

EL CONCEPTO DE FUNCIÓN: UNA MANERA DE EXPLORAR LA CONVERSIÓN DEL REGISTRO GRÁFICO AL ALGEBRAÍCO CON CABRÍ

Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez
Universidad de Sonora

Resumen

Este trabajo tiene como propósito el promover la conversión del registro gráfico al registro algebraico del concepto de función para lo cual se propondrán tareas de variaciones comparativas relativas a ambos registros, tomando como ejemplo una función sinusoidal y poniendo en juego representaciones dinámicas construidas con el paquete de geometría dinámica Cabrí Géomètre II.

Al considerar el registro gráfico como el registro de partida, se promoverá el uso por los estudiantes de tratamientos propios de este registro. En particular, se considerará la operación de reconfiguración y se favorecerá no sólo una aprehensión perceptiva de las gráficas de las funciones, sino también una aprehensión operatoria y conceptual. Del mismo modo, se privilegiará la actividad del estudiante como medio para promover su aprendizaje.

Finalmente, se presentan las instrucciones que permiten construir los archivos utilizados. Los archivos están diseñados de tal manera que pueden ser manipulados directamente por los estudiantes, aunque éstos no cuenten con experiencia en el manejo del software.

1.Introducción

Las investigaciones recientes sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas han puesto en primer plano la formulación de propuestas de enseñanza que incorporen de manera sistemática el uso de diversas representaciones al estudiar un objeto matemático. Sin embargo, estas propuestas no han hecho suficiente énfasis en la operación de pasar de una representación a otra.

En el marco de la teoría de R. Duval (1998) sobre registros de representación semiótica, esta operación, llamada *conversión* cuando involucra un cambio de registro, es considerada como una actividad cognitiva necesaria para lograr una aprehensión conceptual de los objetos matemáticos.

Sin embargo, cuando la enseñanza ha considerado la conversión como una actividad importante, generalmente se ha privilegiado la conversión del registro algebraico al gráfico, limitando el *tratamiento* en el registro gráfico a una aprehensión perceptiva. Duval define como *tratamiento* la operación de transformar una representación en otra dentro del mismo registro. El aprendizaje de los tratamientos específicos de un registro de representación se propone, usualmente, sólo para los registros donde los tratamientos son de tipo cálculo, pero rara vez se proponen para el registro gráfico, donde los tratamientos son de otra naturaleza.

Este trabajo tiene como propósito el promover la conversión del registro gráfico al algebraico de una función, así como, favorecer el uso de tratamientos propios de un registro gráfico, centrado en la aprehensión operatoria de las gráficas de las funciones.

Esta propuesta de enseñanza utiliza representaciones dinámicas directamente manipulables, logradas mediante el software de geometría inactiva *Cabri-géomètre II*.

2.La conversión como una actividad cognitiva

En una fase de aprendizaje, el conocer varios registros de representación semiótica para un mismo concepto matemático es fundamental para no confundir el objeto matemático con sus representaciones. La existencia de varios registros permite hacer cambio entre ellos, y este cambio tiene como uno de sus objetivos permitir efectuar tratamientos de una manera más económica y potente. Además, toda representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que ella representa, y de un registro a otro, no son los mismos aspectos del contenido de una situación los que se representan. El poder coordinar varios registros de un mismo concepto matemático exige el poder pasar de un registro a otro. Es así como la conversión juega un papel esencial en la aprehensión de un concepto matemático. Duval define la conversión de una representación como una actividad cognitiva que consiste en “la transformación de esta representación a una representación en otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial” (Duval, 1998).

Para favorecer la conversión, se deben presentar tareas específicas. Duval hace una categorización de tareas y entre ellas, concernientes a la aprehensión de las representaciones semióticas, propone tareas de variaciones comparativas relativas a la significancia de las representaciones. “La aprehensión de las representaciones semióticas supone la discriminación de las unidades significantes en el registro mismo donde la representación se produce. El único medio para llegar a discriminar

las unidades significantes de una representación es el de hacer que se realice la observación, por una parte, de las variaciones de representación efectuadas sistemáticamente en un registro y, por otro lado, de las variaciones concomitantes de representación en otro registro” (Duval, 1998).

