

UNA EXPLORACIÓN GRÁFICA DE LAS PROPIEDADES DE LA TRANSFORMACIÓN DE MÖBIUS

José Luis Soto Munguía
Universidad de Sonora, México

Resumen

En este artículo se presenta un primer acercamiento a la transformación de Möbius y sus propiedades, en un ambiente computacional que permite explorar gráficamente algunas de sus características más importantes. El ambiente está diseñado con el software de geometría interactiva Cabri Géomètre II y permite la discusión de este tópico mediante representaciones gráficas dinámicas, manipulables directamente por el estudiante. El trabajo descrito aquí tiene como propósito el de proponer un recurso didáctico que pueda utilizarse en un curso introductorio de funciones de variable compleja.

Introducción

Un tópico importante para un primer curso de funciones de variable compleja, es el estudio de aquellas transformaciones que preservan ángulos, conocidas como transformaciones *conformes*. Su importancia se debe a la amplia gama de aplicaciones que tiene en la resolución de problemas de la física y de la matemática misma. A una clase de estas transformaciones, conocida como la transformación de *Möbius* o transformación *bilineal* está dedicado este artículo.

Una transformación de Möbius es una transformación $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ definida por la expresión:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ donde } a, b, c \text{ y } d \text{ son constantes complejas.}$$

Dos de sus propiedades más importantes son:

1. Transforma círculos en círculos, incluyendo también entre los círculos aquellos de radio infinito, es decir las rectas.
2. Es una transformación que preserva ángulos, lo cual significa que si dos curvas forman al intersectarse un ángulo α , entonces las imágenes de estas curvas bajo la transformación se intersectan también en un ángulo α .

Estas propiedades son analizadas por medios analíticos casi en cualquier texto de Variable Compleja (ver por ejemplo Polya & Latta, 1976; Churchill, Brown, & Verhey, 1984; Markushévich, 1984). En este artículo se propone un acercamiento gráfico a ellas, que pudiera servir como soporte intuitivo a este desarrollo analítico.

Esta aproximación gráfica se desarrolla en un ambiente computacional creado con Cabri Géomètre II e intenta sacar provecho del carácter dinámico de las representaciones gráficas generadas por este software.

1. El diseño del ambiente computacional

Para la creación de este ambiente se ha construido geoméricamente el número complejo $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ a partir de los complejos a, b, c, d y z dados gráficamente. En esta construcción, la representación gráfica de los seis números a, b, c, d, z y $T(z)$ permanecen a la vista en pantalla y los cinco primeros pueden manipularse directamente, permitiendo la exploración gráfica de la transformación a dos niveles:

a) Dejando fijas las constantes complejas a, b, c y d , el complejo z se puede <Arrastrar> en pantalla para observar el comportamiento de $T(z)$ cuando z varía, esto es, el efecto que la transformación definida por estas constantes produce sobre $T(z)$.

b) Los parámetros a, b, c y d de los que depende la transformación pueden también hacerse variar directamente al <Arrastrar> los puntos que los representan. Su variación permite analizar el papel que cada una de estas constantes juegan en la transformación y sus propiedades.

En la Figura 1 puede verse $T(z)$ ya construido así como los números de los que $T(z)$ depende. Las instrucciones en Cabri que permiten reproducir esta construcción pueden verse en el Apéndice.

