Nivel Medio Superior y Superior

REPRESENTACIÓN DE SUPERFICIES CON WINPLOT

Jacobo Núñez Urias
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

Resumen

Ante la variedad de formas de interpretación en el estudio de las funciones de más de una variable, una alternativa fructífera para el tratamiento de ellas, es recurrir primero al estudio de los casos en los que todavía tenemos formas de interpretación geométrica, esto con el fin de hacer un acercamiento que apele a las interpretaciones geométricas, catalogadas como más cercanas a nuestras intuiciones y para darles significado a los desarrollos algebraicos.
Presentaremos una serie de actividades que ejemplifican una forma de uso del software, como forma complementaria al tratamiento algebraico, así como actividades que demanden el paso de una forma de representación a otra, buscando con ello que el estudiante logre una comprensión más profunda que la que se logra sólo con el tratamiento algebraico. Una de las ventajas del uso del software, es que además de darle al estudiante puede tener el control de las expresiones algebraicas para modificarlas con fines de exploración o de comprobación de expectativas, también le permite centrar su atención en otras cuestiones que permanecen ocultas o no son suficientemente explícitas con el tratamiento algebraico.

Introducción

En relación a la noción de transformación geométrica, Piaget y García (1994), escriben:

> *"Las nociones abstractas de las matemáticas no fueron utilizadas, en un comienzo, sino en forma instrumental, sin que diera lugar a una reflexión sobre su significación general, y sin siquiera tomar conciencia del hecho mismo de estarlas utilizando. A esto último se llega luego de un proceso mas o menos prolongado a cuyo término la noción particular (que ya ha sido utilizada en numerosos casos de aplicación) se torna en objeto de reflexión para constituirse en concepto".*

Este pasaje del uso o aplicación implícita, a la utilización consiente, a la conceptualización, constituye lo que hemos convenido en llamar tematización.

En el mismo tenor, el Profesor E. Valle, en una plática de 1958, afirmaba:

> "*Entre los objetos más antiguos tratados por la matemática están las curvas, las superficies y los cuerpos sólidos,.... en el Siglo XVII cuando Descartes y Fermat crearon la "geometría analítica" empezaron los matemáticos a pensar en las curvas, superficies, etc. Del mismo modo que actualmente los estudiantes preparatorianos pueden hacerlo: como imágenes debidas a funciones...*
>
> *En vista del enriquecimiento del análisis matemático, logrado por los matemáticos de los siglos XVII y XVIII, principalmente en lo que se refiere a las funciones, fue natural que el estudio de los objetos geométricos que nos ocupan, se hicieran reposar más y más en sus representantes originales, hasta llegar a mirárseles más como funciones que como lo que al principio eran."*

Pero, ¿cómo pasar del uso a la utilización consciente?

¿Cómo hacer natural el pasaje del estudio de las funciones con el estudio de los objetos geométricos que representan?

¿Cómo hacer para relacionar lo simbólico con lo geométrico y viceversa?

Antecedentes

Podríamos decir que el formato: definición-teorema-demostración-problema, refleja la estructura de la matemática, su carácter axiomático y la no arbitrariedad de sus resultados. Parte de lo abstracto en el sentido de que a los conceptos se les da "vida" a través de las definiciones, por lo regular plasmadas en el lenguaje simbólico-algebraico en la forma más general posible, resultado de un largo proceso histórico de formalización. Pero, adoptarlo como forma única de enseñanza, es fuente de muchas dificultades para el estudiante, máxime si no ha tenido la oportunidad de estudiar casos específicos que vayan dándole sentido a las expresiones simbólicas, y que, en el mejor de los casos, lo obliga a prácticas repetitivas, dejándole un conocimiento parcial de lo tratado.

Una alternativa educativa que ha resultado fructífera, tanto desde el punto de vista de la docencia como de la investigación, es el llamado "enfoque de las representaciones múltiples" que consiste en tratar las ideas matemáticas en tantos ambientes como sea posible (simbólico, numérico, gráfico o textual), y en hacer conexiones entre ellos, buscando con ello, que el estudiante logre un conocimiento más rico en relaciones y más estable que el que se logra con un sólo tratamiento.