Al proponer la conversión del registro gráfico al algebraico, se pretende que los diversos componentes de la gráfica de una función se combinen de tal modo que puedan ser tomados simultáneamente como un todo, favoreciendo así, lo que Ana Sfard (1991) llama una concepción estructural.

3. El diseño de actividades para explorar la conversión del registro algebraico al gráfico

Una manera de favorecer la conversión del registro algebraico al gráfico de una función, es la de proponer tareas en las que se hagan variar sistemáticamente las unidades significantes de la representación del registro algebraico (registro de partida), y observar e identificar las variaciones producidas en la representación del registro gráfico (registro de llegada). Tales tareas de variación comparativa pueden hacerse de manera efectiva a través del uso de paquetes computacionales como *Cabré*.

Mostraremos un ejemplo: tomando como base la función $f(x) = \text{sen } x$, se presentará al alumno un archivo de Cabré con la representación dinámica, gráfica y algebraica, de la función $f(x) = a \text{sen}(d(x - c)) + b$ (Figura 1). En este archivo, los estudiantes tendrán el control sobre los valores de los parámetros a , b , c , d mediante el uso del editor numérico; la gráfica de la función cambiará dinámicamente al variar los valores de los parámetros. Las instrucciones completas para la construcción de este archivo, pueden verse en el Apéndice 1.

Es así como el estudiante identificará en cada representación del registro algebraico, las unidades significantes correspondientes; en este caso, los parámetros. Se propondrá a los estudiantes hacer variaciones sistemáticas de los parámetros a través de valores positivos, negativos, o cero y, al observar y describir las variaciones producidas en la gráfica de la función, se buscará que el alumno discrimine las unidades significantes de la representación del registro gráfico, es decir, se buscará que identifique las variables visuales.

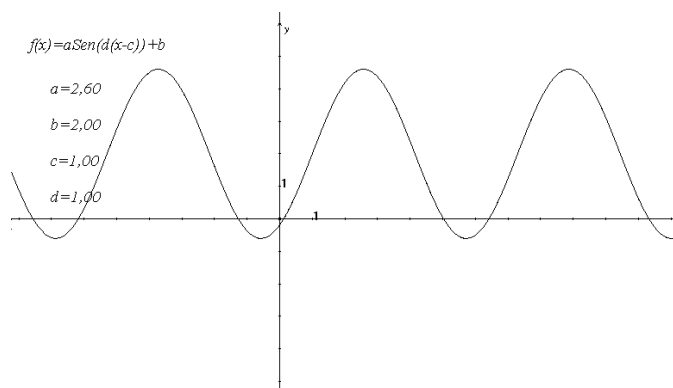


Figura 1

4. El diseño de actividades para explorar la conversión del registro gráfico al registro algebraico

A través de nuestra práctica docente podemos constatar que los estudiantes experimentan mayores dificultades al pasar del registro gráfico al algebraico. Duval (1998) afirma que “esta conversión exige que se discriminen bien las unidades significantes de cada registro, es decir, es necesario identificar bien en el registro gráfico las variables visuales pertinentes con sus diferentes valores y, en la escritura algebraica de una relación, las diferentes oposiciones paradigmáticas que dan significación, y no solamente un objeto, a los símbolos utilizados” .

En general, cuando la enseñanza ha considerado la conversión como una actividad importante, generalmente se ha privilegiado la conversión del registro algebraico al gráfico, limitando el tratamiento en el registro gráfico a una comprensión perceptiva.

