CUADRANDO EL CÍRCULO Y TRISECTANDO EL ÁNGULO: ARRIBANDO A CONJETURAS ERRÓNEAS CON CABRI

Sergio Michel Hallack Sotomayor
Margarita León Vega
Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Plantel Nuevo Hermosillo
José Luis Soto Munguía
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Resumen

El uso de los softwares dinámicos como una herramienta didáctica en el proceso enseñanza y aprendizaje de la matemática está cada vez más extendido. En ellos podemos obtener diferentes representaciones de los objetos matemáticos y hacer a partir de estas representaciones conjeturas de los mismos, pero lo más importante es que su carácter dinámico nos induce a la generalización. En este trabajo se presentan ejemplos de construcciones que conducen a conjeturas correctas y, con el propósito de enfatizar la posibilidad de arribar a conjeturas erróneas, se discuten dos ejemplos tomados de la historia de la matemática: uno de ellos se refiere a la cuadratura del círculo y el otro a la trisección del ángulo. Todas las construcciones discutidas han sido elaboradas con el software de geometría interactiva Cabri Géomètre II. Se incluyen algunas reflexiones finales sobre la utilización de este tipo de softwares en la enseñanza y un apéndice donde se detallan las instrucciones para "cuadrar el círculo.

1. Introducción

Es innegable en nuestros días, el creciente interés por el uso de *softwares* de geometría dinámica (DGS, por sus siglas en inglés) para eficientar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así lo demuestra el gran número investigaciones basadas en DGS, reportadas en eventos recientes de educación matemática. Véase por ejemplo (Hitt & Santos, 1999) o bien (Fernández, 2000).

Desde que el primero de estos softwares, *Cabri Géomètre II* (Laborde & Bellemain, 1994), salió a la venta en 1988 en su versión para MS-DOS, muchos otros DGS han llegado al mercado; destacan por su importancia *The Geometer´s Scketchpad* registrado en 1991 y *Cinderella* patentado en 1998.

Son varias las razones que justifican el auge de los DGS en educación matemática, pero sin duda están relacionadas con sus características, entre las cuales pueden mencionarse las siguientes:

1. Están diseñados para que el estudiante participe activamente en el proceso de aprendizaje, construyendo y manipulando sus propias representaciones. Esta característica ha resultado crucial en una época en la que las diferentes corrientes del constructivismo, cubren prácticamente todo el espectro de la investigación en educación matemática.
2. Permiten representar en forma dinámica los objetos matemáticos, lo que da un carácter más general a las representaciones. Esta cualidad los ha convertido en una excelente herramienta para los marcos teóricos, de reciente formulación, que resaltan el papel que la noción de representación juega en el aprendizaje matemático.
3. La manipulación directa, permite al estudiante explorar situaciones y observar los invariantes durante el proceso de modificación de las representaciones. Se tiene así un ambiente en donde el estudiante puede formular conjeturas sobre estos invariantes.

Este trabajo utiliza *Cabri Géomètre II* y está relacionado principalmente con la tercera de las características comentadas anteriormente. Tiene como propósito mostrar la facilidad con la que se pueden formular conjeturas con estos *softwares*, pero también el riesgo de que estas conjeturas resulten erróneas. Se muestran para ello tres ejemplos en los que se puede llegar de inmediato a una conjetura certera y luego se añaden dos en los que la exploración conduce a una conjetura falsa; estos últimos dos son muy conocidos en geometría, el primero es la cuadratura del círculo y el segundo es la trisección del ángulo.

2. Formulación de conjeturas con Cabri

El software de geometría dinámica *Cabri Géomètre II* contiene una serie de herramientas que nos permiten dibujar libremente, sin utilizar norma alguna; como si se tratara de cualquier "dibujador" computacional. Sin embargo, lo que potencia las construcciones gráficas al estudiar Geometría, es la posibilidad de construir con la rigurosidad de las especificaciones exigidas por la tradición griega de la regla y el compás. En este contexto, una construcción es posible, si puede realizarse mediante una combinación finita de los pasos siguientes:

1. Trazar una recta por dos puntos dados.
2. Hallar el punto de intersección de dos rectas.

3. Trazar una circunferencia de radio y centro dados.
4. Hallar los puntos de intersección de una circunferencia con otra circunferencia o con una recta.

Cabe hacer notar que la manipulación preserva las propiedades de la construcción, lo que permite la formulación de conjeturas, observando los patrones de comportamiento de la construcción.

3. Conjeturas ciertas

En esta sección se muestran tres ejemplos que ilustran uno de los usos más extendido de *Cabri*, a saber, su utilización como dispositivo didáctico para la formulación de conjeturas correctas.

Los primeros dos ejemplos se refieren a resultados familiares durante un curso de geometría euclidiana, no así el tercero, que se refiere a un resultado interesante sobre cuadriláteros cíclicos

Ejemplo 1. Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.