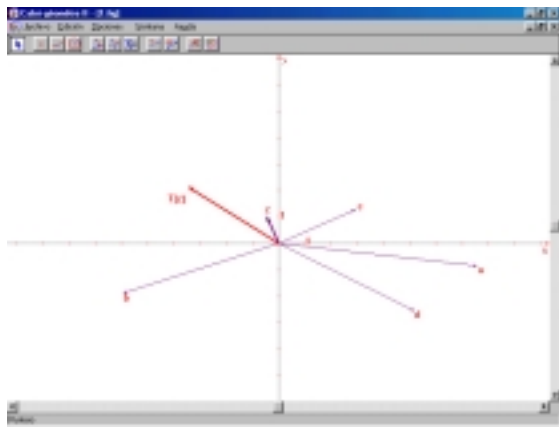


Figura 1

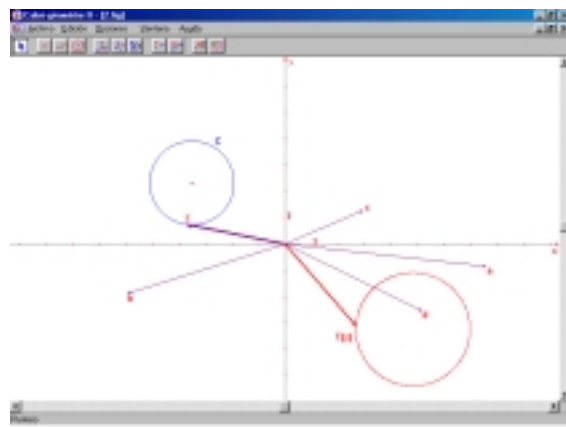


Figura 2

2. Explorando la propiedad 1

Para explorar esta propiedad, puede trazarse un <Círculo> cualquiera C y pedirle a Cabri el <Lugar geométrico> de $T(z)$ cuando z recorre el círculo C. La Figura 2 muestra que la imagen de C bajo la transformación es también un círculo. La <Animación> de z sobre C, permite observar el recorrido de $T(z)$ sobre el círculo imagen.

Para verificar que el efecto de la transformación sobre C no depende del caso particular trazado, C puede hacerse variar y examinar gráficamente el comportamiento de la imagen de C. La Figura 3 muestra las imágenes del círculo C bajo la transformación cuando el centro y el radio de C varían simultáneamente. En esta figura el círculo C, el centro de C y la imagen de C bajo la transformación han sido marcados con la herramienta <Traza>, para que dejen huella al moverse, dejando en evidencia que las imágenes de C son siempre círculos.

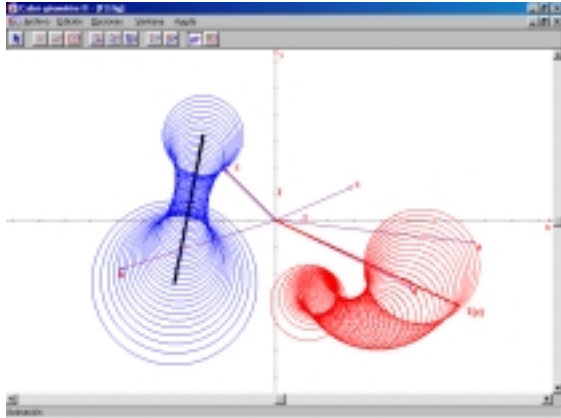


Figura 3

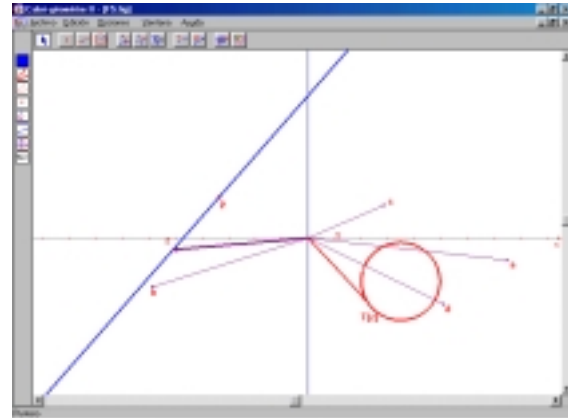


Figura 4

La variación de C permite explorar el hecho de que algunos círculos tienen como imagen una línea recta, es decir un círculo de radio infinito; y a la inversa, si en lugar del círculo C se traza una <Recta> y se pide a Cabri el <Lugar geométrico> de $T(z)$ cuando z se mueve sobre esta recta, la imagen de la recta también es un círculo, como se muestra en la Figura 4. Se verifica así que la imagen de un círculo de radio infinito es también un círculo.

Para visualizar que esto no depende de la transformación específica definida por las constantes a , b , c y d que aparecen en la Figura 4; las constantes pueden a su vez hacerse variar, dejando en evidencia que otras transformaciones de Möbius mandan también en círculos la recta trazada. En la Figura 5, la constante a se ha variado sobre un arco de circunferencia, modificando así la imagen de la recta, pero conservándola círculo.