En esta sección consideraremos el paso de la representación gráfica de una función a la representación algebraica, por lo que se utilizarán tratamientos propios de un registro gráfico. Se promoverá una comprensión no sólo perceptiva sino operatoria de las gráficas de las funciones al considerar la operación de reconfiguración (dilataciones, contracciones, reflexiones, traslaciones, etc.) en ese registro. Se hará uso del software *Cabri-géomètre II*, que nos permitirá lograr representaciones gráficas dinámicas directamente manipulables.

Tanto para poder proponer tareas de variación sistemática comparativa como para la construcción de los archivos, es necesario, previamente, identificar en el registro gráfico todos los factores que pueden ser sujetos de reconfiguración. Se propondrá a

los estudiantes variar sistemáticamente esta representación a través de puntos estratégicamente colocados sobre la gráfica, mediante lo cual se identificarán las variables visuales asociadas. Al efectuar la variación, se cambia el contenido representado: el observar en el registro de llegada (el algebraico, en este caso) la representación modificada, permite identificar las variaciones de las unidades significantes en cada registro de representación.

La Figura 2 muestra las representaciones gráfica y algebraica logradas con Cabri de la función $f(x) = a \operatorname{Sen}(d(x-c)) + b$. En este archivo, las representaciones son dinámicas y se distinguen de las mostradas en la Figura 1, por el hecho de que la manipulación se hará directamente sobre la gráfica, concretamente arrastrando los puntos **O**, **P**, **Q**, cada uno de los cuales tiene una función específica. La variación de los parámetros será un resultado de la manipulación gráfica, es decir, éstos no serán directamente manipulables. Los detalles para la elaboración de este archivo, pueden verse en el Apéndice 2.

Como mencionamos antes, los puntos **O**, **P**, **Q**, tienen, cada uno, una función específica: el punto **O** permitirá trasladar la gráfica; el punto **P** permitirá cambiar la amplitud o rango de la función; el punto **Q** permitirá cambiar su período. Las actividades propuestas a los estudiantes consistirán en manipular la gráfica a través de estos puntos, observar y describir los cambios experimentados por la gráfica y, finalmente, relacionar estas variaciones en el registro gráfico con las variaciones resultantes en el registro algebraico, concretamente, con los parámetros de la expresión.

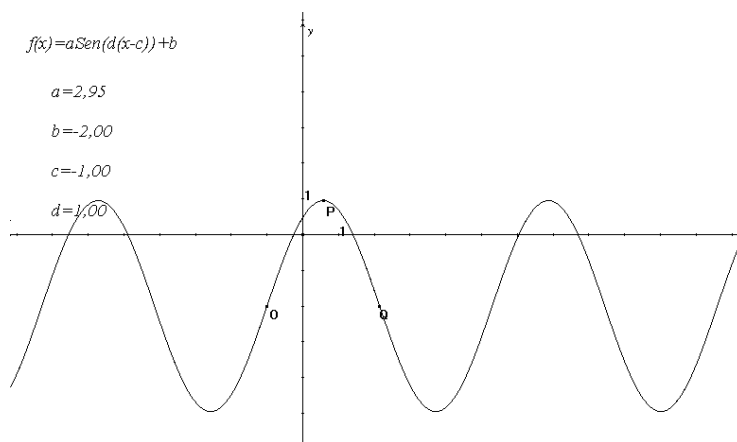


Figura 2

Apéndice 1

Se detallan aquí las instrucciones para construir la gráfica de una función de la forma $f(x) = a \operatorname{sen}(d(x - c)) + b$ en un archivo de Cabrí, la cual será manipulable a través de los parámetros a , b , c , y d (ver Figura 3). Estas instrucciones pueden también ser utilizadas para graficar cualquier otra función que aparezca en la herramienta “Calcular”.

