Mosaicos Matemáticos No. 11
Diciembre, 2003.

GRÁFICAS *k*-NULAS Y LA PROPIEDAD DE PUNTO FIJO*

María de Jesús Carrillo Trejo
Martín Eduardo Frías Armenta
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Resumen

El teorema de punto fijo para un orden parcial establece que si la sucesión de gráficas de clanes de la gráfica de comparabilidad para este orden parcial converge a la gráfica trivial (de un sólo punto), entonces el orden parcial tiene la propedad de punto fijo. En el presente trabajo se da una aplicación de este teorema a través del diagrama "P1" de Rutkowski, el cual tiene una gráfica de comparabilidad k-nula o trivial, lo que se prueba por medio de los teoremas de desmantelamiento.

También mostramos cómo generar una familia importante de gráficas que ejemplificarán el teorema de punto fijo y se concluye que resulta difícil poder determinar el k-comportamiento de una gráfica con las técnicas que se presentan en este trabajo.

Introducción: notación y terminología

Una gráfica $G=(V,E)$ consta de un conjunto V (o $V(G)$), llamado *conjunto de vértices*, y de un conjunto de pares no ordenados E (o $E(G)$) de elementos de V llamados *aristas*. Una arista será denotada por los vértices que la componen $\{u,v\}\in E(G)$ o $uv\in E(G)$.

El *orden* de una gráfica G es el número de sus vértices y se denota por $|G|$ o $|V(G)|$. En el presente trabajo, todas nuestras gráficas son finitas, no vacías y simples (sin lazos ni aristas paralelas). Una gráfica H se dice ser una subgráfica de G si tiene todos sus vértices y aristas en G: $V(H)\subseteq V(G)$ y $E(H)\subseteq E(G)$. Decimos que H es una *subgráfica inducida* si es una subgráfica de G tal que si $u,v\in V(H)$ y $\{u,v\}\in E(G)$, entonces se tiene que $\{u,v\}\in E(H)$, lo cual se denota por $H\subseteq_* G$.

A la gráfica con n vértices en la cual existe una arista entre cada par de vértices distintos se le llama *gráfica completa de n vértices* y es usual denotarla por K_n; también hablaremos aquí de las gráficas completas de G, $c(G)$, la cual se define como la gráfica que es la intersección de todas las subgráficas completas de G.

Sea G una gráfica, un *clan de G* es una subgráfica completa maximal. El concepto de clan ha sido estudiado desde los inicios de la teoría de las gráficas y ha resultado ser una idea fundamental en esta materia. La construcción de una gráfica de clanes muestra la estructura clánica de una gráfica G. Esta se define como la gráfica de intersección del conjunto de clanes de G y se denota por $k(G)$. El operador de clanes, k, al aplicarlo repetidas veces va transformando gráficas en gráficas; a estas se les llama gráficas iteradas de clanes, que se definen por inducción por medio de las fórmulas $k^0(G)=G$ y $k(k^{n-1}(G))$.

Normalmente veremos a los clanes como subconjuntos de vértices. Desde sus inicios las gráficas iteradas de clanes han sido estudiadas desde diferentes enfoques, que no se mencionan en el presente trabajo; sin embargo presentamos un ejemplo en donde se usan las gráficas iteradas de clanes para afirmar que un orden parcial finito tiene la propiedad de punto fijo.

* Trabajo apoyado parcialmente por CONACyT. Clave del proyecto: 489100-S-I36596-E.

Las gráficas iteradas de clanes pueden presentar varios comportamientos: Una gráfica G es *k-divergente* si $|k^n(G)| \to \infty$ cuando $n \to \infty$, es decir $\{|V(k^n(G))| : n \in \mathbf{N}\}$ no está acotado. Se dice que una gráfica G es *periódica*, con *período* p si es isomorfa a $k^p(G)$ pero G no es isomorfa a $k^q(G)$ para $1 \leq q < p$. Decimos que G es *k-estacionaria* si existe un entero n para el cual $k^n(G)$ es *k-periódica*, es decir, $k^n(G) \cong k^{n+m}(G)$ para n, m enteros con $n \geq 0$ y $m \geq 1$; al mínimo de esos n se le llama el índice de clanes $I_k(G)$. En el caso particular en que $k^n(G)$ sea isomorfa a la gráfica trivial, se le llama gráfica *k-nula*. Determinar el *k-comportamiento* (o *k-carácter*) de una gráfica *G*, consiste en poder decir si *G* es *k-divergente*, es *k-estacionaria* pero no *k-nula* y *k-nula*.