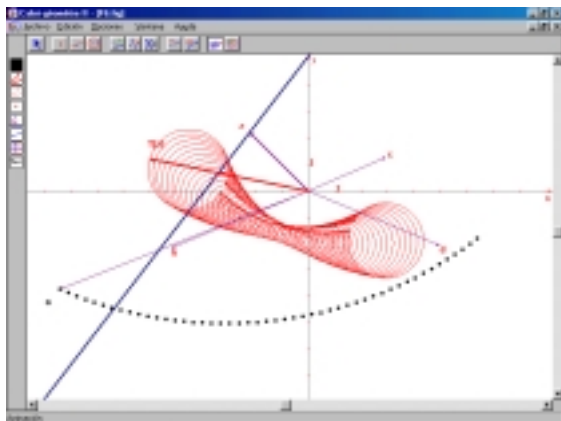


Figura 5

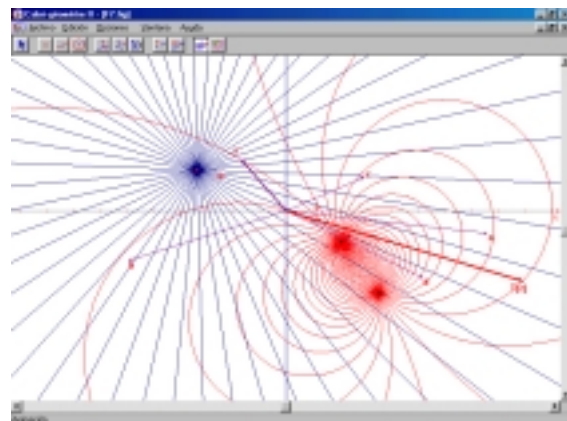


Figura 6

Al rotar una recta sobre un complejo fijo p , se tiene una familia de rectas que pasa por el complejo p . En la Figura 6 se ha girado una recta alrededor de p , haciendo que la recta y su imagen dejen huella al moverse. Como la imagen de una recta es un círculo (ver Figura 4), se obtiene una familia de círculos con dos puntos en común. ¿Cuáles serán las pre-ímagenes bajo la transformación de estos dos puntos?.

Con un movimiento de traslación, puede generarse una familia de rectas paralelas. La Figura 7 muestra una de estas familias y sus respectivas imágenes bajo la transformación. Las imágenes

forman una familia de círculos con un punto en común. ¿Cuál será la pre-imagen bajo la transformación de este punto?.

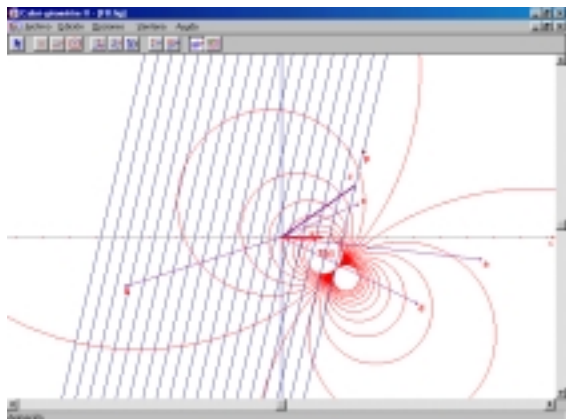


Figura 7

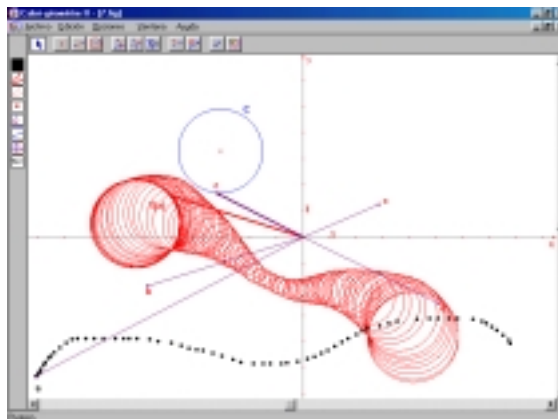


Figura 8

La imagen de un círculo fijo C puede hacerse variar, modificando la transformación. En la Figura 8 en particular la transformación se ha modificado haciendo variar a sobre una trayectoria trazada a “mano alzada”. Antes de <Arrastrar> el punto a , con la herramienta <Traza> se ha marcado el círculo imagen y también el punto a con el propósito de que dejen huella al moverse. Los cambios sufridos en la transformación alteran desde luego las imágenes de C , pero su forma se mantiene invariante.