1. Abra el paquete *Cabré*.
2. Utilice la herramienta “Mostrar ejes” para activar los ejes cartesianos en pantalla y defina su cuadrícula mediante la herramienta “Definir cuadrícula”.
3. Trace un punto Q sobre la unidad del eje y (punto sobre la parrilla).
4. Construya un segmento AB sobre el eje x .
5. Trace un punto P sobre el segmento AB y determine sus coordenadas con la herramienta “Ecuación y coordenadas”.
6. Construya una recta por P perpendicular al eje x .
7. Construya una recta por Q perpendicular al eje y .
8. Trace un punto R sobre la intersección de estas dos rectas.
9. Utilice el editor numérico para insertar cuatro números 1, 2, 3, 4 y etiquételos como a , b , c , d , respectivamente, utilizando la herramienta “Comentarios”.
10. Utilice la herramienta “Calcular” para evaluar la función $f(x) = a \operatorname{sen}(d(x - c)) + b$ en la abscisa del punto P y arrastre el resultado a la pantalla.
11. Utilice la herramienta “Homotecia” para construir el punto T , homotético del punto R con respecto al punto P utilizando como factor el resultado obtenido en el paso anterior.
12. Utilice “Preferencias” del menú “Opciones” para asignar 1500 puntos o más a los lugares geométricos.
13. Utilice la herramienta “Lugar geométrico” para determinar el lugar geométrico del punto T con respecto al punto P .
14. “Arrastre” los puntos A y B , hasta que ya no sean visibles en pantalla, para que la gráfica deje la impresión de que ha sido trazada sobre todo el eje de las abscisas.
15. Utilice la herramienta “Ocultar/ Mostrar” para ocultar las rectas, puntos, parrilla, coordenadas, etc. utilizados en la construcción.
16. Utilice la herramienta “Comentarios” para escribir la expresión $f(x) = a \operatorname{sen}(d(x - c)) + b$.

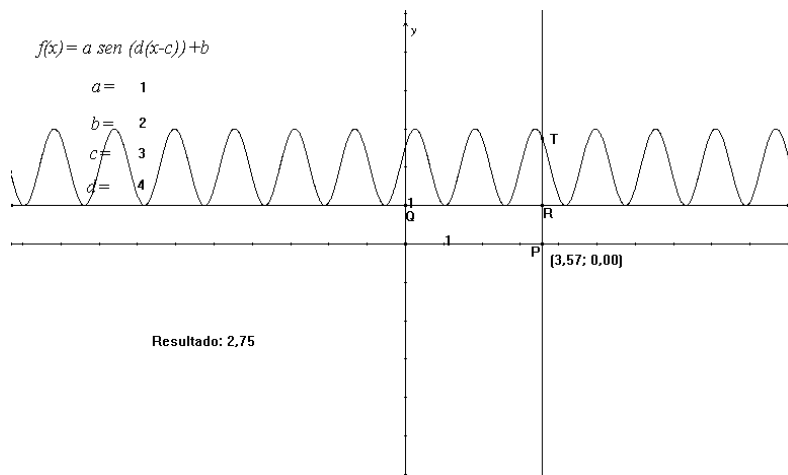


Figura 3

Apéndice 2

Se detallan en este apéndice, las instrucciones para construir la gráfica de una función de la forma $f(x) = a \operatorname{sen}(d(x-c)) + b$ en un archivo de *Cabrí*, la cual será manipulable a través de los puntos **O**, **P**, **Q** (ver Figura 4). Cabe mencionar que los detalles de la construcción aplican a funciones más generales, pero deben identificarse las unidades significantes en la gráfica relacionadas a los parámetros de la expresión algebraica.

1. Abra el paquete de *Cabrí*.
2. Utilice la herramienta “Mostrar ejes” para activar los ejes cartesianos en pantalla.
3. Trace un punto arbitrario **O**.
4. Construya una recta por **O** perpendicular al eje x .
5. Construya una recta por **O** perpendicular al eje y .
6. Trace dos puntos **Q** y **X** sobre la recta del punto anterior.
7. Construya la mediatriz del segmento **OQ** utilizando la herramienta “Mediatriz”.
8. Trace un punto **P** sobre la mediatriz del punto anterior.
9. Determine las coordenadas de los puntos **O**, **P**, **Q**, **X**, con la herramienta “Ecuación y coordenadas”.
10. Utilice la herramienta “Calcular” para restar la ordenada del punto **O** de la ordenada del punto **P**, arrastre el resultado a la pantalla e identifíquelo como *resultado1*.

