

# EL PROBLEMA DE UNICIDAD CUÁNTICA Y DISTRIBUCIONES INVARIANTES ANTE FLUJO GEODÉSICO

Álvaro Álvarez Parrilla<sup>1</sup>

Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de Baja California

## Resumen

*Se describe un problema surgido de la mecánica cuántica denominado el problema de unicidad cuántica, a continuación se presentan los resultados obtenidos al atacar una parte del mismo. En particular presentamos un ejemplo específico de una distribución invariante ante flujo geodésico, que pertenece a la componente isotópica de peso  $2k$  de la representación de series discreta de  $SL_2(\mathbb{R})$ . Esta distribución representa una medida absolutamente continua en el haz tangente del espacio hiperbólico y se tiene una caracterización explícita de su conjunto singular.*

## 1 Introducción

Los objetos geométricos invariantes ante transformaciones por grupos, han jugado un papel principal en algunas preguntas surgidas en superficies de Riemann y en física [1, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 18]. En particular es bien conocido que entes invariantes ante el grupo de automorfismos de ciertas variedades, aparecen de manera natural en el estudio de la dinámica de un sistema físico: el flujo geodésico es un modelo para la evolución temporal de un sistema mecánico clásico.

El propósito de este trabajo es presentar un problema surgido de la física que es atacado mediante el uso de herramientas matemáticas tales como análisis funcional, grupos de Lie, teoría de representaciones, y superficies de Riemann y que es parte de la investigación que he venido realizando. Los detalles se pueden consultar en [2].

---

<sup>1</sup>**E-mail:** alvaro@faro.ens.uabc.mx

## Un problema de caos cuántico: *La unicidad cuántica*

Imaginemos que tenemos un sistema clásico con comportamiento caótico; esto lo podemos pensar de manera muy burda como un sistema en el que las trayectorias clásicas tienen sensibilidad a las condiciones iniciales. Si nosotros tratáramos de resolver este sistema utilizando las técnicas o métodos de ecuaciones diferenciales tendríamos que tener: mucha suerte, mucho ingenio, o ambas para poder obtener una solución completa del sistema. Esto debido a que las ecuaciones diferenciales obtenidas de manera genérica son no-lineales y no son sencillas de resolver.

Una alternativa para resolver este problema ha sido el pasar del sistema clásico a un sistema cuántico correspondiente, resolver el sistema cuántico y luego pasar de nueva cuenta al sistema clásico para así obtener una solución al problema original. A este método y a los problemas surgidos de él se le ha llamado *caos cuántico*. Enseguida mostramos de manera muy breve los ingredientes principales de esta “receta” y cuales han sido algunos de los problemas que han surgido.

De acuerdo a la mecánica clásica, los estados de un sistema se pueden considerar como elementos del espacio tangente  $TM$  de una cierta variedad  $M$  (desde el punto de vista de física, podemos pensar que  $TM$  es el espacio fase que normalmente consiste en la posición y la velocidad de las partículas que comprenden al sistema) y su evolución está regida por  $G_t$ , el generador infinitesimal del flujo geodésico asociado a la métrica de  $M$ .

La transición de un sistema clásico a un correspondiente sistema cuántico involucra un método comúnmente conocido como *cuantización*. Este proceso lo podemos pensar como el equivalente a tomar un sistema clásico y “reducirle la escala” para pasar a un sistema regido por la mecánica cuántica. Mas adelante entramos un poco mas en detalle acerca de cual es la matemática detrás de esta “cuantización”.

Por otro lado, la evolución temporal de un sistema cuántico está determinado por las eigenfunciones de cierto operador auto adjunto. En mecánica cuántica los estados del sistema son los eigenvectores de la raíz cuadrada del operador de Laplace-Beltrami,  $\sqrt{\nabla^2}$ , de la variedad  $M$ , y la evolución de los mismos está regida por el operador  $e^{it\sqrt{\nabla^2}}$ .

Finalmente el *límite semi-clásico*, también conocido como *principio de correspondencia*, nos proporciona una transición de la mecánica cuántica a la mecánica clásica. El entender el límite semi-clásico es equivalente a entender el comportamiento de los eigenpares  $(\psi_k, \lambda_k)$  cuando el eigenvalor  $\lambda_k$  tiende a infinito [11].

