UNA ALTERNATIVA GRÁFICA PARA LA RESOLUCIÓN DE DESIGUALDADES

M.C. Maximiliano de las Fuentes Lara
M.C. Carlos Valdez González
Universidad Autónoma de Baja California

Resumen

Con base a la necesidad manifiesta por diversos teóricos (Duval, Vinner, entre otros) respecto del uso y conexión de distintas representaciones o contextos, aunado a la trascendencia que el pensamiento visual tiene para lograr el acceso y utilización de los conceptos matemáticos, y considerando que la mayoría de los autores de los libros de texto abordan de manera algorítmica los temas de precálculo, en particular las desigualdades, creemos pertinente proponer una estrategia didáctica que incorpora las representaciones gráficas en la resolución de desigualdades. De manera paralela se han establecido tanto las consideraciones matemáticas como las competencias necesarias de los estudiantes para tal efecto.

1 Introducción

Las letras que aquí se escriben forman parte de la reflexión en torno a la enseñanza de las matemáticas y al desempeño que los estudiantes tienen en el proceso de resolución de situaciones problemáticas como parte de su *formación básica como ingeniero*[1]. Particularmente nos referiremos al campo de las matemáticas en el nivel de Educación Superior.

---

[1] La formación del ingeniero implica actividades como la elaboración de proyectos y diseños de estructuras, máquinas, circuitos eléctricos, sustancias químicas, entre otras; de tal forma debe contar con aptitudes particulares como la capacidad de análisis, interpretación, imaginación, creatividad y modelación de fenómenos, por mencionar algunas. Estos diseños y proyectos son la respuesta segura, funcional y económica a problemas de orden técnico - social.
Las actividades en ingeniería de diseño, proyecto e investigación, no sólo requieren de una buena manipulación algebraica, de la determinación de modelos o representaciones algebraicas con las que se pueda estudiar o analizar el proceso físico, químico o fenómeno de que se trate, sino también de una aprehensión conceptual del objeto matemático en cuestión con el cual sea posible además de operar o trabajar en las distintas representaciones, facultar el estudio y tratamiento de aspectos especializados en nuevas situaciones.

En este sentido consideramos que tal desempeño es producto de un proceso sumamente complejo, en el cual forman parte el profesor, el alumno y el saber en juego y desde luego un conjunto de variables implícitas de carácter social, administrativo, cultural, entre otras, las que difícilmente se pueden controlar totalmente. Así pues la responsabilidad no es únicamente del profesor o del alumno, se trata de una responsabilidad compartida en la que sin lugar a duda el profesor debe planear, coordinar y dirigir un conjunto de actividades tendientes a la generación de la actividad intelectual del estudiante, partícipe ésta del proceso de aprendizaje.

Los alumnos "aprenden" a resolver sistemas de ecuaciones con distintos métodos, derivan e integran funciones con carácter algebraico, resuelven ecuaciones algebraicas o trascendentes, en ocasiones lo hacen con versatilidad y soltura, a veces se apoyan de la calculadora o la computadora para acelerar los procesos de resolución, pero cuando se trata de resolver un problema en donde haya que determinar el patrón o modelo algebraico que permita describir y analizar el comportamiento del proceso o fenómeno y proseguir hacia la solución del problema, manifiestan dificultades para tal ejecución.

Una vez que se ha resuelto parcialmente el problema, al menos en términos algorítmicos, queda pendiente la interpretación de resultados, en la cual también presentan serias dificultades.

Esta situación se suma al hecho del predominio del cuadro algebraico en el desenvolvimiento del estudiante dentro de sus actividades escolares; otros cuadros como el gráfico, el numérico e el incluso verbal son subutilizados. En este sentido, los intentos de resolución de problemas por parte del estudiante generalmente se basan en técnicas meramente algebraicas, propias de la enseñanza tradicional.

