ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1$^{er.}$ ORDEN
UNA PERSPECTIVA DIDÁCTICA CON GEOMETRÍA DINÁMICA

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres[1]
Eugenio Díaz Barriga Arceo[2]
Departamento de Matemática Educativa Cinvestav-IPN

Resumen

En este documento presentamos un bosquejo de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden. Este reporte ilustra las dificultades que se pueden presentar cuando se busca la coordinación de los registros de representación gráfico, numérico y algebraico en una situación tradicional de enseñanza (Hernández, 1999). En el marco de esta problemática se diseñaron actividades de exploración en un ambiente de geometría dinámica: Cabri-Géomètre. Se ve como aquí el énfasis radica en la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales y las familias de soluciones a través de una percepción cinestésica.

1 Introducción

La enseñanza de las ecuaciones diferenciales de primer orden en los cursos tradicionales frecuentemente está dedicada a la resolución algebraica (Hernández, 1999). Al dejar de lado la interpretación geométrica la conceptualización de las Ecuaciones Diferenciales es parcializada. Esto se observa en el hecho de que los estudiantes no pueden resolver problemas que involucren simultáneamente distintos registros de representación.

Entre las actividades que pueden ser propuestas dentro de la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales deben ser destacadas las de visualización, ya que enfrentan al estudiante a dar consistencia a los resultados que obtenga. Algunos autores (Hitt y Sandoval, 2001) señalan que la visualización matemática esta relacionada con una visión global, integradora, holística que articule libre de contradicciones diferentes representaciones.

[1] ivopam@hotmail.com
[2] eugeniux@hotmail.com

Ciertamente una alternativa didáctica muy extensa en este tema se encuentra en Hernández (1999), proporcionando un juego de marcos para solución a las ecuaciones diferenciales (numérico, gráfico y algebraico); específicamente donde se trabaja la parte gráfica con DERIVE. Debemos recalcar que este paquete no permite una manipulación directa de los entes geométricos de la pantalla de visualización. Siendo esta razón la que nos ha impulsado a diseñar actividades con geometría dinámica.

Deseamos conocer con más detalle cuál es el efecto de las actividades propuestas en la coordinación de los diferentes registros de representación al solucionar ecuaciones diferenciales de primer orden.

2 Marco teórico

En una situación de aprendizaje, las representaciones forman parte de los elementos que se van estructurando en la interacción entre el sujeto y el objeto-concepto que se está formando. Pero, ¿qué tienen de particular las representaciones en matemáticas? Para tratar de responder, consideramos de importancia caracterizar lo que entendemos por objetos matemáticos. Autores como Pluvinage (1998) han hecho este análisis. En particular, él afirma que existen tres tipos de objetos en relación con sus diferencias ontológicas: objetos físicos, culturales y matemáticos.

Entendemos por ***objetos matemáticos*** aquellos donde ningún objeto real se puede considerar como un representante perfecto. Se necesitan por lo menos dos representaciones diferentes (en lenguaje natural, algebraica-simbólica, gráfica-geométrica, numérica, etc.) para tener una idea de dicho objeto, pero ninguna colección de estas representaciones lo agota.

2.1. Sistemas de Representación en Matemáticas

Entonces, una particularidad que tienen las matemáticas es que para hablar de un objeto, sólo podemos hacerlo a través de alguna de sus representaciones, pues no podemos tener acceso directo a ellos mediante la percepción o por medio de una experiencia intuitiva inmediata. En este sentido, se requiere de una representación que permita realizar una serie de actividades cognitivas, a través de las cuales, podamos aproximarnos a dicho objeto.

Pero, para generar una comprensión matemática, se hace necesario que el individuo pueda diferenciar que la representación no agota al objeto matemático (Duval, 1998). Es decir, un mismo objeto puede tener diferentes representaciones.