Esto implica como docentes, la elaboración de nuevas tareas y actividades, que no sólo se circunscriban al tratamiento simbólico-algebraico, propio del lenguaje matemático, sino también, poner atención en actividades que tengan como propósito explícito el pasaje de una representación a otra; problemas de conversión, en términos de Duval (1993), que muestren la complementariedad de los tratamientos, y que a la vez, pongan en juego la creatividad del estudiante.

En las siguientes líneas, ejemplificaremos actividades en el tratamiento de las funciones de más de una variable, en los términos anteriormente expuestos.

Funciones y sus representaciones

Ya en otras ocasiones (Núñez,U. J.,1998) ejemplificamos, cómo tratar el estudio de las curvas en el plano y superficies en el espacio representables en la forma explícita, con el apoyo del ***Derive.*** Decíamos en aquella ocasión, que el ***Derive*** no permitía el estudio de las superficies en forma paramétrica, lo que hacía que el tratamiento se quedara en un estudio parcial de éstas. En esta ocasión, veremos un tratamiento de las funciones como representantes algebraicos de superficies en el espacio, y ejemplificaremos las potencialidades que nos ofrece el uso del ***Winplot.***

Queremos anticipar que en el estudio de funciones de más de una variable, las posibilidades o formas de ***interpretación*** no se agotan con las aquí planteadas, pero que estas muestran o ejemplifican formas alternativas de tratamiento.

Las funciones en distintos sistemas de coordenadas

Si el estudio de las funciones lo iniciamos con las funciones de R^n a R^m, y pretendemos hacer el tratamiento en la forma más general posible, esto es empezar por el final. Necesitamos dar formas de cómo interpretar a las expresiones algebraicas y dar oportunidad al estudiante de que se compenetre en casos específicos y concretos; es decir, buscar formas o actividades en las que el estudiante vaya dándole un sentido a las expresiones simbólicas en el estudio de las funciones, y así, de manera inductiva llegar a tratamientos más generales y abstractos.

Ya desde que el sistema de referencia, (sistema de coordenadas en el espacio) le asocia a cada terna de números un punto del espacio tridimensional, está implícito el concepto de función como regla de correspondencia entre ternas de números y puntos en el espacio; pero, como no es única la forma de asociar ternas, esto nos lleva de manera natural a escribir las expresiones del paso de un sistema de coordenadas a otro, como ejemplos de transformaciones del espacio al espacio.

Ejemplos en coordenadas cilíndricas y esféricas

A partir de las expresiones que nos dan el cambio de coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas:

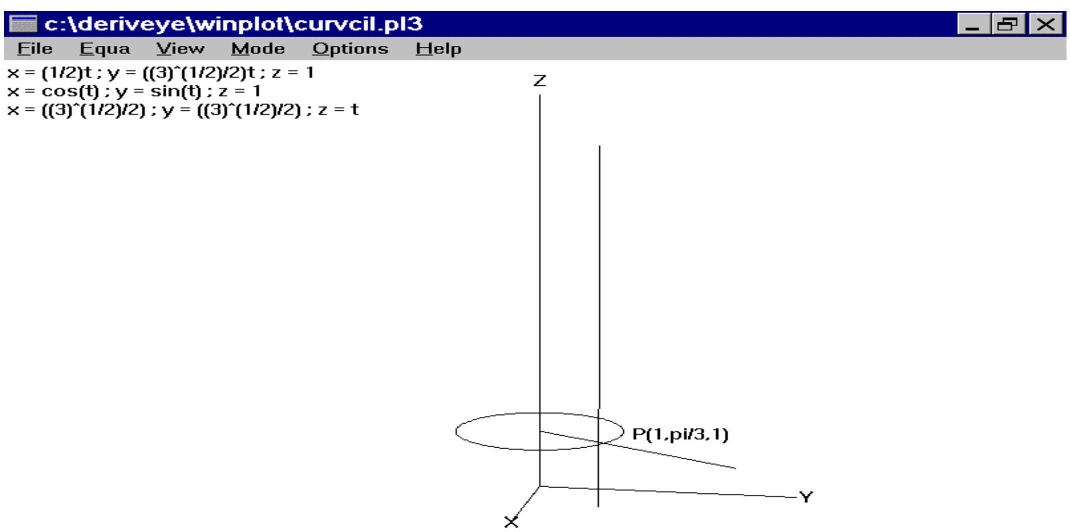
$$T(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$$