Algo muy importante a señalar es que hay dos lugares principales donde “las cosas pueden salir mal”: una es en el proceso de cuantización (existe la opción de

escoger entre una infinidad de posibles cuantizaciones) y otra es en el momento de tomar el límite semi-clásico (el límite no tiene *a priori* que existir). Sin embargo como veremos a continuación estos dos problemas se reducen a solo uno: la existencia y unicidad del límite.

Para simplificar la matemática debemos considerar primero los casos mas sencillos; así pues si  $TM$  es una superficie de Riemann compacta con  $M$  una variedad hiperbólica, entonces el espacio de funciones que nos concierne es  $L_2(TM)$  que resulta ser una suma directa de eigenespacios del operador  $\sqrt{\nabla^2}$ , lo cual genera de una manera natural una subsecuencia  $\{\psi_{k_j}, \lambda_{k_j}\}$  a partir de cada base ortonormal  $\{\psi_k\}$ .

Utilizando esto, el proceso de cuantización que se utiliza en física se traduce al siguiente procedimiento matemático: Fijamos una base ortonormal  $\{\psi_k\}$  de eigenfunciones en  $L_2(TM)$ , enseguida le asociamos, a cada eigenfunción, una distribución por un procedimiento análogo a la cuantización. Así para cada subsecuencia de eigenpares  $\{\psi_{k_j}, \lambda_{k_j}\}$  tendremos una correspondiente secuencia de distribuciones  $\{d\nu_{k_j}\} \subseteq \mathcal{D}'(T_1^*M)$  asociada: primero escogemos una cuantización, esto es, una asignación

$$\text{Op} : C^\infty(T_1^*M) \rightarrow \mathcal{B}(L_2(T_1^*M)) \quad (0.1)$$

de operadores acotados  $\text{Op}(a)$ , a símbolos de orden cero  $a$ , después a cada eigenfunción  $\psi_{k_j}$  le asignamos la distribución  $d\nu_{k_j}$  definida por la condición de que satisfaga

$$\int_{T_1^*M} a d\nu_{k_j} = (\text{Op}(a)\psi_{k_j} | \psi_{k_j}), \quad (0.2)$$

para todo símbolo  $a$  de orden cero.

Este procedimiento de escoger una secuencia de distribuciones, a partir de una secuencia de eigenpares, se le conoce en matemáticas como un “lift microlocal” [9, 17]. Es de hacerse notar que existen un número infinito de posibles cuantizaciones, una por cada base ortonormal de  $L_2(TM)$  (recordemos que  $L_2(TM)$  es un espacio de funciones de dimensión infinita).

Como mencionamos anteriormente, el límite semi-clásico es equivalente a entender el comportamiento de los eigenpares  $(\psi_k, \lambda_k)$  cuando el eigenvalor  $\lambda_k$  tiende a infinito. De aquí que una de las preguntas básicas ha sido el determinar cuales son los puntos límites de dichos “lifts microlocales” o distribuciones. Al respecto, uno de los pocos teoremas que ha sido posible demostrar asegura que “casi todas”

las subsecuencias convergen a la medida de Liouville [3, 12, 17]. Sin embargo *la unicidad del límite no ha sido posible demostrarla en general.*

Existe evidencia que sugiere que este límite es único en ciertos espacios, sin embargo, D. Jakobson [6] ha mostrado que, por ejemplo, en un toro plano el límite no es único.

### **Distribuciones invariantes ante flujo geodésico**

Es relativamente sencillo [13] demostrar que una de las propiedades que deberán tener los “lifts microlocales” es la invariancia ante el flujo geodésico, esto debido a que es precisamente el flujo geodésico el que gobierna el comportamiento temporal de los estados del sistema. Lo que esto indica es que cualesquiera que sea el límite, este tendrá necesariamente que ser invariante ante el flujo geodésico.

Por otro lado, de acuerdo al teorema de clasificación de Bargmann, existen cuatro tipos de representaciones unitarias de funciones sobre una variedad bidimensional co-compacta, una de ellas es la llamada “serie discreta”. Es conveniente señalar que las superficies co-compactas son de las más sencillas de estudiar, por lo que son las que se utilizan como primera aproximación para entender el comportamiento general [8].