Cada representación, según Duval (op. cit. p. 185) "*Es parcial cognitivamente* *con respecto a lo que ella representa"*. Esto es, cada sistema de representación puede resaltar características diferentes de un objeto matemático. La manera como se representa en matemáticas permite manipular y procesar cada una de esas representaciones de forma tal que los distintos modos de representación expresen, a su vez, las propiedades y relaciones estructurales entre los conceptos.

Es decir, cada sistema de representación nos permite ver una faceta diferente del objeto a estudiar y pone de manifiesto algunas de sus propiedades relevantes. Entonces, debemos admitir, como lo plantean Moreno y Lupiáñez (2001), que la construcción de un concepto matemático es un proceso continuo y su comprensión es sólo transitoria. En otras palabras, cada individuo va enriqueciendo sus conceptos en la medida que se le presenten nuevas facetas de estos. Es importante destacar que cada concepto en sí mismo conlleva, también, un proceso de construcción cultural.

Esta construcción de conceptos, según Hitt (1998), se realiza mediante tareas que implican la utilización de diferentes sistemas de representación y, a su vez, **promuevan la articulación coherente entre representaciones**, libre de contradicciones.

Los registros de representaciones deberán permitir las tres actividades cognitivas fundamentales, según Duval (1998b) ligadas a la semiosis:

La primera se refiere a la ***formación de una representación identificable*** como una representación de un registro dado. La segunda, es el ***tratamiento*** de una representación. Esta actividad es considerada como la transformación de una representación en otra, pero en el mismo registro donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna al registro teniendo en cuenta las reglas de tratamiento propias del tipo de registro de que se trate. Y la última, es la ***conversión***. Esta actividad es una transformación externa al registro de partida, donde se produce una representación en otro registro y se conservan la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación original.

2.2. Manipulación Directa y Ecuación Diferencial

Cabri-Géomètre proporciona un nuevo marco constructivo de referencia muy amplio y adecuado a las ecuaciones diferenciales de primer orden, debido a que en él pueden representarse y articularse dinámicamente diferentes registros de representación, a saber:

- Los distintos métodos numéricos de solución de ecuaciones diferenciales, permitiendo geometrizárlos y tabularlos.
- Una pendiente o un vector de dirección asociados a la ecuación, cuya manipulación directa es útil para alcanzar una percepción cinestésica de la solución.
- Mapas o campos de pendientes asociados a las ecuaciones, cuyas construcciones paso a paso, permiten darle rutas a las familias de soluciones.
- Condiciones de partida de una solución, cuya manipulación libre en el plano permite enfatizar la especificidad de la solución particular de entre todas curvas de la familia solución.

2.3. Una Interpretación Geométrica Constructiva

Para las ecuaciones diferenciales de primer orden que involucran una expresión algebraica tal que pueda eventualmente permitir el despeje de la primera derivada de la variable dependiente, contamos con una interpretación geométrica muy útil: **la pendiente de la recta tangente a la curva solución**. Una vez hechas las manipulaciones que sean necesarias para el despeje descrito, la expresión de las pendientes en todos los puntos donde tenga sentido la solución se ajustarán a una función de las coordenadas del punto en estudio.

Una buena aproximación al valor del incremento de la variable dependiente (usada ya por Euler) consiste en calcular el producto de la función en el punto particular por el incremento de la variable independiente. Esta idea se rescata en la construcción con Cabri- Géomètre de un tramo de la recta tangente cuya pendiente está dada por la función $f(x, y)$.

3 Metodología

Tomando como referencia el trabajo de Hernández (1999) y la experiencia como docentes de los cursos de Ecuaciones Diferenciales es patente que la articulación de los tres registros de representación (gráfico, algebraico y numérico) es difícil para los estudiantes que se enfrentan esta temática. Una de las principales dificultades se centra en la conversión del registro gráfico al algebraico. Las actividades que presentaremos en la siguiente sección pretenden que el estudiante adquiera familiaridad en este tránsito.