La vecindad abierta de un vértice *x* en *G*, $N(x)$, es el conjunto de todos los vecinos de *x*, es decir, $N(x) = \{y \mid y \in V(G), \{x, y\} \in E(G)\}$. La vecindad cerrada de un vértice u de G es $N[x] = N(x) \cup \{x\}$. Cuando x, y son vecinos, también decimos que son adyacentes.
Si G es una gráfica y $\{x, y\} \in E(G)$, diremos que *x* es dominado por *y* si cualquier vecino de *x* (distinto de *y*) es también vecino de *y*, es decir, $N[y] \supseteq N[x]$; en símbolos, $y \blacktriangleright x$.

Un *homomorfismo* entre dos gráficas A y B es una función $f: V(A) \to V(B)$ tal que las imágenes de vértices adyacentes son adyacentes o iguales. Un homomorfismo $\varphi: G \to H$ entre las gráficas *G* y *H* se llama una *retracción* si existe un homomorfismo $\sigma: H \to G$ tal que $\varphi \circ \sigma$ es la identidad en *H*. En este caso, decimos que *H* es un retracto de *G*. Dos gráficas *G* y *H* se dicen ser *isomorfas* si existe una correspondencia uno a uno entre los vértices que preservan adyacencia. Un *automorfismo* de una gráfica *G* es un isomorfismo de *G* en sí misma.

Sea G una gráfica. Una *coafinación* es un automorfismo φ de *G* tal que $\{x, \varphi(x)\} \notin E(G)$ para cada $x \in V(G)$. Decimos que una gráfica G = (*V*,*E*) es llamada *coafinable* si admite una coafinación.

Un *orden parcial* es un par ordenado $\mathbf{P} = (P, \leq)$, donde *P* es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación antisimétrica, transitiva y reflexiva en *P*. La *gráfica de comparabilidad* de un orden parcial $\mathbf{P}$ es la gráfica cuyo conjunto de vértices son los elementos de *P* y existe una arista entre cada uno de los elementos relacionados.
Si $\mathbf{P}$ es un orden parcial sobre un conjunto finito *A*, construimos el *diagrama de Hasse* para $\mathbf{P}$ sobre A trazando un segmento de x a y si $x, y \in A$ son tales que $x \leq y$ y si no existe otro elemento $z \in A$ tal que $x \leq z$ y $z \leq y$.

Un *endomorfismo* de $\mathbf{P}$ es una función de $\mathbf{P}$ sobre sí mismo que preserva el orden. Decimos que un endomorfismo *f* de un orden parcial $\mathbf{P}$ tiene un *punto fijo* si existe un elemento *a* en $\mathbf{P}$ tal que $f(a) = a$. Se dice que un orden parcial $\mathbf{P}$ tiene la *propiedad de punto fijo* si todo endomorfismo de $\mathbf{P}$ tiene un punto fijo.

Resultados preliminares

Definición 1. Sean G y H gráficas. G se desmantela a H si H es isomorfa a una subgráfica inducida H_0 de *G*, de tal manera que cada vértice de $G - H_0$ está dominado por algún vértice de H_0. En símbolos, $G \xrightarrow{\#} H$ ([1,2]).

Teorema 2. Si $G \xrightarrow{\#} H$, entonces $k(G) \xrightarrow{\#} k(H)$ ([1,2]).

Teorema 3. Si $G \xrightarrow{\#} H$, entonces $k(c(H)) \xrightarrow{\#} k^2(G)$ ([1,2]).