Así pues, los esfuerzos que realizamos y los que nuestros estudiantes hacen no repercuten alentadoramente en los resultados que se esperan respecto al aprendizaje de la disciplina. Manifestaciones en torno a tal situación son los altos índices de reprobación, las serias dificultades de los estudiantes para enfrentar y resolver por si solos situaciones problemáticas, más específicamente hacemos alusión a las deficiencias para efectuar manipulaciones algebraicas, así como para la atinada aplicación de los conceptos en la resolución de situaciones problemáticas, la deficiencia para asociar los conceptos con su funcionalidad en diferentes contextos y la aplicación correspondiente de los conceptos matemáticos a los problemas de ingeniería.

En esta misma dirección, el estudiante regularmente no reconoce el momento en el cual se puede o debe aplicar algún concepto matemático, modelo o método de resolución.

Este es uno de los problemas detectados en la enseñanza de las matemáticas, denominado disociación algoritmia – conceptualización en el cual nos referimos a las dificultades que manifiestan los estudiantes para conectar de manera adecuada los conceptos matemáticos y los algoritmos o procedimientos asociados a los mismos en la resolución de determinados problemas

Obviamente en esta situación es discutible en cuanto a forma, permanencia y aplicación de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes y aquello que justifica o argumenta el hecho de decir cuando un estudiante ha logrado conceptualizar tal o cual objeto matemático, o bien decir que sabe tal o cual cosa. Un concepto matemático aprehendido por el estudiante en forma memorística o mecánica carece de sentido y su permanencia depende de su “buena o mala memoria”.

Consideramos que el estudiante al que se le proporciona la oportunidad de interactuar con el objeto de estudio en su doble status, herramental y objetal[2] y en los diferentes contextos —gráfico, algebraico y numérico— puede entonces comprender las manipulaciones algebraicas que se derivan de los procesos de resolución de las situaciones problemáticas.

2 Desarrollo de la propuesta

En esta ocasión nos abocaremos al tema denominado desigualdades (lineales, cuadráticas, de valor absoluto y racionales), el cual es ubicado y tratado en las primeras unidades del curso de cálculo diferencial e integral de la licenciatura en ingeniería.

Iniciaremos esta reflexión intentando obtener el resultado de las desigualdades planteadas desde tres diferentes contextos, a saber: numérico, analítico y gráfico, considerando que no se es tan radical en el uso exclusivo de alguno de los contextos.

Para la siguiente desigualdad: $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

[2] El sentido de los términos utilizados –herramental y objetal- tiene la misma intención con que Régine Douady los plasma en su Teoría de la Dialéctica Herramienta – Objeto. El término herramental se refiere a la utilización de los conceptos para la resolución de situaciones problemáticas, y el término objetal es referido a la sistematización de los conocimientos, su organización y la forma en que estos se relacionan.

*Veamos el procedimiento en el contexto numérico, previa factorización:

$(x - 3)(x + 1) \geq 0$. Para $x = 3$ y $x = -1$ tanto el miembro izquierdo como el derecho de la inecuación son cero, esto invita a la consideración de los siguientes tres intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, -3)$ y $(3, \infty)$.

Probemos el primer intervalo con $x = -2$ tenemos $(-5)(-1)=5$ luego $5 \geq 0$ efectivamente, una parte del conjunto solución lo es el intervalo $(-\infty, -1)$. Probemos el segundo intervalo con $x = 0$ tenemos $(-3)(1)= -3$ luego no es cierto que $-3 \geq 0$. Finalmente verifiquemos el último intervalo, para $x = 6$ tenemos $(3)(7) = 21$, luego, es cierto que $21 \geq 0$. Finalmente podemos expresar la solución como: $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

*Ahora analicemos el proceso de solución en el contexto algebraico en los siguientes dos casos.