En una actividad como ésta, se presenta al estudiante la construcción ya elaborada, (Figura 1) se le aclara que E, F, G y H son los puntos medios de los segmentos AB, BC, CD y DA respectivamente; pero desde luego no se le muestra el enunciado del ejemplo. Se le pide que "Arrastre" cualquiera de los puntos A, B, C o D; que puede mover libremente porque no están sujetos a restricción alguna y que intente predecir qué tipo de cuadrilátero es EFGH. Observando las relaciones que se mantienen invariantes, entre los lados opuestos o bien entre dos ángulos internos cualquiera del cuadrilátero EFGH, se espera que el estudiante pueda concluir que EFGH debe ser un paralelogramo. Si tuviera dificultades para arribar a esta conjetura, puede auxiliarse de las herramientas "Distancia y longitud" y "Ángulo" para solicitar a Cabri la medida de los segmentos o ángulos que considere pertinentes.

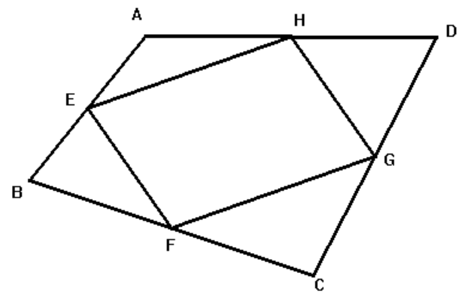

Figura 1.

Ejemplo 2. Todos los triángulos que tienen la misma base y la misma altura, tienen igual área.

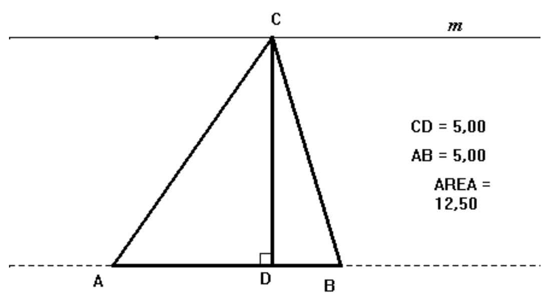

Figura 2.

La construcción mostrada al estudiante en este ejemplo puede verse en la Figura 2. En ella se ha trazado el triángulo ABC de tal manera que su base AB se mantenga sobre una recta y el punto C se mantenga sobre una recta paralela a AB, que se ha denotado con la letra *m*. La figura incluye las magnitudes de la base y la altura, así como el área del triángulo. Se espera que el estudiante perciba que al "Arrastrar" el punto C sobre la recta *m*, no se modifican la base ni la altura del triángulo y por lo tanto tampoco el área. Esta manipulación puede ser repetida para valores distintos de la base y la altura, que pueden modificarse también en la construcción como una manera de verificar que su conclusión no depende del triángulo específico de la Figura 2.

Ejemplo 3. Las maltitudes de un cuadrilátero cíclico, son concurrentes.

Una *maltitud* de un cuadrilátero se define como la recta perpendicular a un lado de un cuadrilátero, que pasa por el punto medio del lado opuesto. El trazo de una maltitud en Cabri es muy simple, basta con trazar el "Punto medio" del lado de un cuadrilátero cualquiera y luego pedir a Cabri la "Perpendicular" al lado opuesto que pase por dicho punto medio. Ver Figura 3.

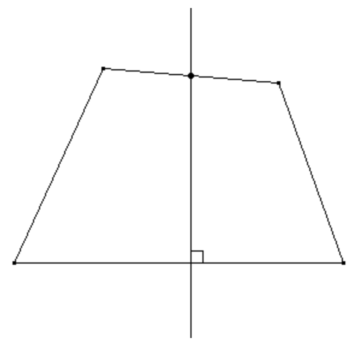

Figura 3.

Para trazar un cuadrilátero cíclico en Cabri, es suficiente con trazar un "Círculo" y luego con la herramienta "Punto sobre objeto", cuatro puntos A, B, C, y D sobre el círculo. Las maltitudes al cuadrilátero ABCD pueden trazarse como se ilustra en la Figura 3. El aspecto final de la construcción puede verse en la Figura 4.

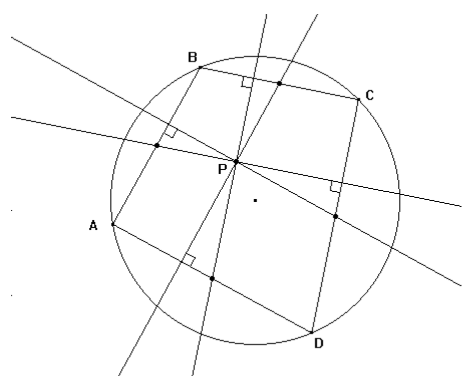

Figura 4.

