Nivel Medio Superior

LAS GEOMETRÍAS QUE REVOLUCIONARON EL PENSAMIENTO DEL HOMBRE

Darío Benjamín Sánchez Pérez
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

Resumen

La geometría es una de las ramas de las matemáticas que según la historia es una de las más antiguas, y que a partir de su surgimiento, ha pasado por un largo desarrollo, en el cual indudablemente ocurrieron una inmensa variedad de acontecimientos que han contribuido a cambiar en determinado momento el rumbo de la historia de las matemáticas. El presente resumen pretende ubicarnos en uno de los muy notables y revolucionarios momentos en el desarrollo de las matemáticas que ocurrió a mediados del siglo XIX, nos referimos al advenimiento de las geometrías no euclidianas, cuyo origen descansa sobre la discusión que grandes matemáticos hicieron durante mucho tiempo alrededor de uno de los postulados de la obra Los Elementos de Euclides: El de las paralelas o V postulado. Estas geometrías vinieron a transformar en cierto modo la actividad matemática, en una actividad sobre lo posible ya no sobre lo necesario, es decir se elimina toda referencia intuitiva al espacio físico y sólo subsiste la abstracción.

Introducción

En el desarrollo de la ciencia y por ende el de la humanidad, la matemática ha sido y sigue siendo la ciencia del conocimiento sistemático y objetivo de algunos aspectos que tienen que ver con la realidad y también ha sido un fuerte impulsor para que el hombre desarrolle modelos de pensamiento científico que le han permitido formarse distintas concepciones ideológicas del mundo y del universo en general.

En este sentido conocer la historia del desarrollo de la matemática, nos permite identificar a lo largo del proceso de elaboración de las ideas, cómo los grandes genios de las matemáticas se enfrentaron a un arduo trabajo, para lograr, ciertas formas de concebir las matemáticas, así como las dificultades o satisfacciones que se han quedado en el camino hasta lograr las formas de introducción y manejo de las mismas matemáticas que hoy conocemos.

En lo que sigue haremos un recuento histórico de unos de los muy notables y revolucionarios desarrollos matemáticos considerados, como uno de los grandes momentos que provocaron un cambio sustancial en la historia de las matemáticas, que ocurrieron en la primera mitad del siglo XIX y que de alguna manera deberán ser tomados en cuenta en nuestra práctica docente cotidiana: La creación de una geometría con consistencia propia y diferente a la geometría de Euclides.

Etapas o estadios del desarrollo de la geometría

La historia del progreso de la mayoría de las teorías matemáticas, ha pasado por tres grandes etapas o estadios. Particularmente, la geometría, de la cual estamos interesados en este momento, es una de las más antiguas y es la que tiene mejor definidas dichas etapas, con el fin de ubicarnos en ellas, a continuación las describimos brevemente.

Primera. Este primera etapa cubre un periodo de 27 siglos, del XXX a.C. al III a.C., en el cual suceden indudablemente una multitud de hechos importantes en el desarrollo de la geometría, como lo es el surgimiento de los “Elementos” de Euclides en el siglo III a.C. en esta etapa el criterio de prueba o demostración era fundamentalmente empírico. Lo importante y distinto en los elementos de Euclides es que introduce 5 nociones comunes y 5 postulados, los cuales para la mentalidad griega debían ser una afirmación concisa y con cierto nivel de evidencia como el IV postulado que afirma: "*Todos los ángulos rectos son iguales entre sí*", pero al enfrentarse al V postulado que afirma:

> "*Si una recta al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos interiores que suman menos de dos rectos, las dos líneas si se prolongan, se cortan del lado en que están los ángulos cuya suma es menor que dos rectos*" se dieron cuenta que presentaba una complejidad técnica lo cual atrajo la atención de grandes matemáticos por tratar de demostrarlo y así surge la segunda etapa.

Segunda. Esta etapa cubre un período de 22 siglos, del III a. C. al XIX d.C. y es precisamente en donde se hacen reiterados esfuerzos por tratar de demostrar el V postulado.

La tercera etapa del desarrollo de la geometría llamada "*axiomática formal*" surge prácticamente a finales del siglo XIX y principios del XX de nuestra era, con la obra de David Hilbert(1862-1943) quien es en cierto modo, el Euclides del siglo XIX-XX d.C., ya que es él a quien le tocó recopilar todo el proceso de crítica y perfeccionamiento de la obra de Euclides. Es la etapa en la cual la geometría se convierte en una construcción intelectual independiente, estudiada por ella misma y no por sus aplicaciones, es decir deja de ser la técnica de agrimensores. Siendo ésta la última etapa de la evolución de la "*geometría euclidiana*" y principios de lo que serán "***otras geometrías***".

