

Desde el punto de vista de teoría de gráficas, el matroide realizado por la matriz A_1 corresponde a la gráfica completa K_3. En este caso los elementos $1, 2$ y 3 de E etiquetan a las aristas (o lados) de la gráfica K_3.

En general, cuando los elementos de E pueden ser asociados a las aristas de una gráfica se dice que el par (E, B) corresponde a un matroide gráfico. Conviene aclarar que no todo matroide es un matroide gráfico, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2. *Considérese el par $E = \{1, 2, 3, 4\}$ y*

$$B = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\} \{3, 4\}\}. \tag{3}$$

Uno puede verificar que E y B satisfacen las condiciones (B1) y (B2) *y por lo tanto, en este caso, el par (E, B) constituye un matroide. Este matroide juega un papel importante en teoría de matroides y se le denota como $U_{2,4}$. Un aspecto interesante de $U_{2,4}$ lo proporciona el hecho de que no es un matroide gráfico, es decir, no puede ser representado mediante una gráfica.*

Ejemplo 3.3. *El matroide $U_{2,4}$ constituye un caso particular de los llamados k-matroides uniformes denotados como $U_{k,n}$, en los cuales $E = \{1, 2, ..., n\}$ y B es el conjunto de todos los subconjuntos de E que contienen exactamente k elementos.*

Sea M el matroide definido en términos del par (E, B) y sea B^* el conjunto de todas las bases complemento de B. Se puede demostrar que el par (E, B^*) es un matroide. A este matroide se le denota como M^*. Se dice que M^* es el matroide dual a M. De estas observaciones parece evidente que todo matroide M tiene asociado un matroide dual único M^*. Además, se verifica que $M^{**} = M$.

Ejemplo 3.4. *Sea $U_{k,n}$ el matroide k-uniforme. De acuerdo a la definición de dualidad se tiene que el dual de $U_{k,m}$ esta dado por $U^*_{k,n} = U_{n-k,n}$. En particular, nótese que si $n = 2k$ entonces $U_{k,n}$ es un matroide autodual.*

Ejemplo 3.5. *Considérese la gráfica bipartita $K_{3,3}$nueve lados y por lo tanto da lugar al conjunto fundamental $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. La matriz asociada al matroide $M(K_{3,3})$ tiene la forma*

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Por otra parte el matroide dual $M^*(K_{3,3})$ puede ser representado por la matriz

$$A_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Obsérvese que ambos matroides $M(K_{3,3})$ y $M^*(K_{3,3})$ son matroides vectoriales sobre le campo $GF(2)$. Sin embargo, lo realmente interesante de este ejemplo es que en contraste con $M(K_{3,3})$ el matroide dual $M^*(K_{3,3})$ es un matroide no gráfico. Esto puede ser verificado intentando asociar las columnas de A_2^* con los lados de una gráfica, lo cual resulta imposible. Mas aún, este ejemplo demuestra que a gráficas como $K_{3,3}$, que no son planares y por lo tanto no pueden tener una gráfica dual asociada según el teorema de Kuratowski, si se les puede asociar una simetría de dualidad a nivel de matroides, siempre que el matroide dual $M^*(K_{3,3})$ no sea un matroide gráfico. Esto, por supuesto, es consecuencia de que a todo matroide M se le puede asociar un matroide dual único M^*, pero M^* no necesariamente es un matroide gráfico.

4 Extensión de calnes a matroides: clanoides

La definición de clanes tiene que ver con en el concepto de gráficas completas K_n. Así que, si queremos relacionar clanes con matroides resulta razonable primero intentar extender el concepto de K_n a matroides. En principio, la tarea no parece muy difícil porque, en general, a toda gráfica K_n le podemos asociar un matroide $M(K_n)$. Sin embargo, $M(K_n)$ correspondería a un matroide gráfico y por lo tanto, dado que el concepto de matroide es más general que el de gráfica, nuestra extensión del concepto de clanes sería limitada.

Enfoquémonos en K_1, K_2 y K_3. Estas tres gráficas tendrían sus matroides asociados $M(K_1), M(K_2)$ y $M(K_3)$. No es difícil demostrar que $M(K_1), M(K_2)$ y $M(K_3)$ pueden ser identificados con los matroides uniformes $U_{0,0}, U_{1,1}$ y $U_{2,3}$ respectivamente.