3.1. Fases del desarrollo de la metodología

En esta investigación, el desarrollo de la metodología está dividida en las siguientes fases:

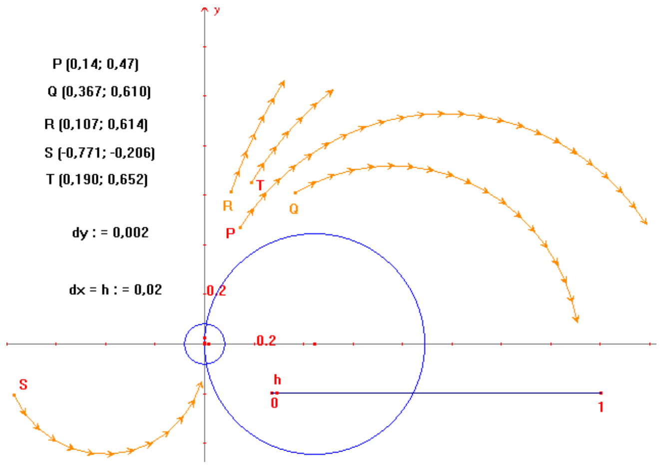
- **Revisión bibliográfica**: En esta fase se hizo una revisión local (a nivel de México) de las investigaciones que tratan la problemática del aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales y su relación con la teoría acerca de los registros semióticos de representación.
- **Diseño de cuestionario exploratorio:** En esta fase seleccionamos unos reactivos que nos permitieron elaborar un cuestionario cuya finalidad fue detectar dificultades en la conversión entre diferentes representaciones después de haber visto en el curso tradicional de Ecuaciones Diferenciales, el tema de Ecuaciones de primer orden. Ver Anexo 1.
- **Aplicación del cuestionario:** Se recabaron datos con estudiantes de primer semestre de la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional de México.
- **Análisis de resultados:** Para realizar este análisis se tuvo en cuenta las orientaciones teóricas dadas por Duval y Hernández, quienes hemos citado anteriormente.
- **Diseño de las actividades:** Esta fase, se tuvo en cuenta los resultados previos obtenidos a partir del cuestionario y de la investigación realizada por Hernández, además, de las orientaciones teóricas mencionadas en la sección 2. Cabe destacar que estamos en el proceso de piloteo de estas actividades con los estudiantes, por lo que para efectos de este reporte solo presentaremos una actividad de exploración de un total de diez actividades.

4 Actividades que se proponen

Construyendo un tramo de una solución

El propósito de esta actividad es que el estudiante construya macros en Cabri-Géomètre que representen la pendiente generada por una Ecuación Diferencial de primer orden. Este micromundo tiene la posibilidad de incorporar en su interfase procedimientos nuevos cuando están bien definidos por los objetos iniciales y la geometrización del proceso.

Esta actividad le permite al estudiante manipular directamente una pendiente asociada a la Ecuación Diferencial que desea resolver con lo que obtendrá una imagen, de modo dinámico, de la forma de la curva solución, es decir, trazará un campo de pendientes y con él, construirá una tramo de una solución.



5 Conclusiones

- La construcción de campos de pendientes y soluciones geométricas de ecuaciones diferenciales de primer orden estaba lejos de ser tomada en cuenta por la currícula tradicional por las dificultades de trazo que exigía una tarea de esta índole, postergándose su discusión hasta los cursos de métodos numéricos.
- Actualmente, la riqueza de interpretaciones geométricas de las nociones involucradas, las posibilidades de exploración y descubrimiento que proporciona el entorno Cabri-Géomètre, aunado al valor constructivo que tiene para el educando el generar una solución gráfica, señalan que el medio educativo debe mantenerse atento a las alternativas didácticas que nos ofrecen las nuevas tecnologías.
- Este tipo de actividades facilita a los estudiantes asociar dos actividades cognoscitivas que frecuentemente están opuestas desde el punto de vista filosófico y epistemológico: ver y razonar. Sin embargo, para nosotros "ver" en la matemática implica no sólo diferentes tareas cognitivas sino la articulación de los diferentes registros de representación.