Como toda teoría científica tiene una historia y una prehistoria, la prehistoria de la geometría no euclidiana comienza en el siglo XVIII fundamentalmente con Saccheri y Lambert y la historia en el siglo XIX con Nicolai Ivanovitch Lobatschewsky y Janos Bolyai. A continuación, sin ser exhaustivos pasaremos a describir algunos aspectos relevantes de cada una de ellas.

Prehistoria de la geometría no euclideana

En el desarrollo de la geometría ha jugado un papel importante la obra de Euclides: "***Los Elementos***". Su impacto sobre el desarrollo de las matemáticas fue enorme y un número sorprendente de posteriores e importante resultados en la geometría deben su origen e inspiración a uno de los postulados de esta obra: ***El V postulado***.

> *Si una recta al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos interiores que suman menos de dos rectos, las dos líneas si se prolongan, se cortan del lado en que están los ángulos cuya suma es menor que dos rectos*.

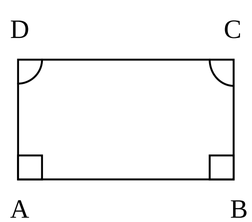
El V postulado de Eculides, el de las paralelas, tiene una singular historia, el propio Euclides y sus primeros comentaristas dudaron si se trataba de un postulado o si se podía considerar una proposición demostrable, por lo que procuraron evitar, si era posible, en sus demostraciones el uso del V postulado y por esta razón todos los teoremas y construcciones que no requieren el uso del V postulado forman la "*geometría absoluta*", mientras que los restantes forman la "*geometría euclidiana*" propiamente dicha. Desde el punto de vista histórico, los esfuerzos de los geómetras por demostrar el V postulado de Euclides tuvieron quizás su origen en que, siendo una proposición aparentemente de gran sencillez y no siendo, por otra parte, evidente por sí misma, parecía que su demostración debía ser fácil respecto de los demás axiomas y postulados de Euclides. Durante varios siglos(22) se hicieron reiterados esfuerzos por demostrar el V postulado y siempre fracasaron por cuanto solo se lograba ese propósito al precio de modificar la definición de paralelas o introducir, expresa o tácitamente, otro postulado equivalente al que se quería demostrar. Algunas de las proposiciones equivalentes al V postulado son:

1. *Si una recta encuentra a una de dos paralelas entonces también encuentra a la otra.*
2. *Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela.*
3. *Dado un triángulo siempre puede construirse otro triángulo semejante de cualquiera dimensión.*
4. *La suma de los tres ángulos de triángulo es igual a dos rectos.*
5. *Por tres puntos no en línea recta pasa siempre una esfera.*

En el siglo XVIII se renovaron estos esfuerzos, si bien adoptando esta vez un nuevo método, con el propósito de demostrar el postulado, se partió de la hipótesis de su falsedad, con la esperanza de que esa hipótesis condujese a una contradicción y, por tanto, por reducción al absurdo, el postulado tendría que ser verdadero. Entre algunos de los intentos, un tanto ingeniosos tenemos:

Gerolamo Saccheri (1667-1733) quien en su lógica demostrativa y en el "*Euclides ab omnis naevo vindicatus*" usa una figura fundamental que no existe en la geometría euclidiana que es el cuadrilátero, birrectángulo isósceles (como la que se muestra en la figura 1)con lados opuestos e iguales y perpendiculares a la base y admite como hipótesis que los otros dos ángulos $\angle C$ y $\angle D$, cuya igualdad demuestra, pueden ser obtusos, rectos o agudos. Pero mientras logra rechazar con relativa facilidad la hipótesis del ángulo obtuso, no ocurre lo mismo con la hipótesis del ángulo agudo. Basándose en esta hipótesis demuestra una serie de teoremas. Pero Saccheri obstinado en reivindicar a Euclides, se detiene en uno de los teoremas, que según él, conduce a un resultado contrario "*contrario a la naturaleza de la recta*", y concluye que "*la hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque es repugnante a la naturaleza de la línea recta*".

Así rechazada la hipótesis del ángulo agudo, queda como valida la hipótesis del ángulo recto, que equivale al V postulado, y Euclides queda reivindicado.

