LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES COMO MOTOR DEL DESARROLLO DEL ÁLGEBRA

Raymundo Bautista Ramos
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

1 Introducción

Esta es una versión ampliada de una conferencia dada el 14 de febrero de 2002 en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, durante la XII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas.

El propósito de este escrito es dar una idea del camino recorrido por un brillante grupo de matemáticos de distintas épocas y partes del mundo, en la construcción de lo que ahora llamamos álgebra. Hemos tomado como hilo conductor el problema de la resolución por radicales de ecuaciones algebraicas. Esto nos conduce desde los primeros pasos dados por matemáticos ahora desconocidos en Babilonia hasta la hermosa teoría creada por Evariste Galois en la Francia de principios del siglo XIX.

2 Los inicios del álgebra, álgebra práctica

Los sumerios, uno de los primeros pueblos en desarrollarse en Mesopotamia, dejaron en inscripciones grabadas en tablillas de arcilla una rica información sobre sus actividades, 3000 años antes de Cristo. Estas tablillas son testigos de que sus mercaderes trataban ya en ese entonces con cuentas, recibos, notas contabilidad y sistemas de medidas, es decir con todo aquello que tiene que inventar un grupo de personas que se ha dado a la tarea de acumular riquezas.

Todo este movimiento mercantil requiere de control, y el control se consigue usando números y medidas, cuánto se vende, cuánto se compra, cuánta tierra se tiene, cuánto se debe, etc. Tras los sumerios otros pueblos en fases sucesivas controlaron la región de Mesopotamia, estos pueblos heredaron y mejoraron las leyes, formas de gobierno y los distintos métodos de contabilidad inventados por los sumerios.

Se conocen tablillas en Babilonia relacionadas con las matemáticas, algunas contienen los cuadrados de los números del 1 al 60 y cubos del 1 al 32.

Otras contienen tablas de multiplicar y de dividir y progresiones geométricas. Las tablillas con temas matemáticos pertenecen a distintos períodos, el último período sumerio (2100 a. C.), la primera dinastía babilónica (época del rey Hammurabi) y otros entre 600 a. C. y 300 d. C.

Es sorprendente que en esta temprana edad los matemáticos de estas regiones tuvieran la habilidad para resolver ecuaciones de segundo grado, en estos textos matemáticos se pueden encontrar problemas como el siguiente:

Conocer la longitud del lado de un cuadrado cuya área menos el lado es igual a 870.

Para la solución se dan las siguientes instrucciones:

Se toma la mitad de 1, que es 1/2 , se multiplica esta cantidad por sí misma lo que da ¼, se suma este resultado a 870 obteniéndose (1+(870 x 4))/4 = 3481/4 = 870.25, pero este número es el cuadrado de 29.5. Por último se suma 29.5 a 0.5 resultando 30, la magnitud del lado del cuadrado.

De esta misma manera se da una serie de problemas numéricos y su solución. En ningún lado se explica el porqué siguiendo estos métodos se resuelve el problema planteado.

En notación moderna el ejemplo anterior corresponde a una ecuación de la forma

$$x^2 - px = q$$

la solución dada corresponde a la fórmula:

$$x = \sqrt{(p/2)^2 + q} + p/2$$

También se tratan problemas del tipo

$$x^3 + x^2 = b$$

la solución está dada por medio de tablas en las que se dan los valores de $n^3 + n^2$ para $1 < n < 30$.

Otro centro importante en el que se han hallado vestigios de interés matemático es Egipto, cuya civilización tuvo un período muy grande de desarrollo, desde 3100 a. C. a 322 a. C.

En Egipto, dadas sus características geográficas y la existencia del Río Nilo se desarrolla un Estado altamente centralizado, gobernado y administrado por una burocracia con un control casi absoluto de todos los quehaceres de sus súbditos.

La administración de un imperio tan basto y centralizado requería sistemas de contabilidad eficientes. La labor de llevar a cabo todo este trabajo de administración estuvo a cargo de los escribas, quienes desarrollaron métodos para llevar a cabo operaciones aritméticas, sin embargo a pesar de que las exigencias a las que estaban sujetos eran mucho más altas que para sus contrapartes en Mesopotamia no llegaron tan lejos en sus descubrimientos algebraicos como estos últimos.

En contraste con la Mesopotamia en los pocos escritos egipcios de temas matemáticos no se han encontrado tablas de multiplicación, pues desarrollaron un método ingenioso en el que la única tabla de multiplicación necesitada es la tabla del 2.

Para ilustrar su procedimiento supongamos que deseamos multiplicar x por y. Tomemos x y lo expresamos en base 2 como

$$x = 2^{a_1} + 2^{a_2}+\ldots+2^{a_s}$$

con $a_1 < a_2 < \ldots < a_s$, entonces:

$$xy = y2^{a_1}+y2^{a_2} + \ldots + y2^{a_s}.$$

Para dar un ejemplo concreto tomemos 13 y 7, escribimos ahora dos columnas, en la primera ponemos múltiplos de 2 y en la segunda los múltiplos por potencias de 2 de 7.