Aplicando los teoremas 2 y 3 se demuestra el siguiente teorema que es uno de los más importantes sobre el *k*-comportamiento:

Teorema 4. Si $G \xrightarrow{\#} H$, entonces *G* y *H* tienen el mismo *k-comportamiento* ([1,2]). Es decir,
i) *G* es *k*-nula si y sólo si *H* es *k*-nula.
ii) *G* es *k*-estacionaria si y sólo si *H* es *k*-estacionaria.
iii) *G* es *k*-divergente si y sólo si *H* es *k*-divergente.

Los siguientes resultados son requeridos para demostrar el Teorema 8, que es tema central de este trabajo.

Proposición 5. Sean *G* y *H* gráficas tal que *H* es un retracto de *G*. Entonces *k*(*H*) es un retracto de *k*(*G*) ([5,6]).

Proposición 6. Sea *G* una gráfica coafinable. Entonces *k*(*G*) es coafinable ([5,6]).

Teorema 7. Sea $\mathbf{P}$ un orden parcial finito libre de puntos fijos (no tiene la propiedad de punto fijo). Entonces la gráfica de comparabilidad de $\mathbf{P}$ tiene un retracto coafinable ([4]).

Teorema 8. Sea $\mathbf{P}$ un orden parcial finito y supongamos que la gráfica de comparabilidad de $\mathbf{P}$ es *k-nula*. Entonces $\mathbf{P}$ tiene la propiedad del punto fijo ([4]).

Demostración: Supongamos que $\mathbf{P}$ no tiene la propiedad de punto fijo. Entonces por el teorema 7, hay un retracto $\mathbf{R}$ de $\mathbf{P}$ cuya gráfica de comparabilidad es coafinable. Por la proposición 6, como la gráfica de comparabilidad de $\mathbf{R}$ es coafinable, entonces $k(\mathbf{R})$ es coafinable. Por la proposición 5, como $\mathbf{R}$ es retracto de $\mathbf{P}$, entonces $k(\mathbf{R})$ es un retracto de $k(\mathbf{P})$. Repitiendo estos argumentos con $k(\mathbf{P})$, podemos ver que $k^n(\mathbf{P})$ tiene un retracto coafinable para cada $n \geq 1$ al menos dos elementos. Por lo tanto $\mathbf{P}$ tiene la propiedad de punto fijo.

Una aplicación del teorema de punto fijo y de los teoremas de desmantelamiento

A continuación presentaremos un ejemplo donde se aplica el teorema de punto fijo; es decir daremos un orden parcial finito y verificaremos que la sucesión de gráficas iteradas de clanes de su gráfica de comparabilidad es *k-nula* haciendo uso de los teoremas de desmantelamiento [1,2].

Para mostrar el ejemplo de una manera sencilla se eligió trabajar con un diagrama de Hasse, el llamado diagrama P1 de Rutkowski (ver figura 1), el cual representa un orden parcial dado por el conjunto ordenado (A, ≤), donde A = {1,2,3,4,5,6,7,8,9} y ≤ es la relación que está dada por: “Si puedo ir de *x* a *y*, sin bajar, entonces *x* es menor que *y*”.

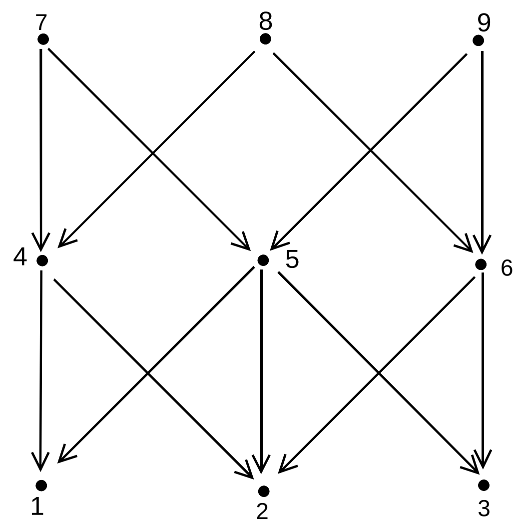

Figura 1. Diagrama P1 de Rutkowski

La gráfica de comparabilidad de este orden parcial, que denotaremos por G, es la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V(G) = \{1,2, 3,4,5,6,7,8,9\}$ y su conjunto de aristas es $E(G) = \{\{1,4\}, \{1,5\}, \{1,7\}, \{1,8\}, \{1,9\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{2,7\},\{2,8\},\{2,9\},\{3,5\},\{3,6\},\{3,7\}, \{3,8\}, \{3,9\},\{4,7\},\{4,8\},\{5,7\},\{5,9\},\{6,8\},\{6,9\}\}$. Esto se muestra en la figura 2:

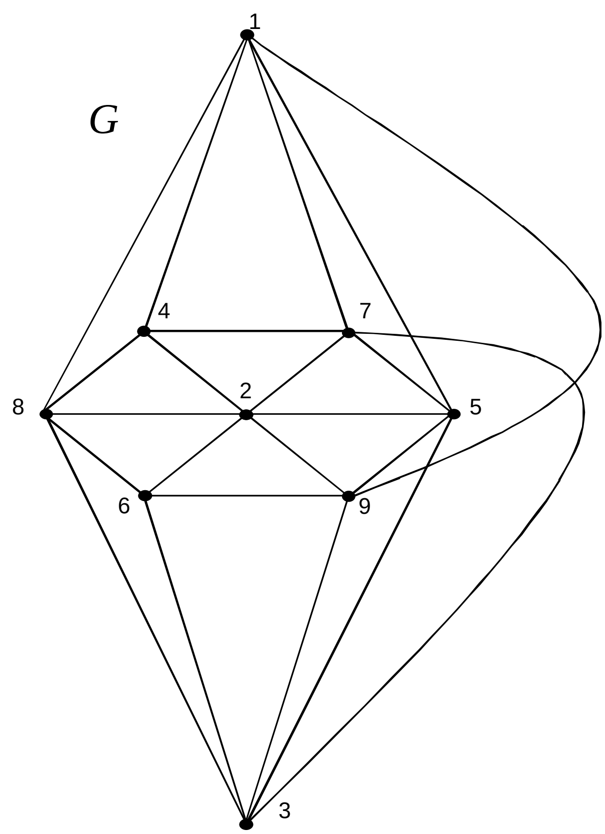

Figura 2. Gráfica de comparabilidad del orden parcial dado por el diagrama P1 de Rutkowski.

Primeramente verificamos que la gráfica de comparabilidad G, no tiene vértices dominados:

$N[1] = \{1,4,5,7,8,9\}$	$N[2] = \{2,4,5,6,7,8,9\}$	$N[3] = \{3,5,6,7,8,9\}$
$N[4] = \{1,2,4,7,8\}$	$N[5] = \{1,3,5,7,9\}$	$N[6] = \{2,3,6,8,9\}$
$N[7] = \{1,2,3,4,5,7\}$	$N[8] = \{1,2,3,4,6,8\}$	$N[9] = \{1,2,3,5,6,9\}$

Enseguida calculamos su gráfica de clanes (figura 3), la cual tiene 14 vértice y confirmamos que $k(G)$ tampoco tenga vértices dominados. Calculando $k^2(G)$ (figura 4), sabemos que tiene 19 vértices: $V(k^2(G)) = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10},v_{11},v_{12},v_{13},v_{14},v_{15},v_{16},v_{17},v_{18},v_{19}\}$ y v_4, v_6, v_7, v_{10} y v_{13} están dominados.

