LAS APLICACIONES DEL CABRI-GÉOMÈTRE II EN LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA: UNA ESTRATEGIA CONSTRUCTIVISTA DEL APRENDIZAJE

Eliseo Valdez Rojo
Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios No. 18
Mexicali, B. C.

Resumen

Se reporta en este trabajo el diseño de una secuencia didáctica como parte del proyecto de desarrollo denominado: "El Cabri II en la enseñanza de la función cuadrática: Una estrategia constructivista del aprendizaje" el cual se implementará en el Cetis No. 18 de la ciudad de Mexicali B. C., en el mes de Enero de 2003. En este proyecto de desarrollo, la principal problemática que se plantea para la operación del mismo es la existencia del tratamiento esencialmente algebraico de la función cuadrática en la enseñanza de las matemáticas, tanto en el nivel medio básico como en el medio superior. Es muy conocido que este enfoque plantea serias dificultades a los estudiantes. Bajo el planteamiento anterior, el presente proyecto pretende fortalecer la calidad de la enseñanza de las matemáticas, y en particular, abordar la enseñanza del tema de la función cuadrática desde otra perspectiva, mediante la incorporación del software Cabri-géomètre II al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas del nivel medio superior del sistema de educación tecnológica industrial en nuestro estado.

Los principios que guían este trabajo son los del constructivismo haciendo énfasis en la teoría de los registros de representación de Duval (1998), así como los planteamientos de Máshbits (1997) con respecto a la enseñanza problémica. Como resultado de este trabajo, en la cuarta sección, presentamos una de las primeras secuencias didácticas orientadas a ayudar a los estudiantes a superar las dificultades señaladas.

1. Introducción

En la asignatura de Matemáticas II considerada en los planes y programas de estudio del tronco común en el bachillerato tecnológico, se aborda el tema de las funciones cuadráticas, cuya finalidad consiste en analizar sus propiedades y realizar su representación gráfica, como un apoyo significativo en la formalización del conocimiento matemático. Sin embargo, es posible afirmar que el estudiante tiene un conocimiento *fraccionado* en el que los diversos conceptos, sus representaciones y sus campos de aplicación se encuentran poco conectados; es decir, existe una visión esencialmente *simbólica* del tema y, para él, saber álgebra es conocer y saber utilizar un conjunto de procedimientos que permiten resolver ejercicios de carácter simbólico (resolución de ecuaciones); sin apreciar la "potencia" de la relación cuadrática y de la función cuadrática como medio modelador de la realidad.

En relación con la función cuadrática, existen estudios desde una perspectiva cognitiva como los de Schoenfeld et. al. (1993) y Sierpinska (1992) en donde se establece que el estudiante conoce la fórmula cuadrática y sabe, en general, aplicarla para resolver ecuaciones cuadráticas si el ejercicio en cuestión se encuentra formulado de manera "estándar". El estudiante también conoce algo de la parábola, especialmente desde su representación a partir de los conceptos de foco y directriz aunque no es capaz de conectar los aspectos relevantes de las representaciones simbólicas y gráficas.

Por otra parte, el avance de la tecnología, particularmente en el terreno de la computación, ha hecho posible la incorporación del software de geometría dinámica Cabri Géomètre II a la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos (Laborde & Belleiman, 1994). A la vez, los avances teóricos logrados en el campo de la matemática educativa permiten fundamentar tales acercamientos desde la perspectiva del constructivismo y desarrollar un soporte teórico que dirija la introducción de la tecnología como un verdadero recurso didáctico en el proceso docente.

Al respecto de esta problemática, el presente proyecto de desarrollo para la enseñanza de la función cuadrática pretende realizar acciones tendientes a reformular la enseñanza de las matemáticas mediada por tecnología, a la vez de la imperiosa necesidad de investigar sus efectos e impacto en la comunidad educativa del nivel medio superior de educación tecnológica industrial. Así pues, este trabajo trata de avanzar en esa dirección.

2. Objetivos del proyecto

2.1. Objetivo General

Impulsar la formación y actualización didáctico-metodológica de los docentes de matemáticas respecto al uso didáctico de la computadora, y particularmente del software Cabri-géomètre II, al proceso de enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática.

