AUTÓMATAS CELULARES: LA REGLA 150

Álvaro Álvarez Parrilla[1] **Aurora Espinoza Váldez**[2]
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Baja California

Resumen

Un autómata celular unidimensional se puede considerar como una secuencia de valores que evolucionan de acuerdo a reglas predeterminadas. En este trabajo se presenta: primero un método algebraico atribuido a Wolfram [9], basado en dipolinomios, para el estudio de autómatas celulares unidimensionales con valores en el campo finito de dos elementos y con condiciones de frontera periódicas; y segundo un avance o reporte del estudio de la regla 150 para autómatas celulares unidimensionales.

1 Introducción

Existen muchos sistemas naturales cotidianos cuya conducta y estructura compleja ha desafiado, hasta ahora, incluso el análisis cualitativo. En algunos casos esta conducta puede simularse mediante los llamados sistemas dinámicos, donde se pretende capturar el ser del proceso. Algunos de los sistemas pueden ser modelados numéricamente, e incluso analiticamente, con solo unas variables; pero en la mayoría de los casos la simulación comprende demasiados factores y hace falta un mayor acercamiento al problema.

Definición 1. Un *autómata celular unidimensional* consiste en una sucesión o secuencia de sitios (una configuración o estado) donde cada sitio o celda contiene un valor numérico, y los valores de los sitios evolucionan en pasos de tiempo discretos según reglas determinísticas.

Los Autómatas Celulares son una clase de sistemas dinámicos discretos cuyas caracteristicas los hacen un candidato idoneo para el estudio de sistemas con un nivel alto de complejidad, ya que éstos pueden emplearse en una gran variedad de campos, por ejemplo en física, biología y sistemas de cómputo [6, 3, 7, 2].

[1]**E-mail:** alvaro@faro.ens.uabc.mx
[2]**E-mail:** aev_tota@yahoo.com

Una familia de reglas para la evolución del autómata celular se obtiene a través de funciónes cuyo valor en un sitio determinado es obtenido de los valores del propio sitio y de sus vecinos más cercanos en el paso de tiempo anterior. Cada regla lleva a modelos que difieren en detalles, sin embargo parece que entran en solo cuatro clases cualitativas, las cuales por su conducta pueden caracterizarse de la siguiente manera [8]:

- Clase 1: La evolución lleva a un estado homogéneo. Sin tener en cuenta el estado inicial, el sistema evoluciona siempre a un único estado homogéneo o punto fijo. Por ejemplo, después de un periodo de "transición," todos los sitios tendrán valor 0.

- Clase 2: La evolución lleva a estructuras periódicas que están separadas (temporalmente) y son simples. En este caso, los efectos de las reglas en los sitios tienen un rango finito. Esto es: un cambio en el valor de un solo sitio afecta solo una región finita de sitios alrededor de él, incluso después de un número infinito de pasos de tiempo.

- Clase 3: La evolución lleva a estructuras que siguen un modelo caótico. Aquí los efectos de las reglas se propagan a los sitios vecinos a una velocidad fija pero con un rango indefinido. Si el estado inicial se desordena, esta dependencia puede llevar a una sucesión aparentemente caótica de valores para un sitio particular

- Clase 4: La evolución lleva a estructuras complejas, que no se explican por las clases anteriores. Los efectos de las reglas también se propagan indefinidamente a los sitios vecinos, pero a diferencia de los de clase 3, a varias velocidades.

La existencia de solo cuatro clases cualitativas indica la universalidad en la conducta del autómata celular; muchos rasgos del autómata celular solo dependen de la clase a la que pertenecen y no de los detalles precisos de su evolución.

Las tres primeras clases de conducta del autómata celular mencionadas son análogas a tres clases de conducta encontradas en sistemas dinámicos continuos. La clase 1 es análoga a las soluciones con un punto fijo. La clase 2 es análoga a órbitas periódicas. Finalmente la clase 3 es análoga a sistemas que tienen dependencia sensible a las condiciones iniciales (sistemas dinámicos caóticos).