-1	7
2	14
-4	28
-8	56

marquemos con – los números de la primera columna que sumen 13, ahora súmense los respectivos términos que aparecen a la derecha, o sea los números 7, 28, 56, cuya suma es $91 = 13 \times 7$.

En los papiros de temas matemáticos aparecen, con la excepción de un caso, problemas que involucran solo ecuaciones de primer grado en una incógnita.

En cambio, en geometría desarrollaron una gran cantidad de conocimientos empíricos, este conocimiento lo heredarían los griegos.

3 Filosofía, religión y matemáticas

En las diferentes partes del mundo donde florecieron civilizaciones avanzadas se inventaron sistemas de numeración y métodos para resolver problemas geométricos y algebraicos. En algunas partes se desarrollaron intereses que iban más allá de las necesidades materiales inmediatas. Por ejemplo, entre los babilonios apareció una cierta fascinación por algunas identidades algebraicas, entre los mayas se dio una gran curiosidad por calcular eventos astronómicos en futuros muy lejanos. Entre los griegos nació la inquietud de encontrar explicaciones a los fenómenos de la naturaleza guiadas únicamente por la razón y la observación. Esta característica que forjó al mundo moderno no se encuentra en ninguna de las antiguas civilizaciones.

En Mileto, puerto griego de gran actividad comercial, donde concurrían viajeros de todos los confines del mundo conocido de ese tiempo es el lugar en el cual se inaugura esta novedosa forma de pensar. Es aquí donde nace Tales de Mileto (624 – 548 a. C); en su juventud logra amasar como comerciante una fortuna que le permitirá dedicarse con toda libertad a sus indagaciones científicas y filosóficas. Se sabe que pasó algún tiempo en Egipto en donde se familiarizó con la geometría y astronomía egipcias. De nuevo en Mileto tuvo una gran actividad intelectual, en particular fue la primera persona en adquirir prestigio social gracias a sus descubrimientos matemáticos. La gran innovación de Tales fue la de dar pruebas lógicas de los enunciados geométricos, algo aparentemente único en la historia. De esta manera se inician las matemáticas como una ciencia abstracta.

Cerca de Mileto en la isla egea de Samos nació una de las personalidades más llamativas de la historia griega, se trata de Pitágoras. Sus padres fueron Mnesarco y Pitays, el primero originario del puerto de Tiro, situado en la actual Líbano, su madre era griega. Mnesarco era comerciante en piedras preciosas, viajaba con mucha frecuencia, en estos viajes lo solía acompañar el joven Pitágoras.

En uno de estos viajes su padre regresó a su original Tiro, dándole a Pitágoras la oportunidad de aprender de profesores de Caldea y de Siria. La educación que recibió fue esmerada, sabía tocar la lira y podía recitar a Homero.

Cuando contaba 18 años decidió viajar al centro intelectual griego de entonces, el Puerto de Mileto. Ahí recibió clases de un envejecido Tales, quien le causó una gran impresión. Recibió enseñanzas de uno de los alumnos favoritos de éste, Anaximandro. El mismo Tales aconsejó a Pitágoras viajar a Egipto.

El viaje a Egipto duró alrededor de veinte años, gracias a varias cartas de recomendación conseguidas por su padre, tuvo contacto con el sacerdocio egipcio. Decidió él mismo entrar como sacerdote, después de varios rechazos pudo finalmente entrar en el templo de Diospolis. Su estancia en Egipto le dio la oportunidad de conocer de primera mano muchos de los misterios de esta admirable civilización, entre ellas la geometría que les hizo capaces de construir colosales monumentos.

En 525 a. C. Cambises II rey de Persia invadió Egipto, los egipcios no pudieron resistir. Los seguidores de Cambises tomaron a Pitágoras como prisionero de guerra. El historiador griego Jamblico escribe lo siguiente:

"Mientras estuvo en Babilonia se asoció de buen grado con los Magos, que también se alegraron de tenerlo, fue instruido en sus ritos sagrados y aprendió una forma muy mística de dar culto a los dioses. También llegó al más alto grado de la perfección en aritmética, en música y en las otras ciencias matemáticas que enseñaban los babilonios. Allí siguió por unos quince años aproximadamente. Volvió a Samos a la edad de cincuenta y seis años más o menos".

Es interesante el hecho de que los babilonios asignasen números a los planetas.