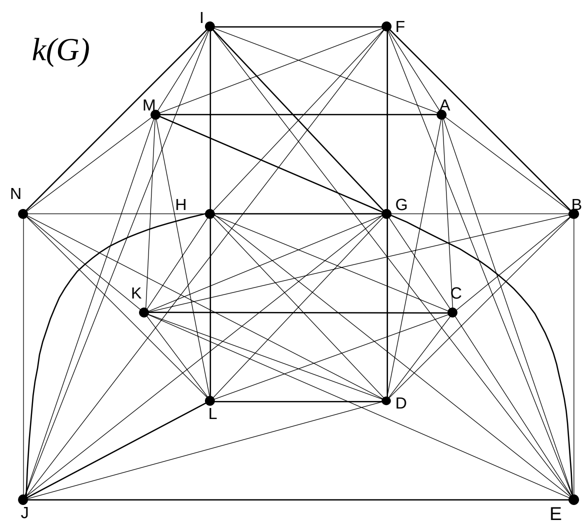

Figura 3. Gráfica de clanes de la gráfica de comparabilidad

De esta manera, tenemos que $k^2(G)$ se desmantela a G_1 (figura 5). El paso siguiente es verificar si G_1, tiene vértices dominados, obteniendo que v_3,v_9,v_{14} y v_{19} están dominados, por lo que G_1 se desmantela a G_2, cuya gráfica es G_1 menos su conjunto de vértices dominados: $\{v_3,v_9,v_{14},v_{19}\}$ (figura 6).

Realizando el mismo proceso se llega a que G_2 se desmantela a G_3, cuya gráfica es G_2 menos su conjunto de vértices dominados: $\{v_1,v_5,v_{17},v_{18}\}$, ver figura 7. Por último, se tiene que G_3, cuyo conjunto de vértices es $V(G_3) = \{v_2,v_8,v_{11},v_{12},v_{15}\}$, se desmantela a $K_1 = \{v_2\}$, ver figura 7. Este proceso lo expresamos como

$$k^2(G) \xrightarrow{\#} G_1 \xrightarrow{\#} G_2 \xrightarrow{\#} G_3 \xrightarrow{\#} K_1$$

Se tiene en este caso que $k^2(G)$, de la gráfica de comparabilidad del orden parcial finito, es *k-nula*, [1,2]. Luego, por el Teorema de punto fijo [4], afirmamos que este orden parcial finito tiene la propiedad de punto fijo.