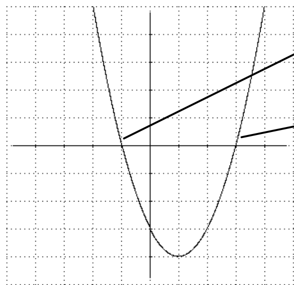
Primer caso: $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ factorizando tenemos $(x - 3)(x + 1) \geq 0$ para que el producto sea mayor o igual que cero, puede ocurrir siempre que $x - 3 \geq 0$ y $x + 1 \geq 0$, resolviendo obtenemos $x \geq 3$ y $x \geq -1$, cuya solución parcial es $x \geq 3$. El producto también puede ser mayor o igual que cero si se cumple que $x -3 \leq 0$ y $x +1 \leq 0$, resolviendo obtenemos $x \leq 3$ y $x \leq -1$, cuya solución parcial es $x \leq -1$. Finalmente podemos escribir la solución como $x \leq -1$ o $x \geq 3$, o bien $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

Segundo caso: $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, completando el cuadrado $(x - 1)^2 \geq 4$, resolviendo y utilizando las reglas algebraicas obtenemos $x \geq 3$ ó $x \leq -1$, o bien, $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$.

*Veamos ahora el contexto gráfico

En este contexto asumiremos que los miembros tanto derecho como izquierdo de la inecuación pueden ser considerados como funciones de x. Distingamos la primer modalidad, en la cual contemplamos competencias por parte del estudiante en la graficación de funciones del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in R$.

Para $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, considerando en el miembro izquierdo $y = x^2 - 2x - 3$, esta ecuación corresponde a la de una parábola, cóncava hacia arriba y cuyo vértice se localiza en el punto $(1, -4)$. Esto permite elaborar un bosquejo como el siguiente:

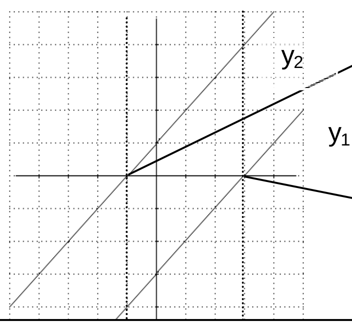


Intersección con el eje x en x = -1

Intersección con el eje x en x = 3

En el bosquejo es visible que a partir de x = -1 hacia el infinito negativo el gráfico esta por arriba del eje horizontal. También a partir de x = 3 hacia el infinito positivo el gráfico esta por arriba del eje horizontal. Tales intervalos ciertamente forman parte del conjunto solución que buscamos.

En una segunda modalidad podemos trabajar con la inecuación factorizada, es decir, $(x-3)(x + 1) \geq 0$, tomemos $y_1 = (x - 3)$ y $y_2 = (x + 1)$, aquí asumiremos que el estudiante tiene competencias geométricas para las funciones del tipo f (x) = ax + b, lo cual permite elaborar un bosquejo como el siguiente:

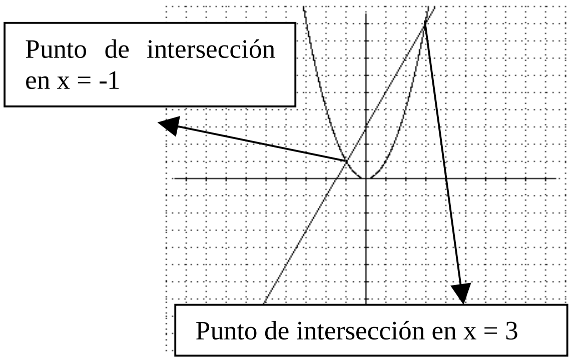


A partir de este punto (x = -1) de intersección a la izquierda (hacia el infinito negativo) los signos de las "rectas" (factores) son negativos, lo cual hace que el producto sea mayor o igual que cero, intervalo que forma parte del conjunto solución.

A partir de este punto (x = 3) de intersección a la derecha (hacia el infinito positivo) los signos de las "rectas" son positivos, lo cual hace que el producto sea mayor o igual que cero, intervalo que forma parte del conjunto.

Entre x = -1 y x = 3 los signos de las "rectas" son opuestos, lo que hace que el producto sea menor que cero, este intervalo (-1, 3) consecuentemente no forma parte del conjunto solución.