Sin embargo, en la clase 4 las estructuras propagadas permiten que el valor de un sitio afecte a sitios arbitrariamente distantes después de un tiempo suficientemente largo. Es de notar que ninguna conducta análoga a las de clase 4 se ha encontrado todavía en un sistema dinámico continuo. La complejidad de esta conducta hace pensar en la conjetura de que estos sistemas puede representar máquinas de cómputo universal [8, 2].

Otra diferencia fundamental es que a diferencia de otros sistemas dinámicos reversibles, los autómatas celulares son, en general, irreversibles (esto es la regla que describe el cambio de una configuración a otra, no es una función injectiva) y por lo tanto contradicen la segunda ley de termodinámica.

Entre las aplicaciones más importantes de autómatas celulares en el área de física, matemáticas y ciencias computacionales, destacan mecánica de fluidos, generadores de números aleatorios, mejor entendimiento de sistemas dinámicos continuos, y máquinas de computo universal [6, 3, 7, 2].

2 Antecedentes matemáticos

En el presente trabajo nos limitaremos a automatas celulares unidimensionales con valores en un anillo finito $_k$ de k elementos, con N sitios y con condiciones de frontera periódicas. Esto es, los autómatas celulares en cuestión consistirán de una secuencia de N sitios, donde cada uno lleva un valor entero de 0 a $k-1$. Es inmediato que un autómata celular finito con N sitios tiene k^N posibles estados o configuraciones distintas.

La configuración completa de un autómata celular en el tiempo t, se especifica por los valores de sus N sitios, y puede representarse por un polinomio característico

$$A^{(t)}(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i(t)x^i, \tag{0.1}$$

donde el valor del sitio i en el tiempo t está representado por el valor del coeficiente $a_i(t)$.

Los valores de los sitios evolucionan en los pasos de tiempos discretos según reglas determinísticas. Por lo tanto, la evolución depende de los valores tanto de k (el orden del anillo $_k$) como del número r de vecinos que la regla tome en cuenta. Los sitios asumen los posibles valores $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, y el valor de un sitio depende de los valores de los r sitios distantes en ambos lados en el paso de tiempo anterior. Un ejemplo muy sencillo y bien conocido, pues da como resultado

Tabla 1: La regla 90: $01011010_2 = 90_{10}$

Valores de los 3 vecinos en el tiempo $t-1$	111	110	101	100	011	010	001	000
Valor en el tiempo t	0	1	0	1	1	0	1	0

Tabla 2: La regla 150: $10010110_2 = 150_{10}$

Valores de los 3 vecinos en el tiempo $t-1$	111	110	101	100	011	010	001	000
Valor en el tiempo t	1	0	0	1	0	1	1	0

el triángulo de Pascal, es la regla dada por

$$a_i(t) = a_{i-1}(t-1) + a_{i+1}(t-1), \tag{0.2}$$

con $r = 1$.

El número de reglas diferentes con k y r dados está dado por $k^{k^{2r+1}}$ y por consiguiente tiende a aumentar rapidamente, incluso para k y r pequeños.

Así pues, en el caso en que $k = 2$ y $r = 1$ existen $2^{2^{2*1+1}} = 256$ reglas distintas, las cuales se pueden clasificar de la siguiente manera: Los valores de las ocho posibles combinaciones de los tres sitios anteriores forman un número binario que se cita como un entero decimal; es importante acomodar las ocho combinaciones como se muestra en la Tabla 1. El ejemplo que en ella se muestra es para la regla dada por (0.2) con aritmética $\mod 2$. Esto nos da el número binario 01011010_2 que en base decimal es 90_{10}. Es claro que este proceso etiqueta las 256 reglas de una manera unívoca. La regla 90 se ha estudiado ampliamente (por ejemplo en [5, 9, 1]), en particular se han estudiado sus posibles configuraciones y su evolución temporal.