A su regreso a Samos funda una escuela conocida como el semicírculo de Pitágoras. En las afueras de la ciudad en una cueva da clases acerca de la filosofía desarrollada por él. Pasa noches y días en esa cueva con sus seguidores haciendo una extensiva investigación en matemáticas. Sus enseñanzas y en especial su insistencia en el vegetarianismo no fueron bien recibidos en Samos, decide entonces partir hacia la llamada Gran Grecia, colonias griegas establecidas en lo que hoy es Italia. En Cretona, donde es bien recibido, se establece fundando una sociedad filosófica y religiosa. Esta sociedad estaba constituida por un círculo interno de seguidores conocidos como los *mathematikoi*, quienes vivían permanentemente con la Sociedad, no tenían posesiones y eran vegetarianos. Las principales creencias de Pitágoras fueron las siguientes:

1) Al nivel más profundo la realidad es de naturaleza matemática.
2) La filosofía puede usarse para la purificación espiritual.
3) El alma puede elevarse para unirse con lo divino.
4) Ciertos símbolos tienen un significado místico.
5) Los hermanos de la Orden deben observar estricta lealtad y secrecía.

El principal interés de Pitágoras y su escuela fue el estudio de los principios de la matemática, el concepto de número, el concepto de triángulo y otras figuras matemáticas y además el concepto abstracto de demostración. Una parte considerable de los teoremas recopilados posteriormente por Euclides provienen de la escuela de Pitágoras.

Quizás recordando la suerte de Sócrates, Pitágoras evitó verse envuelto en política. Sin embargo en 508 a. C. se vio involucrado en una disputa política de Cretona con la vecina ciudad de Sibaris. Los pitagóricos se hicieron por algún tiempo del control de Cretona, pero finalmente lo perdieron y la Sociedad se vio perseguida sanguinariamente. Aparentemente Pitágoras pudo escapar y algunos afirman que vivió hasta la edad de 100 años.

Para estudiar las propiedades de los números se requieren manipulaciones algebraicas y cálculos. En este aspecto los matemáticos griegos no estaban bien armados, no contaban con una notación algebraica ni tampoco tenían un sistema numérico que facilitara los cálculos. A pesar de estas limitaciones, recurriendo a la geometría, en la cual eran maestros, lograron demostrar muchas igualdades algebraicas, por ejemplo la proposición 4 del libro II de los Elementos de Euclides, en donde se prueba geométricamente la igualdad:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

En la proposición 7, también por procedimientos geométricos se establece la igualdad:

$$(a + b)^2 + a^2 = 2(a + b)a + b^2,$$

o equivalentemente

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta + (\alpha - \beta)^2$$

la proposición 5 establece la igualdad

$$ab + ((a + b)/2 - b)^2 = ((a + b)/2)^2$$

o equivalentemente

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2.$$

Usando estas técnicas geométricas pudieron también resolver la ecuación

$$x^2 - ax - b^2 = 0$$

y por primera vez se proporciona una demostración.

Muchas de las contribuciones algebraicas griegas son debidas a los miembros de la escuela pitagórica.

4 Las matemáticas árabes

En mi primera visita al Instituto de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Sao Paulo, me sorprendió ver en una casa del centro de la ciudad un anuncio que decía “Algebrista”. Me pareció extraño que aquí los matemáticos dedicados al álgebra pusieran despachos para atender a sus clientes. Poco después Héctor Merklen, matemático uruguayo, un algebrista de la Universidad de Sao Paulo me explicó que algebrista era la persona dedicada a la compostura de huesos. Indicios del uso de la palabra algebrista en el castellano antiguo se encuentran en El Quijote de Cervantes en el siguiente párrafo:

“En esto fueron razonando los dos, hasta que llegaron a un pueblo donde fue ventura hallar un algebrista, con quien se curó el Sansón desgraciado.”

Aparentemente la palabra algebrista en este sentido está relacionada con la palabra árabe al-jabr que significa restaurar.

La palabra álgebra como rama de las matemáticas se usa en prácticamente todos los idiomas y proviene de la obra Hisab Al-jabr wal Muquabala, obra debida al matemático árabe Al-Khuarizmi. Este matemático era miembro de la llamada *Casa de la Sabiduría* fundada por el califa al-Mamun en Bagdad. Las labores principales de esta casa eran la traducción de manuscritos científicos griegos así como la escritura de libros sobre álgebra, geometría y astronomía.

El propósito de esta obra de acuerdo con las propias palabras del autor es:

“… explicar las partes más fáciles de la aritmética que ayuden a resolver problemas que se presentan en la vida diaria, cuestiones tales como herencias, juicios, legados, medición de tierras, la excavación de canales, cálculos geométricos, etc.”

La principal aportación de esta obra es la idea de manipular símbolos que representan números. Éste fue el primer paso hacia una abstracción mayor de las matemáticas, paso que dio el inicio al álgebra, sin embargo aquí se usan palabras y no símbolos como se hace en nuestros días.

En el texto se introducen ecuaciones que consisten de tres tipos de objetos, unidades que son números, raíces, que son múltiplos por números de la cosa x (incógnita) y cuadrados que son números por x^2.