Con esto como base, la pregunta específica que nosotros contestamos es: *Restringiéndonos a superficies hiperbólicas co-compactas, ¿Qué tipo de objeto deberá ser una distribución invariante ante el flujo geodésico que solo tenga una componente en la “serie discreta”?*

## **2 Resultados**

La manera en que se atacó el problema es utilizando técnicas de álgebras y grupos de Lie, operadores pseudo-diferenciales, teoría de distribuciones, análisis armónico, y geometría hiperbólica. Se construyó de manera explícita una distribución invariante ante el flujo geodésico con componente exclusivamente en la “serie discreta”.

La idea detrás de la construcción es como sigue: Empezamos con una forma holomorfa adecuada sobre la variedad  $M$  y mediante una construcción de “escalera” obtenemos una distribución que habita en la serie discreta de peso  $2k$ . Ya que  $M$  es hiperbólica, resulta conveniente trabajar sobre el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}$  y requerir que los objetos en cuestión sean formas automórficas de peso  $2k$  (en pocas palabras que los objetos sean invariantes ante el grupo de automorfismos de la variedad  $M$ ).

El uso de series relativas de Poincaré permite la construcción de dichas formas: las series de Petersson,  $\Theta_{k,\gamma_n}$ , son formas automórficas de peso  $2k$  asociadas a

elementos hiperbólicos primitivos  $\gamma_n \in \Gamma$  (véase por ejemplo [7]). Explícitamente,  $\Theta_{k,\gamma_n}$  se construye sumando sobre el grupo la función  $Q_{\gamma_n}^{-k}(z) = (cz^2 + (d-a)z - b)^{-k}$ , asociada al elemento hiperbólico  $\gamma_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Nótese que conjugando al grupo por un elemento apropiado, es posible usar un elemento hiperbólico primitivo  $\gamma_0 \in \Gamma$  cuyo eje es el eje imaginario (en el modelo de  $\mathbb{H}$  correspondiente al plano superior) de manera que  $Q_{\gamma_0}^{-k}(z) \propto z^{-2k}$ . Así pues, la construcción se demuestra para  $\Theta_{k,\gamma_0}$ .

Ya que se utiliza teoría de representaciones de  $SL_2(\mathbb{R})$ , utilizamos un conocido proceso que levanta funciones en  $\mathbb{H}$  a funciones en  $SL_2(\mathbb{R})$ , así como la identificación de  $SL_2(\mathbb{R})$  con  $\sqrt{T_1^*}\mathbb{H}$ , la raíz cuadrada del haz unitario cotangente de  $\mathbb{H}$  (véase por ejemplo §2 de [15]). El proceso consiste en construir una “escalera” a partir de la serie de Petersson  $\Theta_{k,\gamma_0}$  y usar técnicas de teoría de representaciones de  $SL_2(\mathbb{R})$  para hacer la “escalera” invariante ante flujo geodésico.

Para hacer esto recordemos que la representación infinitesimal  $d\pi_s$  actúa sobre funciones vía la derivada de Lie. Denotamos por  $\mathbf{E}_+$ ,  $\mathbf{E}_-$  a los operadores de “subida” y “bajada” respectivamente. Formalmente se tiene que  $\mathbf{E}_- = \overline{\mathbf{E}_+}$ , puesto que podemos pensar en que estos operadores son análogos a  $\frac{\partial}{\partial z}$  y  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ .

Con esto en mente la construcción procede de la siguiente manera:

1. Empezamos con una función  $(\gamma_0)$ -invariante  $g_{k,\gamma_0}(z, \theta) = \frac{y^k e^{i2\theta k}}{z^k}$ , y procedemos a construir su “escalera”:

$$t_{k,\gamma_0}(z, \theta) = \sum_{m \geq 0} a_m \mathbf{E}_+^m g_{k,\gamma_0}(z, \theta). \quad (0.3)$$

2. Enseguida determinamos los coeficientes  $a_m$  que la hacen ser invariantes ante flujo geodésico. Para esto utilizamos una relación de recurrencia obtenida del hecho que un objeto  $t_{k,\gamma_0}(z, \theta)$  invariante ante flujo geodésico, deberá satisfacer  $(\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-)t_{k,\gamma_0} = 0^2$ .
3. A continuación se procede a demostrar la convergencia (como distribución) de la “escalera”, y a encontrar su conjunto singular.
4. Como paso futuro se procederá a sumar sobre el grupo para obtener una distribución invariante ante flujo geodésico sobre  $M$ .

