EL PAPEL DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO INTEGRAL[1]

M.C. Agustín Grijalva Monteverde
M.C. Silvia Elena Ibarra Olmos
M.C. José María Bravo Tapia
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Resumen

Estamos presentando la descripción del diseño de algunas de las actividades de un proyecto de investigación cuyo principal objetivo es estudiar los efectos del empleo de diversos registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo integral, el cual es continuación de otro cuya atención se centra en el cálculo diferencial. Para la realización de las actividades se elaboraron materiales usando recursos computacionales en los que se hiciera necesaria la articulación de distintos registros de representación semiótica (numéricos, gráficos y algebraicos). En el proyecto se tiene especial interés en la detección de obstáculos didácticos, cognitivos y epistemológicos[2] asociados a los conocimientos en juego, pero en este trabajo, por lo reciente de su implementación no se muestran resultados y sólo nos limitamos a plantear las consideraciones con las que se elaboraron las actividades a la vez que se muestran algunas de ellas.

1. Introducción

En la Universidad de Sonora se ofrecen tres cursos de cálculo a estudiantes de las carreras de ciencias e ingeniería, los cuales constituyen parte de un tronco común de asignaturas tanto de matemáticas como de física.

---

[1] Proyecto de investigación apoyado financieramente por la Universidad de Sonora para realizarse en el 2001 y primer semestre del 2002.

[2] Con el término "obstáculo" planteamos aquellas dificultades generadas por la utilización de un conocimiento que, habiendo sido útil en determinadas situaciones, deja de serlo en un contexto diferente. La caracterización de obstáculos en epistemológicos, didácticos o cognitivos tiene el propósito de ubicar la fuente que lo está generando.

En el primero de los cursos de cálculo se revisan los contenidos del cálculo diferencial y en el segundo los de cálculo integral, dejando para el tercero ambos aspectos pero para el caso de funciones de varias variables.

En diferentes eventos y foros hemos presentado reportes de avances de la investigación “El papel de los registros de representación semiótica[3] en la enseñanza del cálculo”. En los mismos hemos abordado los aspectos referentes al cálculo diferencial con énfasis en el concepto de derivada de una función.

Entre los resultados reportados se encuentra la detección de un obstáculo en el aprendizaje de la derivada y los procesos de derivación consistente en la dificultad para concebir a la derivada como una función y caracterizarla de manera global, prevaleciendo una concepción puntual mediante la identificación de que la derivada es “la pendiente de la recta tangente en un punto”. En la creación de dicho obstáculo concurren diferentes factores, algunos epistemológicos y otros de carácter didáctico.

Entre estos últimos podemos señalar que en los cursos de cálculo diferencial se hace uso de la derivada como un recurso para calcular valores extremos (relativos) de las funciones, centrando la atención en los puntos críticos, pero poco se emplea para caracterizar de manera más completa a las funciones, determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento, la concavidad, la curvatura, etc.

En nuestro proyecto hemos formulado actividades para el uso de la computadora, específicamente mediante el paquete “Gráficos” con el propósito de potenciar el empleo de las representaciones gráficas y su articulación con las representaciones algebraicas. En este enfoque juega un papel fundamental la concepción global de la función derivada y las características específicas de lo realizado puede encontrarse en [2], [7], [8], [9] y [10].

En una etapa más reciente del proyecto hemos tratado los aspectos relativos al concepto de integral de una función, ubicado curricularmente en el segundo de los cursos de cálculo.

[3] Siguiendo a Raymond Duval, por registro de representación entendemos a un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático y que además cumple con las siguientes características: es identificable, permite el tratamiento, esto es, la manipulación y transformación dentro del mismo registro y, por último, permite la conversión, consistente en la transformación total o parcial en otro registro.

Ahora presentamos algunas de las actividades de aprendizaje que hemos estado proponiendo a los estudiantes, aunque debido a lo reciente de su aplicación aún no contamos con resultados debidamente sustentados.

2. Algunas consideraciones previas

De acuerdo al programa vigente las prácticas de enseñanza del cálculo integral y nuestra experiencia con profesores (segundo de los cursos de cálculo en el área de ciencias e ingeniería) desprendemos que en el curso el estudio de integral se inicia abordándolo de manera aislada e independiente del de derivada, concibiéndolo como un concepto esencial del cálculo, ligado a la determinación de áreas. Esta situación es análoga a otras carreras e instituciones donde se contempla el estudio del cálculo integral.