Consideremos ahora $M(K_4)$. El conjunto fundamental de este matroide es

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \tag{6}$$

Los elementos de E pueden ser identificados con las aristas de K_4. La familia de bases pueden ser elegida como

$$B = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 123 & 125 & 126 & 134 & 136 & 145 & 146 & 156 \\ 234 & 235 & 245 & 246 & 256 & 345 & 346 & 356 \end{array} \right\}. \tag{7}$$

De (7) observamos que el subconjunto $\{1, 2, 4\}$ no es una base de $M(K_4)$. De hecho hay 3 subconjuntos más de tres elementos de E que no son bases de $M(K_4)$. Por lo tanto $M(K_4)$ no puede ser identificado con $U_{3,6}$. Así que, nuestro intento por identificar $M(K_n)$ con matroides uniformes se detiene con K_3.

De acuerdo con estas observaciones podríamos argumentar que una extensión de clanes a matroides sólo tendría sentido para los matroides gráficos $M(K_n)$. Después de todo, una generalización de este tipo nos permitiría asociar el dual a clanes de gráficas no planares, como es el caso de $M(K_5)$. Sin embargo, estas observaciones también podrían enfocarse de otra manera.

Una característica de la definición de las gráficas completas es que co-rresponden a gráficas con el tamaño más grande. Entonces una pregunta análoga para el caso de matroides sería: ¿Cuáles son los matroides de la familia de bases más grande? La respuesta es, por supuesto, que son los matroides uniformes $U_{k,n}$. Esto significa que a nivel de matroides el análogo de gráficas completas no es $M(K_n)$, sino $U_{k,n}$.

De lo anterior se desprende una posible generalización de clanes a matroides. Pero, antes de proceder a específicar la definición de dicha genera-lización, se requiere poner un nombre a la relación clan-matroide. Tomando en cuanta que el nombre de matroide parece venir de matriz resulta razonable llamar clanoide (clicoid en inglés) a la extensión del concepto de clan a matroides. Específicamente, definimos a un clanoide como sigue:

Definición 4.1. *Un clanoide de un matroide M es un submatroide uniforme maximal.*

Parte de nuestra motivación para estudiar clanoides viene de poder extender el concepto de dualidad para clanes más álla de K_4. Por eso, una de las cosas que primeramente tendríamos que checar, es si nuestra definición de clanoides cumple con este requerimiento. En relación a esto, como se mencionó en ejemplo (III. 4), para los matroides uniformes se tiene la expresión de dualidad

$$U^*_{k,n} = U_{n-k,n}. \tag{8}$$

Por lo tanto, el dual de un clanoide esta garantizado por esta fórmula.

Otro aspecto importante que conviene abordar es entender cuál es la relación entre los matroides $M(K_n)$ y $U_{k,n}$. Esto nos permitiría entender cuál es la relación entre los clanes usuales y los clanoides. Para tal propósito, es ilustrativo primero tratar de entender con más detalle la relacion entre $M(K_4)$ y $U_{3,6}$.

Denotemos con (E_1, B_1) y (E_2, B_2) los conjuntos fundamentales y familias de bases de los matroides $M(K_4)$ y $U_{3,6}$, respectivamente. Dado que E_1 y E_2 tienen el mismo número de elementos podemos proponer un mapeo identidad tal que $E_1 = E_2$. Por otra parte se tiene que $B_1 \subset B_2$. Esto significa que toda base de B_1 también lo es de B_2, pero no a la inversa. Es interesante que este tipo de mapeos entre dos matroides juegan un papel importante en la teoría de matroides. De hecho se tiene la siguiente definición:

Definición 4.2. *Sean $M_1 = (E_1, B_1)$ y $M_2 = (E_2, B_2)$ dos matroides. Al mapeo $M_2 \rightsquigarrow M_1$ tal que $E_1 = E_2$ y $B_1 \subset B_2$ se le conoce como mapeo débil.*

Así, descubrimos que en la teoría de matroides el mapeo débil es la herramienta que permite relacionar los matroides $M(K_n)$ y $U_{k,n}$. Y de esa manera dado que $M(K_n)$ es un matroide gráfico se debe tener un mapeo *clanoide* $\rightsquigarrow$ *clan*.

