

# DIFICULTADES PARA ARTICULAR LOS REGISTROS GRÁFICO, ALGEBRAICO Y TABULAR: EL CASO DE LA FUNCIÓN LINEAL

**Julia Xochilt Peralta García**  
Instituto Tecnológico de Sonora

## Resumen

*Se reportan los primeros resultados de una investigación en curso, sobre las dificultades de aprendizaje relacionadas con el concepto de función lineal. Estas dificultades han sido detectadas en estudiantes universitarios de segundo semestre del área económico administrativo. Los resultados forman parte de una investigación más amplia que incluye el diseño de una propuesta de enseñanza para el concepto de función lineal y sus aplicaciones en algunos tópicos de economía. La investigación está teóricamente enmarcada en los aportes de R. Duval (1998) sobre registros de representación semiótica, en la que la conversión o transformación de una representación en otra perteneciente a otro registro, juega un papel crucial.*

*En este contexto se han propuesto a un grupo de nueve estudiantes, tareas de conversión entre las representaciones gráficas, algebraicas y tabulares de diversas funciones lineales.*

*Se describen aquí las tareas propuestas y se presenta un análisis, principalmente cualitativo, de las dificultades detectadas.*

## 1 Introducción

Los modelos lineales son importantes en matemáticas porque permiten resolver aquellos problemas de la ciencia que se comportan linealmente y aproximar otros cuya modelación es no lineal. Las funciones reales de variable real, que tienen la forma  $f(x) = ax + b$ , son uno de los modelos lineales más simples y representan para muchos estudiantes el primer contacto formal con el concepto de función. De aquí el interés mostrado por algunos investigadores, en explicar las dificultades de aprendizaje enfrentadas por los estudiantes para entender aquellas nociones relacionadas con las funciones lineales, véase por ejemplo Duval (1993), Schoenfeld (1993) y Hitt (1996).

En el Instituto Tecnológico de Sonora, en México, los estudiantes del área económico administrativa tienen que estudiar el tema de funciones lineales durante el segundo semestre de su carrera. El tema es abordado en el marco de sus aplicaciones

a la economía y los estudiantes muestran serias dificultades para resolver problemas de *oferta* y *demanda* que se modelan con funciones lineales. Los errores que cometen al resolver estos problemas parecen indicar que cuentan con un concepto muy pobre de función lineal.

Al respecto de esta problemática, nos hemos propuesto emprender una investigación a realizarse en dos fases:

- a) En la primera fase, cuyos primeros resultados se reportan en este trabajo, se pretende establecer cuáles son las dificultades enfrentadas por los estudiantes, cuando al trabajar con representaciones gráficas, algebraicas y tabulares de una función lineal, intentan cambiar una representación en otra.
- b) En la segunda, se trata de diseñar una secuencia didáctica que ayude a los estudiantes a superar las dificultades detectadas. En este diseño se están utilizando las representaciones dinámicas proporcionadas por el software de geometría dinámica *Cabri Géometre II* (Laborde & Belleiman, 1994)

El marco teórico en el que se desarrolla la investigación es la teoría de *registros de representación semiótica* desarrollada por R. Duval (1998). Este marco nos ha parecido el apropiado, no solamente porque permite explicar el nivel de conceptualización en base a los cambios entre representaciones, sino porque además los problemas de oferta y demanda exigen al estudiante la familiaridad con diversas representaciones de una función lineal.

## 2. Marco teórico

La teoría de Duval plantea en lo general que las representaciones semióticas utilizadas normalmente en matemáticas, no se generan de manera aislada, sino que pertenecen a sistemas de representación que tienen su propia estructura interna, sus propias limitaciones de funcionamiento y de significado, que pueden ser caracterizadas en función de las actividades cognitivas que permiten desarrollar. Estas actividades cognitivas condicionan la estructura misma del sistema de representación. Duval (1998, pp. 177-178) lo establece en los términos siguientes:

“Para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiósis:

- 1) La *formación* de una representación identificable como una representación de un registro dado...
- 2) El *tratamiento* de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde esta ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro...
- 3) La *conversión* de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial ...”