---

<sup>2</sup>Esto es análogo a la condición  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0$  que caracteriza a las funciones holomorfas.

Durante el proceso se consideró el cambio de variables

$$\alpha = \frac{\bar{z}}{z} = e^{-i2\psi} \quad \text{y} \quad \beta = e^{i2\theta},$$

donde  $z = x + iy = re^{i\psi}$ , y  $\theta$  es la variable del haz fibrado  $\sqrt{T_1^* \mathbb{H}}$  (de manera que  $0 < \psi < \pi$  ya que  $y > 0$ , y que  $0 \leq \theta < \pi$ , véase la Figura 1). Las consideraciones anteriores seguidas del uso de unos lemas de carácter técnico que conciernen a polinomios de Grothendieck, y el uso de un bien conocido resultado de S. Katok [7] nos da como resultado:

**Teorema 0.1. (Escalera sobre  $SL_2(\mathbb{R})$  invariante ante flujo geodésico)** *La distribución sobre  $SL_2(\mathbb{R})$  dada explícitamente por*

$$t_{k,\gamma_0}^{\text{Re}}(\alpha, \beta) = 2\text{Re}\left(g_{k,\gamma_0}(\alpha, \beta) \sum_{m \geq 0} C_{2m,k} \beta^{2m} q_{2m}(\alpha)\right),$$

*es una distribución de orden 0, con singularidades de tipo logarítmico o menor, invariantes ante la acción por la derecha del flujo geodésico y ante la acción por la izquierda de  $\gamma_0$ , y pertenece a  $\tilde{H}(2k-1)(\pi_{2k})$ , la componente isotópica de peso  $2k$  de la serie discreta. Además, cualquier otra distribución en  $\tilde{H}(2k-1)(\pi_{2k})$  que sea invariante ante flujo geodésico y ante  $\gamma_0$ , es un múltiplo de  $t_{k,\gamma_0}^{\text{Re}}$ .*

En otras palabras,  $t_{k,\gamma_0}^{\text{Re}}$  representa una medida absolutamente continua sobre  $T_1 \mathbb{H} - \{\text{conjunto singular}\}$ .

La forma explícita de nuestra construcción nos permite encontrar formas analíticas para las distribuciones, por ejemplo cuando  $k = 1, 2$  (pesos 2 y 4 respectivamente) vemos que

$$\begin{aligned} t_{1,\gamma_0}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4i} \log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \cdot \frac{1-\alpha\beta}{1+\alpha\beta}\right) \\ &= \frac{1}{2i} (\text{Arctanh}(\beta) - \text{Arctanh}(\alpha\beta)), \end{aligned}$$

y

$$t_{2,\gamma_0}(\alpha, \beta) = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1-\alpha\beta^2}{\beta(\alpha-1)} (\text{Arctanh}(\beta) - \text{Arctanh}(\alpha\beta))\right).$$

En particular el conjunto singular para  $t_{k,\gamma_0}^{\text{Re}}$  tiene una descripción geométrica muy simple (véase la Fig.1):

$$\mathcal{S}_{k,\gamma_0} = \left\{(\psi, \theta) \mid \theta = n\frac{\pi}{2}, \theta - \psi = j\frac{\pi}{2}, \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \text{ y } j = -1, 0, 1, 2, 3\right\}.$$

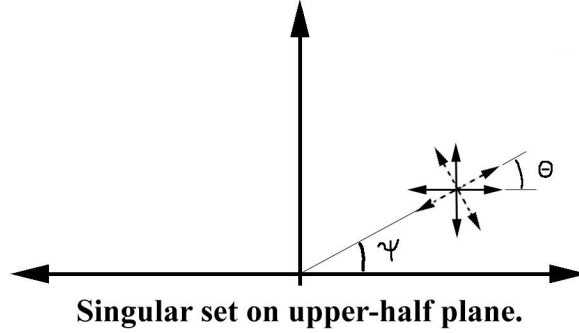


Figura 1: Conjunto singular  $\mathcal{S}_{k,\gamma_0}$  para  $t_{1,\gamma_0}$  en  $T_1^*\mathbb{H}$ . Los vectores punteados representan a  $\theta - \psi = j\frac{\pi}{2}$ .