y las del cambio de coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas:

$$T(\rho, \theta, \varphi) = (\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\varphi),$$

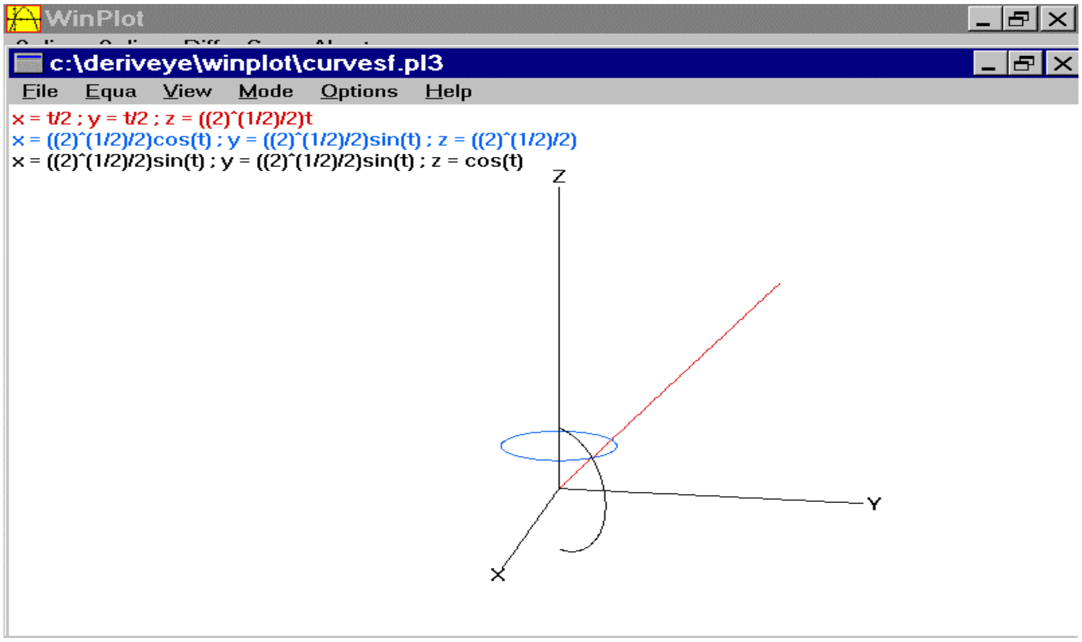
con sólo consideraciones ***geométricas***, podemos generar curvas y superficies en el espacio, y obtener, en general, sus ***representantes algebraicos paramétricos.***

En el caso de las coordenadas cilíndricas tendremos las curvas:



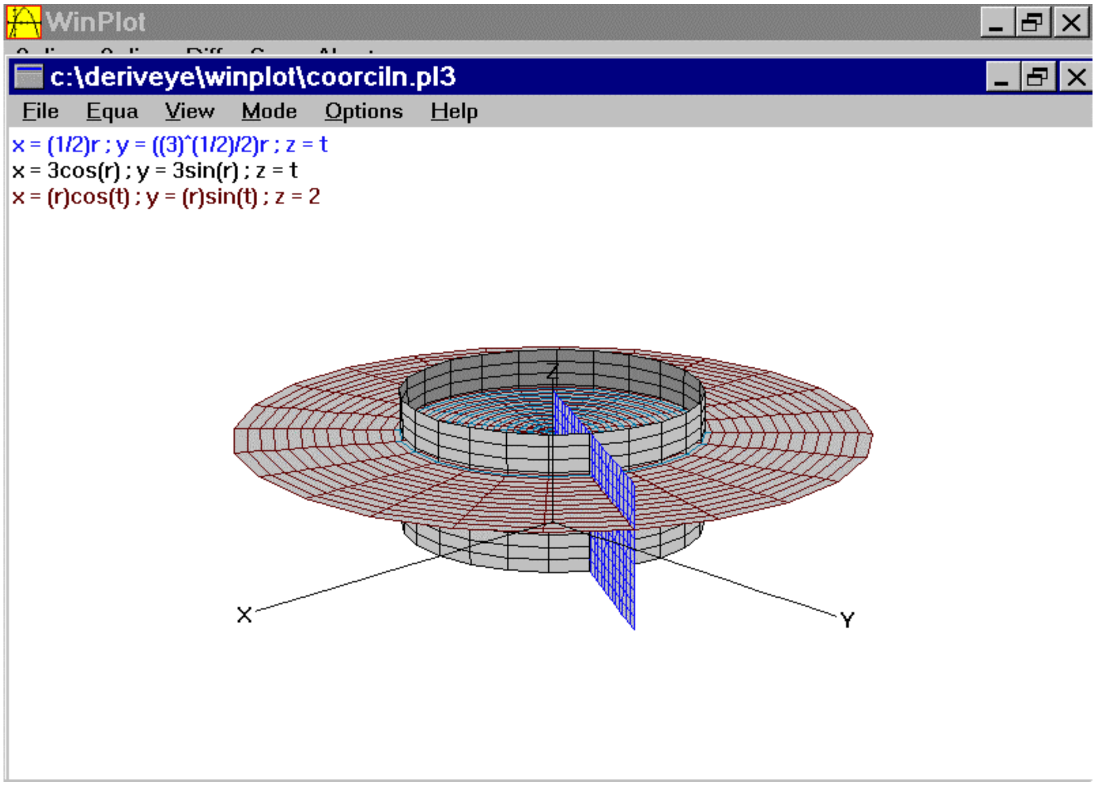
$f(r) = (kr, k'r, k'')$ $\quad$ $f(z) = (k, k', z)$ $\quad$ $f(\theta) = (k\cos\theta, k\,\mathrm{sen}\,\theta, k')$

En el caso de las coordenadas esféricas tendremos las curvas:



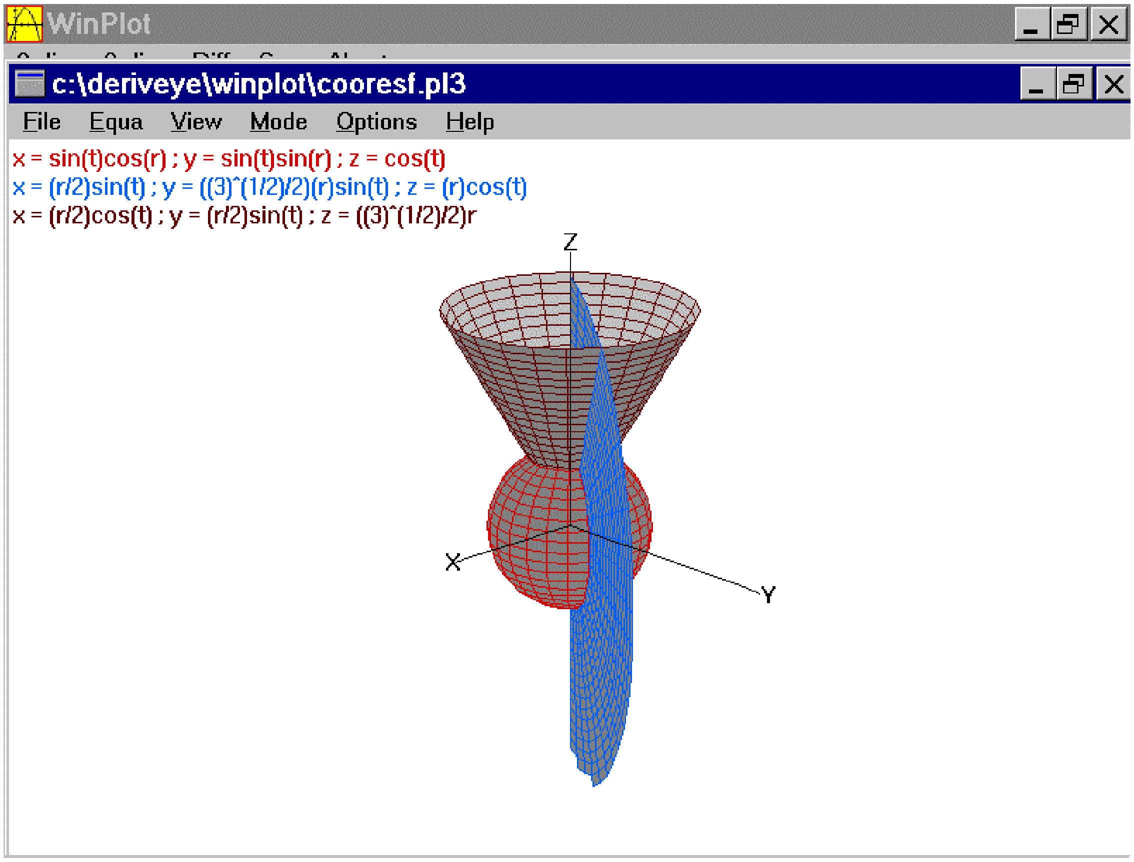
$f(\rho) = (k\,\rho, k'\rho, k''\rho)$; $f(\theta) = (k\cos\theta, k\,\mathrm{sen}\,\theta, k')$; $f(\varphi) = (k\,\mathrm{sen}\,\varphi, k'\,\mathrm{sen}\,\varphi, k''\cos\varphi)$

Las superficies en coordenadas cilíndricas:



$f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, k)$; $f(r, z) = (k\,r, k'\,r, z)$; $f(\theta, z) = (k\cos\theta, k\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$

Y las superficies en coordenadas esféricas:



$$f(\theta, \varphi) = (k \operatorname{sen} \varphi \cos\theta, k \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, k \cos \varphi)$$
$$f(\rho, \theta) = (k \rho \cos\theta, k \rho \operatorname{sen}\theta, k' \rho)$$
$$f(\rho, \varphi) = (k \rho \operatorname{sen} \varphi, k' \rho \operatorname{sen}\varphi, \rho \cos \varphi)$$

Los casos ***específicos*** anteriores, fueron hechos a partir del ***significado*** geométrico de las variables.

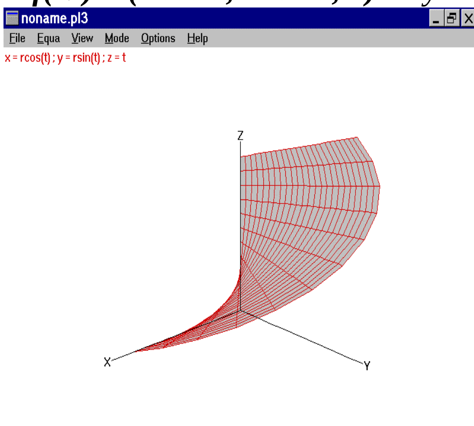
Las curvas se obtienen al variar cada una de las variables por separado, y las superficies las obtenemos al fijar cada una de las variables por separado, de aquí que las curvas sólo dependen de un parámetro y las superficies de dos parámetros.

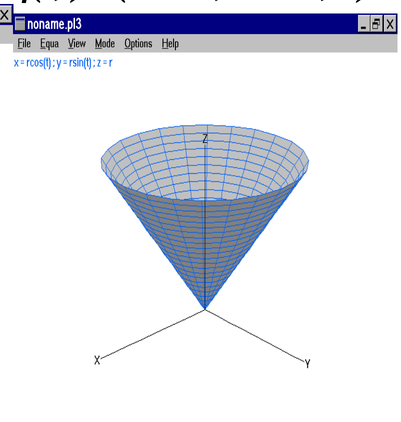
Las ***expresiones algebraicas paramétricas*** las obtenemos ***generalizando*** los casos específicos tratados y observando qué variables se convierten en constantes en las expresiones de cambio de coordenadas.