Un problema clave en el aprendizaje de la matemática es la distinción que debe hacerse entre un objeto y su representación. La confusión conduce a una especie de aprisionamiento del objeto por el registro donde se ha producido su representación y difícilmente podrá aplicarse fuera del contexto donde ha sido generado. Las consecuencias son graves en una ciencia como la matemática, cuya fuerza reside precisamente en la amplia aplicabilidad de sus conocimientos.

Como la tercera de estas actividades es un paso necesario para la coordinación de registros de representación y en virtud de que esta coordinación resulta “fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos [matemáticos]” (ibid, p. 176), Duval concluye que “en una fase de aprendizaje la conversión juega un papel esencial en la conceptualización” (ibid, p. 181).

En el marco de esta teoría, las dificultades para convertir una representación en otra pueden interpretarse como resultado de una conceptualización deficiente del objeto bajo estudio.

### **3. El Cuestionario**

La primeras dificultades se detectaron con la aplicación de un cuestionario, cuyas preguntas están relacionadas con el concepto de función lineal. Para contestar estas preguntas el estudiante tenía que poner en juego el cambio entre las representaciones tabular, gráfica y algebraica.

La primer pregunta tiene que ver con la noción de pendiente, en ella se pretende identificar las herramientas utilizadas por el estudiante para relacionar el signo algebraico de la pendiente con la gráfica de la recta obtenida. En la segunda se trata de poner a prueba la habilidad del estudiante para identificar la linealidad en una tabla en la que aparecen los valores que toma la variable  $x$  contra los valores de  $y$ ; esta pregunta no requiere de un cambio de registro y está relacionada más bien con la actividad cognitiva de formación en el registro tabular. La tercera se relaciona con la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico de una función lineal, en ella se proporciona la gráfica de una función lineal que contiene los datos suficientes para que la expresión algebraica pueda ser determinada. En la cuarta pregunta se presentan la función  $y=-3x+6$  y un conjunto de cuatro gráficas que corresponden a funciones lineales, y se le pide al estudiante que identifique cuál de las gráficas se corresponde con la expresión algebraica dada; en esta última pregunta se trata de ver si el estudiante puede identificar directamente las variables visuales con los parámetros de la expresión algebraica, y si no es así, de qué herramientas se vale para

convertir la expresión algebraica en la gráfica. Las preguntas del cuestionario son las siguientes:

### Cuestionario

#### I.

- Dibuja la recta que pasa por los puntos (2,3) y (4,5).
- ¿Qué signo tiene la pendiente de esta recta? \_\_\_\_\_
- ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- ¿Qué entiendes por pendiente de una recta? \_\_\_\_\_