2.2. Objetivos Específicos

1. Considerar algunas investigaciones previas en matemática educativa que hacen referencia al análisis didáctico de la función cuadrática en la matemática escolar, como herramienta para el diseño curricular de la función cuadrática mediada por computadora.
2. Producir un modelo didáctico que promueva en el alumno nuevas estructuras cognitivas a partir de la utilización adecuada del software Cabri-géomètre II al campo de la enseñanza de la función cuadrática.
3. Generar un conjunto de procedimientos didácticos plasmados en guías didácticas como apoyo para docentes y alumnos cuyo propósito sea estimular la actividad cognitiva del alumno para el aprendizaje de la función cuadrática.
4. Formular conjeturas para futuros trabajos de investigación con respecto a las formas de conocimiento que los estudiantes pueden tener con respecto al impacto del Cabri-géomètre II en la enseñanza de la función cuadrática.

Básicamente, lo que deseamos presentar en este trabajo está especificado en el objetivo específico número tres, ofreciendo en la cuarta sección el diseño una secuencia didáctica con el propósito de dar a conocer en este evento, ante la comunidad de investigadores y profesores de matemáticas, tan sólo una parte de nuestro proyecto.

3. Fundamentación teórica

Los principios que guían la enseñanza de la función cuadrática apoyada en el uso del Cabri II son los del constructivismo. A continuación presentamos los que se tomarán en cuenta de acuerdo con Máshbits (1997) para el diseño de las guías didácticas presentadas en la cuarta sección.

1. ***El conocimiento no se transmite: es construido por el individuo como resultado de su propia actividad***. Desde el punto de vista de la psicología constructivista Glasserfeld (1999) señala que "la transmisión de conocimientos" es un concepto vacío carente de significado. Para Glasserfeld el conocimiento, como ente ideal, no puede ser transmitido de ningún modo: solo pude ser construido por el sujeto cognoscente como resultado de su propia actividad.

2. ***La actividad que propicia el conocimiento es ante todo actividad mental de orden superior***. La actividad del que aprende, y gracias a la cual aprende, es ante todo actividad mental que involucra las funciones psíquicas superiores, y no solamente a sus estratos más elementales como la percepción y la memorización, y de ésta solamente a la memoria mecánica. La memoria interviene en el aprendizaje, pero no como mecanismo fundamental y conductor. Este se desarrolla en planos superiores que comprenden el análisis, la síntesis, la comparación, la abstracción, la deducción, la inducción, el razonamiento lógico, el razonamiento analógico y las heurísticas, entre otros procesos mentales. Este planteamiento de la psicología constructivista nos obliga a introducir como parte del diseño actividades de aprendizaje que tengan como objetivo desencadenar los procesos psíquicos superiores ya señalados, como una condición necesaria para propiciar la construcción del conocimiento por el alumno.

3. ***La actividad mental que coadyuva al aprendizaje es colectiva y dialógica***. La psicología pedagógica, la antropología y la epistemología han establecido que el aprendizaje del ser humano es también social, es decir, que se da no solamente en el plano de lo individual, sino que también transcurre en la interacción del individuo con su entorno social (con sus compañeros de aprendizaje, sobre todo) a través de la comunicación. En el plano de la interiorización, la comunicación también tiene un carácter dialógico: el estudiante “conversa” y “discurre” consigo mismo. Este postulado de la psicología constructivista nos obliga a incluir, como parte del formato del diseño, actividades de carácter grupal donde la comunicación entre los alumnos juegue un papel importante. Sin este tipo de actividad grupal, se estará corriendo el riesgo de limitar las posibilidades de lograr un aprendizaje más sólido, de desarrollar las capacidades de comunicación de los alumnos y frenar su desarrollo intelectual.

4. ***La actividad debe ser adecuada al objeto de aprendizaje***. Cuando se dice que el conocimiento se construye como resultado de la actividad, esto no significa que cualquier tipo de actividad conduzca a un conocimiento, por lo menos en los términos de la enseñanza formal. La actividad del que aprende debe corresponderse con las particularidades de los conocimientos a construir. Los sistemas de representación constituyen uno de los preceptos teóricos que orientan nuestro diseño. Es precisamente este precepto teórico el que guía la introducción sistemática de las múltiples representaciones (Duval, 1995). En este documento Duval menciona que una figura geométrica, un enunciado verbal, una fórmula algebraica, una tabla, son representaciones semióticas, es decir, representaciones construidas por el empleo de signos. Partiendo de esta concepción, asumimos que el papel del profesor consiste en guiar la actividad cognoscitiva del alumno en su interacción con las diferentes representaciones del conocimiento matemático. En otras palabras, se trata de diseñar cuidadosamente las situaciones de aprendizaje que privilegien la interacción de los diferentes sistemas de representación y el involucramiento de recursos tecnológicos adecuados.