Se consideran los siguientes tres tipos de ecuaciones:

1) Cuadrados iguales a raíces

$$x^2 = bx$$

2) Cuadrados iguales a números

$$x^2 = b$$

3) Raíces iguales a números

$$x = a$$

4) Cuadrados y raíces iguales a números

$$x^2 + bx = c$$

5) Cuadrados y números iguales a raíces

$$x^2 + c = bx$$

6) Raíces y números iguales a cuadrados

$$bx + c = x^2$$

El texto nos enseña cómo cualquier ecuación consistente de números, raíces y cuadrados puede transformarse en una de las expresiones anteriores por medio de dos operaciones: al-jabr y al-muqabala. La primera operación consiste en remover términos negativos de una ecuación, pasando algún término de la ecuación de un lado al otro, por ejemplo la operación al-jabr transforma $x^2 = 40x - 4x^2$ en $5x^2 = 40x$. La operación al-muqabala consiste en reducir los términos positivos de la misma potencia de x en ambos lados de la ecuación. Por ejemplo $3x^2 + 7x^2 + x + 8 = 21 + 7x + 2x + x^2$ se reduce a $10x^2 + x + 8 = 21 + 9x + x^2$.

Posteriormente las ecuaciones de los seis tipos anteriores se resuelven usando los mismos métodos geométricos que los griegos.

Finalmente se ve cómo las leyes de la aritmética de los números se extienden a una aritmética de los nuevos objetos introducidos, por ejemplo como se multiplican las expresiones $(a + bx)(c + dx)$.

Otra contribución de gran importancia de Al-Khuarizmi fue otro libro del cual sólo sobrevive la traducción latina: Algoritmi de número Indorum, en donde se introduce el sistema numérico hindú. La palabra latina Algoritmi se deriva del nombre del autor.

Las dos obras antes mencionadas tuvieron una influencia muy profunda en el desarrollo de la civilización occidental.

5 Las Matemáticas en la Italia Renacentista

A partir del siglo XIII varias ciudades italianas experimentaron un notable crecimiento económico, gracias a una siempre creciente expansión del tráfico comercial en el Mediterráneo. Entonces, como ocurrió ya antes con otras civilizaciones hay una gran demanda para organizar y controlar las transacciones comerciales cada vez más complejas y voluminosas, esto requiere sistemas de contabilidad más eficientes y seguros. El recientemente importado sistema hindú de numeración muestra entonces sus ventajas sobre otros sistemas previamente usados. Se establecen en los centros comerciales italianos escuelas dedicadas a la enseñanza de este nuevo sistema numérico. Éstas son las llamadas escuelas de ábaco. El célebre matemático Leonardo de Pisa Fibonacci escribió el primer texto italiano para estas escuelas, el famoso Liber abaci.

En la Italia del siglo XVI eran muy populares los debates públicos entre dos adversarios sobre distintos temas, filosofía, lógica, historia, arquitectura, matemáticas. Cuando en estos debates se enfrentaban personajes conocidos, esto era un acontecimiento social relevante. El ganar o perder tenía muchas veces consecuencias importantes tanto en el prestigio como en el aspecto financiero, ya que el ganador podría aumentar las ventas de sus libros, o ganar un puesto como profesor en alguna Universidad o llegar a ser llamado a la Corte con un llamativo sueldo.

Célebre es el debate efectuado en Venecia en 1535 entre Anton Maria Fiore y Niccolo Fontana Tartaglia. El primero propuso al segundo una serie de treinta problemas de tipo algebraico. Mientras el segundo propuso una serie de problemas de tópicos diversos.

Los problemas propuestos por Fiore tenían que ver con la resolución de ecuaciones del tipo el *cubo más las cosas igual al número*, esto es ecuaciones del tipo $x^3 + px = q$.

Fiore tenía una gran confianza en salir triunfador ya que contaba con un secreto confiado a él por su antiguo maestro Scipione del Ferro profesor de aritmética y geometría de la Universidad de Bolonia, muerto en 1526. Del Ferro había encontrado alrededor de 1505 una solución general para las ecuaciones del tipo $x^3 + px = q$ dada por la fórmula siguiente:

$$x = \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}} - \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}}$$

Tras cuarenta y ocho días de encierro tratando obsesivamente de resolver al menos un problema de la lista, Tartaglia se encontraba al borde de la desesperación. Finalmente en las primeras horas del 13 de febrero de 1535, descubre el método para resolver de golpe los treinta problemas propuestos por Fiore. Había redescubierto el método de del Ferro. En cambio Fiore tuvo poco éxito con la lista propuesta por su contrincante, es curioso para los ojos actuales que fuese incapaz de resolver una ecuación del tipo $x^3 = px + q$. Debemos, para entender esto, recordar que en esa época no se conocían los números negativos, entonces esta última ecuación representaba para los matemáticos de entonces un caso diferente.

La contundente victoria de Tartaglia llamó poderosamente la atención de Gerolamo Cardano, prestigiado médico de Milán. Sabía ahora de algo que parecía imposible existiera, un método para resolver las ecuaciones de tercer grado. Trató de encontrar por sí mismo este método pero sin éxito. Luego intentó ponerse en contacto con Tartaglia para que le explicase el tan codiciado método, pero éste último temiendo una mala jugada siempre se rehusó.