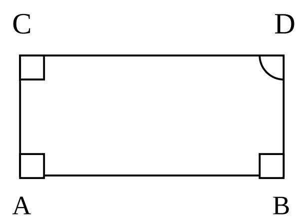


$\angle A = \angle B = 1$ recto

Figura 1

Aunque la obra de Saccheri tuvo cierta difusión, cayó pronto en el olvido y en el transcurso del siglo XVIII y a comienzos del siguiente, varios matemáticos resumen la cuestión y rechazan la hipótesis del ángulo agudo, porque una de sus consecuencias llevaba a una unidad natural de longitud que se considera absurda, o bien porque admitir su validez implicaba el aceptar la posibilidad de otras geometrías, lo cual era incompatible con las ideas que predominaban acerca del espacio físico en ese entonces.

J. H. Lambert (1728-1777) en su obra "Thorie de Parallellinien" publicada después de su muerte, utiliza un figura fundamental como la de un cuadrilátero trirrectángulo, que tiene tres ángulos rectos digamos A, B, C y el cuarto $\angle$ D a priori desconocido, el cual puede ser, recto, obtuso o agudo, y el método seguido, por Lambert es semejante al de Saccheri.



$\angle A = \angle B = \angle C = 1$ recto

Historia de la geometría no euclideana

A principios del siglo XIX el problema suscitado por el V postulado de Euclides no tenía todavía solución. Esto condujo a algunos matemáticos, a pensar que el problema del paralelismo implicaba un problema sin solución y que antes de seguir con los intentos de demostración había que preguntarse si era en realidad demostrable. Es posible que tales intentos infructuosos contribuyeron a debilitar la fe en la demostrabilidad del V postulado dentro del ambiente que envolvía a la matemática ya entrado el siglo XIX. Ambiente que provocaría un cambio de actitud por parte de algunos matemáticos frente al problema. En efecto, siguiendo los resultados obtenidos en el siglo anterior, se llegaba ahora a la conclusión de que el V postulado es indemostrable, es decir que es independiente de los anteriores y que por lo tanto puede ser sustituido por alguna proposición equivalente sin que ello condujese a alguna contradicción.

Carl Friedrich Gauss (1777-1885) de Alemania, tal vez fue la primera persona en sospechar la independencia del postulado de las paralelas de Euclides y de esta manera anticipar una geometría no euclidiana. Desafortunadamente Gauss quedó mal durante su vida al no publicar nada de este trabajo, solamente se conocen algunas de sus conclusiones avanzadas, por medio de cartas enviadas a sus amigos interesados en este trabajo, y la historia relata que, fue el quien llamó a la nueva geometría "***geometría no euclidiana***".

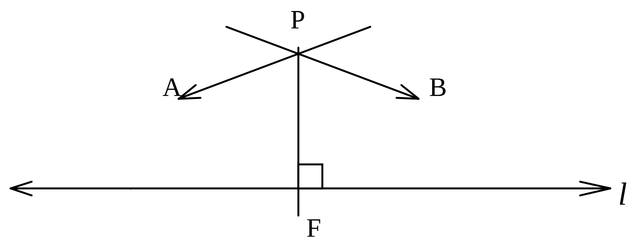
Aparentemente la siguiente persona en anticipar una geometría no euclidiana fue Janos Bolyai (1802-1860) de Hungría, quien era un amigo cercano de Carl Friedrich Gauss, y también Janos Bolyai recibió estímulos de su padre Wolfgang, quien había mostrado interés en el problema del postulado de las paralelas. Así Bolyai pronto empezó a entender la naturaleza del problema y empezó a trabajar en él hasta llegar a proponer un folleto sobre la teoría de las paralelas, muy breve pues consta de 26 páginas, que fue publicado en 1832 como apéndice del primero de dos volúmenes sobre matemáticas elementales de su padre, también matemático.

Nacimiento de la geometría hiperbólica

Aunque Gauss y Bolyai son reconocidos como los primeros que concibieron una geometría no Euclidiana, fue el matemático Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856) de Rusia, a quien se le considera el creador de la geometría no Euclidiana, ya que él es quien le da por primera vez un desarrollo sistemático a esta geometría. En 1826 leyó una memoria en la Universidad de Kazán, donde por primera vez hace una exposición de su nueva geometría.

En 1829 publica una memoria en "*El mensajero de Kazán*", que es la primera obra larga e importante, de la geometría no Euclidiana que el llamó "*geometría imaginaria*" y que hoy llamamos "***geometría hiperbólica***". En la que "***por un punto se pueden trazar dos paralelas a una recta dada"***, además en esta geometría los tres ángulos de un triángulo suman menos de dos rectos. Y el trabajo se comienza por la sustitución del postulado de Euclides de las paralelas, por el siguiente enunciado:

> "*Un punto dado, no situado en una recta dada, es el extremo de exactamente dos semirrectas no alineadas, que no cortan a la recta, pero que todas las semirrectas situadas entre ellas cortan a la recta*".