Consideremos ahora la regla dada por la suma modulo dos de los valores de sus tres vecinos más cercanos en el paso del tiempo anterior, osea

$$a_i(t+1) = a_{i-1}(t) + a_i(t) + a_{i+1}(t) \mod 2. \tag{0.3}$$

De acuerdo al metodo presentado arriba, los valores de las ocho posibles combinaciones de los tres sitios anteriores forman un número binario, cuya representación en base diez corresponde a 150, esto se muestra en la Tabla 2.

Esta regla, al igual que la regla 90, satisface una propiedad que resulta ser esencial para poder utilizar las técnicas algebraicas introducidas en [5]. Esta propiedad está basada en la siguiente definición:

Definición 2. El *principio de superposición aditiva* dice que la configuración obtenida por la evolución para t pasos de tiempo de una configuración inicial $A^{(0)}(x)+B^{(0)}(x)$ es idéntica a $A^{(t)}(x)+B^{(t)}(x)$ la cual es resultado de la evolución separada de $A^{(0)}(x)$ y $B^{(0)}(x)$.

En otras palabras si $T(x)$ representa la regla que rige al autómata celular, entonces la regla $T(x)$ es *aditiva* si satisface

$$T(x)\big(A^{(0)}(x)+B^{(0)}(x)\big)=T(x)A^{(0)}(x)+T(x)B^{(0)}(x). \tag{0.4}$$

Este principio permite una descripción de la evolución de las configuraciones por medio de multiplicación de polinomios.

Es conveniente considerar "polinomios" que contienen exponentes positivos y negativos. Por definición $H(x)$ es un *dipolinomio* si existe un entero m tal que $x^m H(x)$ es un polinomio ordinario de x. Los dipolinomios poseen propiedades de divisibilidad y de congruencia análoga a la de los polinomios ordinarios [4].

La multiplicación de un polinomio caracterítico $A(x)$ por $x^{\pm j}$, representa una configuración en que el valor de cada sitio se ha trasladado (movido) a un sitio j lugares a su derecha o izquierda, dependiendo si el signo es positivo o negativo respectivamente.

De esta manera, la evolución que corresponde a la regla 150 mencionada anteriormente, se representa multiplicando al polinomio característico $A^{(t)}(x)$ por el dipolinomio

$$T(x)=x^{-1}+1+x, \tag{0.5}$$

y la correspondiente a la regla 90 mediante el dipolinomio

$$T(x)=x^{-1}+x. \tag{0.6}$$

Nótese que cualquier dipolinomio es congruente, módulo x^N-1, a un polinomio de grado menor que N, por lo que la evolución de un autómata celular con N sitios y *con condiciones de frontera periódicas* se da mediante la multiplicación, módulo x^N-1, del polinomio caracteristico $A^{(t)}(x)$ por la regla $T(x)$.

Las propiedades globales de los autómatas celulares son entonces determinadas por las propiedades algebraicas de estos dipolinomios.

Así pues, la evolución del automata celular sobre un anillo finito de 2 elementos con N sitios, condiciones de frontera periódicas y con la regla dada por 0.5 toma una forma particularmente simple:

$$A^{(t+1)}(x)=T(x)A^{(t)}(x) \mod (x^N-1), \tag{0.7}$$

donde toda la aritmética en los coeficientes polinómicos se realiza $\mod 2$.

Ejemplo 1. Una configuración para un autómata celular simple, con $k = 2$, $r = 1$ y $N = 10$ consiste en un estado de 10 sitios con los valores 0 ó 1. Aplicaremos la regla 150 (0.5), para obtener en el siguiente paso de tiempo la configuración correspondiente. Considerese una configuración inicial con los sitios 1, 3, 4 y 7 con valor 1 y los restantes con valor 0, así el polinomio que describe esta configuración inicial es:

$$A^{(0)}(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^6. \tag{0.8}$$

Para obtener $A^{(1)}(x)$, es necesario multiplicar $A^{(0)}(x)$ por $T(x)$ recordando que se está trabajando sobre $_2[x]/(x^N - 1)$, de donde

$$\begin{aligned}
A^{(1)}(x) &= T(x)A^{(0)}(x) \\
&= (x + 1 + x^{-1})(1 + x^2 + x^3 + x^6) \\
&= x^{-1} + 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 \\
&= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^9 \mod (x^N - 1) \\
&= 1 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^9 \mod 2.
\end{aligned}$$