Finalmente Cardano le escribió a Tartaglia para invitarlo a Milán en donde le insinuó que podría presentarle al gobernador de la armada imperial en Milán, Alfonso de Avalos, Marqués de Vasto.

Tartaglia a pesar de su prestigio tenía una posición modesta como profesor de la escuela de ábaco de San Zanipolo. Una entrevista con el gobernador de Milán le abría la posibilidad de un empleo mejor remunerado. Teniendo estas consideraciones en mente cambió de actitud, aceptando viajar a Milán.

Ya en Milán ante la insistencia del anfitrión, Tartaglia decidió informar sobre sus resultados matemáticos, no sin antes haber obtenido el siguiente juramento de Gerolamo Cardano:

"Juro por los Santos Evangelios y por mi fe como caballero no hacer públicos tus descubrimientos, si me los cuentas; del mismo modo prometo y aseguro por mi fe de buen cristiano que los escribiré en cifra, de manera que nadie que los lea tras mi muerte pueda comprenderlos. Si yo en opinión vuestra soy un hombre honesto contádmelo y si no es así, demos entonces por terminada esta conversación."

Finalmente Tartaglia regresó a Venecia arrepentido de haber abierto sus secreto y sin haber podido entrevistarse con el gobernador, quien en los días de su visita se encontraba fuera de Milán.

Cardano se dedicó a estudiar la fórmula recién obtenida con la asistencia de su sirviente y secretario, Ludovico Ferrari, quien en el tiempo de la entrevista con Tartaglia contaba con 17 años. Encontró la manera de reducir la ecuación general de tercer grado a las ecuaciones resueltas por Tartaglia. Sin embargo se encontró con problemas que tenían que ver con la aparición en las fórmulas de raíces de números negativos. Cardano y Ferrari preguntaron a Tartaglia sobre estos problemas sin obtener respuesta alguna. Decidieron entonces emprender un viaje a Bolonia en donde vivía el yerno de del Ferro, Annibale della Nave, y le pidieron a este permiso para ver los papeles de del Ferro y buscar algo que les ayudase a resolver su problema. No encontraron nada al respecto, pero para sorpresa de ambos encontraron el método usado por del Ferro para resolver ecuaciones de tercer grado.

Una vez hecho este hallazgo, Cardano no se sintió obligado a guardar el secreto de Tartaglia ya que había encontrado la misma información en otra fuente mucho más antigua. Decidió así publicar estos descubrimientos en su obra: *Artis Magnae sive de regulis algebraicis.* Esta obra contenía además un descubrimiento notable: la solución de ecuaciones de cuarto grado, resultado obtenido por Ferrari.

A pesar de que en este libro se reconocen plenamente las contribuciones de Tartaglia, éste se puso furioso al sentirse traicionado, iniciando así una disputa continua con sus dos adversarios.

El Ars Magna puede considerarse como la culminación de las contribuciones de los algebristas italianos del renacimiento. Se escribe aquí también la última palabra sobre el problema de encontrar raíces de polinomios usando únicamente las operaciones de la aritmética y la extracción de raíces. Cardano obsesionado con la idea de perpetuar su nombre escribió en la última página de este libro lo siguiente:

"Escrito en cinco años,
puede que dure varios siglos.
Fin del Ars Magna sobre las reglas del álgebra
por Gerolamo Cardano."

6 La Quíntica

En opinión de Heródoto la prosperidad humana jamás permanece en un mismo punto, esto también es cierto para la prosperidad matemática. En el siglo XVIII el centro de gravedad de la actividad matemática se ha movido al norte, principalmente a Francia e Inglaterra. Sin embargo en el problema de resolución por radicales de ecuaciones poco se ha podido hacer a pesar de los enormes avances experimentados por los matemáticos en el lapso de tiempo entre el siglo XVI y el XVIII, varios matemáticos como Euler, Bézout, Vandermonde y Waring intentan entender el problema.

Quien pone los cimientos para un examen más profundo de la relación entre raíces y coeficientes de un polinomio es el célebre matemático Joseph Louis Lagrange.

Lagrange, de origen francés por línea paterna, nace en Torino, Italia en enero de 1736. Sus primeros logros matemáticos los obtiene en su natal Torino llamando muy pronto la atención de Euler quien lo invita a trabajar en la Academia de Ciencias de Berlín, oferta dos veces rechazada por Lagrange. Cuando Euler decide trasladarse a San Petersburgo, Lagrange acepta trabajar en Berlín, aquí es nombrado sucesor de Euler como director de matemáticas de la Academia en 1766.