En una tercera modalidad la desigualdad $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ puede escribirse como: $x^2 \geq 2x + 3$, aquí consideraremos a $y_1=x^2$ y $y_2=2x + 3$, un par de bosquejos de las gráficas respectivas se exhiben a continuación.

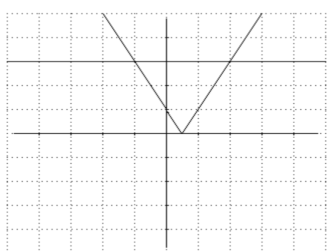


Puede observarse dos puntos de intersección entre las gráficas, en x = -1 y en x = 3, los cuales marcan los intervalos posibles de solución, en particular en el intervalo de (-∞, -1] la parábola esta por arriba que la recta, lo cual significa que este intervalo forma parte de la solución, en el intervalo de (-1, 3) la recta esta por arriba que la parábola, por lo cual este intervalo no forma parte de la solución. Finalmente en el intervalo [3, ∞), la parábola esta por arriba de la recta, este intervalo también forma parte de la solución.

Consideremos otro ejemplo, la desigualdad $|2x - 1| > 3$

*Revisemos el ejemplo sólo en el contexto gráfico.

Se aclara que asumiremos competencias por parte del estudiante en la graficación de funciones del tipo $f(x) = |ax - c| + b$, donde a, b, c $\in$ R. El vértice del gráfico se obtiene resolviendo $2x - 1 = 0$, luego $x = ½$, la pendiente de las rectas que conforma el gráfico de valor absoluto son a=2 y a=-2, con lo anterior obtenemos el siguiente bosquejo.



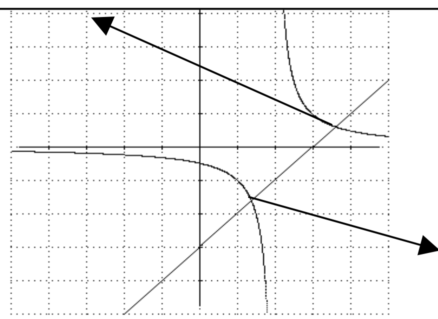
Puede verse que el gráfico correspondiente al valor absoluto esta por arriba que la recta horizontal en los intervalos de (-∞, -1) y (2, ∞). Para determinar los puntos extremos de los subconjuntos, que son respectivamente los puntos de intersección obtenidos por la resolución de las siguientes ecuaciones:

$2x - 1 = 3$ y $1 - 2x = 3$ por lo que: $x = 2$ y $x = -1$

Como último ejemplo consideremos la desigualdad racional $\dfrac{1}{x-2} > x - 3$.

De igual manera asumimos competencias por parte del estudiante en la graficación de funciones de la forma $f(x) = \frac{k}{x-c} + b$, donde $k, b, c \in R$. Optemos por $y_1 = \frac{1}{x-2}$ y $y_2 = x - 3$, aquí el gráfico de y_1 tiene patrón de comportamiento del tipo $y = \frac{1}{x}$, salvo que y_1 esta desplazado de manera horizontal y a la derecha en dos unidades, mientras que y_2 es una recta con pendiente $m = 1$ y ordenada al origen –3. Con lo anterior podemos obtener los siguientes bosquejos.

Punto de intersección de las gráficas, denominado x_2



La búsqueda de la solución de la desigualdad propuesta, puede interpretarse en términos gráficos, de la siguiente manera: nos interesa los intervalos en donde la gráfica de la función racional (así asumida con anterioridad) esta por arriba de la recta inclinada, esto ocurre en los intervalos que mencionamos a continuación, $(-\infty, x_1) \cup (2, x_2)$.

Punto de intersección de las gráficas, denominado x_1

Encontrando x_1 y x_2. Tenemos que resolver la ecuación: $\frac{1}{x-2} = x - 3$, luego $x^2 - 5x + 5 = 0$, completando el cuadrado obtenemos: $(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{5}{4} = 0$, finalmente $x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, por lo que $x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$. Concluimos que el conjunto solución es: $(-\infty, \frac{5-\sqrt{5}}{2}) \cup (2, \frac{5+\sqrt{5}}{2})$.