3 Resultados

Se presentan los resultados obtenidos al realizar un estudio de la regla 150 de acuerdo al procedimiento algebraico descrito anteriormente.

Teorema 1. *Una configuración $A(x)$ es alcanzable en una evolución de un autómata celular de tamaño N, descrito por $T(x)$, si y sólo si $A(x)$ es divisible por $A_1(x) = (x^N - 1, T(x))$, recordemos que esta notación es para el máximo común divisor.*

Podemos concluir de este teorema que si $N \neq 3l$ todas las 2^N configuraciones son alcanzables y si $N = 3l$, $A(x)$ es alcanzable si y solo si $x^2 + x + 1 | A(x)$. Esto en contraste con lo que ocurre con la regla 90, donde se tiene que si N es par, 3/4 de todas las configuraciones posibles no son alcanzables; y si N es impar exactamente la mitad de todas las configuraciones posibles son alcanzables.

Teorema 2. *Al contrario de los autómatas celulares de la regla 90, en la evolución de los autómatas celulares definidos por la regla 150 si pueden generarse configuraciones que contienen un número impar de sitios con valor uno, por lo tanto no solo pueden ocurrir como condiciones iniciales.*

Ejemplo 2. La configuración inicial $A^{(0)}(x) = 1$ tiene como sucesor la configuración

$$\begin{aligned} A^{(1)}(x) &= T(x)A^{(0)}(x) \\ &= (x + 1 + x^{-1})1 \\ &= x + 1 + x^{N-1} \mod (x^N - 1) \\ &= 1 + x + x^{N-1} \mod 2. \end{aligned}$$

que contiene un numero impar de sitios siempre que $N > 2$.

Lema 1. ***(Wolfram, 1984)*** *Dos configuraciones $A^{(0)}(x)$ y $B^{(0)}(x)$ tienen la misma configuración $C(x) \equiv T(x)A^{(0)}(x) \equiv T(x)B^{(0)}(x)$ después de un paso de tiempo en la evolución de un autómata celular aditivo si y solo si $A^{(0)}(x) = B^{(0)}(x)Q(x)$, donde $T(x)Q(x) \equiv 0$.*

Este lema nos dá la posibilidad de reconocer cuando es que dos configuraciones tienen el mismo sucesor. Lo que nos da pie para obtener el siguiente,

Teorema 3. *Las configuraciones en el autómata celular que tiene por lo menos un predecesor, tiene un predecesor exactamente para $N \neq 3l$ y exactamente cuatro para $N = 3l$.*

Ejemplo 3. Sea $N = 9$, $k = 2$, $r = 1$ y $Q(x)$ la coniguración inicial dada por $Q(x) = 1+x+x^3+x^4+x^6+x^7$. Al aplicar la regla 150, para obtener la configuración al siguiente paso de tiempo, observamos que $Q(x) = 0$.

La evolución de un autómata celular se puede representar mediante lo que se conoce como el *grafo de transición de estados* donde los nodos representan distintas configuraciones y las aristas (dirigidas) representan la evolución de una configuración a otra. Un *árbol arraigado* es un árbol (grafo acíclico conexo) en el cual un nodo en particular se designa como la raíz.