En 1771 presenta a esta Academia sus indagaciones sobre las ecuaciones en la memoria. *Reflexiones sobre la resolución algebraica de ecuaciones.*

Aquí presenta las técnicas de las que se servirán su sucesores para entender el problema de las ecuaciones. El trabajo contiene el germen de la futura teoría de campos y anillos. Para tratar la ecuación general de grado n, considera n variables independientes o como se dice ahora n indeterminadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La ecuación general de grado n es entonces:

$$P(X) = (X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n) =$$

$$X^n - \left(\sum_{i=1}^{n} x_1\right) X^{n-1} + \left(\sum_{i<j} x_i x_j\right) X^{n-2} + \ldots + (-1)^n x_1 \ldots x_n$$

Considera ahora el conjunto de expresiones racionales en $x_1, \ldots, x_n$ esto es expresiones del tipo $p(x_1,\ldots,x_n)/q(x_1,\ldots x_n)$ en donde $p(x_1,\ldots x_n)$, $q(x_1,\ldots,x_n)$ son polinomios en $x_1,\ldots,x_n$ con coeficientes números racionales. Tomando ahora S_n el conjunto de permutaciones de los enteros $1,\ldots,n$. Si $u(x_1,\ldots,x_n)$ es una función racional en $x_1,\ldots,x_n$ y considerando

$$X(u) = \{o \in S_n \mid u(x_{\sigma(1)},\ldots, x_{\sigma(n)})\}.$$

Prueba lo siguiente:

Teorema 1 Si *t y u* son funciones racionales en $x_1,\ldots,x_n$ y $X(t) \subset X(u)$ entonces *u* puede expresarse como una función racional de *t* y los coeficientes de *P(X)*.

Lagrange dice que volverá al problema de la resolución de la quíntica. Sin embargo no logra hacerlo. La primera persona en darse cuenta que el problema no tiene solución es el matemático y médico italiano Paolo Ruffini (1765 – 1822).

Ruffini nació en Valentano entonces perteneciente a los estados papales. En su adolescencia su familia se cambió a Modena en cuya Universidad estudió matemáticas, medicina, filosofía y literatura. En 1788 se graduó en filosofía, medicina y cirugía. Poco después se gradúa en matemáticas. En 1791, Ruffini fue nombrado profesor de Elementos de Matemáticas de la Universidad de Modena. También adquirió licencia para la práctica de la medicina. En 1796 Napoleón funda la República Cisalpina consistente de La Lombardía, Emilia, Modena y Bolonia. Ruffini es electo para un puesto en el consejo de esta República, se le requiere un juramento de lealtad a la República, pero le parece que no lo puede hacer pues entra esto en conflicto con sus creencias religiosas. A causa de esto es despedido de su puesto en la Universidad y se le prohíbe la enseñanza. Ruffini toma lo sucedido por el lado positivo dando más tiempo al cuidado de sus pacientes y a su deseo de entender el problema de la solución por radicales de la quíntica.

Él es el primero en establecer que la quíntica no tiene soluciones por radicales, encuentra una primera demostración y la da a conocer en 1799 en un libro de título *Teoría general de ecuaciones en el cual se prueba que la solución algebraica de la ecuación general de grado mayor que cuatro es imposible.*

En la prueba se usan los primeros resultados en teoría de grupos establecidos por él mismo. Entre otras aportaciones aparecen las siguientes: la noción de orden de un elemento, la noción de conjugación, la descomposición de una permutación en ciclos. Prueba también que si *G* es un subgrupo del grupo de permutaciones de 5 elementos , S_5, y 5 divide al orden de *G*, entonces *G* contiene un elemento de orden 5. Prueba que S_5 no tiene subgrupos de índices 3, 4 ó 8.

La demostración sin embargo no es completa, se hacen algunas suposiciones, sin prueba alguna. Aparentemente él no logra darse cuenta de esta falla. Su trabajo es recibido por la comunidad matemática con frialdad, varias cartas dirigidas a Lagrange quedaron sin respuesta. Publicó nuevas demostraciones en 1803, 1808 y 1813.

El único matemático de importancia que apreció el trabajo de Ruffini fue Cauchy, quien entre 1813 y 1815 realizó un trabajo importante sobre grupos de permutaciones generalizando varios resultados de Ruffini. En 1821 le escribió una carta que entre otras cosas dice: *"…a mi juicio, su memoria prueba completamente la imposibilidad de resolver algebraicamente ecuaciones de grado superior a cuatro"*.

Después de la caída de Napoleón, Ruffini fue nombrado rector de la Universidad de Modena en 1814. Aparte de la rectoría tenía a su cargo una cátedra en medicina práctica, otra de medicina clínica y una de matemáticas aplicadas.

En 1817 durante una epidemia de tifus, él prosiguió tratando a sus pacientes hacia los cuales era muy dedicado, pobres y ricos por igual. Como consecuencia, adquirió esta enfermedad y aunque se recuperó, su salud quedó afectada desde entonces.

El punto no resuelto por Ruffini es que supone (sin probarlo) que si se tiene una expresión por medio de radicales de las raíces, estos radicales son funciones racionales de las raíces.