   En la enseñanza tradicional, o en la enseñanza no tradicional pero que se realiza sin el apoyo de la tecnología, resulta difícil conjugar de manera productiva dichos ambientes. Actualmente el uso de la computadora apoyada mediante la aplicación de software educativo como el Cabri II brinda grandes posibilidades para hacerlo. De este modo, una de las principales funciones didácticas de la computadora y el software educativo es el permitir la interacción de dichos ambientes.

5. ***El fundamento y el punto de partida para la actividad mental del alumno lo constituye la situación problémica***. Una situación problémica surge cuando el individuo se percata de que entre él y la consecución de un determinado objetivo cognoscitivo existe un cierto obstáculo, una cierta dificultad. Esta imposibilidad temporal para acceder a la consecución del objetivo puede deberse a la falta de conocimientos o habilidades del sujeto, o a la falta de claridad respecto a cómo aplicar sus conocimientos y habilidades en situaciones nuevas. La situación problémica es en sí misma motivante para la actividad cognoscitiva del sujeto, quien se ve impulsado a resolver dicha situación. Por lo tanto, para conducir adecuadamente la actividad cognoscitiva de los estudiantes se hace necesario apelar al planteamiento sistemático de situaciones problémicas durante la clase. Este postulado orienta el diseño hacia la creación de situaciones problémicas cuyo objetivo sea estimular la actividad mental, cognoscitiva, de los alumnos.

6. ***La asimilación del contenido de las matemáticas por parte de los estudiantes resulta posible sólo cuando dicho contenido es presentado ante ellos como un sistema de problemas, en desarrollo e interacción, y cuya solución requiere del dominio de un sistema de acciones y conocimientos***. Este sistema de conocimientos y acciones, el "modo de acción", es precisamente lo que constituye el modelo de la actividad de los estudiantes. Bajo el método de la enseñanza problémica, el profesor plantea ante los estudiantes un sistema de problemas metodológicos prácticos, cognoscitivos y de otra índole, y la actividad de aprendizaje de los estudiantes se reduce a resolver tales problemas. En estas condiciones, la necesidad de resolver un problema base conduce a plantear y resolver varios subproblemas auxiliares. De esta manera se desarrolla todo el proceso, hasta resolver el problema base planteado originalmente. Bajo lo que señalamos anteriormente tomamos como principio orientador *la organización, tanto de la actividad de enseñanza del profesor, alrededor de un sistema de problemas de aprendizaje que conducen a la asimilación del contenido propuesto: la función cuadrática*.

4. Secuencia de las actividades

La secuencia didáctica que se presenta a continuación está diseñada para que el alumno trabaje de manera individual o grupal. La labor del profesor se circunscribe a ser un facilitador y no un transmisor que promueva con ello la construcción autónoma del aprendizaje en el alumno. En la primera parte de esta secuencia, se le facilita al alumno una figura realizada en Cabri (Figura 1) y se le pide responder a varias preguntas. Nótese que en este caso, el círculo está trazado con centro en el punto P, el cual es la intersección de la mediatriz del segmento FM con la perpendicular a la directriz en el punto M. Este círculo, que pasa por los puntos F y M, garantiza que las distancias FP y MP son iguales. Dado que se le pide al alumno mover el punto M, la mediatriz se moverá junto con el punto P, describiendo éste un lugar geométrico. Se le pide al alumno que trate de identificar este lugar geimétrico.

Guía Didáctica No. 2
(Concepto y construcción de una Parábola como lugar geométrico)

<u>I Parte:</u>

Apoyándote en el software Cabri realiza las actividades siguientes para que obtengas tu propia definición de parábola.

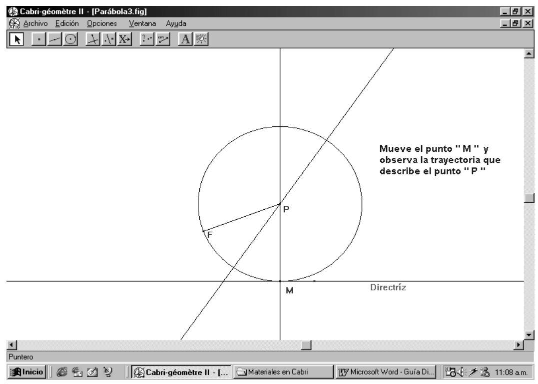

Figura 1

1. Activa el punto "M" (tan sólo haz clic en dicho punto) y examina la trayectoria que describe el punto "P". ¿Qué es lo que observas?
2. ¿Qué figura geométrica se forma? (lo que resulta es un lugar geométrico).
3. ¿Cuáles son las figuras geométricas auxiliares que intervienen en la construcción de la parábola?
4. ¿Qué observas con respecto a los segmentos FP y MP al instante de mover "M" sobre la recta fija llamada directríz?
5. Tomando en consideración las respuestas que diste en las preguntas anteriores, ¿Cómo definirías el concepto de parábola?
6. ¿Podrás elaborar un plan para construir una parábola con este software? Descríbelo.

