

EL PAPEL DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL¹

M.C. Silvia Elena Ibarra Olmos
M.C. José María Bravo Tapia
M.C. Agustín Grijalva Monteverde
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Resumen

Estamos presentando la descripción del diseño, realización y conclusiones de un proyecto de investigación cuyo principal objetivo fue el estudiar los efectos del empleo de diversos registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial. Para ello se elaboraron materiales usando recursos computacionales en los que se hiciera necesaria la articulación de distintos registros de representación semiótica (numéricos, gráficos y algebraicos). Al estudiar los efectos en los estudiantes, se puso especial interés en la detección de obstáculos didácticos, cognitivos y epistemológicos asociados a los conocimientos en juego y a las formas metodológicas con las cuales se abordaron.

La metodología de investigación empleada fue la ingeniería didáctica. La fase experimental se realizó con dos grupos de estudiantes de la Universidad de Sonora, durante los dos semestres del año 2000. Asimismo se incorporaron observaciones efectuadas con profesores de matemáticas de diversas instituciones del país.

1. Introducción

La fuerza disciplinar de la matemática ha radicado en diversos aspectos, uno de los cuales es la ausencia o eliminación de posibles fuentes de contradicción, como podrían ser la inclusión de elementos visuales en la discusión de los objetos y relaciones que la conforman. Hitt, F., (1997), señala que “*La construcción de la matemática en una ciencia deductiva libre de contradicciones provocó desde la época de oro de los griegos la evasión de consideraciones visuales. La construcción*

¹ Proyecto de investigación realizado durante el año 2000 y primer semestre del año 2001. Financiado por la Universidad de Sonora.

del edificio matemático ha tenido una tendencia anti-ilustrativa por más de veintitrés siglos.

En el campo de la enseñanza, estudios como el realizado por David Slavit, en 1992, nos muestra el pobre empleo de los recursos gráficos en los problemas y ejercicios de los textos de matemáticas. Slavit analizó 30 libros de los más empleados para la enseñanza del precálculo observando que, de 5369 ejercicios revisados, 999 (18.6%) involucran recursos gráficos y la mayoría de las ocasiones no se utilizan para la resolución de problemas, son esencialmente ejercicios de graficación.

En los últimos años, los resultados de la investigación realizada en el campo de la matemática educativa, específicamente la relativa al uso de los registros de representación semiótica (**rrs**), ha fortalecido la postura de que el aprendizaje de la matemática se ve favorecido cuando se incorporan en su enseñanza actividades didácticas que favorezcan la utilización y articulación de los **rrs**.

Como ejemplo de lo anterior podemos citar el planteamiento de Raymond Duval (1993), quien señala: *“La comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión”*.

Además de lo anterior, desde nuestro punto de vista, la emergencia de la computadora en el campo educativo ha potenciado la posibilidad de la explotación de los **rrs** en la enseñanza de la matemática.

Retomando los resultados obtenidos por algunos investigadores en matemática educativa (Hitt y Duval entre otros), e incorporando algunas observaciones de experiencias propias, decidimos diseñar el proyecto de investigación que titulamos “El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del Cálculo Diferencial”². .

² Siguiendo a Duval, por registro de representación entendemos a un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático y que además cumple con las siguientes características: es identificable, permite el tratamiento, esto es, la manipulación y transformación dentro del mismo registro y, por último, permite la conversión, consistente en la transformación total o parcial en otro registro.

2. Diseño y Desarrollo del Proyecto

Originalmente se planteó como propósito central del proyecto el estudio de los procesos de aprendizaje de los estudiantes de cálculo diferencial cuando interactúan con actividades didácticas encaminadas a obtener el manejo y la articulación de registros de representación gráficos y algebraicos. Este objetivo tuvo como metas asociadas la detección de obstáculos epistemológicos ligados a los conceptos y algoritmos del cálculo; la detección de obstáculos cognitivos en el aprendizaje del cálculo y la detección de obstáculos didácticos en la enseñanza del cálculo.³

Con tales objetivos procedimos a organizar los contenidos del curso de Cálculo Diferencial e Integral I (Cálculo Diferencial), que se estudia por los alumnos inscritos en las carreras de ciencias e ingeniería de la Universidad de Sonora, por ser éste nuestro centro de trabajo. Dicha organización se llevó a cabo mediante problemas: de optimización, tangentes y movimiento, a los que ubicamos históricamente como los problemas cuya resolución impulsaron la creación y desarrollo de la rama del conocimiento matemático que ahora conocemos como Cálculo Diferencial.

Además de lo anterior, convinimos en la importancia de incorporar en los estudiantes el uso de la computadora, por las ventajas ya conocidas de este instrumento y porque, en nuestro caso particular, nos potenciaba la posibilidad del manejo de los **rrs**. El software utilizado fue Graphics Calculus, escogido entre otras cosas por las ventajas que presenta para la enseñanza de la graficación de funciones en forma paramétrica y para la obtención de la función derivada por medio de la función pendiente.