En 1824 aparece en escena un joven matemático de apenas 22 años originario de Noruega: Niels Henrik Abel, quien escribe un panfleto en francés con el título: *Memoire sur les equations algébriques*. Aquí se presenta una primera prueba sobre la imposibilidad de resolver la quíntica. Poco después aparece una versión mejorada, más elaborada con el título *Demostration de l'imposibilité de la resolution alguébrique des équations génerales qui passent le quatriéme degré* publicada en la revista Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 1, Abel inicia su trabajo probando el punto no resuelto por Ruffini, luego sigue un camino parecido al de éste, pero logrando una mayor claridad.

La opinión de Abel sobre el trabajo de Ruffini es la siguiente:
"El primero, si no me equivoco, único antes de mi que había buscado demostrar la imposibilidad de la resolución algebraica de ecuaciones generales, es el geómetra Ruffini; sin embargo su memoria es de tal manera complicada que es muy difícil juzgar sobre la justeza de sus razonamientos. Me parece que su razonamiento no siempre es satisfactorio."

En los trabajos de Ruffini y de Abel se prueba que existen ecuaciones de grado cinco no solubles por radicales, ninguno de ellos da un criterio para saber cuándo una ecuación es soluble o no por radicales. Dos meses antes de su muerte, en 1829, Abel publica un artículo en el cual considera una clase de ecuaciones solubles por radicales, el criterio general será dado por Evariste Galois.

7 Evariste Galois

La solución completa al problema de la resolubilidad por radicales de ecuaciones se debe a Evariste Galois (1811-1832) quien hizo importantes aportaciones a las matemáticas en su corta vida.

Galois nació el 25 de octubre en Bour-la-Reine un pueblo cercano a París. Sus padres poseían una esmerada educación sobre todo en cultura clásica. La familia del padre tenía un colegio de enseñanza para jóvenes que gozaba de prosperidad durante la Revolución y después en la época de Napoleón. Su padre y tío eran fervientes partidarios de Napoleón, el tío llegó a ser oficial de la Guardia Imperial. hasta los doce años Evariste fue educado únicamente por su madre. Después prosiguió sus estudios en el famoso liceo parisino Louis-le Grand.

En junio de 1828 solicita, sin preparación previa alguna, su entrada a la recién creada y prestigiosa Escuela Politécnica. No es admitido y regresa al liceo para tomar la asignatura Matemáticas Especiales. En este curso tiene la fortuna de encontrar al profesor-Luis Paul-Emile Richard quien lo orientó y animó para proseguir en las matemáticas. Todavía como alumno del liceo publica un artículo de ocho páginas sobre fracciones continuas en Annales de Mathématiques de Gergonne.

El 2 de julio de 1829 una terrible desgracia se abatió sobre la familia de Galois, su padre se suicidó. La tragedia fue provocada por un joven párroco recién nombrado en Bour-la-Reine donde era alcalde el padre de Galois. Este sacerdote urdió un complot para derrocar al popular alcalde. Se escribieron una serie de sátiras licenciosas contra diferentes personalidades del pueblo con la firma apócrifa del padre de Galois. Esto provocó un inmenso escándalo ante el cual el alcalde se vio obligado a renunciar y marchó a París. Presa de una profunda depresión se suicidó ahorcado en su departamento cerca del liceo Luis-le-Grande. Estos hechos afectaron grandemente a Evariste y seguramente influyeron en la dirección tomada en su vida.

Unas pocas semanas después Galois se presenta nuevamente al examen de ingreso en la Escuela Politécnica sin éxito.

Se vio entonces obligado a entrar a la Escuela Normal después de pasar varios exámenes.

En mayo de 1829 Galois presentó una primera versión de sus investigaciones sobre la solución de ecuaciones algebraicas a la Academia de Ciencias de París. Una segunda memoria se presentó ocho días después sobre las ecuaciones de grado primo. Ambos artículos fueron enviados a Cauchy quien los perdió. En febrero de 1830 Galois envió otro artículo sobre la solución de ecuaciones algebraicas. Esta vez la Academia envió para su examen esta memoria a su secretario perpetuo, Fourier. Desafortunadamente Fourier murió y este artículo se perdió también.

En enero de 1830 la Academia recibió otra memoria titulada *Mémoire sur les conditions de resolubilité des équations par radicaux.* La Academia pidió a Poisson y Lacrois un reporte.

El reporte de Poisson dice entre otras cosas lo siguiente:

"…hemos hecho todos los esfuerzos por comprender la demostración del Sr. Galois. Sus razonamientos no son ni bastante claros ni bastante desarrollados para que hayamos podido juzgar su exactitud y no estaríamos incluso en disposición de dar una idea de ellos en este informe. El autor anuncia que la proposición que es el objeto especial de esta memoria es parte de una teoría general que es susceptible de muchas aplicaciones. A menudo ocurre que varias partes de una teoría, iluminándose una a la otra son más fáciles de entender como un todo que aisladas. Por tanto, para formarse una opinión definida se tiene que esperar a que el autor haya publicado su trabajo completo. Pero en el estado que está la parte presentada a la Academia, no podemos proponeros darle vuestra aprobación".