3. Explorando la Propiedad 2

Para explorar esta propiedad puede trazarse un <Círculo> centrado en un punto O cualquiera y un <Triángulo> formado por dos radios del círculo y la cuerda que une los extremos (R y S) de estos radios. Al pedir a Cabri el <Lugar geométrico> descrito por $T(z)$ cuando z recorre este triángulo, puede verse que la imagen es un triángulo cuyos lados son arcos de circunferencia. La <Animación> de z sobre el triángulo ORS permite identificar los complejos $T(O)$, $T(R)$ y $T(S)$, como se ve en la Figura 9.

Como los lados del triángulo imagen son arcos de circunferencia, pueden trazarse por $T(O)$ las rectas tangentes a los lados $T(O)T(R)$ y $T(O)T(S)$ respectivamente. Pidiendo a Cabri la medida del <Ángulo> ROS y también la medida de los <Ángulos> que forman las rectas tangentes, puede verificarse que el ángulo ROS mide lo mismo que uno de los ángulos formados por las tangentes trazadas, lo cual significa que la transformación preserva la medida del ángulo ROS . Ver la Figura 10.

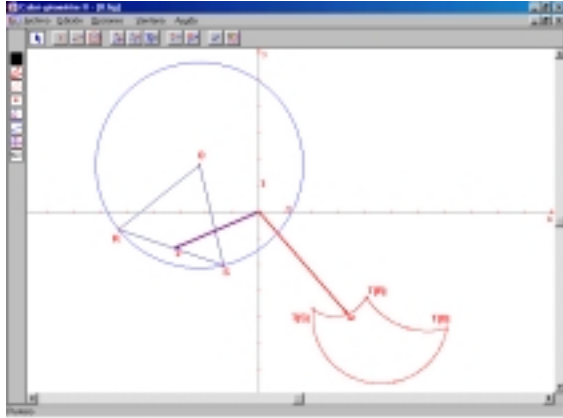


Figura 9

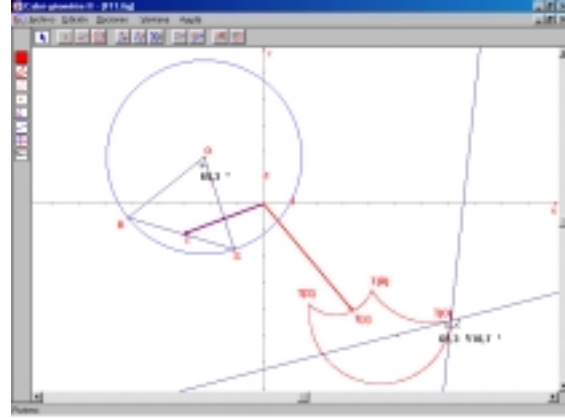


Figura 10

Por la manera como se ha construido el ángulo ROS, éste puede hacerse variar <Arrastrando> el punto R (o el punto S) sobre el círculo en el que se encuentra, verificando así que los ángulos ROS y T(R)T(O)T(S) se conservan iguales. Por otra parte, si lo que se <Arrastra> es el círculo para modificar su radio, el ángulo ROS permanece constante y por lo tanto el ángulo T(R)T(O)T(S) permanece también constante.

4. Problemas de discusión

En esta sección se plantean algunos problemas relacionados con la Transformación de Möbius que pueden discutirse gráficamente en el ambiente computacional propuesto.

Problema 1. Como se ha visto, en la Sección 2, una transformación de Möbius manda círculos en círculos. Tiene sentido entonces preguntarse si esta transformación manda el centro de un círculo en el centro del círculo imagen. Para discutir este problema, se ha trazado un diámetro del círculo C y se ha pedido a Cabri el <Lugar geométrico> de la imagen de este diámetro. Luego con la herramienta <Traza activada/desactivada> el diámetro y su imagen han sido marcados para que dejen huella al moverse. Al girar el diámetro, se produce una gráfica como la que aparece en la Figura 11. De acuerdo con esta figura, ¿Qué respuesta puede darse a este problema?

Problema 2. Un punto z_0 es fijo bajo una cierta transformación si z_0 y su imagen bajo la transformación coinciden. Cuando se trata de una transformación de Möbius, z_0 será un punto fijo si satisface la ecuación:

$$\frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = z_0$$

que puede expresarse como una ecuación cuadrática en z_0 , cuyas soluciones para $c \neq 0$, están dadas por

$$z_0 = \frac{a - d \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c}$$

En esta expresión para z_0 puede verse que una transformación de Möbius deja dos puntos fijos cuando $c \neq 0$ y $(d - a)^2 + 4bc \neq 0$, aunque en otros casos más simples la transformación pudiera dejar fijos uno, ninguno o todos los puntos del plano.