II. Analice la siguiente tabla de valores y determine cómo se relacionan las variables  $x$  y  $y$ .

$x$	$y$
0	9
2	8
4	7
6	6
8	5
10	4

Tabla 1

$x$	$y$
-4	16
-2	4
0	0
4	16
7	49
13	169

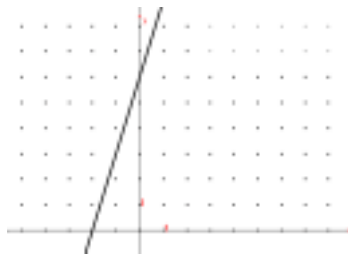
Tabla 2

$x$	$y$
-2	2
-1	1
0	0
2	2
3	3
4	4

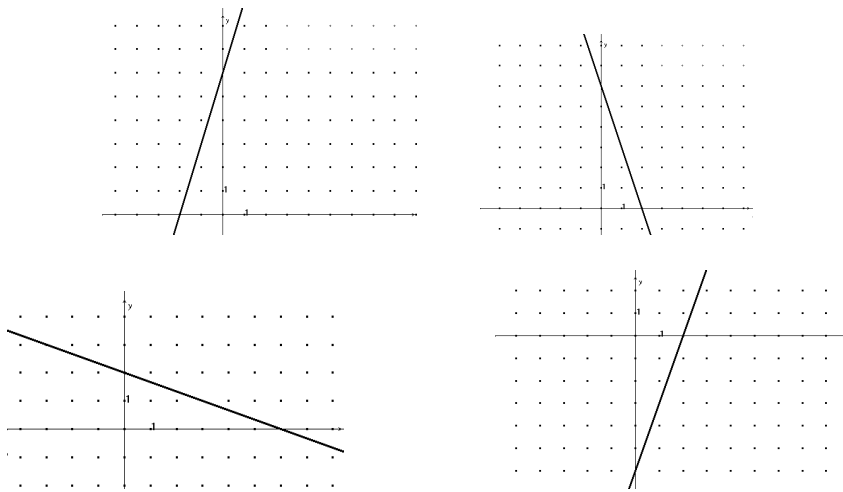
Tabla 3

- Tabla 1. ¿Representa una función lineal? \_\_\_\_\_  
 ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- Tabla 2. ¿Representa una función lineal? \_\_\_\_\_  
 ¿Por qué? \_\_\_\_\_
- Tabla 3. ¿Representa una función lineal? \_\_\_\_\_  
 ¿Por qué? \_\_\_\_\_

III. Determine la expresión algebraica cuya gráfica es la siguiente:



IV. Identifique cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función  $y = -3x + 6$



*Si considera que ninguna de las gráficas anteriores corresponde a  $y = -3x + 6$ , trace la gráfica correcta.*

Este cuestionario fue aplicado a nueve estudiantes universitarios del área económico-administrativo, del segundo semestre de su carrera en el Instituto Tecnológico de Sonora, México (semestre agosto-diciembre de 2001). Los nueve en mayor o menor grado habían mostrado un bajo rendimiento al resolver problemas de oferta y demanda de mercado, utilizando como modelo la función lineal.

#### **4. Resultados**

Se presenta en esta sección un resumen de los resultados arrojados por el cuestionario pregunta por pregunta:

*Pregunta I:* Noción de pendiente.

Todos los estudiantes trazan la recta que pasa por los puntos señalados y le asignan a la pendiente el signo positivo, las justificaciones ofrecidas son del tipo: “porque la recta se encuentra en el primer cuadrante”, “porque al hacer el cálculo de la pendiente me da positivo” o bien “porque corta al eje Y en un positivo”. Ninguno de los estudiantes asocia el signo de la pendiente con la inclinación de la recta. El siguiente cuadro muestra las respuestas a esta pregunta.

### Pregunta I

Inciso	correctas	incorrectas	abstenciones
a	9	0	ninguno
b	9	0	ninguno
c	0	9	ninguno
d	0	1	8

A pesar de que todos los estudiantes han podido calcular la pendiente solicitada, es evidente que ninguno de ellos tiene un significado claro de esta noción. En estas condiciones es difícil que puedan convertir la representación gráfica de una función lineal en algebraica o viceversa, en tanto que el parámetro  $a$  en la expresión  $y = ax + b$  aparece completamente desconectado de la inclinación de la recta.

*Pregunta II.* La linealidad en una representación tabular.

Lo que se observó en esta pregunta fue de que los estudiantes recurren a graficar una por una las parejas de números mostradas por cada tabla; y a partir del dibujo obtenido determinan si la relación entre las variables es lineal o no. Cuando el trazo obtenido es una recta concluyen que la relación es lineal y en caso contrario que no lo es. Esta estrategia de traducir la tabla punto por punto al registro gráfico, conduce a errores, sobre todo en los casos en los que la tabla no representa una función lineal. Uno de los estudiantes, por ejemplo, después de graficar la Tabla 3 llega a la conclusión de que la gráfica corresponde a una parábola. Este caso es interesante porque ilustra muy bien el hecho de que la atención del estudiante durante la tarea, se ha centrado en la “forma” que van adquiriendo los puntos en el plano y no en la naturaleza de la relación entre las columnas. A pesar de que en las Tablas 2 y 3 la relaciones entre las columnas guardan patrones esencialmente distintos, este estudiante concluye que ambas pueden representarse gráficamente mediante una parábola. La ausencia de relación con el registro algebraico, que hubiera podido evidenciar esta inconsistencia, es notoria.

La utilización de una representación algebraica se observó apenas en un estudiante, que la estableció correctamente para la Tabla 2, una vez que percibió que los puntos no parecían configurar una recta.