Bibliografía

AMELKIN, V., (1987). Ecuaciones Diferenciales Aplicadas a la Práctica. Editorial Mir Moscú.

CODDINGTON, E., (1976). Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Editorial CECSA.

DUVAL, Raymund (1998). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica, México, pp. 173-201.

HERNÁNDEZ, A. (1999). Tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

HITT, Fernando (1998). Visualización Matemática, Representaciones, Nuevas Tecnologías y Curriculum. *Revista Educación Matemática*, Vol. 10 No. 2. Grupo Editorial Iberoamérica. México, pp. 23 – 45.

HITT, F., SANDOVAL, I. (en prensa). La Visualización Matemática en la Enseñanza: Algunas Reflexiones.

KISELIOV, KRASNOV, MAKARENKO (1979). Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Editorial Mir Moscú.

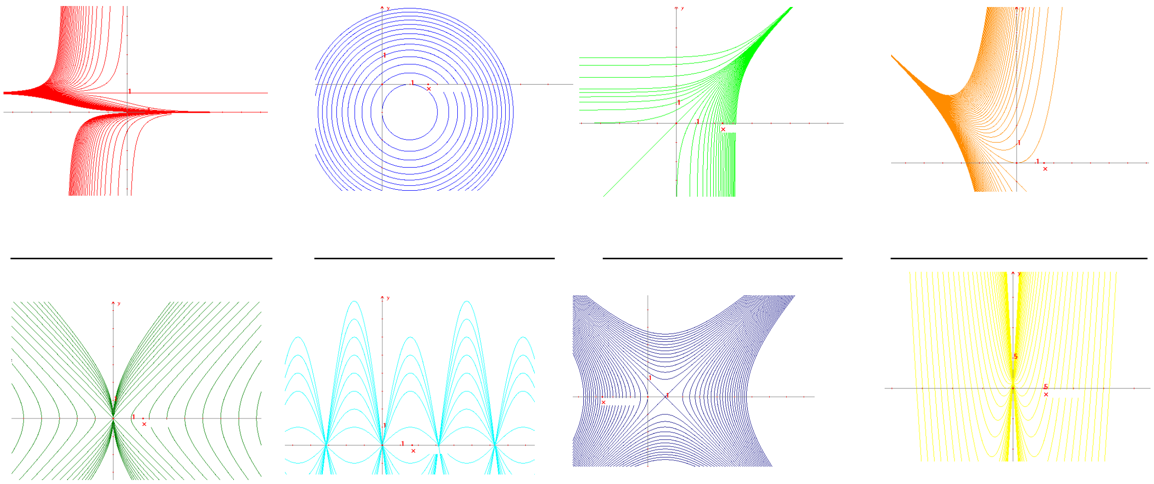
MORENO, Luis y LUPIAÑEZ, José Luis (2001). Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas. *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada, pp. 291-300.

PLUVINAGE, François (1998). Los objetos matemáticos en la adquisición del conocimiento. *Investigaciones en Matemática Educativa*. Editorial Iberoamérica. México, pp. 1-16.

SIMMONS, G. F., (1993). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Aplicaciones y Notas Históricas.

Anexo 1. Cuestionario

Relacionar cada familia de curvas con sus correspondientes opciones



Soluciones

1. $y = \ln(C + e^{x})$

2. $y = C e^{x} - x - 1$

3. $y = C \operatorname{sen} x$

4. $y = x^{2} + C x + 1$

5. $y = 1 / (1 + C e^{x})$

6. $(x-1)^{2} + (y+1)^{2} = C+2$

7. $x^{2} - y^{2} = C x$

8. $y^{2} - (x-1)^{2} = C$

Ecuaciones diferenciales

A. $y' = y \operatorname{ctg} x$

B. $y' = (x^{2} + y^{2}) / (2 x y)$

C. $y' = (y + x^{2} - 1) / x$

D. $y' - y = x$

E. $y' = e^{x - y}$

F. $y' = y(y - 1)$

G. $y' = (1 - x) / (1 + y)$

H. $y' = (x - 1) / y$