Para poder convencer al lector de que las expresiones algebraicas corresponden a los objetos geométricos representados en pantalla, debemos hacer el análisis de las expresiones y en base a un discurso, apoyado en las características de las expresiones simbólicas, deducir las características de las curvas y superficies, esto es, apoyarnos en las características de las expresiones simbólicas y deducir de ellas características geométricas de los objetos geométricos representados.

Veamos un par de ejemplos en donde las expresiones son muy "parecidas" y sin embargo, las formas de las superficies son muy diferentes:

$$f(r.t) = (r \cos t\, ,\, r \,\mathrm{sen}\, t\, ,\, t) \quad y \quad f(r,t) = (r \cos t\, ,\, r\, \mathrm{sen}\, t\, ,\, r)$$





Lo interesante del tratamiento con el auxilio del ***Winplot***, es que no sólo permite tener el control de las expresiones algebraicas para modificarlas y ver los efectos geométricos de las modificaciones en las expresiones (como lo muestran los casos anteriores), sino también, permite cambiar el dominio de la misma función y ver partes de ella, a partir de las cuales se pueden generar nuevos problemas.

Ejemplo

En el cono anterior, ¿cuál es la imagen de la función si el dominio se restringe a

$$3 < r < 5 \quad y \quad \pi/4 < t < \pi/2\ ?$$

¿Puede el lector formarse una imagen mental de dicha superficie?
¿Cuál es la sombra de esa superficie sobre el plano *xy*?
¿Cuál es la expresión en términos de x *y* y de ese dominio?
¿Cuál es la expresión de dicha superficie como gráfica de una función en variables x *y* y?

Con el auxilio del ***winplot*** podemos representar geométricamente las expresiones algebraicas casi de manera inmediata, sólo con fines de familiarización con las expresiones algebraicas y sus correspondientes "representaciones geométricas en el espacio"; pero no es la intención quedarnos sólo en contemplación de la gran variedad de superficies y curvas que podemos generar y ver en pantalla, sino poner en juego la creatividad del estudiante a través de actividades que lo lleven a conjeturar comportamientos específicos pedidos, para que descubra los efectos geométricos ante el cambio de parámetros; es decir, actividades de convertir una representación en otra.

Ejemplos

- Encuentre la expresión simbólica de los conos de alturas 3, 5, 7 y 8 inscritos en un cilindro de radio 3 unidades y de altura 10 unidades.
- Encuentre la expresión de un cono que forma un ángulo de 60º con el eje z y de altura 8 unidades.
- Encuentre la expresión de un elipsoide con longitud de sus ejes 3, 5 y 7.

- Dada la esfera con centro en el origen y de radio 5 unidades:

  ¿Cuál es la imagen de la función si el dominio se restringe a los valores:

  $$\pi/4 < r < \pi/2 \quad y \quad 0 < t < \pi/2 \ ?$$

  ¿Puede el lector formarse una imagen mental de dicha superficie?
  ¿Cuál es la sombra de esa superficie sobre el plano *xy*?
  ¿Cuál es la expresión en términos de x *y* y de ése dominio?
  ¿Cuál es la expresión de dicha superficie como gráfica de una función en variables x *y* y?

Ejemplo

Encuentre la representación geométrica de

$$f(\theta, \varphi) = (4 \text{ sen } \varphi \cos\theta, 4 \text{ sen}\varphi \text{ sen}\theta, 4 \cos \varphi)$$

$$\text{si } \pi/4 < \theta < 3\pi/4 \quad y \quad 0 < \varphi < \pi/2$$

y escriba la expresión de la superficie en coordenadas cartesianas, restringiendo su dominio.