11. Con la herramienta “Calcular”, calcule $\pi/(\text{abscisa del punto } Q - \text{abscisa del punto } O)$, arrastre el resultado a la pantalla e identifíquelo como *resultado 2*.
12. Con la herramienta “Calcular”, calcule $\text{resultado1} * \text{sen}(\text{resultado2} * (\text{abscisa del punto } X - \text{abscisa del punto } O))$, arrastre el resultado a la pantalla e identifíquelo como *resultado3*.
13. Construya dos puntos sobre la parrilla a una distancia de una unidad. Utilice el “Compás” con esa unidad como radio y centro, el punto X .
14. Construya por X , una recta perpendicular al eje x y trace H , el punto de intersección de la circunferencia con esta recta cuya ordenada es mayor que la del punto X .
15. Utilice la herramienta “Homotecia” para construir el punto T , homotético del punto H con respecto al punto X utilizando como factor el resultado3.
16. Utilice “Preferencias” del menú “Opciones” para asignar 1500 puntos o más a los lugares geométricos.
17. Utilice la herramienta “Lugar geométrico” para determinar el lugar geométrico del punto T con respecto al punto X .
18. Utilice la herramienta “Comentarios” para escribir la expresión $f(x) = a \text{sen}(d(x - c)) + b$.
19. Utilice la herramienta “Comentarios” para escribir la expresión $a = \text{resultado1}$ (en la Figura 4, $a=3.55$).
20. Utilice la herramienta “Comentarios” para escribir la expresión $b = \text{ordenada del punto } O$.
21. Utilice la herramienta “Comentarios” para escribir la expresión $c = \text{abscisa del punto } O$.
22. Utilice la herramienta “Comentarios” para escribir la expresión $d = \text{resultado2}$.
23. Utilice la herramienta “Ocultar/Mostrar” para ocultar las rectas, punto X , parrilla, coordenadas, etc. utilizados en la construcción, de modo que sólo sean visibles los puntos O , P , Q , el lugar geométrico y la representación algebraica.

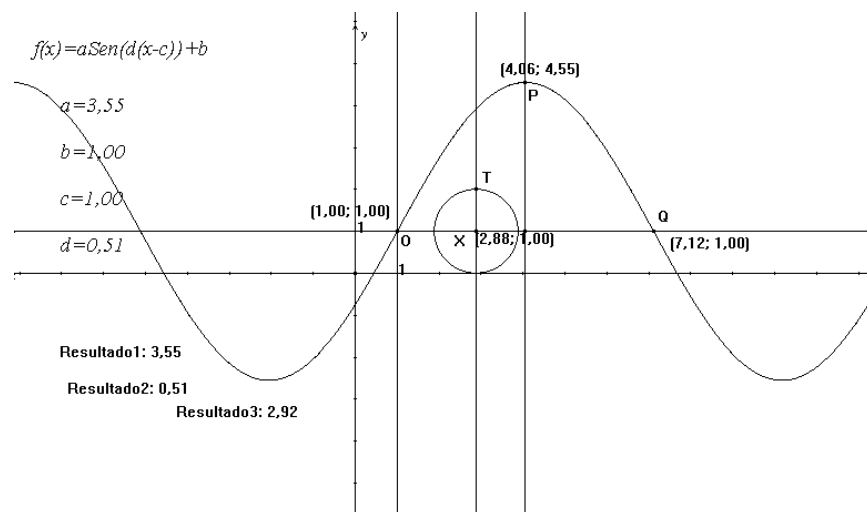


Figura 4

Referencias

- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica: México.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 1-36.
- Laborde, J.-M. and Bellemain, F. (1994). *Cabri-Géomètre II* (software), Dallas, Tex.: Texas Instruments.