ECUACIONES DIFERENCIALES ALGEBRÁICAS Y CIRCUITOS ELÉCTRICOS

L. M. Francisco C. García Durán
M. C. Horacio Leyva Castellanos
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora

Resumen

El estudio de las Ecuaciones Diferenciales Algebraicas es un área de reciente consolidación. Con el fin de motivar una definición de ellas, en este trabajo se presenta un ejemplo de modelación en circuitos eléctricos que ilustra una de sus características.

Es conocido que el comportamiento dinámico de numerosos problemas que se presentan en Física, Química y en aplicaciones técnicas, puede ser modelado a través de ecuaciones diferenciales. En ocasiones, con el fin de tomar en cuenta leyes tales como las de conservación, Leyes de Kirchhoff en circuitos eléctricos, o restricciones cinemáticas o geométricas, etcétera, se deben incorporar a los modelos ecuaciones algebraicas implícitas no lineales. Esto da lugar a la aparición de ecuaciones que eran llamadas, en la década de los sesenta, dependiendo del área: singulares, implícitas, diferenciales-algebraicas, descriptoras, espacio-estado generalizadas, no-canónicas, no-causales, degeneradas, semi-estado restringidas, modelo de orden reducido y sistemas no estándar. A partir de la década de los setenta estas ecuaciones fueron paulatinamente reconocidas como formando parte de una misma clase de ecuaciones bajo el nombre genérico de *Ecuaciones Diferenciales Algebraicas* (EDA's). Constituidas como un particular campo de estudio e investigación, durante los últimos veinte años del siglo XIX han sido objeto de interés y recibido atención directa, tanto en cuestiones analíticas como en lo referente a su resolución numérica.

Agrupándolos por cómo son deducidas las ecuaciones, más que por la estructura de la ecuación, podemos distinguir cuatro tipos esenciales de aplicaciones –traslapados en alguna extensión- dónde surgen EDA's:

- Modelación de redes.
- Perturbación singular.

- Discretización de ecuaciones en derivadas parciales.
- Problemas variacionales con restricciones.

Históricamente, en la modelación de circuitos eléctricos surgieron inicialmente la mayoría de las EDA's. Así, retomando este inicio para ilustración del tipo de ecuaciones que se consideran *Diferenciales Algebraicas* consideraremos el circuito de un amplificador de transistor (Figura 1), con un transistor, dos fuentes de voltaje, tres capacitores y seis resistencias, donde $U_e(t)$ es el voltaje de entrada, $U_b = 6$ el voltaje de operación, $U_i(t)$, $i = 1,2,3,4,5$, son los voltajes en los nodos 1, 2, 3, 4, 5, y el último es el voltaje de salida.

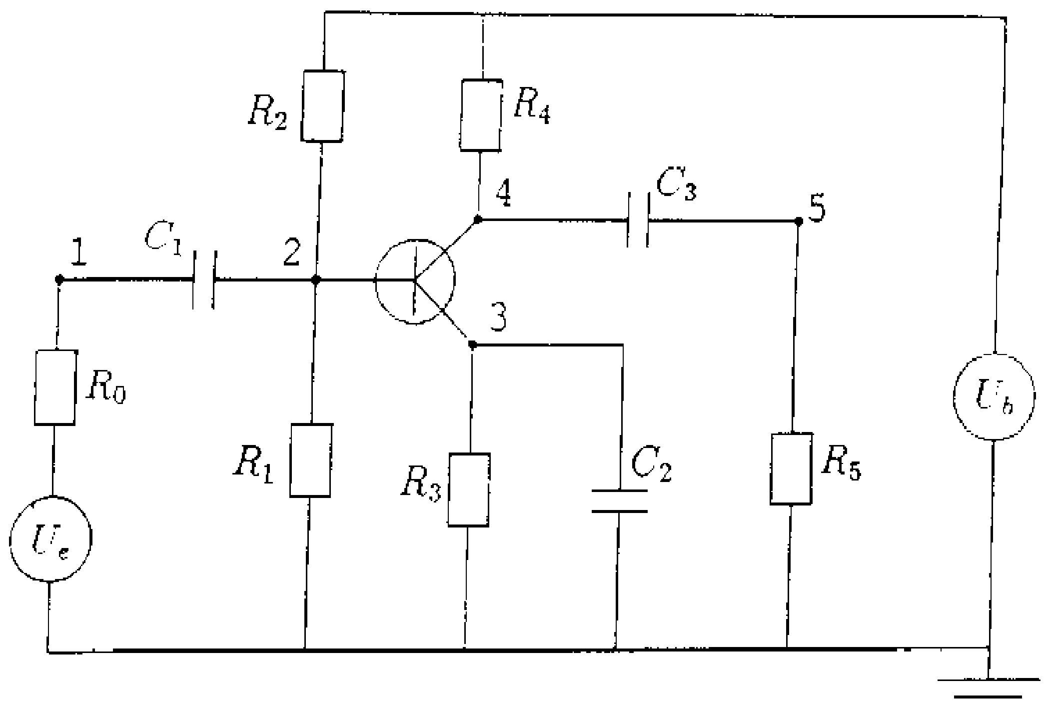

Figura 1

En el estudio de circuitos disponemos de las siguientes leyes:

1. La suma de todas las corrientes fluyendo hacia un punto es igual a la suma de las corrientes fluyendo desde el punto (Primera Ley de Kirchhoff).
2. La suma algebraica de las caídas de voltaje alrededor de cualquier lazo de un circuito es cero (Segunda Ley de Kirchhoff).
3. La caída de voltaje entre dos punto de un circuito es igual al producto de la corriente y la resistencia entre dichos puntos (Ley de Ohm).

La ley de Ohm nos dice que para una resistencia se satisface,

$$I = U / R,$$

y la corriente a través de un condensador cumple con la igualdad,

$$I = C \frac{dU}{dt},$$

donde R y C son constantes características del elemento pertinente, y U es el voltaje.

El transistor en el circuito actúa como amplificador en el sentido de que la corriente desde el nodo 4 al nodo 3 es 99 veces más grande que la del nodo 2 al nodo 3, y depende de la diferencia de voltaje $U_2 - U_3$ en un modo no lineal.

Siguiendo el análisis nodal clásico, la aplicación de la Primera Ley de Kirchhoff a cada uno de los cinco nodos del circuito de la Figura 1 nos permite obtener el sistema de ecuaciones que describen el circuito.

Nodo 1:

$$\frac{U_e(t)}{R_0} - \frac{U_1}{R_0} + C_1(U_2' - U_1') = 0$$

Nodo 2:

$$\frac{U_b}{R_2} - U_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + C_1(U_1' - U_2') - 0.01 f(U_2 - U_3) = 0$$

Nodo 3:

$$f(U_2 - U_3) - \frac{U_3}{R_3} - C_2 U_3' = 0$$

Nodo 4:

$$\frac{U_b}{R_4} - \frac{U_4}{R_4} + C_3(U_5' - U_4') - 0.99 f(U_2 - U_3) = 0$$

Nodo 5:

$$-\frac{U_5}{R_5} + C_3(U_4' - U_5') = 0$$

De acuerdo a la literatura, un circuito viable se consigue tomando como constantes para los elementos involucrados los siguientes valores:

Para las resistencias,

$$R_0 = 1000,\ \mathrm{R}_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 9000.$$

Para los condensadores,

$$C_k = k10^{-6},\ k = 1, 2, 3.$$

Y para el transistor, la dependencia no lineal de la diferencia de voltaje se puede dar como la función,

$$\mathrm{f}(U) = 10^{-6}(\ \mathrm{e}^{U/0.026} - 1\ ).$$

Con la señal inicial escogida como

$$U_e(t) = 0.4\ \mathrm{sen}(200\pi t)$$

Este sistema de ecuaciones expresado matricialmente es:

$$\begin{pmatrix} -c_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & -c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_3' \\ U_4' \\ U_5' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U_1}{R_0} - \frac{U_e(t)}{R_0} \\ U_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{U_b}{R_2} + 0.01 f(U_2 - U_3) \\ \frac{U_3}{R_3} - f(U_2 - U_3) \\ \frac{U_4}{R_4} - \frac{U_b}{R_4} + 0.99 f(U_2 - U_3) \\ \frac{U_5}{R_5} \end{pmatrix}$$

Es decir, un sistema de la forma,

$$M\, u' = \varphi(u)$$

donde M es una matriz singular de rango 3. La cual es una *Ecuación Diferencial Algebraica no lineal*.

Existen varios tipos de *Ecuación Diferencial Algebraica*, el más sencillo es el *lineal de coeficiente constante*, que tiene la forma

$$Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$$

donde $A, B \in \Re^{n \times n}$, son matrices cuadradas y $t \in \Re$, es una variable real.

Para este tipo de ecuaciones, que aparecen principalmente en el estudio de circuitos eléctricos, en la década de los sesenta y principios de los setenta se realizaron investigaciones sobre la teoría analítica de ellas y de algunos sistemas de coeficiente constante no lineales, así como de su resolución numérica; muchos de los resultados obtenidos pueden verse en los trabajos de Campbell ([1] y [2]).