Posteriormente, mediante la presentación y análisis del Teorema Fundamental del Cálculo (T.F.C.) se relacionan ambos conceptos, el de derivada y el de integral, y se hace énfasis en cómo es que dos conceptos relacionados con aspectos diferentes (uno ligado a las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de una función y otro al de áreas) están estrechamente relacionados entre sí.

Con base en el T.F.C. se establece que la integral de una función puede calcularse de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

con tal que F'(x)=f(x).

Este procedimiento conduce a facilitar el cálculo de integrales y los cursos centran entonces su atención en diversos métodos para encontrar antiderivadas, de tal manera que se puedan encontrar funciones útiles para el cálculo de integrales.

Esta forma de proceder conduce a algunas situaciones como las siguientes:

- Los cursos de cálculo diferencial e integral se estudian –de partida- como si estuvieran aislados y sólo hasta que se introduce el T.F.C. se establece un vínculo directo entre ellos.
- No se aprovechan adecuadamente los avances logrados por los estudiantes en el estudio de la derivada de una función y no se profundiza en las oportunidades que la misma brinda para el análisis de las funciones.

- Se conduce a una mecanización del cálculo de integrales por medio de la determinación de antiderivadas y, consecuentemente, se empobrecen las significaciones de derivada e integral.

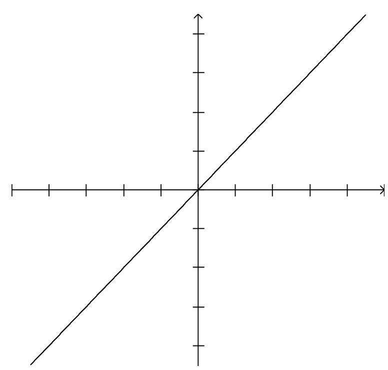
3. La propuesta

Con base en las consideraciones del apartado anterior nos propusimos elaborar situaciones de aprendizaje que tomaran en cuenta dos aspectos:

- La necesidad de plantear problemas y situaciones problemáticas que propiciaran en los estudiantes el empleo tanto de las representaciones gráficas como las numéricas y algebraicas, así como la coordinación y/o articulación de ambas representaciones.
- Se tomara como punto de partida a la derivada para analizar las funciones e introducir los procedimientos de determinación de antiderivadas para el cálculo de integrales.

Para ilustrar la propuesta presentaremos ahora algunos de los problemas iniciales del diseño, los referidos a las primeras actividades del curso de cálculo integral.

Problema. La siguiente es la gráfica de la función derivada de una función f. ¿Cuál es la función f?



Del análisis gráfico de la derivada esperamos que un estudiante pueda extraer las siguientes conclusiones:

- La función f tiene un punto crítico en $x = 0$, por lo cual ahí puede existir un valor extremo.
- La función f es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

- La función f es creciente en el intervalo $(0,+\infty)$.

De este análisis esperamos que el estudiante pueda determinar que la función f tiene un mínimo relativo en $x = 0$ pero observar que no es posible determinar su valor. Asimismo, esperamos que conciba a la función f como aquella cuya gráfica posible es una parábola "cóncava hacia arriba" cuyo vértice se encuentra sobre el eje de las ordenadas.

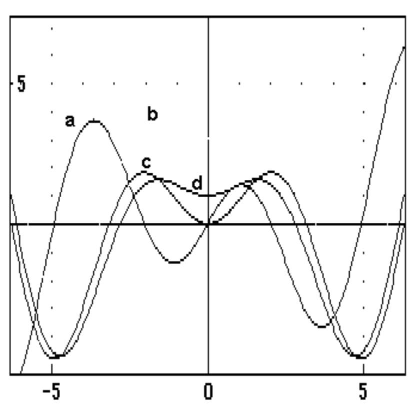
Posteriormente promovemos una discusión con base en una representación algebraica, identificando a la función mediante la expresión $f(x) = ax^2 + c$, con c cualquier constante. Surge entonces la cuestión de cómo determinar el valor preciso del parámetro a, lo cual se consigue mediante tratamiento algebraico, previo la identificación de la función derivada como $f'(x) = x$ y la determinación de su correspondiente antiderivada (sin que hallamos hablado de este término).