Para buscar gráficamente los puntos fijos de la transformación, puede trazarse una <Semirrecta> cualquiera a partir del origen de coordenadas y pedir a Cabri el lugar geométrico de $T(z)$ cuando z se mueve sobre esta semirrecta. Como muestra la Figura 12, la imagen de esta semirrecta será un arco de circunferencia.

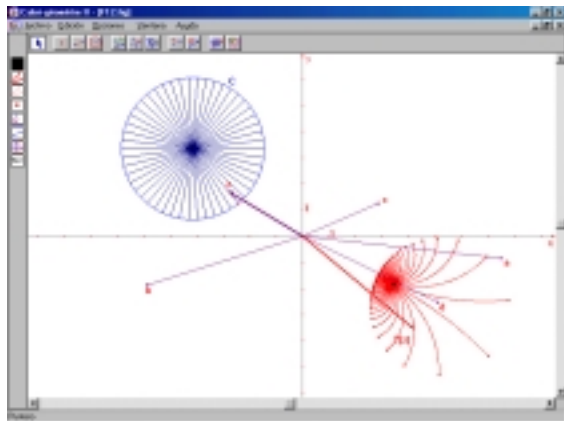


Figura 11

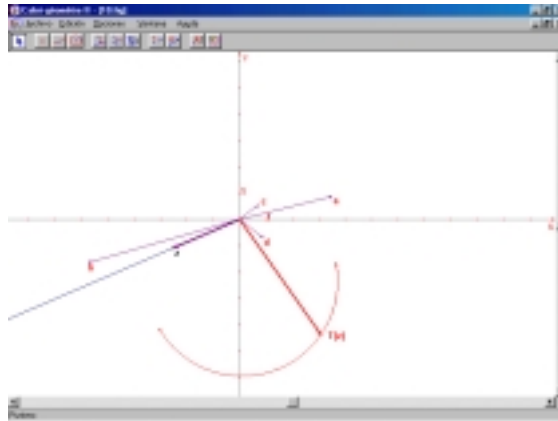


Figura 12

Los puntos fijos de la transformación pueden entonces buscarse en la gráfica, simplemente rotando la semirrecta alrededor del origen para barrer todo el plano complejo. Sobre la semirrecta de la Figura 12, por ejemplo, no existe punto fijo alguno, ¿Por qué?.

¿La intersección de la semirrecta y su imagen es siempre un punto fijo? La respuesta puede encontrarse al examinar la gráfica de la Figura 13.

Si se sigue rotando la semirrecta, tratando de mantener z sobre el arco imagen, puede hacerse que z y $T(z)$ coincidan, como se ve en la Figura 14. De acuerdo con la definición, z será entonces un punto fijo de la transformación.

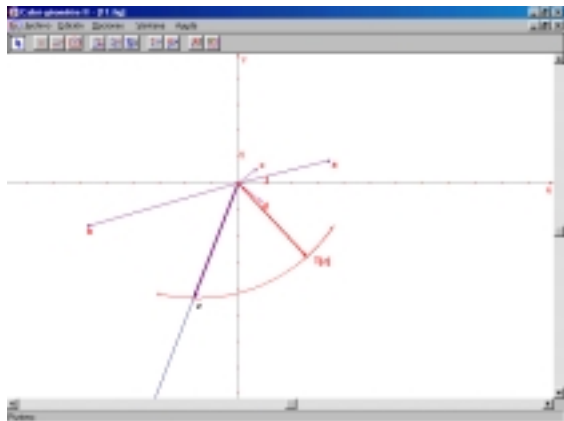


Figura 13

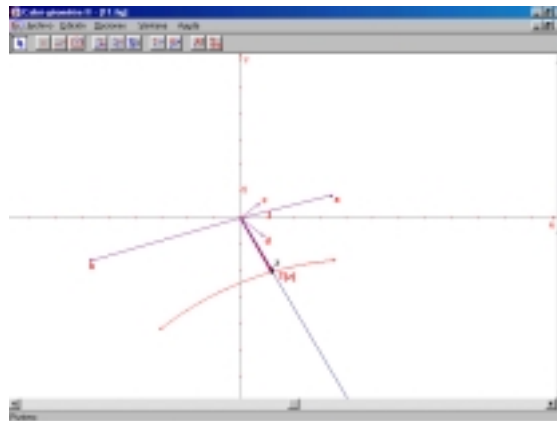


Figura 14

Detectados los dos puntos fijos, puede explorarse su significado gráfico. Una manera de hacerlo consiste en trazar un <Arco> de circunferencia que pase por ellos y pedir a Cabri el <Lugar geométrico> descrito por $T(z)$ cuando z recorre este arco, es decir la imagen del arco bajo la transformación. Si el arco y su imagen se marcan con la herramienta <Traza> y el primero se