### 3 Conclusiones

Los resultados indican que, en el caso de que la distribución solo tenga una componente en la serie discreta, la distribución tiene una caracterización muy completa en términos de funciones conocidas. A la vez se tiene caracterizado completamente el conjunto singular de la representación.

El trabajo aquí presentado representa un avance hacia el problema mas general en el cual se considerará primero lo que ocurre al sumar sobre el grupo, y después cuando se consideren distribuciones en otras de las posibles representaciones de  $SL_2(\mathbb{R})$ .

En particular, nótese que al sumar sobre el grupo uno obtiene formalmente

$$T_{k,\gamma_0}(z, \theta) = \sum_{\gamma \in (\gamma_0) \backslash \Gamma} (t_{k,\gamma_0} \circ \gamma)(z, \theta),$$

por lo que al intercambiar el orden de las sumas se ve que  $T_{k,\gamma_0} = \sum_{n \geq 0} a_n \mathbf{E}_+^n G_{k,\gamma_0}$ , donde  $G_{k,\gamma_0}$  es el levantamiento, a funciones sobre  $SL_2(\mathbb{R})$ , de la serie de Petersson  $\Theta_{k,\gamma_0}$ . Resultados preliminares en esta dirección indican que la distribución resultante tiene orden  $\epsilon > 0$ .

## Bibliografía

- [1] A. Alvarez-Parrilla. Asymptotic relations among Fourier coefficients of real-analytic Eisenstein series. *Transactions of the AMS*, 352, 12:5563–5582, 2000.
- [2] A. Alvarez-Parrilla. Explicit geodesic flow invariant distribution using  $SL_2(\mathbb{R})$  representation ladders. Preprint submitted for publication. Copies may be requested to the author., September, 2001.
- [3] Y. Colin de Verdière. Ergodicité et fonctions propres du laplacien. *Comm. Math. Phys.*, 102:497–502, 1985.
- [4] A. Good. On various means involving the Fourier coefficients of cusp forms. *Math. Z.*, 183:95–129, 1983.
- [5] H. Iwaniec. Topics in Classical Automorphic Forms. In *Graduate Studies in Mathematics*, volume 17. American Mathematical Society, 1997.
- [6] D. Jakobson. On quantum limits on flat tori. 1996. Preprint.
- [7] S. Katok. Closed geodesics, periods and arithmetic of modular forms. *Inv. Math.*, pages 469–480, 1985.
- [8] S. Lang.  $SL_2(\mathbb{R})$ . Springer-Verlag, 1985.
- [9] M. Luo and P. Sarnak. Quantum ergodicity of eigenfunctions on  $PSL_2(\mathbb{R})\backslash\mathbb{H}^2$ . 1993. Preprint.
- [10] Yiannis N. Petridis. On squares of eigenfunctions for the hyperbolic plane and a new bound on certain  $L$ -series. *International Mathematics Research Notices*, (3):111–127 (electronic), 1995.
- [11] P. Sarnak. Arithmetic Quantum Chaos. In *Expanded version of the Schur lectures Tel Aviv 1992 and Blythe lectures Toronto 1993*, 1993.
- [12] A. Shnirelman. Ergodic properties of eigenfunctions. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 29:181–182, 1974.
- [13] H. Widom. Eigenvalue distribution theorems for certain homogeneous spaces. *J. Funct. Anal.*, 32, 1979.
- [14] S. A. Wolpert. Asymptotic relations among Fourier coefficients of automorphic eigenfunctions. Preprint, 1999.



- [15] S. A. Wolpert. Automorphic coefficient sums and the quantum ergodicity question. Preprint, 1999.
- [16] S. A. Wolpert. Semi-classical limits for the hyperbolic plane. Preprint, 1999.
- [17] S. Zelditch. Uniform distribution of eigenfunctions on a compact hyperbolic surface. *Duke Math. J.*, 55:919–941, 1987.
- [18] S. Zelditch. Mean Lindelöf hypothesis and equidistribution of cusp forms and Eisenstein series. *Journal of Functional Analysis*, 97:1–49, 1991.