<u>II Parte:</u> Construcción de una parábola como lugar geométrico en Cabri

<u>Instrucciones:</u> Vamos ahora a construir una parábola en Cabri. Para ello te pedimos que sigas los pasos que se te indican a continuación.

1. Con la opción <<Rectas>>, en el tercer icono de la barra de herramientas, traza una recta que pase por un punto cualquiera. Llama a esa recta *directriz* (usar la opción de texto que puedes encontrar en el icono marcado con la letra "A" de la barra de herramientas) .
2. Con la opción <<Punto>> coloca un punto por arriba de la recta y etiquétalo con la letra "F".
3. Sobre la recta llamada *directriz*, con la opción <<punto sobre objeto>>, en el segundo icono de la barra de herramientas, coloca a la derecha de "F" otro punto y etiquétalo con "M". Sobre "M" traza una perpendicular que pase por dicho punto. Esto lo puedes hacer con la opción <<recta perpendicular>> que aparece en el quinto icono de la barra de herramientas.
4. Traza la mediatriz entre el punto "F" y "M". Este trazo lo puede realizar con la opción <<mediatriz>> en el quinto icono de la barra. Llama "P" al punto determinado por la

mediatriz y la intersección de la recta perpendicular a la directriz. Hasta aquí te deberá resultar un gráfico como el siguiente:

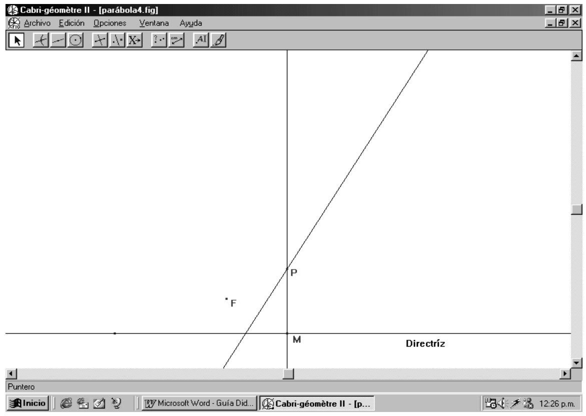

Figura 2

5. Si no haz logrado una figura similar a la que se te presenta en la acción anterior, revisa nuevamente los trazos realizados; encuentra y corrige los errores que cometiste. Si la gráfica que obtuviste es similar a la de la acción 4, continúa con lo siguiente. Recuerda que la recta que pasa por "P" debe ser la mediatriz de los puntos "F" y "M".
6. Traza ahora una circunferencia haciendo centro en "P" y tocando a los puntos "F" y "M". Usa las opciones del cuarto icono.
7. En el noveno icono de la barra de herramientas, con la opción <<Distancia y longitud>>, determina las distancias entre FP y MP. ¿Qué encontraste?
8. Selecciona el punto "P" y usa la opción <<traza activada/desactivada>> en el décimo icono para activar el punto "P".
9. Ahora, mueve el punto "M" hacia la derecha e izquierda. ¿Qué observas?
10. El gráfico resultante deberá ser algo como esto:

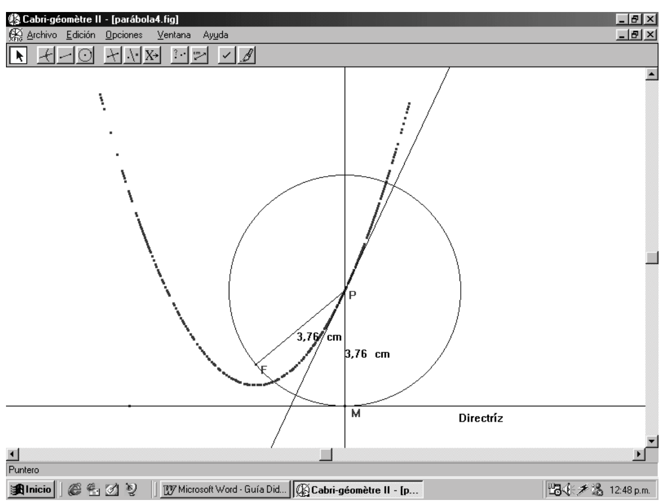

Figura 3

11. En consideración a las acciones anteriores contesta las preguntas siguientes.

i). Mueve repetidamente el punto “M” y examina detenidamente la trayectoria que describe el punto “P” así como la recta que es la mediatríz de los puntos “F” y “M” que pasa precisamente por “P”. ¿Qué logras observar?
ii). ¿Podrás afirmar que la parábola es la unión de puntos colineales? ¿Por qué?
iii). ¿Los parábola se formará mediante la unión de pequeños segmentos de recta?
iv). ¿Cómo definirías ahora el concepto de parábola?
v). ¿Qué procedimiento utilizarías para representar la ecuación de la parábola que obtuviste? ¿Podrás elaborar un plan para encontrarla? Descríbelo.
vi). ¿Cómo te sentiste al trabajar con este recurso tecnológico?

5. Conclusiones

Las actividades descritas están pensadas para que el alumno visualice la propiedad que define a una parábola, en este caso vertical, para que la transición a la parte algebraica le sea más fácil. Las preguntas de la última parte tratan de lograr que el alumno obtenga por sí mismo la expresión algebraica de una parábola. De esta manera, si se introduce el sistema rectangular de coordenadas, que también podemos visualizar con Cabri, entonces se trata que el estudiante trate de obtener la ecuación

$$y = ax^2 + bx + c\,,$$

la cual representa a una parábola vertical cuya directriz es paralela al eje *x*.

De esta manera, creemos que el alumno puede lograr una mejor comprensión de la función cuadrática

$$y(x) = ax^2 + bx + c\,,$$

para números reales *a*, *b*,y *c*, y tendrá más elementos cognitivos que le faciliten su entendimiento.

Por otra parte, aquí concebimos que los medios computacionales conducen a una redefinición de las fronteras entre la acción individual y la acción social. El estudiante, auxiliado de sus instrumentos computacionales, *construye una versión* del conocimiento. El conocimiento y el aprendizaje son, por su naturaleza, *situados*. Es decir, dependen en su construcción y en su interpretación, de la especificidad del contexto en el que surgen. Por lo tanto, para que el estudiante pueda utilizar el conocimiento construido, en otros contextos, hace falta la intervención permanente del profesor quien a través de sus propuestas conduzca al estudiante a una nueva construcción (que se da a un nuevo nivel de abstracción) del esquema cognitivo que subyace a su construcción situada.

Al mediar la enseñanza de la función cuadrática con el Cabri, nos queda claro que es posible el desarrollo de diferentes habilidades cognitivas como la interacción constante de los diferentes sistemas de representación semióticos en el alumno y que están muy alejados de los que se promueven actualmente en nuestras aulas. Sin embargo, esto no será posible si el maestro no se actualiza en el campo de la matemática educativa y en el manejo de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

Bibliografía

[1] Duval, R., (1992). Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En E. Sánchez (Ed.), *Antología en Educación Matemática*, (pp. 125-139). México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
[2] Duval, R. (1998). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
[3] Laborde, J-M. And Bellemain, F. (1994). *Cabrí-Géomètre II* (software), Dallas, Tex.:Texas instrument.
[4] Máshbits Y. I. (1997). *Problemas psicológico-pedagógicos de la conducción de la actividad de aprendizaje*. Editorial Vyscha shkola, Kiev, Ucrania.
[5] Schoenfeld, A.H., Smith, J., Arcavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's understanding of a complex subject matter domain. En Glaser, R. (Ed.). *Advances in instructional psychology*. Mahwah: LEA, pp. 55-175.
[6] Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En Dubinsky, E., Harel, G. (Eds.). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (Notes, Volume 25).*.Washington: Mathematical Association of America, pp. 25-58.
[7] Vergnaud, Gérard. "Sobre el constructivismo". Contenido en: Ontiveros Quiroz, Sofía Josefina (comp.) Antología: *Aspectos Epistemológicos de la educación matemática*. Centro de Investigación en Ciencias Básicas. Universidad Autónoma de Querétaro. México, D.F.
[8] Von Glasserfeld, Ernest. (1999). "El aprendizaje como una Actividad Constructiva". Traducción: Hernández L., Victor Manuel. En: *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Capítulo I. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
[9] Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. 19 (1), pp. 20-44.