<Arrastra>, se obtiene una gráfica como la de la Figura 15, en ella los puntos fijos han sido denotados F y G. ¿Por qué los puntos F y G son comunes a todos los arcos de ambas familias?. ¿Es diferente la gráfica si F y G no son puntos fijos?

Problema 3. Como se ha visto en la sección 2, una transformación de Möbius manda rectas en círculos. Si se <Anima> z sobre una recta dejando que z se vaya hasta el “infinito” y se observa el comportamiento de $T(z)$, la imagen del punto al infinito bajo la transformación puede ser localizado en pantalla. En la Figura 16, esta imagen se ha denotado con la letra H.

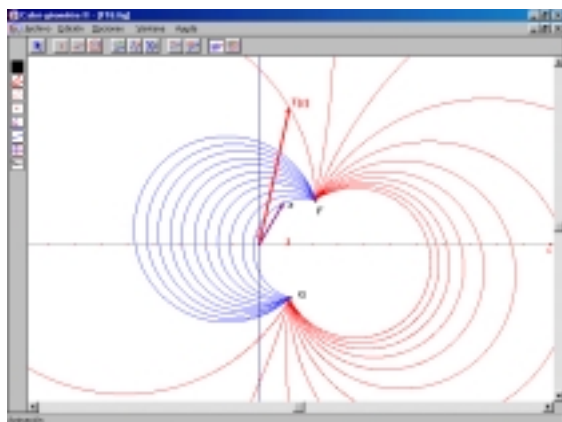


Figura 15

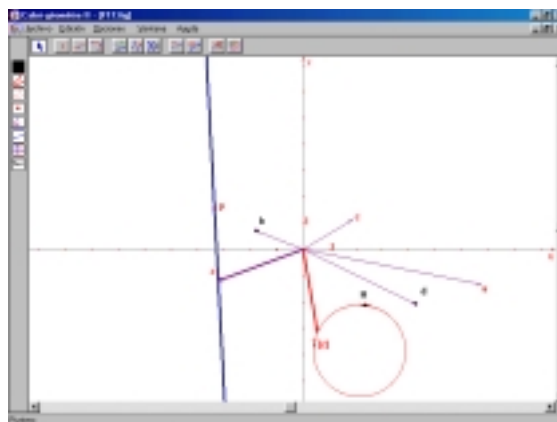


Figura 16

La transformación $T(z)$ depende de las constantes complejas a , b , c y d . Cualquiera de estas constantes se puede <Arrastrar> en pantalla para producir una transformación de Möbius diferente. Si en la Figura 16 los puntos b y/o d se <Arrastran>, las imágenes de la recta varían sin alterar el punto H (ver Figura 17). ¿Por qué?.

En cambio, si en la Figura 16 se <Arrastran> los puntos a o c , los círculos varían, pero también el punto H cambia. En la Figura 18 por ejemplo, puede observarse el efecto que produce la variación de a sobre el punto H y los círculos.