En la literatura especializada se entiende graficación por parámetros al estudio de las representaciones gráficas de expresiones funcionales de la forma $y = f(x)$ cuando se transforman en otra de la forma $y = af(bx - c) + d$, identificando los efectos gráficos de los parámetros a , b , c y d . En el artículo “Gráficas y Ecuaciones” (1988), Duval presenta un análisis cuidadoso de cómo la graficación por parámetros es un recurso que permite la articulación de los registros gráfico y algebraico

³ Con el término “obstáculo” planteamos aquellas dificultades generadas por la utilización de un conocimiento que, habiendo sido útil en determinadas situaciones, deja de serlo en un contexto diferente. La caracterización de obstáculos en epistemológicos, didácticos o cognitivos tiene el propósito de ubicar la fuente que lo está generando.

mediante el establecimiento de relaciones entre variables algebraicas y lo que él denomina “variables visuales”.

En nuestros diseños planeábamos impulsar el que los alumnos pudiesen utilizar los conocimientos adquiridos mediante la graficación por parámetros en la obtención de la función derivada mediante el reconocimiento de la función pendiente. Esto es, los alumnos deberían partir de una función dada, obtener la gráfica de la función pendiente y representarla algebraicamente.

Diseñamos también actividades para el establecimiento de resultados teóricos importantes, como las reglas de derivación para la suma, producto, cociente, regla de la cadena, entre otros.

Por la naturaleza del proyecto, escogimos como metodología de investigación la ingeniería didáctica, la cual es una metodología de corte cualitativo que surgió en el seno de la comunidad dedicada a la matemática educativa y ofrece posibilidades de centrar la atención en los procesos de aprendizaje de los estudiantes cuando se desenvuelven en el aula, mediante la realización de actividades didácticas diseñadas por el investigador.

Como se señaló con anterioridad, la realización didáctica se llevó a cabo con estudiantes de ciencias e ingeniería de la Universidad de Sonora, durante los dos semestres escolares del año 2000. Otras observaciones se efectuaron con profesores de matemáticas del bachillerato y nivel superior en algunas instituciones educativas del país.

La conducción de las actividades de aprendizaje estuvo a cargo de uno de los integrantes del equipo de investigación. La evidencia experimental se obtuvo mediante la observación y análisis de las actitudes de los estudiantes durante las clases y de sus escritos (tareas, exámenes y diversos trabajos). Algo similar realizamos cuando el trabajo fue efectuado con profesores.

De acuerdo al diseño establecido, el trabajo cotidiano se desarrolló en un centro de cómputo equipado de tal forma que los participantes podían organizarse en equipos de dos integrantes, con una computadora para cada uno de los equipos.

Los resultados parciales de este proyecto fueron comunicados en distintos eventos de la especialidad, por ejemplo el Congreso Nacional de la Sociedad

Matemática Mexicana (edición 2000) y en la Conferencia Internacional sobre Uso de Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas (2001).

3. Principales resultados

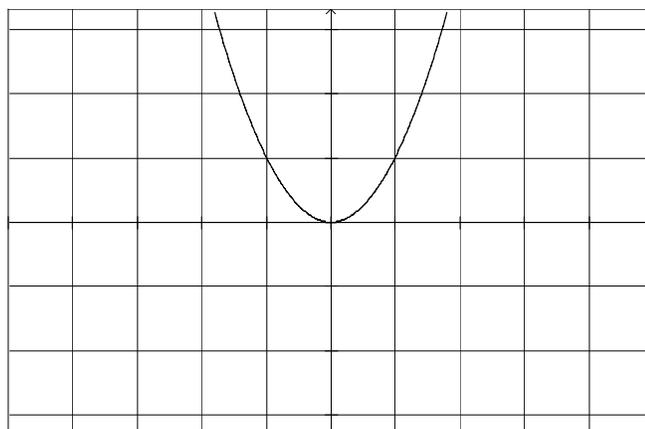
Evaluando lo logrado en cuanto a la consecución del objetivo planteado a partir de las metas asociadas, consideramos que se obtuvieron avances importantes. En la realización didáctica se detectaron obstáculos tanto de carácter didáctico como cognitivo referentes al predominio algebraico de los métodos de solución empleados por los estudiantes y su falta de conexión o articulación con los recursos de carácter geométrico, así como la interferencia de la noción puntual de derivada al tratar de construir una noción global de la misma.

Este es un hecho ampliamente referido en la literatura relacionada. En nuestra experiencia resulta particularmente notorio que a pesar de tomar a los análisis gráficos como la base de las secuencias didácticas propuestas, cuando los estudiantes y los profesores se enfrentaban independientemente a la resolución de problemas recurrían a los registros algebraicos, sin establecer ningún tipo de conexión con los registros gráficos.