En el momento del descubrimiento de la geometría no euclidiana tal vez no llamó mucho la atención, a pesar de la novedad y la originalidad de la misma, que iba en contra de la intuición humana y de la realidad física. Sin embargo a partir de la segunda mitad del siglo XIX se despierta un gran interés por ellas en distintos lugares y grandes matemáticos empiezan a profundizar el estudio de esta nueva geometría.

Nacimiento de la geometría elíptica

Hemos visto que la hipótesis del ángulo obtuso fue descartada por Saccheri, Lambert y todo aquél matemático que había investigado alrededor de este problema, porque contradecía la hipótesis de que una línea recta tiene longitud infinita. El nacimiento de una segunda geometría no euclidiana, basada bajo la hipótesis del ángulo obtuso, es estudiada por el matemático Alemán Georg Friedrich Bernhard Riemann(1826-1866) quien en 1854 sustituyó la idea de infinitud por la de recta ilimitada, afirmando que "*la propiedad del espacio de ser limitado posee, pues una certeza empírica... si se atribuye al espacio una curvatura constante positiva el espacio será necesariamente finito*". Para Riemann el postulado que atribuye a una recta una longitud infinita, es tan discutible como el postulado de las paralelas de Euclides, lo que para el es indiscutible es el espacio ilimitado. Con estas ideas Riemann muestra que uno puede realizar una geometría internamente constante satisfaciendo la hipótesis del ángulo obtuso si los postulados 1, 2 y 5 de Euclides son modificados por 1', 2' y 5' como sigue:

Postulados de Euclides

1. Trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
2. Prolongara de una manera ilimitada una línea recta dada.
5. Si una recta al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos interiores menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encontrarán en el lado en que están los ángulos menores que dos rectos.

Postulados propuestos por Riemman.
1'. Dos puntos distintos determinan al menos una línea recta.
2'. Una línea recta es ilimitada.
5'. Dos líneas rectas cualesquiera en un plan se intersectan.

Esa geometría no euclidiana en la cual resalta el plano elíptico ideada por Riemann se le llama "***geometría de Riemann o elíptica***". En esta geometría, "***por un punto exterior a una recta no pasan rectas que no la corten***", es decir no existen paralelas. Su teorema más famoso establece que los tres ángulos de un triángulo esférico ΔABC es mayor que dos rectos (Figura 2).

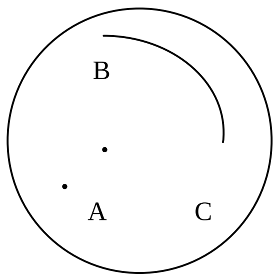


Figura 1

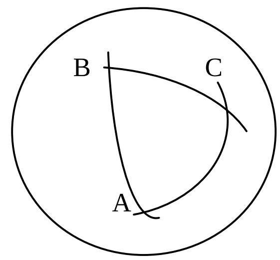


Figura 2

Última etapa

La última etapa del desarrollo de las geometrías no euclidianas, desde el punto de vista histórico, se cumple alrededor del año de 1870, cuando se difunden los trabajos de Gauss, Lobachevsky y Riemann, y se vinculan esas geometrías con otras geometrías como por ejemplo *la geometría proyectiva*, y sobre todo cuando aparecen las interpretaciones de las mismas sobre el plano euclídeo, que ponen fin a toda discusión acerca de su validez lógica, pues una supuesta contradicción en el seno de las geometrías no euclidianas llevaría consigo igual una contradicción en el de la geometría euclidiana, jamás puesta en duda hasta entonces.

Ciertamente la liberación causada por el descubrimiento de las geometrías no euclidianas de Bolyai, Lobachevsky y Riemann, se enlistan como uno de los muy "*grandes momentos en la historia de las matemáticas*". Aún sin embargo posterior a este gran acontecimiento, muchos grandes matemáticos han seguido distintas líneas de pensamiento y han emprendido trabajos de investigación alrededor de estas nuevas geometrías no euclidianas.

Bibliografía

Fundamentos de Geometría. C. R. While, Jr. Traducción de Nelly Nardini. Editorial Troquel S. A. Buenos Aires, 1968.

El Pensamiento Matemático Contemporáneo. Luis Enrique Erro. Secretaría de Educación Pública. Departamento de Publicidad, 1944

Great Moments in Mathematics after 1650. Howard Eves. The Mathematical Association of America, 1983.

Historia de las Ideas Modernas en Matemáticas. José Babini. Universidad de Buenos Aires. Departamento de Asuntos Científicas.

Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana. Eugenio Filloy Yague. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. México, D. F., 1985.