Lema 2. ***(Wolfram, 1984)*** *Todos los árboles arraigados a los nodos en todos los ciclos del gráfico de transición de estados para un autómata celular definido por una regla aditiva son idénticos.*

Este resultado nos indica varias cosas entre las que destacan: en la evolución de un autómata celular bajo la regla 150 se tiene siempre una etapa de transientes para luego llegar a un ciclo de configuraciones que se repiten. Además el número de predecesores de una configuración que se encuentre en un ciclo, y que no sean elementos del ciclo, siempre es el mismo. Llamemos *punto fijo* a un ciclo de longitud uno. Entonces tenemos el siguiente

Teorema 4. *Para un autómata celular definido con la regla 150, si $N \neq 2l$ existen exactamente dos puntos fijos distintos y para $N = 2l$ exactamente cuatro puntos fijos distintos. En particular, si $N \neq 2l$ los dos únicos puntos fijos distintos son las configuraciones* $000\ldots$ *y* $111\ldots$. *Para $N = 2l$, los únicos puntos fijos son* $000\ldots$, $101010\ldots$, $010101\ldots$, *y* $111111\ldots$

Teorema 5. *No es posible obtener la configuración nula después de solo un paso de tiempo para cualquier configuración inicial con un solo sitio con valor 1 en cualquiera de sus sitios.*

Lema 3. ***(Wolfram, 1984)*** *Las longitudes de todos los ciclos de un autómata celular de tamaño N con una regla aditiva divide la longitud Π_N del ciclo obtenido con una configuración inicial que contiene un solo sitio con valor uno.*

Esto también nos indica que Π_N es la longitud del ciclo de longitud máxima.

Teorema 6. *Para un autómata celular definido con la regla 150, con $N = 3 \cdot 2^j$, la longitud del ciclo obtenida a partir de la configuración inicial* $(1 + x^{2^j})$ *es 1.*

Conjetura 1. Para $N = 3 \cdot 2^j$, $j \neq 0$, cualquier configuración evoluciona después de 2^j pasos de tiempo a la configuración nula.

Conjetura 2. Para el autómata celular definido en base a la regla 150, con $N = 2^j$, la longitud del ciclo de longitud máxima satisface: $\Pi_N = 2\Pi_{\frac{N}{2}}$.

Este resultado, aunque no se ha demostrado formalmente, se basa en la simulación numerica (utilizando Mathematica) en donde se puede observar el mencionado patrón para Π_N.

5 Conclusiones

Se ha utilizado un formalismo apropiado para comenzar a estudiar la evolución de autómatas celulares unidimensionales sobre $\mathbb{Z}_2$ y con condiciones de frontera periódicas. Los resultados preliminares muestran que, a pesar de que tanto la regla 90 como la regla 150 son *aditivas*, existen diferencias importantes entre ellas.

Referencias

[1] A. Granville. Zaphod Beeblebrox's brain and the fifty-ninth row of Pascal's Triangle. *Amer. Math. Monthly*, 99:318–331, 1992.

[2] E. F. Moore. Machine models of self-reproduction. In *Proc. Symp. Appl. Math. 14, 17 (1962) reprinted in: Essays on cellular automata, A. W. Burks. Univ. of Illinois Press*, 1966.

[3] N. H. Packard and S. Wolfram. *Journal of statistical Physics*, 38:901–946, March 1985.

[4] F. J. Mac Williams and N.J.A. Sloane. *The theory of error-correcting codes*. Amsterdam: North-Holland, 1977.

[5] S. Wolfram. Geometry of binomial coefficients. *Amer. Math. Monthly*, 91:566–571, 1984.

[6] S. Wolfram. *Theory and Applications of Cellular Automata*. World Scientific, Singapore, 1986.

[7] S. Wolfram. Emerging syntheses in science. In *Proceedings of the Founding Workshops of the Santa Fe Institute*, (Addison Wesley, 1988).

[8] S. Wolfram. Universality and Complexity in Cellular Automata. *Physica D*, 10:1–35, January 1984.

[9] S. Wolfram, O. Martin, and A.M. Odlyzko. Algebraic Properties of Cellular Automata. *Communications in Mathematical Physics*, 93:219–258, March 1984.