*Pregunta III.* Determinación de la ecuación de la recta cuando se tiene su gráfica.

Al respecto de este problema, las respuestas ofrecidas por los nueve estudiantes pueden clasificarse como sigue:

- Cinco de ellos han partido de que la gráfica corresponde a la expresión algebraica  $y = mx + b$  e identifican correctamente el parámetro  $b$  con la

ordenada al origen, llegando a la conclusión de que  $b = 6$ , Pero cuando tratan de extraer de la gráfica el valor de la pendiente, dos de ellos identifican la pendiente con la intersección de la recta con el eje X, llegando a la conclusión de que  $m = -2$  y por lo tanto deducen que la ecuación de la recta es  $y = -2x + 6$ . Los tres restantes recurren a los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados para calcular la pendiente y dos de ellos lo hacen correctamente, pero el tercero obtiene como puntos de intersección  $(-2, 0)$  y  $(6, 0)$  y sus cálculos obviamente son incorrectos.

- Cuatro estudiantes intentaron utilizar la fórmula  $y - y_1 = m(x - x_1)$  para determinar la ecuación de la recta, pero solo uno de ellos logró calcular la ecuación correctamente. Los tres restantes tuvieron problemas para obtener de la gráfica las coordenadas de los puntos que se requerían o bien se extraviaron en la manipulación algebraica.

En el siguiente cuadro se muestran las respuestas obtenidas por los alumnos

Herramientas empleadas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
Identifican dos puntos: $(x, y)$	5	4
$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$	5	4
$y = mx + b$	2	3
$y - y_1 = m(x - x_1)$	1	3

#### *Pregunta IV. Conversión del registro algebraico al gráfico*

Solamente uno de los nueve estudiantes identificó las variables visuales con los parámetros de la expresión  $y = -3x + 6$  para llegar a la respuesta correcta. Los ocho restantes, aunque también obtuvieron una respuesta correcta, graficaron punto por punto la expresión  $y = -3x + 6$  y localizaron la respuesta correcta comparando la gráfica obtenida con las opciones propuestas.

### **5. Conclusiones**

Nuestro estudio revela que cuando se trata de la función lineal, la noción de pendiente representa un serio obstáculo para la articulación entre registros. Esta dificultad se revela con mayor fuerza en cierto tipo de conversiones, por ejemplo cuando el registro de partida es el gráfico.

Los errores registrados no solo revelan un descuido notorio de las actividades de conversión por parte de la enseñanza, sino además una confianza excesiva de los estudiantes en los procedimientos que han logrado mecanizar y de los que no manifiestan tener una significación clara.

Las respuestas ofrecidas en la Pregunta IV son interesantes, porque revelan que los estudiantes han encontrado en la graficación punto por punto de la función lineal, una manera de llegar a la respuesta correcta eludiendo por completo las significaciones gráficas de los parámetros presentes en la expresión algebraica.

A pesar del éxito aparente logrado por los estudiantes, el registro tabular utilizado como registro de partida ha resultado desconcertante. Las causas de este desconcierto parecieran asociadas con la utilización de la tabulación, solamente como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica y no como una representación por sí misma.

Puede decirse en lo general que los estudiantes, no han mostrado una aprehensión conceptual del objeto bajo estudio; en el sentido de que no han mostrado una articulación espontánea y libre de contradicciones de sus diversas representaciones. En estas condiciones es muy difícil que los estudiantes puedan utilizar con éxito la función lineal como herramienta para resolver problemas de *oferta y demanda*.

## Referencias

- Duval, R., (1992), Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En E. Sanchez (Ed.), *Antología en Educación Matemática*, (pp. 125-139). México: Sección de Matemáticas Educativa del CINVESTAV-IPN.
- Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Hitt, E., (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa*. (pp. 245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Laborde, J.-M. and Bellemain, F. (1994). *Cabri-Géomètre II* (software), Dallas, Tex.: Texas Instruments.
- Schoenfeld, A. (1993). The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject matter domain. En R. Glaser (Ed.) *Advances in instructional psychology*, vol. IV. (pp. 55-175). Hillsdale, NJ: Erlbaum.