Un aspecto trascendente es la detección de obstáculos que ocasionan los antecedentes de los estudiantes y profesores en el manejo de los conceptos del cálculo con procedimientos de carácter puntual, (particularmente la derivada en un punto), dificultando la construcción global que se pretendía en los diseños. Aunque originalmente este obstáculo fue clasificado como didáctico, es posible que tenga elementos de carácter epistemológico asociado, quedando esto como pregunta abierta para posterior investigación.

Con el propósito de ilustrar esta aseveración la ejemplificaremos con la siguiente experiencia. En un curso para profesores y estudiantes de diferentes partes del país ofrecido durante el XXXII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana celebrado en Saltillo, Coahuila, planteamos el siguiente problema:

Si la gráfica de una función es la siguiente



¿Cuál es su función derivada?

Las actividades planteadas previamente les permitían hacer manipulación gráfica para obtener la representación geométrica de la función derivada y posteriormente convertir esta representación en el contexto algebraico. Sin embargo, algunos participantes optaban por obtener la representación algebraica de la función original y posteriormente hacían el cálculo puntual de la derivada. En otros casos, que nos parecen también significativos, los participantes obtenían la gráfica de la función derivada pero para determinar su expresión algebraica procedían de la misma manera que los anteriores desechando en la práctica lo que ellos mismos habían realizado.

El trabajo de los participantes da cuenta de las habilidades para hacer conversiones transitando de las representaciones gráficas a las algebraicas, pero muestra también la preponderancia de los procedimientos de carácter algorítmico-algebraico, ligados más a procedimientos de carácter puntual centrados en la noción de convergencia.

No encontramos nuevos hallazgos en lo referente a los obstáculos epistemológicos, sin embargo vemos pertinente la incorporación de otros conceptos importantes en el cálculo que complementen lo que en este estudio se ha hecho. Asimismo es pertinente profundizar en la detección de obstáculos didácticos y cognitivos, haciendo cortes más finos en la investigación y ampliando el marco teórico originalmente considerado.

4. Nuevos problemas de investigación

Las experiencias del proyecto de investigación realizado abrieron nuevas interrogantes que nos han permitido incorporar otros elementos que no se habían contemplado o, al menos, no se contemplaban con el énfasis necesario.

Estos problemas o interrogantes pueden clasificarse en dos tipos: los que conducen a realizar cortes más finos en la investigación y los que amplían el panorama de los contenidos disciplinarios involucrados.

Por una parte se encuentran problemas como los señalados líneas atrás en el sentido de analizar la existencia de obstáculos epistemológicos en situaciones que sólo identificábamos como de carácter didáctico. Tal es el caso de la persistencia del manejo de la función derivada con procedimientos puntuales.

Asimismo consideramos necesario profundizar en contenidos del cálculo que no hemos explorado como los relativos a los procesos de integración, lo cual conllevaría a tener una visión más amplia y general de los obstáculos epistemológicos, didácticos y cognitivos de los procesos del cálculo.

Finalmente señalamos que la difusión en el mercado de software de geometría dinámica (por ejemplo Cabri) abre también una nueva vertiente en cuanto a las posibilidades de explotación de la visualización en la enseñanza de las matemáticas.

Bibliografía

1. Hitt, Fernando, 1997. Visualización matemática. Representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Revista de Educación Matemática*. Vol. 10, pp. 23-45.
2. Slavitt, David, 1993. *Graphical representations in and out of the precalculus textbook*. Arkansas College.
3. Proyecto “*El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial*”. Bravo Tapia, José María; Ibarra Olmos, Silvia Elena y Grijalva Monteverde, Agustín. Realizado con apoyo de la Dirección de Investigación y Posgrado de la Universidad de Sonora.
4. Duval, Raymond, (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica, México.
5. Van Blokland, Piet; Kok, Douwe; Tall, David. *Software para la enseñanza del cálculo*. V.U. Ámsterdam, Holanda.
6. Duval Raymond, 1988. Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. Traducción del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México.
7. Bravo Tapia, José María; Ibarra Olmos, Silvia Elena y Grijalva Monteverde, Agustín (1997). Hacia la construcción del concepto de derivada. Reporte de una experiencia basada en una

- propuesta metodológica con sustento constructivista. *Memorias de la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, Morelia Michoacán, México.
8. Bravo Tapia, José María; Ibarra Olmos, Silvia Elena y Grijalva Monteverde, Agustín, (1997). Una propuesta para abordar el concepto de derivada con apoyo de la computadora. *Memorias del VI Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Welzenburger*, México, D.F.
 9. Bravo Tapia, José María; Ibarra Olmos, Silvia Elena y Grijalva Monteverde, Agustín, (1999). Derivando con recursos gráficos y apoyo computacional. *Memorias del XXXII Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana*. Guadalajara, Jal., México.
 10. Bravo Tapia, José María; Ibarra Olmos, Silvia Elena y Grijalva Monteverde, Agustín, (2001). Las reglas de derivación: una construcción geométrica. Reporte de una experiencia con profesores de matemáticas de los niveles medio superior y superior. *Memorias de la Conferencia Internacional sobre Uso de Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas y Noveno Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia, Mich., México.