En el caso anterior, dada una expresión, buscamos que el estudiante se forme ideas o imágenes mentales de dichas superficies y que con el auxilio del software, pueda comprobar o modificar las imágenes formadas.

El asunto es la posibilidad de contar con el apoyo de la máquina para sensibilizar al estudiante en dos direcciones posibles, como proceso de familiarización de las nociones y también como guía de la viabilidad de los resultados obtenidos a través de los desarrollos algebraicos.

Ejemplo

Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función:

$$f(x,y) = \text{sen } x + \cos y$$

Ante este problema, el proceso de solución, nos lleva a aplicar un algoritmo que no es más que el criterio de la segunda derivada para el caso de funciones de dos variables (Apostol, T. M. Vol.II,), pero, ante la posibilidad de contar con un instrumento que nos permite tener de manera inmediata la representación geométrica de la función, y a partir de ella, podemos interpretar**,** e incluso adelantarnos y conjeturar las soluciones obtenidas a partir de los desarrollos algebraicos.

Queremos insistir en que los tratamientos algebraicos pueden ser complementados con acercamientos geométricos que en ocasiones pueden darnos claridad acerca de lo que se hace sólo en el terreno simbólico.

Conclusiones

Es indudable que las actividades anteriores son más completas y complejas y muestran cómo se pueden complementar los tratamientos algebraicos y los geométricos.

No está por demás reiterar que si continuamos con prácticas expositivas, entendidas como conferencias a un público que suponemos nos entiende, tratadas en un único lenguaje, por lo regular en el lenguaje simbólico-algebraico, para después preguntarles sobre lo mismo, como una forma cómoda de llevar la práctica de la enseñanza, no cambiaremos mucho los niveles de comprensión y de entendimiento de nuestros estudiantes. Esta práctica obliga al estudiante a una retención memorística, que sobrevive hasta el día del examen, y lo más grave, con poca transferencia a otros ámbitos en donde requiere hacer uso de ese conocimiento supuestamente aprendido.

Como lo comenta Glaserfeld:

> "*Uno puede, por supuesto, hacer que los estudiantes repitan lo que uno dice, y si esto es todo lo que tienen que hacer para aprobar (un examen), ellos conseguirán buenas calificaciones, pero buenas calificaciones no es garantía de que los estudiantes han aprendido lo que el profesor intentaba enseñar*".

Ningún profesor, en su sano juicio, admitiría que lo que pretende enseñar a sus alumnos sea únicamente conocimientos estandarizados o algoritmos de solución para los casos específicos tratados, pero, si toda su atención es implícita o explícitamente puesta a estas actividades, es normal esperar que el estudiante sólo se circunscriba a aprender esas rutinas, tan necesarias como insuficientes.

Bibliografía

Apostol T.M., (1980) Calculus, VolI, 2da edición Editorial Reverté S. A. Barcelona.

Duval, R., Semiosis y Noesis, Lecturas en didáctica de las matemáticas: Escuela Francesa. Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV del IPN.

Duval, R. (1988) Gráficas y Ecuaciones. Antología en Educación Matemática. Cambray, R.; Sánchez, E.; Zubieta, G. (Eds.) DME, Cinvestav-IPN. pp. 125-139.

Duval, R. (1993), Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5, IREM de Srasbourg, 37-65, Traducción: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Glasersfeld, E. (1987) Learning as a Constructive Activity en Janvier, C., (Ed.) Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Hitt, E., F.(Editor, 1996) Investigaciones en Matemática Educativa, XX Aniversario Depto. De Matemática Educativa CINVESTAV-IPN.

Janvier, C., (Ed.)(1987) Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Núñez U. J. (1998) Reflexiones en torno al uso del Derive en el tránsito entre representaciones en el estudio de superficies. Memorias del Noveno Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática. México.

Piaget, J. y García, R. (1994) Psicogénesis e Historia de la Ciencia. 6a.edición, SigloXXI, México.

Valle Flores, Enrique (1962) Los conceptos de curva y superficie I Revista Matemática, NºXI, Sociedad Matemática Mexicana.