5 Comentarios

En este trabajo hemos investigado la posibilidad de extender el concepto de clanes a matroides. Nuestro estudio nos indica que el análogo de gráficas completas K_n en teoría de matroides son los matroides uniformes $U_{k,n}$. Esta observación nos permitió proponer la definición de un clanoide, el cual puede pensarse como el análogo combinatorio de la definición de un clan. Dado que los matroides $M(K_n)$ y $U_{k,n}$ están relacionados por un mapeo débil dedujimos que un clanoide y un clan deben estar relacionados también mediante un mapeo débil: *clanoide* $\rightsquigarrow$ *clan*.

Como a todo matroide le corresponde un matroide dual único se concluye que es posible asociar un matroide dual a cualquier clanoide (En contraste con el caso de clanes donde sólo es posible asociar el dual a clanes en conexión con K_1, K_2, K_3 y K_4.)

La gráfica de clanes $k(G)$ de G es la gráfica de intersección de todos los clanes de G. En forma similar podemos definir el matroide de clanoides $q(M)$ como el matroide intersección de los clanoides de M. Aquí, quedaría por aclarar que significa intersección de los clanoides. No obstante podemos adelantar que el matroide de clanoides permitiría obtener el análogo de gráficas de clanes iteradas y de esa manera estudiar matroides $q - divergentes$, $q - estacionarios, ...etc.$

Por último, sería atractivo encontrar una aplicación de los clanoides en física. En particular, tomando en cuenta los recientes esfuerzos [10-13] por relacionar la teoría de matroides con la llamda teoría M [14-17] sería interesante utilizar el concepto de clanoides en tal escenario.

Agradecimientos: J. A. Nieto desea agradecer al Departamento de Investigación en Física de la Universidad de Sonora y a su Área de Astronomía por la hospitalidad brindada.

Bibliografía

[1] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, 3rd ed. (Wiley, New York, 1895).

[2] H. Whitney, Am. J. Math. **57,** 509 (1935).

[3] H. Whitney, Trans. Amer. J. Math. **34**, 339 (1932).

[4] E. Prisner, *Graph dynamics*, (Longman, Harlow, 1995)

[5] M. Frías, V. Newmann-Lara, M. A. Pizaña, Dismantling and Iterated Clique Graphs, enviado para su publicación; Marzo 2002.

[6] B. Bollobas, *Modern Graph Theory* (Springer- Verlag, New-York 1998).

[7] M. J. Carrillo-Trejo, Gráficas k-nulas y la Propiedad de Punto Fijo, Marzo 2003, Tesis en proceso.

[8] J. G. Oxley, *Martroid Theory*, (Oxford University Press, New York, 1992)

[9] M. C. Marín, Matroide de Fano y Octoniones, Marzo 2003, Tesis en proceso.

[10] J. A. Nieto, Rev. Mex. Fis. **44** 358 (1998).

[11] J. A. Nieto y M. C. Marín, J. Math. Phys. **41,** 7997 (2000).

[12] J. A. Nieto, Searching for a Connection Between Matroid Theory and String Theory, submmited for publication, December 2002; hep-th/0212100.

[13] J. A. Nieto y M. C. Marín, Search for a "Gravitoid" Theory, enviado para su publicación, Marzo 2003; hep-th/0302193.

[14] P. K. Townsend, "Four lectures on M-theory," *Proceedings of the ICTP on the Summer School on High Energy Physics and Cosmology*, June 1996, hep-th/9612121.

[15] M. J. Duff, Int. J. Mod. Phys. A **11,** 5623 (1996), hep-th/9608117.

[16] P. Horava y E. Witten, Nucl. Phys. B **460,** 506 (1996).

[17] M. Green, V. Schwarz y E. Witten, *Superstrings Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987) Vol I and II; M. Kaku, *Introduction to Superstrings* (Spring-Verlag, Berlin, 1990).