Este tipo de situaciones son las que proponemos a los estudiantes antes de abordar la integral en relación a la determinación de áreas y la introducción del Teorema Fundamental del Cálculo.

IV. Las actividades de aprendizaje

A continuación mostramos algunas de las actividades de aprendizaje que proponemos a los estudiantes para el trabajo en el aula, en la cual los estudiantes cuentan con computadoras para la realización de las acciones correspondientes.

FUNCIÓN PENDIENTE. En la siguiente figura se muestra la gráfica de una función *f(x)* y tres gráficas más donde una de ellas es la gráfica de la derivada de *f(x)*. Identifícalas y justifica tu respuesta.

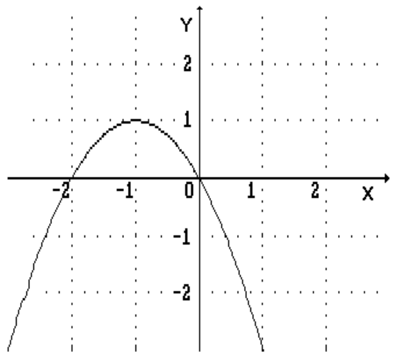


Figura

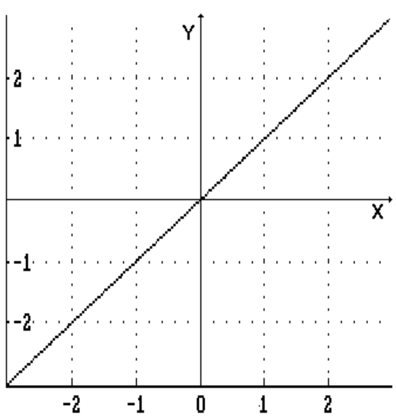
( ) *f(x)*

( ) *f'(x)*

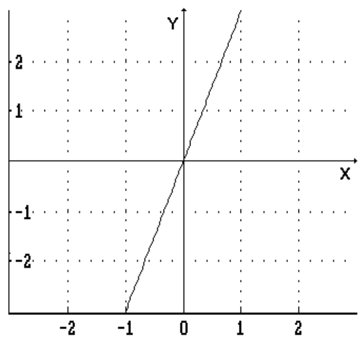
FUNCIÓN ORIGINAL. En la siguiente figura se presenta la gráfica de la función pendiente, bosqueja la gráfica de la función original.

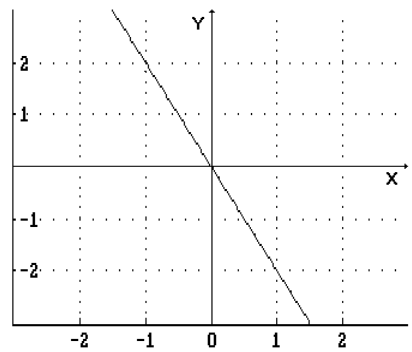


FUNCIÓN PENDIENTE: LINEALES. En cada una de las siguientes figura se muestra la gráfica de una función lineal que representa la función pendiente *f(x)* de una función original *g(x)*. En cada caso determina la función original *g(x)* contestando las siguientes cuestiones.

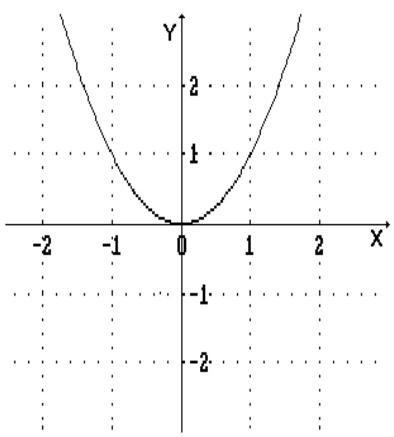


a. ¿En qué punto esta función pendiente *f(x)* nos indica que la función original *g(x)* tiene un punto en el cual se puede trazar una recta tangente con pendiente igual a cero?
b. ¿Qué signo tienen las pendientes de las rectas tangentes a la función original *g(x)* antes de este punto? Y ¿Qué signo tienen después?
c. De acuerdo al análisis anterior se deduce que el punto es un extremo de la función original, es ¿máximo ó mínimo?
d. Escribe la expresión algebraica de la recta.
e. Haz un bosquejo gráfico de la función original.
f. ¿Qué tipo de función es la que graficaste en el punto anterior?
g. ¿Cuál es su expresión algebraica?