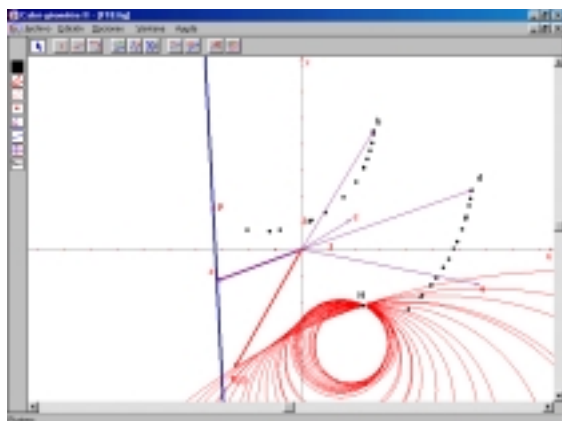


Figura 17

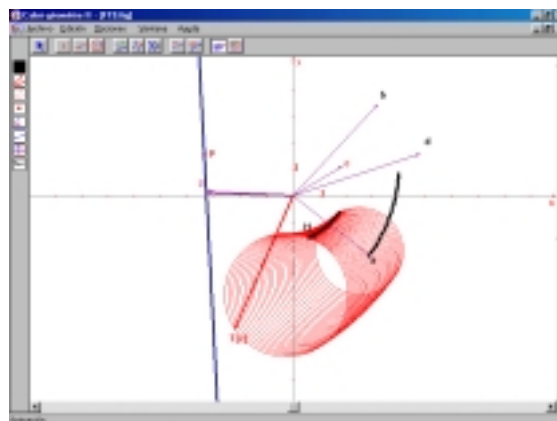


Figura 18

De manera similar puede verificarse que cualquier alteración del complejo c modifica la imagen del punto al infinito bajo la transformación. Puede conjeturarse entonces que los

complejos a y c están relacionados con el complejo representado por el punto H , pero ¿Qué relación es ésta?. La Figura 19 pudiera ayudar a contestar esta pregunta, en esta figura los complejos a y c se han hecho variar sobre una recta que pasa por el origen, mientras que el punto H se ha marcado para que deje huella al moverse. ¿Por qué el punto H representa siempre números reales?

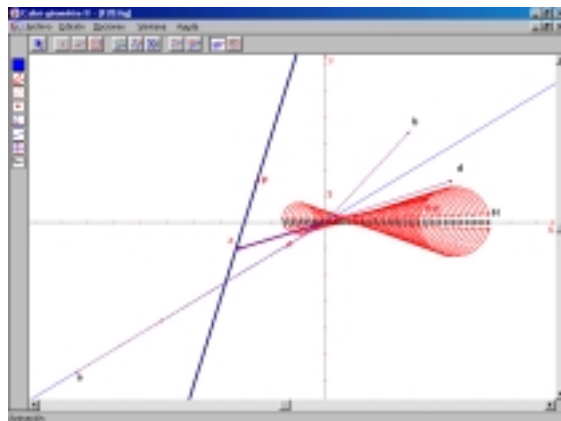


Figura 19

5. Consideraciones finales

Las ideas presentes en este artículo se han desarrollado a partir de la inquietud planteada por algunos profesores de Matemáticas de la Universidad de Sonora, sobre la necesidad de modificar la enseñanza de algunos tópicos de matemáticas avanzadas. Se trata de una herramienta construida a partir de dos principios generales:

1. Que un ambiente computacional diseñado para la enseñanza, debiera permitir al estudiante interactuar con las representaciones proporcionadas por la computadora, al nivel de poder modificarlas, como una manera de detectar patrones de comportamiento y formular conjeturas sobre los objetos representados y sus características.
2. Que una primera aproximación gráfica a los conceptos matemáticos, puede ser útil para crear una base de significación más concreta, antes de examinar estos conceptos a un nivel más abstracto y que la manipulación por el estudiante de las representaciones gráficas dinámicas puede ayudar a construir esta base de significación.

La herramienta presentada aquí ha sido pensada para utilizarse como un recurso de enseñanza, resta sin embargo el diseño *a priori* de las actividades didácticas que lo incorporen como tal, y resta también desde luego someterla a prueba frente a los estudiantes, que seguramente tendrán la última palabra sobre su pertinencia.

Apéndice

La construcción geométrica de $T(z)$ a partir de los complejos a, b, c, d, z ; está basada en la interpretación gráfica de las operaciones entre números complejos. Puesto que el complejo $T(z)$ está definido como $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, su construcción requiere de sumar, multiplicar y dividir números complejos gráficamente. En Cabri la suma puede hacerse directamente utilizando la herramienta <Suma de vectores>, pero no es el caso de la multiplicación y la división.