3 Conclusiones

Puede notarse que la resolución de desigualdades bajo la idea de representaciones gráficas mas que por procedimientos algorítmicos solamente, es basado en buena parte en la eficiencia que se espera que los estudiantes tengan en lo referente a las competencias gráficas, esto hace que la visualización geométrica tenga un peso específicamente alto en la etapa de resolución de desigualdades, de igual forma, lo es el procedimiento algebraico para encontrar los puntos de intersección, asociado obviamente a las notaciones de conjuntos, sean corchetes o paréntesis, si el punto extremo se incluye o no en el conjunto solución. Con esta idea de abordar la resolución de desigualdades se intensifica el trabajo con representaciones gráficas, teniendo la oportunidad para asociar procedimientos algebraicos con otro sistema de representación.

Los trabajos de Vinner (1989), Eisenber y Dreyfus (1990) señalan respecto de las resistencias por parte de los estudiantes al uso de consideraciones visuales. Ellos apuntan que hay predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual, y que una de las causas posibles es que pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente, además, de que los profesores de matemáticas promueven el pensamiento algorítmico sobre el visual. Hemos observado que en el tránsito de un contexto a otro, se promueve la adquisición del significado de todos y cada uno de los elementos resultantes. La memoria entendida como sistema de almacenamiento de datos o información no tiene cabida en estos procesos de manera sustantiva.

Nosotros creemos que si damos al estudiante la oportunidad de asociar el objeto matemático a un contexto gráfico como el descrito en cada uno de los ejemplos, éste puede enriquecer su concepto a través de la adquisición de sentido al desarrollo algebraico y significado del objeto matemático en juego, por la visión alterna en otro contexto. En este proceso de visualización en mas de un contexto se rescatan ideas intuitivas, figuras representativas que le dan vida al objeto matemático.

Investigaciones recientes respecto a la consideración de la asociación y/o articulaciones de contextos, concluyen que los estudiantes adquieren significados del concepto de raíz real (Proyecto de tesis de grado, De Las Fuentes L. Maximiliano) en los distintos contextos, además de significados propios a cada uno de los problemas a través de las relaciones que establecían entre la información de los mismos y su disposición en los distintos marcos.

La distinción entre un objeto y su representación es, pues, un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas[3].

[3] Duval Raymond. Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.

En razón de lo anterior, es oportuno reflexionar respecto a la forma en que nosotros los profesores de matemáticas abordamos los objetos matemáticos como parte del proceso de enseñanza en el aula, pues hacerlo solamente a través de la asociación única entre el concepto y el contexto algebraico puede ocultar o negar en muchas ocasiones al estudiante la posibilidad de una comprensión auténtica del objeto matemático en juego. Otros temas de matemáticas en particular del álgebra elemental como son los productos notables o factorizaciones también pueden basarse en un contexto gráfico y numérico, sin omitir el algebraico, dando oportunidad al estudiante de acercarse al objeto matemático desde diferentes ópticas, permitiéndole la aprehensión de un concepto rico en significados.

Bibliografía

Artigue Michéle, Douady Régine, Moreno Luis, Gómez Pedro (editor). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Grupo editorial Iberoamérica. 1995.

De Las Fuentes Lara Maximiliano, *Una propuesta para la construcción del concepto de raíz real empleando la dialéctica herramienta – objeto y el juego de marcos. El caso de las funciones lineales y cuadráticas.* Tesis de Grado. Noviembre de 1998.

Duval Raymond. *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.*

Hitt Espinoza Fernando. *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum*. En imprenta 1997.

Valdez González Carlos, *Los manipuladores simbólico, gráfico y tabular en el aprendizaje del álgebra, estudio piloto en torno a la función cuadrática.* Tesis de Grado. Diciembre de 1999.

Zill Dennis G. / Dewar Jacqueline M., *Álgebra y trigonometría,* segunda edición. Editorial Mc Graw Hill. 1992.