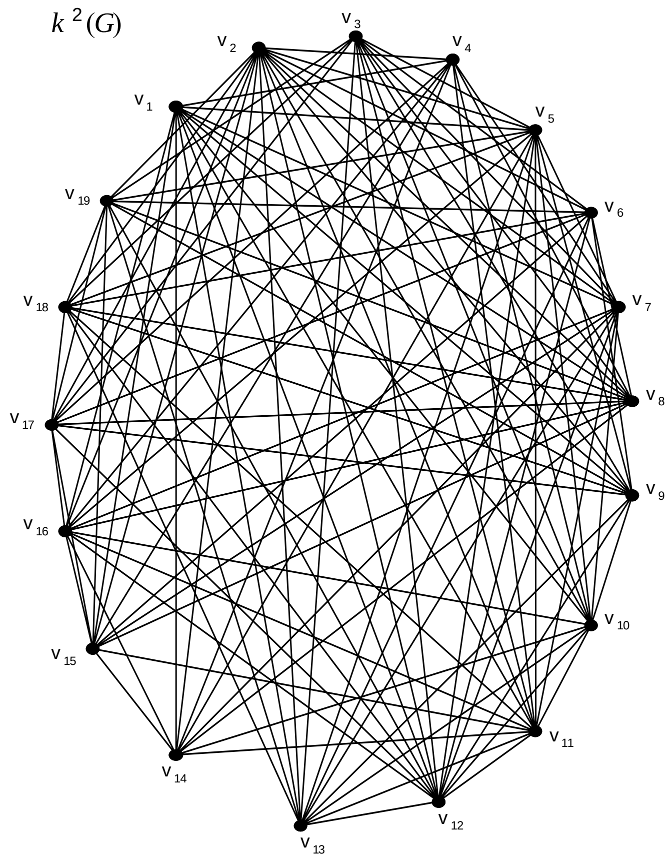

Figura 4. Segunda gráfica de clanes de la gráfica de comparabilidad

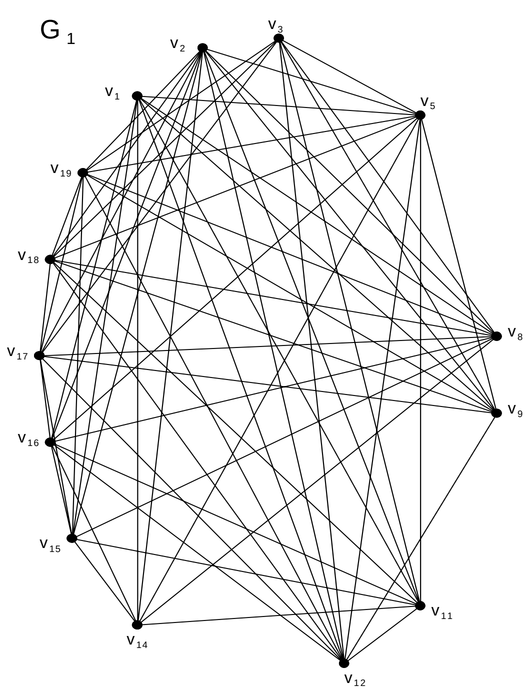

Figura 5

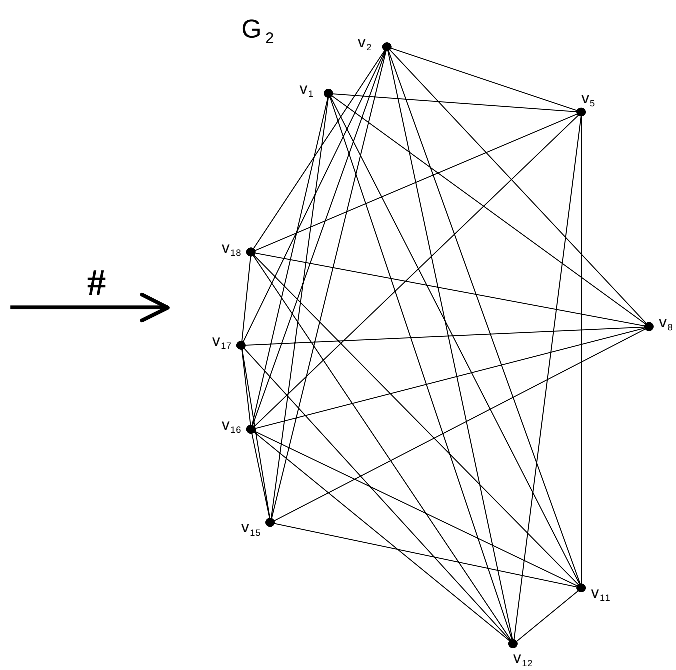

Figura 6

En este trabajo se deseaba dar más ejemplos de este teorema, por lo que se analizaron diagramas similares al de Rutkowski haciendo uso de un programa de computadoras diseñado por medio del programa GAP, para calcular los clanes [7]; no fue posible determinar el *k-comportamiento* de las gráficas de comparabilidad de estos ordenes parciales. Ver figuras, 5,6,7.

Podemos concluir que sobre el tema del *k*-comportamiento hay mucho por investigar, así como con el tema de clanes, el cual es uno de los conceptos más interesantes en Teoría de Gráficas, ya que, al parecer simplifica la gráfica; sin embargo, al calcular su gráfica iterada de clanes es complicado, por lo que en ocasiones, no se puede predecir qué es lo que va pasar.