Galois no tuvo tiempo para desarrollar su teoría y otros trabajos que apenas iniciaba. Estuvo envuelto en las luchas de los republicanos, dos veces estuvo en la cárcel, estaba además bajo una profunda depresión. En mayo de 1830 fue forzado a aceptar un duelo, éste tuvo lugar el 30 de mayo de 1830. La noche anterior la ocupó en escribir una larga carta a su amigo Auguste Chevalier en la cual explicaba las ideas fundamentales de su teoría.

Como previamente mencionamos Galois dio un criterio para saber cuándo una ecuación es resoluble o no por radicales.

Pasemos ahora a dar una idea general de sus ideas desde una perspectiva moderna.

Para esto tomemos un polinomio $f(X) = X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \ldots + a_n$ con coeficientes números complejos. Consideremos ahora el conjunto F de todos los números complejos que se pueden obtener a partir de los coeficientes de la ecuación usando sumas restas multiplicaciones y divisiones, F es un subconjunto de los números complejos con las siguientes propiedades:

i) si a, b están en F, $a + b$, $a - b$ y ab están en F;

ii) si $b \neq 0$ está en F, entonces $1/b$ está en F.

El conjunto F es lo que se llama un campo. Consideremos ahora $z_1, z_2, \ldots, z_n$ todas las raíces de $f(X)$. Tomemos ahora todos los números que se pueden obtener a partir de los coeficientes de $f(X)$ y $z_1, \ldots, z_n$ usando las cuatro operaciones de la aritmética, esto nos da un conjunto E que también cumple las condiciones i) y ii) anteriores.

Claramente $F \subset E$. Consideremos ahora la colección G de todas las funciones $f{:}E \to E$ que cumplen las siguientes condiciones:

i) f es una función biyectiva

ii) Si a está en F, $f(a) = a$;

iii) Si x, y están en E, $f(xy) = f(x) f(y)$ y $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Claramente la transformación id definida por $id(x) = x$ para toda x en E está en G; si f,g están en G su composición gf también está en G, si f está en G su inversa también está en G. Por tanto G forma un grupo. En nuestro caso el grupo G tiene a lo más $n!$ elementos. Por tanto en lugar de estudiar E que es infinito podemos poner nuestra atención en G que es finito.

La idea fundamental de Galois es estudiar los campos entre F y E por medio de los subgrupos de G.

Definición 1 El *subgrupo de G más chico que contiene todos los elementos de la forma* $fgf^{-1}g^{-1}$ *se llama el subgrupo conmutador y se denota por* G^1. *El n-subgrupo conmutador se define inductivamente por* $G^n = (G^{n-1})$.

Teorema 2 *Las raíces de $f(X)$ se pueden obtener por medio de radicales si y solo sí existe una m con* $G^m = \{id\}$.

El grupo G se llama el grupo de Galois del polinomio $f(X)$. Por ejemplo a los polinomios considerados en el último trabajo de Abel se les impone la condición $fg=gf$ para todo f, g en su grupo de Galois G. Aquí claramente $G^1 = \{id\}$. Así que todos estos polinomios son solubles por radicales.

La presentación dada originalmente es equivalente a la anterior. En el artículo revisado por Poisson se dan varios lemas pero sus demostraciones son incompletas. Poisson leyó con mucho cuidado este trabajo, de hecho uno de los lemas importantes lo prueba Poisson recurriendo al teorema 1 de Lagrange, dado previamente.

Bibliografía

Raymundo Bautista. *Álgebra*. Memorias del 50 aniversario 1942-1992. Instituto de Matemáticas UNAM, pp 1-23.

Patricia Caniff. *Pitágoras*. Colección Grandes Biografías. Edimat Libros, S. A., Madrid (2002).

Girolamo Cardano. *Ars Magna or the rules of algebra*. Dover Publications. Inc. New York. (1993).

Euclid. *The thirteen books of the elements*. Translated by Sir Thomas L. Heath. Vol. I (Books I and II). Dover Publications Inc. New York (1956).

Francisco Martín Casalderrey. *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*. La matemática en sus personajes 4. Ed. Nivola Ediciones. Madrid (2000).

Fernando Corbalán. *Galois. Revolución y matemática*. La matemática en sus personajes 5. Nivola Eds. Madrid (2000).

Jacob Klein. *Greek Mathematical Thought and the Origen of Algebra*. Dover Books on Math. New York (1992).

JJ OĆonnor and E.F. Robertson. *Joseph-Louis Lagrange*. www.history.mcs.st-andrews.ac.uk

JJ OĆonnor and E.F. Robertson. *Abu Ja'far Muhammad Ibn Musa Al-Khwarismi*. www.history.mcs.st-andrews.ac.uk

Laura Toti Rigatelli. *Evariste Galois 1811-1832. Vita Mathematica*. Vol II. Birkhaüser Verlag. Basel-Boston-Berlin. (1996).

B.L. van der Waerden. *A History of algebra*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York – Tokyo. (1985).