Otra área donde aparecen las EDA's de coeficiente constante lineal es en Teoría de Control: en ella un sistema lineal es de la forma

$$x' = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

donde A, B, C, D son matrices constantes reales, x es el estado del sistema, u es el control e y es la salida del sistema. Si consideramos la salida y como conocida y queremos encontrar el estado x o el control u, entonces el sistema anterior puede ser visto como la ecuación diferencial algebraica

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix}$$

Para hacer más evidente el porqué de los adjetivos *diferencial* y *algebraica* en la denominación de estas ecuaciones podemos sumar las ecuaciones de los nodos 1 y 2, para obtener la ecuación algebraica,

$$\frac{U_1}{R_0} + U_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{U_e(t)}{R_0} - \frac{U_b}{R_2} + 0.01 f(U_2 - U_3) = 0$$

Sumando las ecuaciones de los nodos 4 y 5 obtenemos otra ecuación algebraica,

$$\frac{U_5}{R_5} + \frac{U_4}{R_4} - \frac{U_b}{R_4} + 0.99 f(U_2 - U_3) = 0$$

Así, obtenemos el sistema de ecuaciones formado por las tres ecuaciones *diferenciales* correspondientes a los nodos 1, 3 y 5, y por las dos ecuaciones *algebraicas* anteriores. Este sistema con la introducción, por ejemplo, de los cambios de variables:

$$U_1 - U_2 = y_1,\ U_3 = y_2,\ U_4 - U_5 = y_3,\ U_1 = z_1,\ U_4 = z_2,$$

se escribe en la forma:

$$C_1 y_1' = \frac{U_e(t)}{R_0} - \frac{z_1}{R_0}$$

$$C_2 y_2' = f(z_1 - y_1 - y_2) - \frac{y_2}{R_3}$$

$$C_3 y_3' = \frac{z_2 - y_2}{R_5}$$

$$0 = \frac{z_2 - y_2}{R_5} + \frac{z_2}{R_4} - \frac{U_b}{R_4} + 0.99 f(z_1 - y_1 - y_2)$$

$$0 = \frac{z_1}{R_0} + (z_1 - y_1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{U_e(t)}{R_0} - \frac{U_b}{R_2} + 0.01 f(z_1 - y_1 - y_2)$$

El anterior sistema tiene la forma:

$$y' = f(y, z) \qquad (1.a)$$
$$0 = g(y, z) \qquad (1.b)$$

que es una Ecuación Diferencial Algebraica *Semiexplícita*. Sus valores iniciales son llamados *consistentes* si

$$0 = g(y_0, z_0).$$

Si suponemos que el Jacobiano $g_z = (y, z)$ es invertible en una vecindad de la solución del EDA, entonces la ecuación (1.b) posee una solución localmente única (Teorema de la función implícita)

$$z = \mathrm{G}(y)$$

que al sustituirla en la ecuación (1.a) da una ecuación diferencial ordinaria

$$y' = f(y, \mathrm{G}(y))$$

En este caso, decimos que la Ecuación Diferencial Algebraica tiene *índice* 1.

DEFINICIÓN. Una *Ecuación Diferencial Algebraica* es una ecuación diferencial implícita

$$F(x'(t), x(t), t) = 0$$

Donde la derivada parcial $F'_y\,(y, x, t)$ es singular sobre el domino de F.

Entre una EDO implícita con Jacobiano no singular, y una EDA hay una sutil diferencia que ilustramos con el ejemplo de EDA:

$$\begin{aligned} dx/dt &= z \\ 0 &= x - t \end{aligned}$$

Claramente la solución es $x = t$, $z = 1$, la cual no requiere de condición inicial o de frontera alguna; en realidad, si imponemos una condición inicial arbitraria $x(0) = c$, $c \neq 0$, ésta no cumple con la parte algebraica por lo que es inconsistente con la EDA.

Debido a la presencia de la parte algebraica de las EDA's su integración puede causar dificultades esenciales, en contraste con la de las ecuaciones diferenciales ordinarias explícitas. Las restricciones definen una variedad en la cual deben estar las soluciones de la EDA, así que los valores iniciales deben ser escogidos de tal manera que satisfagan las restricciones, es decir, que estén en la variedad; además, en su resolución numérica las soluciones computadas no deben alejarse demasiado de la variedad. Este fenómeno, llamado *deriva*, se presenta cuando los métodos tradicionales para ecuaciones diferenciales ordinarias explícitas son aplicados directamente a la EDA, por lo que deben ser modificados para aplicarse a las EDA's. Actualmente se encuentra en pleno desarrollo la investigación sobre los métodos numéricos más adecuados a los distintos tipos de EDA's, constituyendo una interesante y activa área del análisis numérico.

Bibliografía

[1] Campbell, S. L., *Singular systems of differential equations I*, Pitman Publishing Inc. (1980).

[2] Campbell, S. L., *Singular systems of differential equations II*, Pitman Publishing Inc. (1982).

[3] Brenan, K.E., Campbell, S.L., Petzold, L.R., *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, SIAM (1996).