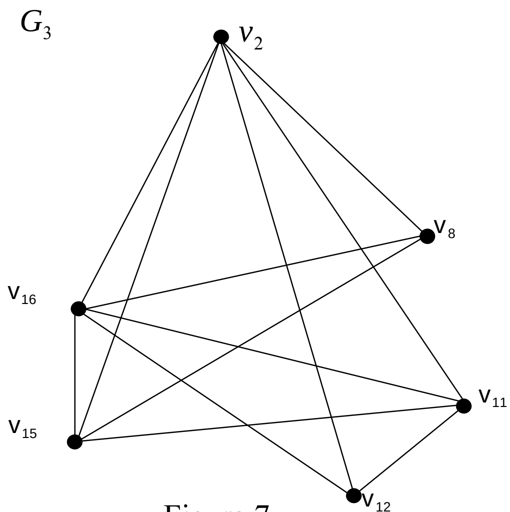

Figura 7

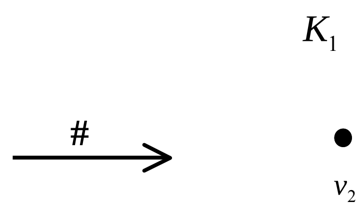

Figura 8

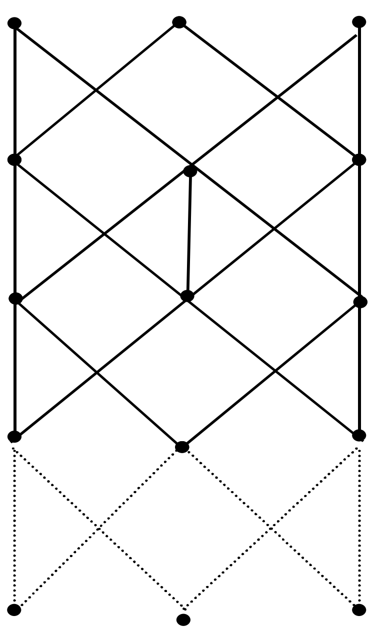

Figura 9

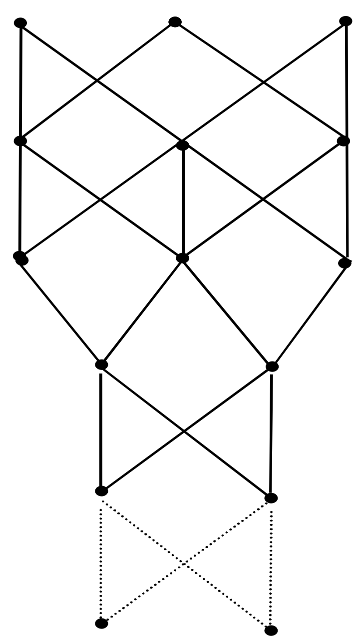

Figura 10

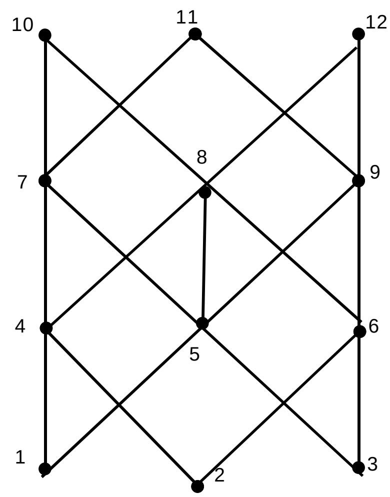

Figura 11

Bibliografía

[1] M.E. Frías-Armenta, V. Neumann-Lara, M.A. Pizaña, *Dismantlings anda Iterated Clique Graphs*, Preprint submitted to Elsevier Science, 21 de marzo del 2002.

[2] Frías Armenta Martín Eduardo, *Gráficas Iteradas de Clanes*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México (2000)

[3] Harary, Frank, *Graph Theory*, Addison-Wesley series in mathematics, 1969

[4] Hazan, Simone y Neumann-Lara Victor, *Fixed Points of Posets and Clique Graph*, Kluwer Academic Publishers 13 (1996) 219-225

[5] V. Neumann-Lara, On Clique-divergent graphs, en *Problémes Combinatories et Théorie des Graphes*, Paris 260 (1978), 313-315.

[6] V. Neumann-Lara, Clique divergent in graphs, en *Algrebraic methods in graph theory*, Vol. I y II (Szeged, 1978), pages 563-569. North-Holland, Amsterdam, 1981.

[7] M.A.Pizaña, *Gráficas iteradas de Clanes*. Tesis doctoral, División de ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana, México (2002).

[8] A. Rutkowski, *The Fixed points property for small sets*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, Orden 6. 1-14 (1989)

[9] Johnsonbaugh, Richard, *Matemáticas Discretas*, Cuarta Edición, Prentice Hall, México, 1999.

[10] Lieschutz, Seymour, *Theory and Problems from Set Theory and Related Topics,* McGraw-Hill Publishing Co., 1964.