Para facilitar estas operaciones, la construcción se ha realizado en un plano con coordenadas polares. Esta construcción puede reproducirse siguiendo los pasos siguientes:

1. Con la herramienta <Mostrar ejes> se pide a Cabri que muestre el eje de coordenadas polares.

2. Se trazan cinco <Puntos> cualquiera en el plano y con la herramienta <Etiqueta> se denotan a, b, c, d y z .

3. Se traza un <Vector> anclado al origen y cuyo extremo sea el punto a . Se hace lo mismo con los puntos b, c, d y z .

4. Se construye gráficamente el complejo az de la manera siguiente:

a) Con la herramienta <Ecuación y coordenadas> se pide a Cabri que muestre las coordenadas de a . Las coordenadas mostradas son de la forma (r, θ) , donde r es el módulo de a y θ es su argumento.

b) Con la herramienta <Homotecia> se traza el punto homotético de z con respecto al origen de coordenadas, utilizando como razón de homotecia el módulo de a . Se denota P a este punto.

c) Se pide a Cabri la <Rotación> del punto P un ángulo igual al argumento de a . El punto obtenido al rotar P , se denota az . Se traza un <Vector> anclado al origen y que tenga por extremo el punto az .

5. Con la herramienta <Suma de vectores> se suman los vectores az y b . Se denota el vector suma como $az+b$.

6. Utilizando el mismo procedimiento con el que se construyó $az+b$ se construye ahora $cz+d$.

7. Para construir el cociente $\frac{az+b}{cz+d}$ se siguen las instrucciones siguientes:

a) Se piden a Cabri las coordenadas polares del complejo $cz+d$.

b) De las coordenadas de $cz+d$ se toma el módulo de este complejo para <Calcular> el inverso multiplicativo de este módulo. Se traslada el número así calculado a cualquier parte del plano.

c) Se usa la herramienta <Homotecia> para trazar el punto homotético de $az+b$ con respecto al origen, utilizando el número calculado en el inciso anterior como razón de homotecia. Se denota con R el punto así obtenido.

d) Con la herramienta <Calcular> se calcula el inverso aditivo del argumento de $cz+d$. El resultado se traslada a cualquier parte del plano.

e) Con la herramienta <Rotación> se rota el punto R con respecto al origen un ángulo igual al inverso aditivo del argumento de $cz+d$. El punto obtenido al rotar R se denota $T(z)$.

f) Se traza un <Vector> anclado al origen y con $T(z)$ como extremo. El vector $T(z)$ representará al complejo $\frac{az+b}{cz+d}$.

8. Con el fin de disponer de las coordenadas cartesianas de cualquier complejo graficado en pantalla, con la herramienta <Nuevos ejes> se sobrepone al eje polar, un sistema cartesiano de coordenadas.

En la Figura 20 se muestra el aspecto que tiene la construcción una vez concluida. Para que esta construcción se vea como en la Figura 1, los elementos no indispensables han sido <Ocultados>, dejando a la vista solamente aquellos que resultan útiles para la manipulación e interpretación de la transformación.

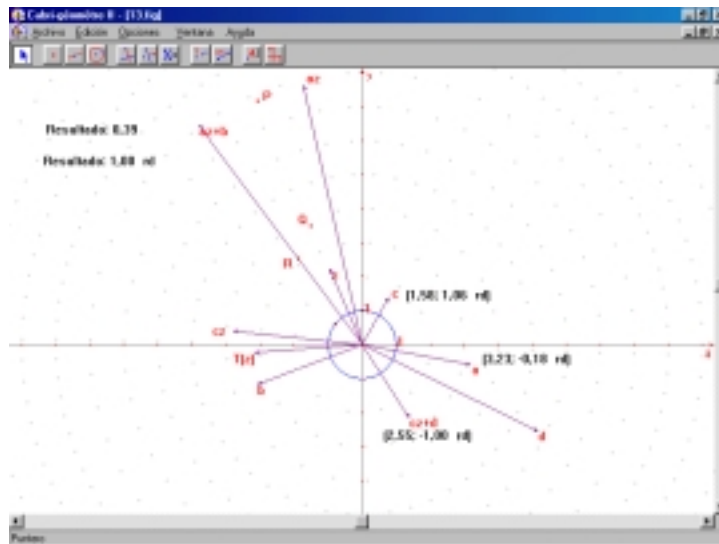


Figura 20

Bibliografía

- Churchill, R., Brown, J. & Verhey, R. (1984). Complex variables and applications. (3rd ed.). Tokio: McGraw-Hill.
- Markushévich, A. (1984). Curvas maravillosas. Números complejos y representaciones conformes. Funciones maravillosas. (2^a ed.). Moscú: MIR.
- Polya, G. y Latta, G. (1976). Variable compleja. México: LIMUSA.