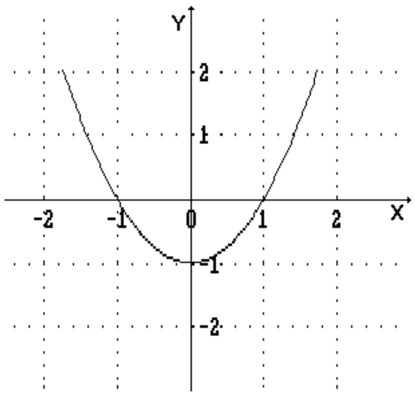
FUNCIÓN PENDIENTE: CUADRÁTICAS. Analizaremos ahora la función pendiente *f(x)* (dada por una cuadrática) para determinar la función original *g(x)*.



a. ¿En cuántos puntos de nuestra función original *g(x)* se puede trazar una recta tangente con pendiente igual a cero?
b. ¿Qué signo tienen las pendientes de las rectas tangentes a la función original *g(x)* antes de ese (esos) punto(s)? ¿Qué signo tienen después?
c. De acuerdo al análisis anterior se deduce que el punto (o los puntos) en cuestión es (o son) punto(s) crítico(s), ¿qué tipo de punto crítico es (son)?
d. Escribe la expresión algebraica de la parábola.
e. Haz un bosquejo gráfico de la función original.
f. ¿Qué tipo de función es la que graficaste en el punto anterior?
g. ¿Cuál es su expresión algebraica?

FUNCIÓN PENDIENTE: CUADRÁTICAS. Determinación de la función original *g(x)*.

a. ¿Cuántos puntos críticos tiene la función original *g(x)*?
b. ¿Dónde se localizan éstos?
c. ¿En dónde se localizan los extremos locales?
d. ¿Cuál es la expresión algebraica de la parábola?
e. Haz un bosquejo gráfico de la función *g(x)*.



f. ¿Qué tipo de función es la que graficaste en el punto anterior?
g. ¿Cuál es su expresión algebraica?

Bibliografía

1. Hitt, Fernando, 1997. Visualización matemática. Representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Revista de Educación Matemática.* Vol. 10, pp. 23-45.
2. Slavit, David, 1993. *Graphical representations in and out of the precalculus textbook.* Arkansas College.
3. Proyecto "*El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza del cálculo diferencial*" . Bravo Tapia, José María; Ibarra Olmos, Silvia Elena y Grijalva Monteverde, Agustín. Realizado con apoyo de la Dirección de Investigación y Postgrado de la Universidad de Sonora.
4. Duval, Raymond, (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica, México.
5. Van Blokland, Piet; Kok, Douwe; Tall, David. *Software para la enseñanza del cálculo.* V.U. Ámsterdam, Holanda.
6. Duval Raymond, 1988. Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. Traducción del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México.
7. Bravo Tapia, José María; Ibarra Olmos, Silvia Elena y Grijalva Monteverde, Agustín (1997). Hacia la construcción del concepto de derivada. Reporte de una experiencia basada en una propuesta metodológica con sustento constructivista. *Memorias de la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, Morelia Michoacán, México.
8. Bravo Tapia, José María; Ibarra Olmos, Silvia Elena y Grijalva Monteverde, Agustín, (1997). Una propuesta para abordar el concepto de derivada con apoyo de la computadora. *Memorias del VI Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Welzenburger*, México, D.F.
9. Bravo Tapia, José María; Ibarra Olmos, Silvia Elena y Grijalva Monteverde, Agustín, (1999). Derivando con recursos gráficos y apoyo computacional. *Memorias del XXXII Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana*. Guadalajara, Jal., México.
10. Bravo Tapia, José María; Ibarra Olmos, Silvia Elena y Grijalva Monteverde, Agustín, (2001). Las reglas de derivación: una construcción geométrica. Reporte de una experiencia con profesores de matemáticas de los niveles medio superior y superior. *Memorias de la Conferencia Internacional sobre Uso de Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas y Noveno Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior.* Morelia, Mich., México.