La exploración del estudiante en este ejemplo se reduce a "Arrastrar" cualquiera de los puntos A, B, C, o D, para detectar que independientemente del cuadrilátero cíclico, las cuatro maltitudes tienen siempre un punto en común. En los primeros dos ejemplos las conjeturas que se pretende establecer son relativamente fáciles de demostrar para alguien familiarizado con un curso básico de geometría euclidiana. Este tercer ejemplo se ha incluido con la intención de evidenciar la potencia que puede tener Cabri, en lo que se refiere a la formulación de conjeturas. Evidentemente la demostración del resultado conjeturado en este ejemplo no es trivial.

4. Conjeturas falsas

Con el propósito de señalar que no todas las conjeturas formuladas al interactuar con este ambiente, son confiables; mostraremos en esta sección dos construcciones que conducen a conjeturas falsas. Los dos ejemplos corresponden a dos de los tres problemas planteados en la antigua Grecia, conocidos ahora como los tres problemas clásicos. Como se sabe, ninguno de estos tres problemas puede resolverse con regla y compás.

Ejemplo 1. Dado un círculo, trazar con regla y compás, el lado de un cuadrado cuya área coincida con el área del círculo.

La solución del problema equivale a construir un segmento de longitud igual a $\sqrt{\pi}$, lo que no es posible con regla y compás, debido a que π no es constructible (Courant & Robbins, 1962, p. 152). La irresolubilidad de este problema fue demostrada por Lindemann en 1888, sin embargo en la figura siguiente se muestra una construcción hecha con Cabri, que respeta las reglas de los griegos y permite aparentemente verificar que es posible encontrar para cualquier círculo, un cuadrado de la misma área.

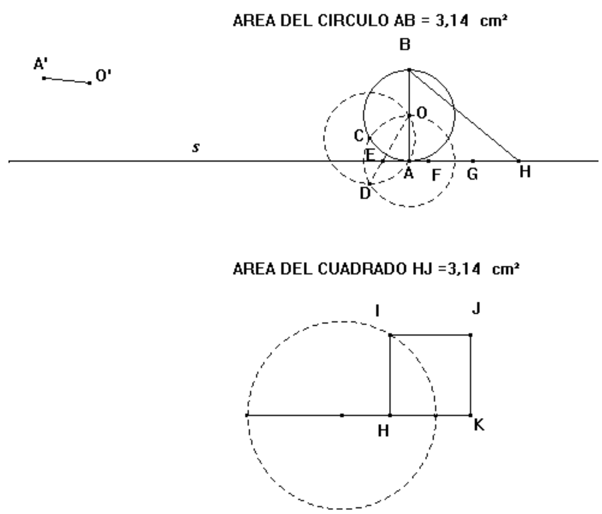

Figura 5. La cuadratura del círculo.

Esta construcción está hecha utilizando únicamente la regla y el compás y fue realizada en el año de 1685 (Bold, 1969) por el matemático Jesuita Adam Kochansky. Los detalles de la construcción pueden verse en el Apéndice. La aproximación a π lograda por Kochansky, se ve sin embargo como una igualdad en Cabri. En la figura

5, BH es aproximadamente igual a π, IH es la media geométrica entre BC y la unidad por lo que IH es aproximadamente igual $\sqrt{\pi}$.

En la misma tónica de la Sección anterior, se esperaría que un estudiante frente a esta construcción, pudiera explorarla "Arrastrando" el punto O', modificando con ello el radio AO del círculo mostrado en la Figura 5. Como esta modificación mantiene el área del círculo igual al área del cuadrado, la igualdad de áreas pareciera la conjetura más natural, pero esta igualdad significa que el círculo puede cuadrarse, lo cual es absurdo.

Ejemplo 2. Dado un ángulo cualquiera, construir otro que mida su tercera parte.

Algebraicamente este problema es equivalente a construir una solución de la ecuación cúbica $4z^3 - 3z - g = 0$, donde $g=\cos\theta$ y $z=\cos(\theta/3)$ y como puede verse en (Courant & Robbins, 1962) ninguna de estas soluciones es constructible.

La construcción mostrada aquí está basada en el resultado matemático siguiente:

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3},$$

de donde: $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\ldots=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$

y multiplicando ambos por θ ambos lados de la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{1}{4}\theta+\frac{1}{16}\theta+\frac{1}{64}\theta+\ldots=\frac{1}{3}\theta$$

Entonces dado un ángulo de medida θ, es posible trisecarlo, si la serie $\frac{1}{4}\theta+\frac{1}{16}\theta+\frac{1}{64}\theta+\ldots$ puede construirse con regla y compás. Como es relativamente fácil construir con regla y compás la bisectriz de cualquier ángulo, entonces cada término de esta serie es constructible mediante una doble bisección. Claramente no se pueden construir todos, pero al construir y sumar un número cada vez más grande de ellos, nos estaremos aproximando a un ángulo que mida $\frac{1}{3}\theta$. Justamente es lo que se ha hecho en la Figura 6. Para llevar a cabo la construcción se ha utilizado el cuadro de herramientas "Macro", dándose como "Objeto inicial" el ángulo AOB y se ha pedido como “Objeto final” la “Semirrecta” OC_1 que cumpla la condición de que el ángulo BOC_1 sea la cuarta parte del ángulo AOB. Aplicando luego el mismo “Macro” al ángulo BOC_1 y así sucesivamente se ha obtenido el ángulo BOC que es aproximadamente igual al AOB.

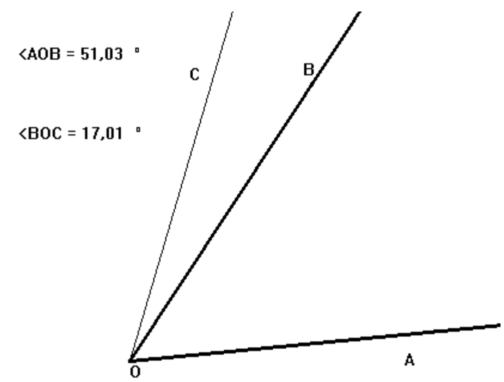

Figura 6. La trisección del ángulo.

Al igual que en el ejemplo anterior, el resultado numérico arrojado por Cabri, al “Arrastrar” el punto B, conduce de manera casi inevitable a la conclusión de que se ha logrado trisecar el ángulo. De nueva cuenta estamos ante una conjetura errónea.

5. Conclusiones

Podemos concluir que Cabri, y en general los DGS, son una herramienta útil en la enseñanza, el uso de las representaciones dinámicas conducen a generalizaciones y por lo tanto a la abstracción de lo invariante en tales manipulaciones.

Sin embargo estas exploraciones, como ya hemos visto, pueden llevarnos también a conclusiones erradas. Al adoptar un DGS como instrumento didáctico, el profesor tiene que prever que ésta es una situación posible y tomar las precauciones del caso. Se trata finalmente de un instrumento y como tal, ofrece desde luego limitaciones. No dudamos que las dificultades provocadas por estas limitaciones puedan sortearse, e incluso, usarse también con provecho en la enseñanza; pero ello implica que estos dispositivos no pueden pensarse exclusivamente como meros formuladores de conjeturas correctas. En particular la generación de conjeturas falsas podría motivar la necesidad de demostrar los resultados conjeturados.

Apéndice

Construcción sugerida por Adam Kochansky para obtener la cuadratura del círculo y adaptada a Cabri.

1. Usando las herramientas “Segmento” y “Distancia y Longitud”, trácese un segmento A’O’ de longitud igual a la unidad.
2. Con la herramienta “Recta”, trazar una recta cualquiera y denotarla *s*. y sobre ella trazar una “Perpendicular”. Llámese A al punto de intersección de *s* con la perpendicular trazada.
3. Con el “Compás” trácese una circunferencia con centro en A y radio A’O’. Llame O al punto de intersección de esta circunferencia con la perpendicular trazada en el paso anterior.
4. Trácese una “Circunferencia” con centro en O y radio OA. Llame B al punto de intersección de esta circunferencia con la perpendicular trazada en el paso 2.
5. Trace una “Circunferencia” con centro en A y radio AO. Llame C a uno de los puntos de intersección de esta circunferencia con la trazada en el paso anterior.
6. Con centro en C y radio CO trace otra “Circunferencia” que intersecte en D a la trazada en el paso anterior.
7. Trace el “Segmento” OD. Llame E al punto de intersección de OD con la recta *s*.
8. Sobre la recta *s*, trace un punto H, de tal modo que el segmento EH tenga tres unidades de longitud.
9. Trace el “Segmento” BH. El segmento BH será aproximadamente igual a π.
10. El cuadrado que aparece en la Figura 5, es el cuadrado construido sobre la media geométrica del segmento BH y otro segmento de medida igual a la unidad.

Referencias

Bold, B. (1969). *Famous Problems of Geometry and How Solve Them*. Dover Publication, Inc.

Courant, R. y Robbins, H. (1962). *¿Qué es la matemática?*, 3ª edición, Ediciones Aguilar, S. A.

Fernández, M. L. (Ed.). (2000). *Proceedings of the Twenty Second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vols. 1-2). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Heath, T. L. (1965). *The Thirteen Books of Euclid’s Elements* (Vols. 1-3). Dover Publication, Inc.

Hitt, F. & Santos, M. (Eds.). (1999). *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vols. 1-2). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Laborde, J.-M. and Bellemain, F. (1994). *Cabrí-Géomètre II* (software), Dallas, Tex.: Texas Instruments.